УДК 517.928 Дата поступления 1 апреля 2016 г.

Кулаев Р. Ч., Шабат А. Б. Обратная задача рассеяния для финитных потенциалов в пространстве мер Бореля.—Владикавказ, 2016.—19 с.—(Препринт / ЮМИ ВНЦ РАН; № 2).

В работе изучается обратная задача рассеяния. Устанавливается связь обратной задачи рассеяния с матричной задачей Римана — Гильберта. Доказывается теорема единственности в обратной задаче рассеяния с финитным потенциалом, являющимся конечной мерой Бореля. Рассматривается вопрос о приближенном решении обратной задачи рассеяния в случае финитного потенциала.

Ключевые слова: обратная задача рассеяния, матричная задача Римана — Гильберта, уравнение Шрёдингера.

Библиогр. 21.

Received April 1, 2016

Kulaev R. Ch., Shabat A. B. Inverse Scattering Problem for Finite Potentials in the Space of Borel Measures.—Vladikavkaz, 2016.—19 p.—(Preprint / SMI VSC RAS; № 2).

We study the inverse scattering problem. We establish a connection between the inverse scattering problem and the matrix Riemann–Hilbert problem. We prove the uniqueness theorem in the inverse scattering problem with a finite potential of the space of finite Borel measures. The question of the approximate solution of the inverse scattering problem in the case of a finite potential is considered.

Keywords: inverse scattering problem, Riemann–Hilbert problem, Schrödinger equation.

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
РСО-Алания, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ФИНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕР БОРЕЛЯ

Р. Ч. Кулаев, А. Б. Шабат

Введение

Основное содержание данного препринта посвящено задаче кардинального расширения пространства потенциалов в обратной задаче рассеяния для линейного уравнения Шрёдингера. Расширение проводится за счет дельтаобразных потенциалов и соответствующего предельного перехода в пространстве обобщенных функций (мер). Это расширение включает в себя экзотику типа канторового множества и преобразования Фурье — Стильтьеса функции Лебега. На этом пути нам удается найти функциональный класс, подходящий как для теоремы существования так и теоремы единственности.

В одномерной обратной задаче рассеяния можно выделить два направления:

1. Уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко — Фаддеева.
2. Матричная задача сопряжения Римана — Гильберта.

Первый подход, берет свое начало из квантовой механики [1] и спектральной теории операторов Штурма — Лиувилля [2]. Конструктивная процедура решения обратной задачи здесь состоит в решении уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко — Фаддеева [3–10].

Второй подход является более общим, но

(a) в приложениях имеются трудности с формулировкой нормировочного условия в теореме единственности. Обычно это дополнительное условие фиксирует (хотя бы частично) значение матричного решения задачи сопряжения в бесконечно удаленной точке комплексной плоскости спектрального параметра;

(b) требуется адекватный выбор функциональных классов в пространстве аналитических функций спектрального параметра в задаче сопряжения и в двойственном пространстве функций действительной переменной для коэффициентов рассматриваемых дифференциальных уравнений. Этот выбор должен быть согласован с условиями на данные рассеяния в теоремах существования и единственности для соответствующей задачи Римана — Гильберта.

В модельном случае спектральной задачи Захарова — Шабата

$$\vec{\psi}_x = V(x,k)\vec{\psi}, \quad V(x,k) = k\alpha + \alpha U(x) - U(x)\alpha$$

с потенциалом $U(x)$, исчезающим на бесконечности, и постоянной матрицей α, соответствующая задача Римана — Гильберта была указана в заметке А. Б. Шабата [11]

$$\Phi(k-0)T(x,k) = \Phi(k+0), \quad k = i\xi,\ \xi \in \mathbb{R}, \quad \Phi(\infty) = I. \tag{1}$$

Для рассматриваемого нами случая — скалярного уравнения Шрёдингера — роль матричных решений задачи сопряжения играют матрицы Вронского решений Йоста, а формула (1) связывает значения матриц Вронского в левой и правой полуплоскостях комплексной плоскости k. При этом матрица сопряжения $T(x,k)$ соответствующей задачи Римана — Гильберта определяется на мнимой оси как отношение предельных значений этих матричных функций Йоста. В этом случае элементы матрицы сопряжения определяются данными рассеяния $a(k)$ и $b(k)$, которые имеют в нуле полюсную особенность. На первый взгляд может показаться, что эту неприятность можно устранить переходом к рассмотрению отношения $b(k)/a(k)$, однако здесь не все так просто. Как будет показано ниже (пример 2), в вводимом нами классе потенциалов эта особенность сказывается на нормировочном условии задачи Римана — Гильберта, что приводит к незначительному усложнению доказательства теоремы единственности из работы [11].

1. Общие положения

Рассмотрим стационарное одномерное уравнение Шрёдингера

$$\psi_{xx} = \left(q(x) + k^2\right)\psi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Будем считать, что вещественный потенциал q является обобщенной производной Q' некоторой функции $Q \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. При таком предположении функция, удовлетворяющая уравнению Шрёдингера, может и не иметь производных, поэтому мы вводим в рассмотрение квазипроизводную $\psi_{[x]} = \psi_x - Q\psi$. Тогда

$$\psi_{xx} = \psi_{[x]x} + q\psi + Q\psi_{[x]} + Q^2\psi,$$

и уравнение Шрёдингера можно записать в виде

$$\psi_{[x]x} = \left(-Q^2(x) + k^2\right)\psi - Q(x)\psi_{[x]}. \tag{3}$$

Следуя [12, 13], оператор Шрёдингера $L\psi = -\psi_{xx} + q(x)\psi$ будем считать заданным в классе $D(L)$ функций абсолютно непрерывных вместе со своей квазипроизводной на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. В таком случае производная ψ_x функции $\psi \in D(L)$ определена почти всюду на $\mathbb{R}$. Особо выделим случай, когда Q является функцией ограниченной вариации. Для такой функции в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ заведомо существуют односторонние пределы $Q(x \pm 0)$. Причем множество точек разрыва функции Q не более чем счетно. Поэтому в точках непрерывности Q для всякой функции $\psi \in D(L)$ существует производная ψ_x. Если же функция Q имеет в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ скачок $\triangle Q(x_0) = Q(x_0 + 0) - Q(x_0 - 0)$, то аналогичный по величине скачок будет иметь и производная ψ_x.

Пусть ψ и φ удовлетворяют уравнению (2), тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}$ будет выполнено равенство

$$\psi(x)\varphi_x(x) - \psi_x(x)\varphi(x) = \psi(x)\varphi_{[x]}(x) - \psi_{[x]}(x)\varphi(x),$$

правая часть которого суть непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. Поэтому вронскиан любых двух решений уравнения (2) можно считать непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией. Более того, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Вронскиан любых двух решений уравнения* (2) *не зависит от* $x \in \mathbb{R}$.

$\lhd$ Пусть $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют уравнению (2), тогда из определения квазипроизводной и (3) следует, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ будет выполнено

$$\frac{d}{dx}\langle\psi, \varphi\rangle = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix}\psi & \varphi \\ \psi_{[x]} & \varphi_{[x]}\end{vmatrix} = Q\begin{vmatrix}\psi & \varphi \\ \psi_{[x]} & \varphi_{[x]}\end{vmatrix} - Q\begin{vmatrix}\psi & \varphi \\ \psi_{[x]} & \varphi_{[x]}\end{vmatrix} = 0.$$

И нам остается только сослаться на непрерывность вронскиана. $\triangleright$

Перепишем уравнение Шрёдингера в векторном виде

$$\begin{gathered}\mathbf{y}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} Q(x) & 0 \\ -Q^2(x) & -Q(x) \end{pmatrix} \mathbf{y} = A(k)\mathbf{y} + \mathcal{Q}(x)\mathbf{y}, \\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ y_{[x]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4}$$

Для данного уравнения сохраняются все характерные черты теории обыкновенных дифференциальный уравнений с суммируемыми коэффициентами. В частности имеют место следующие утверждения, на которые мы впоследствии будем ссылаться.

Теорема 1 [13, §16]**.** *Пусть $A(x)$ — матрица размера $n \times n$, элементы которой принадлежат $L^1_{\mathrm{loc}}(\alpha,\beta)$, а $\mathbf{f} \in [L^1_{\mathrm{loc}}(\alpha,\beta)]^n$. Тогда при любом $x_0 \in (\alpha,\beta)$ задача Коши*

$$\mathbf{y}_x = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

имеет на (α,β) единственное решение $\mathbf{y}$, абсолютно непрерывное на компактах в (α,β).

Задача Коши (5) эквивалентна интегральному уравнению

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \big(A(s)\mathbf{y}(s) + \mathbf{f}(s)\big) ds, \tag{6}$$

решение которого находится методом итераций.

Теорема 2 [13, §16]**.** *В условиях предыдущей теоремы существует единственное решение интегрального уравнения Вольтерра (6), заданное на (α,β). Это решение представляется в виде равномерно сходящегося ряда теории возмущений.*

Следующая теорема является несущественной модификацией теоремы 0 из работы [12].

Теорема 3. *Пусть задана матрица $A(x)$ размера $n \times n$ и последовательность матриц $A_\varepsilon(x)$ с элементами из $L^1(\alpha,\beta)$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, такие, что $\|A_\varepsilon(x) - A(x)\|_{L^1(\alpha,\beta)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда решения $\mathbf{y}_\varepsilon(x)$ интегральных уравнений*

$$\mathbf{y}_\varepsilon(x) = \mathbf{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} A_\varepsilon(s)\mathbf{y}_\varepsilon(s)\, ds, \quad \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n,$$

сходятся к решению $\mathbf{y}(x)$ уравнения

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} A(s)\mathbf{y}(s)\, ds$$

равномерно на $[\alpha,\beta]$ и справедлива оценка

$$\big\|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{y}\big\|_{C[\alpha,\beta]} \leqslant C\big\|\mathbf{y}_0\big\| \cdot \big\|A_\varepsilon(x) - A(x)\big\|_{L^1(\alpha,\beta)}$$

с постоянной C не зависящей от $\mathbf{y}_0$ и ε.

◁ Оператор

$$A_\varepsilon \mathbf{z} = \int\limits_{x_0}^{x} A_\varepsilon(s)\mathbf{z}(s)\,ds,$$

действующий в $C[\alpha,\beta]$ является вольтерровым. Следовательно, операторы $I-A$, $I-A_\varepsilon$ обратимы и

$$\big\|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{y}\big\|_{C[\alpha,\beta]} = \big|(I-A_\varepsilon)^{-1}\mathbf{y}_0 - (I-A)^{-1}\mathbf{y}_0\big| \leqslant$$
$$\leqslant \big\|(I-A_\varepsilon)^{-1}\big\| \cdot \big\|A_\varepsilon - A\big\| \cdot \big\|(I-A)^{-1}\big\| \cdot \big\|\mathbf{y}_0\big\| \leqslant C\big\|\mathbf{y}_0\big\| \cdot \big\|A_\varepsilon(x) - A(x)\big\|_{L^1(\alpha,\beta)}. \ ▷$$

2. Функции Йоста

При изучении обратной задачи рассеяния фундаментальную роль играют аналитические свойства специальных решений уравнения Шрёдингера. Прежде чем ввести в рассмотрение эти решения, мы сделаем дополнительные оговорки, касающиеся функционального класса, в котором будет рассматриваться потенциал q уравнения (2).

Обозначим через BV пространство функций, имеющих на $\mathbb{R}$ ограниченную вариацию и непрерывных слева, а через $\mathcal{M}_0$ — множество всех финитных на $\mathbb{R}$ функций, каждая из которых является обобщенной производной некоторой функции ограниченной вариации из BV. Заметим, что для любого конечного интервала $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ пространство $BV(\alpha,\beta)$ компактно вложено в $L^2(\alpha,\beta)$. Поэтому если $q \in \mathcal{M}_0$ и $q = Q'$ в обобщенном смысле, то $Q \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Начиная с данного раздела и всюду далее, считаем, что потенциал q уравнения Шрёдингера является элементом $\mathcal{M}_0$[1].

В случае финитного потенциала решения уравнения (2) при k, лежащих на мнимой оси, однозначно определяются своей асимптотикой в одной из бесконечно удаленных точек. Специальные решения уравнения (2) с асимптотиками $\psi^\pm(x,k) = e^{\pm kx}$ при $x \to \pm\infty$, называются в теории рассеяния *решениями* (*функциями*) *Йоста.* Если $q \in \mathcal{M}_0$ и $[\alpha,\beta]$ — минимальный компакт, содержащий носитель потенциала q, то вне $[\alpha,\beta]$ решения Йоста представляются в виде

$$\begin{aligned} \psi^+(x,k) &= \begin{cases} a(k)e^{kx} + b(k)e^{-kx}, & x > \beta, \\ e^{kx}, & x < \alpha; \end{cases} \\ \psi^-(x,k) &= \begin{cases} e^{-kx}, & x > \beta, \\ a(k)e^{-kx} - b(-k)e^{kx}, & x < \alpha. \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Функции $a(k)$ и $b(k)$ называются при этом *данными рассеяния* (коэффициент прохождения и коэффициент отражения соответственно). Вычисление данных рассеяния по заданному потенциалу q согласно формулам (2), (7) называется прямой задачей рассеяния, а задача восстановления потенциала по данным рассеяния (полученным, например, экспериментально) называется обратной задачей.

Аналитические свойства решений Йоста в правой полуплоскости $K_+ = \{k \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} k \geqslant 0\}$ комплексного переменного k устанавливаются переходом от

[1] В этом случае потенциал q является конечной мерой Бореля на $\mathbb{R}$.

дифференциальных уравнений к интегральным. Известно (см., например, [14, гл. 3, § 4]), что решение задачи Коши (5) с матрицей, не зависящей от x, определяется формулой

$$\mathbf{y}(x) = e^{(x-x_0)A}\mathbf{y}(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} e^{(x-s)A}\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{8}$$

Поэтому с учетом (4) функция Йоста ψ^+ может быть определена из соотношения

$$\mathbf{y}^+(x,k) = \begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} e^{kx} + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{(x-s)A(k)}\mathcal{Q}(s)\mathbf{y}^+(s,k)\,ds, \quad \mathbf{y}^+(x,k) = \begin{pmatrix}\psi^+(x,k)\\ \psi^+_{[x]}(x,k)\end{pmatrix}. \tag{9}$$

А поскольку

$$e^{(x-s)A(k)} = \begin{pmatrix} \frac{e^{k(x-s)}+e^{-k(x-s)}}{2} & \frac{e^{k(x-s)}-e^{-k(x-s)}}{2k} \\ -k\frac{e^{k(x-s)}-e^{-k(x-s)}}{2} & \frac{e^{k(x-s)}+e^{-k(x-s)}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_s(x-s,k) & G(x-s,k) \\ -kG^*_s(x-s,k) & kG^*(x-s,k)\end{pmatrix},$$

где $G(x',k) = \frac{e^{-kx'}-e^{kx'}}{2k}$, $G^*(x',k) = \frac{e^{-kx'}+e^{kx'}}{2k}$, и

$$\mathcal{Q}(s)\mathbf{y}^+(s,k) = \begin{pmatrix} Q(s)\psi^+(s,k) \\ -Q^2(s)\psi^+(s,k) - Q(s)\psi^+_{[x]}(s,k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi^+(s,k)\\ -\psi^+_s(s,k)\end{pmatrix} Q(s),$$

то интегральное уравнение (9) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{y}^+(x,k) = \begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} e^{kx} - \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{d}{ds}\left(\mathcal{G}(x-s,k)\Psi^+(s,k)\right) Q(s)\,ds,$$

где $\mathcal{G}(x',k) = \begin{pmatrix} G(x',k) & 0 \\ kG^*(x',k) & 0\end{pmatrix}$, $\Psi^+ = \begin{pmatrix}\psi^+\\ \psi^+_x\end{pmatrix}$. Поскольку финитный потенциал $q \in \mathcal{M}_0$ уравнения (2) является обобщенной производной функции $Q \in BV$, то $Q(x) = C_1 = \mathrm{const}$ при $x \ll -1$ и $Q(x) = C_2 = \mathrm{const}$ при $x \gg 1$. При этом функция Q восстанавливается по своей производной с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому мы можем положить, что $Q(x) = 0$ при $x \ll -1$, и интегрированием по частям получим

$$\mathbf{y}^+(x,k) + \mathcal{G}(0,k)\Psi^+(x,k)Q(x) = \begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} e^{kx} + \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{G}(x-s,k)\Psi^+(s,k)\,dQ(s), \tag{10}$$

где интеграл понимается в смысле Римана — Стильтьеса. Поскольку $\mathcal{G}(0,k) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, то из $\psi_x = \psi_{[x]} + Q\psi$ следует, что правая часть векторного равенства совпадает с $\Psi^+ = \begin{pmatrix}\psi^+\\ \psi^+_x\end{pmatrix}$, а значит

$$\Psi^+(x,k) = \begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} e^{kx} + \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{G}(x-s,k)\Psi^+(x,k)\,dQ(s) \tag{11}$$

или

$$\Phi^+(x,k) = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} + \int\limits_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \mathcal{R}(x-s,k)\Phi^+(s,k)\,dQ(s), \quad \Phi^+ = \Psi^+ e^{-kx}, \tag{12}$$

где

$$\mathcal{R}(x',k) = \begin{pmatrix} R(x',k) & 0 \\ R^*(x',k) & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(x',k) = \frac{1-e^{-2kx'}}{2k}\,\theta(x'), \quad R^*(x',k) = \frac{1+e^{-2kx'}}{2k}\,\theta(x'),$$

а $\theta(x')$ — функция Хевисайда: $\theta(x') = 0$ при $x' < 0$ и $\theta(x') = 1$ при $x' > 0$.

Аналогично можно показать, что если $\Psi^-(x,k) = \Phi^-(x,k)e^{-kx}$, то

$$\Phi^-(x,k) = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} + \int\limits_{x}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \mathcal{R}(s-x,k)\Phi^-(s,k)\,dQ(s), \tag{13}$$

где $Q \in BV$, $Q(x) = 0$ при $x \gg 1$ и $Q(x) = \mathrm{const}$ при $x \ll -1$.

Согласно теореме 2 абсолютно непрерывное на компактах в $\mathbb{R}$ решение векторного интегрального уравнения (9) можно получить методом итераций в виде равномерно сходящегося ряда непрерывных вектор-функций $\mathbf{y}^\pm = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j^\pm$. Но тогда из (10)–(12) следует, что решение интегрального уравнения (12) (или (13)) можно представить в виде равномерно сходящегося ряда

$$\begin{gathered} \Phi^\pm = \sum_{j=0}^{\infty} F_j^\pm, \quad F_0^\pm(x,k) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm k \end{pmatrix}, \\ F_{j+1}^\pm(x,k) = \pm \int\limits_{\mp\infty}^{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm k \end{pmatrix} \mathcal{R}(x-s,k)F_j^\pm(s,k)\,dQ(s) = \\ = \bigl(Y_{j+1}^\pm(x,k) + \mathcal{G}(0,k)Q(x)Y_j^\pm(x,k)\bigr)\,e^{\mp kx}. \end{gathered} \tag{14}$$

Заметим, что из непрерывности функций $Y_j^\pm$ следует непрерывность первых компонент вектор-функций $F_j^\pm$, а стало быть и непрерывность $\phi^\pm$.

Поскольку для потенциала $q \in \mathcal{M}_0$ и любой непрерывной функции φ имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(s)q(s)\,ds = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(s)\,dQ(s),$$

то нам представляется более удобным в интегралах Стильтьеса в (12) и (13) вместо $dQ(s)$ писать $q(s)ds$.

Таким образом, в случае когда $q \in \mathcal{M}_0$, решения Йоста $\psi^\pm(x,k)$ уравнения (2) в правой полуплоскости K_+:

$$K_+ = \bigl\{k \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} k \geqslant 0\bigr\}, \tag{15}$$

определяются интегральными уравнениями

$$
\begin{aligned}
&\psi^+(x,k) = \phi^+(x,k)e^{kx}, \quad \phi^+(x,k) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{x} R(x-s,k)\phi^+(s,k)q(s)\,ds,\\
&\psi^-(x,k) = \phi^-(x,k)e^{-kx}, \quad \phi^-(x,k) = 1 + \int\limits_{x}^{\infty} R(s-x,k)\phi^-(s,k)q(s)\,ds,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

в которых $q(s)ds = dQ(s)$, ядро R удовлетворяет в K_+ оценке

$$
R(x',k) = \frac{1-e^{-2kx'}}{2k}\,\theta(x') \;\Rightarrow\; \bigl|R(x',k)\bigr| \leqslant \int\limits_{-x'}^{0} \bigl|e^{2ks}\bigr|\,ds \leqslant x', \quad \operatorname{Re} k \geqslant 0. \tag{17}
$$

Левее носителя потенциала для одной из функций Йоста имеем $\psi^+(x,k) = e^{kx}$, а правее носителя потенциала для другой получается $\psi^-(x,k) = e^{-kx}$.

Лемма 2. *Функции Йоста $\psi^\pm(x,k)$ при каждом $x \in \mathbb{R}$ являются целыми функциями переменной $k \in \mathbb{C}$, а при $k \to \infty$, $\operatorname{Re} k \geqslant 0$, имеют место следующие предельные соотношения:*

$$
\begin{aligned}
\Psi^+(x,k) &= \begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix} e^{kx}\left(1 + \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(x-s,k)q(s)\,ds + o\left(\frac{1}{|k|}\right)\right),\\
\Psi^-(x,k) &= \begin{pmatrix}1\\ -k\end{pmatrix} e^{-kx}\left(1 + \int\limits_{x}^{\infty} \mathcal{R}(x-s,k)q(s)\,ds + o\left(\frac{1}{|k|}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$\lhd$ Первое утверждение следует из общих теорем о решениях дифференциальных уравнений и того, что коэффициенты уравнения (4) являются целыми функциями параметра k (см., например, [15, гл. VI, § 2]). Что же касается асимптотических формул, то ввиду полной аналогии рассуждений мы докажем асимптотические формулы только для Ψ^+.

Пусть $\Psi^+ = \Phi^+ e^{kx} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\Upsilon^+ e^{kx}$. Тогда ввиду (11), (12) вектор Υ^+ является решением интегрального уравнения

$$
\Upsilon^+(x,k) = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(x-s,k)\Upsilon^+(s,k)\,dQ(s).
$$

Очевидно, что нам достаточно доказать формулу

$$
\Upsilon^+(x,k) = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\left(1 + \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(x-s,k)q(s)\,ds + o\left(\frac{1}{|k|}\right)\right). \tag{19}
$$

Для ее доказательства мы используем стандартную процедуру сглаживания. Пусть $Q(x) = 0$ при $x \leqslant \alpha$ и $Q(x) = \mathrm{const}$ при $x \geqslant \beta$. Для последовательности усреднений η_ε определим $Q_\varepsilon = \eta_\varepsilon * Q$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$
\Upsilon^+_\varepsilon(x,k) = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(x-s,k)\Upsilon^+_\varepsilon(s,k)q_\varepsilon(s)\,ds, \quad Q'_\varepsilon = q_\varepsilon.
$$

Из теоремы 2 следует, что решение векторного интегрального уравнения (19) существует, единственно и находится методом итераций. При $\operatorname{Re} k \geqslant 0$ ядро $\mathcal{R}(y;k)$ допускает оценку

$$\left\|\mathcal{R}(y;k)\right\| \leqslant \frac{1}{|k|}.$$

Поэтому при $k \to \infty$, $\operatorname{Re} k \geqslant 0$, имеют место соотношения

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(y;k) q_\varepsilon(s)\, ds \right\| \leqslant \frac{1}{|k|} \int\limits_{\alpha}^{x} |q_\varepsilon(s)|\, ds \leqslant \frac{1}{|k|}\, \|q_\varepsilon\|(\beta-\alpha). \tag{20}$$

Применяя метод итераций, получаем

$$\Upsilon_\varepsilon^+ = f_\varepsilon^{(0)} + f_\varepsilon^{(1)} + \sum_{j=2}^{\infty} f_\varepsilon^{(j)}, \quad f_\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_\varepsilon^{(1)}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(x-s;k) q_\varepsilon(s) f_\varepsilon^{(0)} ds, \quad \left\| f_\varepsilon^{(j)}(x) \right\| \leqslant \frac{(\|q_\varepsilon\|(\beta-\alpha))^j}{|k|^j}, \quad j = 2, 3, \ldots$$

Стало быть,

$$\left\| \sum_{j=2}^{\infty} f^{(j)}(x) \right\| \leqslant \frac{\|q_\varepsilon\|^2(\beta-\alpha)^2}{|k|^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|q_\varepsilon\|^j(\beta-\alpha)^j}{|k|^j},$$

и с учетом (20) мы получаем

$$\Upsilon_\varepsilon^+(x,k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(1 + \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(x-s;k) q_\varepsilon(s)\, ds + o\left(\frac{1}{|k|}\right) \right). \tag{21}$$

Поскольку $Q_\varepsilon \to Q$ в $L^1(\alpha,\beta)$ при $\varepsilon \to 0$, то ввиду теоремы 3 при $\varepsilon \to 0$ будет $\Psi_\varepsilon^+ \to \Psi^+$ равномерно по x на компактах в $\mathbb{R}$. Стало быть, и $\Upsilon_\varepsilon^+ \to \Upsilon^+$ равномерно по x на компактах в $\mathbb{R}$. Кроме того, $q_\varepsilon \to q$ $*$-слабо, а значит

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(x-s;k) q_\varepsilon(s)\, ds \to \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(x-s;k)\, dQ(s) = \int\limits_{-\infty}^{x} \mathcal{R}(x-s;k) q(s)\, ds.$$

Переходя в (21) к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к равенству (19). $\rhd$

Следствие 1. *Вронскиан функций Йоста* $\langle \psi^-, \psi^+ \rangle = 2ka(k)$ *является целой функцией* $k \in \mathbb{C}$, *причем* $a(k) \to 1$ *при* $|k| \to \infty$ *и* $\operatorname{Re} k \geqslant 0$.

Решением прямой задачи рассеяния считается матрица Вронского, составленная из функций Йоста:

$$\Psi(x,k) = \begin{pmatrix} \psi^+(x,k) & \psi^-(x,k) \\ \psi_x^+(x,k) & \psi_x^-(x,k) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dx}\, \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x)+k^2 & 0 \end{pmatrix} \Psi. \tag{23}$$

Определение 1. Определяющим уравнением обратной задачи рассеяния назовем следующее матричное уравнение для функций Йоста:

$$\Psi(x,-k)\sigma = \Psi(x,k)\,\frac{1}{a(k)}\begin{pmatrix} 1 & b(-k) \\ -b(k) & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

в котором переменная x играет роль параметра[2].

Отметим, что матрица Вронского

$$\widetilde{\Psi}(x,k) = \Psi(x,-k)\sigma = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}^-(x,k) & \widetilde{\psi}^+(x,k) \\ \widetilde{\psi}_x^-(x,k) & \widetilde{\psi}_x^+(x,k) \end{pmatrix}$$

в левой части определяющего уравнения (24) построена по решениям $\widetilde{\psi}^{\pm}(x,k) = \psi^{\pm}(x,-k)$ при помощи замены $k \to -k$. Поэтому свойства матричной функции $\widetilde{\Psi}(x,k)$ в левой полуплоскости спектрального параметра k аналогичны свойствам $\Psi(x,k)$ в правой полуплоскости (15). При этом вертикальная прямая $k = i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, играет в (24) роль линии сопряжения.

Не сложно проверить, что

$$\det\Psi(x,k) = -2ka(k), \quad \det\widetilde{\Psi}(x,k) = -2ka(-k). \tag{25}$$

Переписав матричное уравнение (24) в терминах определителей и используя равенства (25), мы приходим к *модельному уравнению обратной задачи рассеяния*

$$a(k)a(-k) = 1 + b(k)b(-k). \tag{26}$$

Для вещественных потенциалов q при $k = i\xi$ выполняются соотношения $a(-i\xi) = \bar{a}(i\xi)$ и $b(-i\xi) = \bar{b}(i\xi)$, где черта обозначает комплексное сопряжение. В этом случае модельное уравнение эквивалентно формуле

$$\left|a(i\xi)\right|^2 = 1 + \left|b(i\xi)\right|^2,$$

связывающей квадраты модуля a и b на вертикальной оси. Например, в простейшем случае $q(x) = \gamma_1\delta(x - x_1)$ мы находим, что

$$a(k) = 1 + \frac{\gamma_1}{2k}, \quad b(k) = -\frac{\gamma_1}{2k}\,e^{2kx_1}.$$

3. Теорема единственности

В данном параграфе мы покажем, что в обратной задаче рассеяния данные рассеяния определяют *финитный* потенциал однозначно. Как будет показано ниже, этот вопрос соприкасается с вопросом об однозначной разрешимости матричной задачи Римана — Гильберта. Напомним [16], что задача Римана-Гильберта заключается в нахождении двух функций, одна из которых аналитична в правой полуплоскости K_+, а другая аналитична в левой полуплоскости K_-, имеющих конечный порядок на бесконечности и удовлетворяющих на мнимой оси линейному граничному условию (условию сопряжения).

Рассмотрим матричное решение задачи рассеяния $\Psi(x,k)$ для уравнения Шрёдингера (2) и представим его в виде

$$\Psi(x,k) = \begin{pmatrix} \psi^+(x,k) & \psi^-(x,k) \\ \psi_x^+(x,k) & \psi_x^-(x,k) \end{pmatrix} = \Phi(x,k)E(x,k), \quad E(x,k) = \begin{pmatrix} e^{kx} & 0 \\ 0 & e^{-kx} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

[2]Переменные x и k меняются ролями в прямой и обратной задачах рассеяния.

Поскольку в замыкании правой полуплоскости $\operatorname{Re} k \geqslant 0$ выполены асимптотические соотношения (18), то $\det \Phi = \langle \psi^+, \psi^- \rangle$ и

$$\Phi(x,k) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} K(k), \quad K^{-1}(k) = \frac{1}{2k}\begin{pmatrix} k & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix}, \quad |k| \to \infty, \ \operatorname{Re} k \geqslant 0.$$

Лемма 3. *Пусть $\psi^\pm(x,k)$ — функции Йоста. Тогда*

$$\Psi^{-1}(x,k)\Psi(x,-k) = \frac{1}{a(k)}\begin{pmatrix} b(-k) & 1 \\ 1 & -b(k) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

$\triangleleft$ Используя представления (7) и соотношение (26), правее носителя потенциала получаем

$$\begin{aligned} b(-k)\psi^+(x,k) + \psi^-(x,k) &= a(k)b(-k)e^{kx} + [b(k)b(-k)+1]e^{-kx} = \\ &= a(k)b(-k)e^{kx} + a(k)a(-k)e^{-kx} = a(k)\psi^+(x,-k). \end{aligned}$$

Аналогично левее носителя потенциала получается

$$\psi^+(x,k) - b(k)\psi^-(x,k) = a(k)\psi^-(x,-k).$$

Из этих равенств следует

$$\Psi(x,-k) = \Psi(x,k)\frac{1}{a(k)}\begin{pmatrix} b(-k) & 1 \\ 1 & -b(k) \end{pmatrix}. \quad \triangleright$$

Лемма 4. *При* $|k| \to +\infty$, $\operatorname{Re} k \geqslant 0$, *имеет место асимптотическое соотношение*

$$\Phi(x,k)K^{-1}(k) \ \to \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(x) & 1 \end{pmatrix},$$

в котором

$$p(x) = \lim_{|k| \to +\infty} p(x,k), \quad x \in \mathbb{R}, \ \operatorname{Re} k \geqslant 0$$

$$p(x,k) = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{x} \left(1 + e^{-2k(x-s)}\right) q(s)\, ds - \frac{1}{4}\int\limits_{x}^{\infty} \left(1 + e^{-2k(x-s)}\right) q(s)\, ds. \tag{29}$$

Утверждение леммы следует из асимптотик (18).

Пример 1. В случае (см. [17])

$$q(x) = \gamma_1 \delta(x - x_1) + \gamma_2 \delta(x - x_2),$$

две итерации дают полное решение интегральных уравнений (16):

$$\begin{gathered} \phi^+(x,k) = 1 + \gamma_1 R(x - x_1) + \gamma_2(1 + \gamma_1 R_{21})R(x - x_2), \\ \phi^-(x,k) = 1 + \gamma_1(1 + \gamma_2 R_{21})R(x_1 - x) + \gamma_2 R(x_2 - x), \\ R_{21} = R(x_2 - x_1) = \frac{1}{2k}(1 - e_1\bar{e}_2), \quad e_j = e^{2kx_j}, \ \bar{e}_j = e^{-2kx_j}, \end{gathered} \tag{30}$$

из которых получаются выражения

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{2k}\left\langle \phi^-(x,k), \phi^+(x,k) \right\rangle = 1 + \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2(1 - e_1\bar{e}_2), \\ b(k) &= \frac{1}{2k}\left\langle \phi^-(x,-k), \phi^+(x,k) \right\rangle = -e_1\hat{\gamma}_1 - e_2\hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2(e_2 - e_1), \end{aligned}$$

$$p(x,k)=\frac{1}{4}\begin{cases}-\gamma_1\,(1+e_1\bar{e})-\gamma_2\,(1+e_2\bar{e})\,, & x<x_1,\\ \gamma_1\,(1+e_1\bar{e})-\gamma_2\,(1+e_2\bar{e})\,, & x\in(x_1,x_2),\\ \gamma_1\,(1+e_1\bar{e})+\gamma_2\,(1+e_2\bar{e})\,, & x>x_2,\end{cases}$$

где $e=e^{2kx}$, $\bar{e}=e^{-2kx}$, $\hat{\gamma}_j=\frac{\gamma_j}{2k}$.

Таким образом при $x\in[x_1,x_2]$

$$\Psi(x,k)=\begin{pmatrix}e^{kx}(1+\hat{\gamma}_1)-\hat{\gamma}_1e_1e^{-kx} & e^{-kx}(1+\hat{\gamma}_2)-\hat{\gamma}_2\bar{e}_2e^{kx}\\ k[e^{kx}(1+\hat{\gamma}_1)+\hat{\gamma}_1e_1e^{-kx}] & -k[e^{-kx}(1+\hat{\gamma}_2)+\hat{\gamma}_2\bar{e}_2e^{kx}]\end{pmatrix},$$

$$\Phi(x,k)=\begin{pmatrix}1+\hat{\gamma}_1-\hat{\gamma}_1e_1\bar{e} & 1+\hat{\gamma}_2-\hat{\gamma}_2\bar{e}_2e\\ k\,[1+\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_1e_1\bar{e}] & -k\,[1+\hat{\gamma}_2+\hat{\gamma}_2\bar{e}_2e]\end{pmatrix}.$$

Хотя для финитных потенциалов матричное решение (27) аналитически продолжимо в левую полуплоскость $\operatorname{Re}k\leqslant 0$, основной вронскиан (25) имеет там, за редкими исключениями, бесконечное множество нулей. Замена $k\to -k$ позволяет построить при $\operatorname{Re}k\leqslant 0$ другое матричное решение $\widetilde{\Psi}(x,k)=\Psi(x,-k)\sigma$ со свойствами, аналогичными $\Psi(x,k)$, $\operatorname{Re}k\geqslant 0$, где σ — матрица перестановки $\sigma=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Если ввести обозначение $\widetilde{\psi}^{\pm}(x,k)=\psi^{\pm}(x,-k)$, то

$$\widetilde{\Psi}(x,k)=\begin{pmatrix}\widetilde{\psi}^{-}(x,k) & \widetilde{\psi}^{+}(x,k)\\ \widetilde{\psi}^{-}_x(x,k) & \widetilde{\psi}^{+}_x(x,k)\end{pmatrix}=\widetilde{\Phi}(x,k)E(x,k), \tag{31}$$

и из леммы 3 получаем формулу

$$\Psi^{-1}(x,k)\widetilde{\Psi}(x,k)=\Psi^{-1}(x,k)\Psi(x,-k)\sigma=\frac{1}{a(k)}\begin{pmatrix}1 & b(-k)\\ -b(k) & 1\end{pmatrix},$$

которую можно преобразовать к виду

$$\Phi^{-1}(x,k)\widetilde{\Phi}(x,k)=T(x,k), \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}T(x,k)=E^{-1}(x,k)\frac{1}{a(k)}\begin{pmatrix}1 & b(-k)\\ -b(k) & 1\end{pmatrix}E^{-1}(x,k)=\\ =\frac{1}{a(k)}\begin{pmatrix}1 & e^{2kx}b(-k)\\ -e^{-2kx}b(k) & 1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{33}$$

Матричная задача Римана — Гильберта: Найти функцию-матрицу $\Phi(k)$ аналитическую в правой полуплоскости K_+, удовлетворяющую на мнимой оси граничному условию

$$\widetilde{\Phi}(k)=\Phi(k)T(k), \tag{34}$$

а при $|k|\to+\infty$, $\operatorname{Re}k\geqslant 0$, условию

$$\Phi(k)K^{-1}(k)\ \to\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1\end{pmatrix}, \tag{35}$$

в котором $T(k)$ — заданная матричная функция, а p — некоторое (вообще говоря, неизвестное) число.

Как показывают формулы (31)–(33) и лемма 4, при фиксированном x функция

$$\Phi(x,k)=\Psi(x,k)E^{-1}(x,k),$$

где Ψ — матричное решение Йоста, $E(x,k)=\operatorname{diag}(e^{kx},e^{-kx})$ (см. (27)), является решением задачи Римана — Гильберта (34), (35) с матрицей перехода $T(k)=T(x,k)$, определяемой по формуле (33). Однако, единственность решения задачи Римана — Гильберта не имеет места, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 2. В случае $q(x)=\gamma_1\delta(x-x_1)$ при $x\to x_1\pm 0$ получаем два различных решения задачи (34), (35) (левое и правое). В самом деле, используя формулы (30) примера 1, получаем

$$\psi^+(x,k)=e^{kx}\begin{cases}(1+\hat\gamma_1)-\hat\gamma_1 e_1\bar e, & x\gg 1,\\ 1, & x\ll -1;\end{cases}$$

$$\psi^-(x,k)=e^{-kx}\begin{cases}1, & x\gg 1,\\ (1+\hat\gamma_1)-\hat\gamma_1\hat e_1 e, & x\ll -1;\end{cases}$$

$$T(x,k)=\frac{1}{1+\hat\gamma_1}\begin{pmatrix}1 & \hat\gamma_1\bar e_1 e\\ \hat\gamma_1 e_1\bar e & 1\end{pmatrix}.$$

При $x>x_1$ имеем

$$\Phi(x,k)=\begin{pmatrix}1+\hat\gamma_1-\hat\gamma_1 e_1\bar e & 1\\ k[1+\hat\gamma_1+\hat\gamma_1 e_1\bar e] & -k\end{pmatrix},\quad \widetilde\Phi(x,k)=\begin{pmatrix}1 & 1-\hat\gamma_1+\hat\gamma_1\bar e_1 e\\ k & k[-1+\hat\gamma_1+\hat\gamma_1\bar e_1 e]\end{pmatrix},$$

и функция

$$\Phi(x_1+0,k)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ k(1+2\hat\gamma_1) & -k\end{pmatrix}$$

является решением задачи (34), (35) при

$$T(k)=T(x_1,k)=\frac{1}{1+\hat\gamma_1}\begin{pmatrix}1 & \hat\gamma_1\\ \hat\gamma_1 & 1\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad p=\frac12\gamma_1.$$

Аналогично, рассматривая случай $x<x_1$, получается, что функция

$$\Phi(x_1-0,k)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ k & -k(1+2\hat\gamma_1)\end{pmatrix}$$

является решением той же задачи, причем в этом случае $p=-\frac12\gamma_1$.

Теперь мы приступаем к формулировке и доказательству теоремы единственности в обратной задаче рассеяния. Для этого рассмотрим два уравнения вида (2) с потенциалами $q_1,q_2\in\mathcal{M}_0$. Обозначим через $a_j(k)$, $b_j(k)$, $j=1,2$, соответствующие данные рассеяния. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 4 (теорема единственности)**.** *Если всюду на мнимой оси выполнены равенства $a_1(k)=a_2(k)$, $b_1(k)=b_2(k)$, то $q_1=q_2$.*

$\lhd$ Предположим, что $q_1(x)\not\equiv q_2(x)$ и обозначим через $\Psi_j(x,k)=\Phi_j(x,k)E(x,k)$, $j=1,2$, соответствующие матричные решения Йоста. В силу совпадения данных рассеяния и леммы 4 справедливы следующие соотношения:

$$\widetilde\Phi_j(x,k)=\Phi_j(x,k)T(x,k),\quad \Phi_j(x,k)K^{-1}(k)\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ p_j(x) & 1\end{pmatrix},\quad |k|\to\infty,\ \operatorname{Re}k\geqslant 0,$$

где $T(x,k)$ определяется в (30). Из условий сопряжения легко получается равенство

$$\Phi_2(x,k)\Phi_1^{-1}(x,k) = \widetilde{\Phi}_2(x,k)\widetilde{\Phi}_1^{-1}(x,k). \tag{36}$$

Введем в рассмотрение функцию $F(x,k) = \Phi_2(x,k)\Phi_1^{-1}(x,k)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{C}$. При фиксированном k функция $F(\cdot,k)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d}{dx}F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_1(x)+k^2 & 0 \end{pmatrix} F - F\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_2(x)+k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x,k) = I \text{ при } x \gg 0.$$

Здесь начальное условие является следствием финитности функций q_1, q_2 и тождеств $a_1(k) \equiv a_2(k)$, $b(k) \equiv b_2(k)$ на $\mathbb{R}$. В силу теоремы о голоморфности по параметру решений задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с полиномиальными по параметру коэффициентами матрица $F(x,k)$ является целой функцией k при любом $x \in \mathbb{R}$. При этом, как показывает лемма 4, выполнено соотношение при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Re} k \geqslant 0$

$$F(x,k) = \Phi_2(x,k)\Phi_1^{-1}(x,k) = \Phi_2(x,k)K^{-1}K\Phi_1^{-1}(x,k) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(x) & 1 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

где $p(x) = p_2(x) - p_1(x)$.

Ввиду (36) функция $F(x,\cdot)$ комплексного переменного k является четной. Следовательно, предельное соотношение (37) выполнено и при $k \to \infty$ в левой полуплоскости. Отсюда следует, что

$$F(x,k) = I + P(x), \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{C},$$

где $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p(x) & 0 \end{pmatrix}$, $I = \operatorname{diag}(1,1)$, и мы приходим к равенству $\Psi_2 = (I + P(x))\Psi_1$, из которого очевидным образом вытекает

$$\psi_1^+(x,k) \equiv \psi_2^+(x,k), \quad \psi_1^-(x,k) \equiv \psi_2^-(x,k).$$

Поскольку фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (23) определяет матрицу его коэффициентов однозначно, то мы приходим к тождеству $q_1(x) \equiv q_2(x)$. $\rhd$

4. Дельтаобразные потенциалы

В данном разделе мы рассмотрим случай, когда функция q является линейной комбинацией δ-функций. Такие функции мы будем называть δ-образными. Выбрав $\phi \equiv 1$ в качестве нулевого приближения и применив метод итераций непосредственно к скалярным интегральным уравнениям (16), мы приходим к задаче о «суммировании» бесконечного ряда (см. (14)). Однако, как будет показано ниже, для уравнения Шрёдингера с δ-образным потенциалом $q \in \mathcal{M}_0$ вида

$$q(x) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \delta(x - x_j) \tag{38}$$

метод итераций позволяет получить точное решение за конечное число шагов (как это было сделано в примере 2). Непрерывные при всех x решения $\psi(x)$

уравнения Шредингера (2) с потенциалом (38) должны удовлетворять в узлах x_j, $j \in [N]$, условиям непрерывности и согласования производных (см. § 1):

$$\Delta\psi(x_j) = 0, \quad \Delta\psi_x(x_j) = \gamma_j \psi(x_j). \tag{39}$$

Занумеровав узлы x_j, $j \in [N]$, в порядке возрастания, мы разбиваем числовую прямую на $N+1$ промежутков:

$$\mathcal{I}_0 = (-\infty, x_1], \quad \mathcal{I}_j = (x_j, x_{j+1}], \quad \mathcal{I}_N = (x_N, \infty). \tag{40}$$

Уравнение (2) имеет на каждом промежутке $\mathcal{I}_j$ два линейно независимых решения $e^{\pm kx}$. Решение уравнения на всей оси можно построить с помощью условий (39) путем «склейки» решений при переходе с $\mathcal{I}_j$ на следующий отрезок $\mathcal{I}_{j+1}$. В случае $N > 1$ необходимо учитывать результат предыдущих скачков производных (см. [17, 18]).

Теорема 5. *Для δ-образного потенциала* (38) *метод последовательных приближений дает за N шагов точное решение интегральных уравнений* (16).

$\lhd$ Решение ϕ^+ первого из интегральных уравнений (16) для функции Йоста можно представить в виде ряда непрерывных функций(см. (14)):

$$\phi^+(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x), \quad f_{j+1}(x) = \int_{-\infty}^{x} R(x-s,k) f_j(s) q(s)\, ds, \quad f_0(x) = 1. \tag{41}$$

Из (38), (41) следует

$$f_{j+1}(x) = \sum_{n:\, x_n < x} R(x - x_n, k) f_j(x_n) q(x_n), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{42}$$

причем $f_j(x) = 0$ при $x \leqslant x_1$ и $j \geqslant 1$. Далее, используя (42), по индукции легко показать, что при $1 \leqslant j \leqslant N-1$ для всех $x \leqslant x_{j+1}$ будет выполнено равенство $f_{j+1}(x) = 0$ и, в частности, $f_N(x) = 0$ при $x \leqslant x_N$. Но тогда из (42) следует $f_{N+1}(x) \equiv 0$, а значит ряд в (41) обрывается на члене с номером N.

Ясно, что аналогичные рассуждения применимы и ко второму из интегральных уравнений (16). $\rhd$

Остановимся кратко на вопросе о точных формулах для решений интегральных уравнений (16). Как показано в работе [17], общий случай сводится к случаю с $k = 0$. Решения уравнения Шрёдингера (2) с дельтаобразным потенциалом (38) представляют собой при $k = 0$ ломаные с изломами в точках x_j. Учитывая формулу (39), связывающую наклоны ломаной на соседних отезках решетки (40) мы находим, что

$$\begin{gathered} \psi(x) = \tau_j(x - x_j) + \psi_j, \quad x \in I_j, \quad \psi_j = \psi(x_j), \quad j \in [N], \\ \gamma_j \psi_j = \tau_j - \tau_{j-1}, \quad l_j \tau_j = \psi_{j+1} - \psi_j, \quad l_j = x_{j+1} - x_j. \end{gathered} \tag{43}$$

Исключив отсюда τ_j, получим разностное уравнение второго порядка

$$\frac{1}{l_j}\,\psi_{j+1} + \frac{1}{l_{j-1}}\,\psi_{j-1} = \left(\frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_{j-1}} + \gamma_j\right)\psi_j, \tag{44}$$

которое при подходящих краевых условиях, дает значения решений интегральных уравнений (16) в узлах решетки. Аналогичное разностное уравнение для τ_j, которое получается из (43) путем исключения ψ_j, дает в случае краевых условий $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \gamma_1$ на левом конце, следующую формулу:

$$\begin{gathered}\tau_3 = \tau(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \sum_{j=1}^{3} \gamma_j + \sum_{i>j} \gamma_i \gamma_j x_{ij} + \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 x_{32} x_{21}, \\ x_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (x_i - x_j)\theta(x_i - x_j) \geqslant 0,\end{gathered} \tag{45}$$

которая без труда обобщается на общий случай. В частности, полагая в этой формуле $\gamma_3 = 0$, мы находим

$$\tau_2 = \tau(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_1 x_{21},$$

что вместе с формулами (43) полностью определяет решение (16) при $N = 3$, $k = 0$. Для перехода к случаю $k \neq 0$ нужно (см. [17]) использовать замену x_{ij} на

$$\hat{x}_{ij}(k) = \frac{1 - e^{2k(x_j - x_i)}}{2k}\, \theta(x_i - x_j),$$

связанную с инвариантностью уравнения Шредингера с потенциалом (38) относительно группы растяжений (с параметром ϱ):

$$x_j \to \varrho x_j, \quad \gamma_j \to \frac{\gamma_j}{\varrho}, \quad k \to \frac{k}{\varrho}.$$

Заметим в заключение, что указанное выше разностное уравнение (44) для равномерной решетки принимает следующий простой вид:

$$\frac{1}{l}\left[\psi_{j+1} + \psi_{j-1} - 2\psi_j\right] = \gamma_j \psi_j, \quad l_j = l, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

5. Замечания

Изложенная выше теория оставляет открытыми вопросы о существовании решения обратной задачи рассеяния и возможности представления этого решения в явной форме. Для того, чтобы потенциал $q \in \mathcal{M}_0$ обладал всеми нужными свойствами, соответствующие данные рассеяния сами должны обладать определенными свойствами. Несмотря на то, что детальный анализ подходящих классов функций для данных рассеяния выходит за пределы рассмотрений данной работы, мы все же сделаем некоторые замечания по этому поводу.

Как показывают рассмотрения предыдущих параграфов, прямая задача рассеяния сводится к преобразованию Фурье — Стильтьеса функции Q. Известно (см., например, [20]), что всякая функция $Q \in BV$ может быть представлена в виде суммы трех компонент — функции скачков, абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции (производная последней равна нулю почти всюду). В случае функции скачков Q с разрывами ΔQ_j в целочисленных точках $j \in J \subset \mathbb{Z}$ интеграл Фурье — Стильтьеса представляет собой тригонометрический полином

$$\widehat{Q}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ks}\, dQ(s) = \sum_{j \in J} \Delta Q_j e^{kj}$$

и дает периодическую функцию $\widehat{Q}(k+2i\pi)=\widehat{Q}(k)$. Если же функция Q имеет скачки $\Delta Q(x_j)$ в произвольной последовательности точек $x=x_j\in\mathbb{R}$ и выполнено условие сходимости ряда $\sum|\Delta Q(x_j)|<\infty$, то соответствующая функция $\widehat{Q}(k)$ представима в виде ряда

$$\widehat{Q}(k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ks}dQ(s)=\sum_j\Delta Q(x_j)e^{kx_j}\tag{46}$$

и является почти периодической на вертикальной оси $k=i\xi$.

Однако, как показывает следующий пример, даже класс почти периодических функций не охватывает всех возможных случаев.

Пусть $C(x)$ — функция Кантора — Лебега, которая непрерывна и монотонна, но имеет почти всюду нулевую производную. Доопределим ее по на всю числовую прямую: $C(x)=0$ при $x<0$ и $C(x)=1$ при $x>1$. Преобразование Фурье — Стильтьеса $\widehat{C}(k)$ этой функции удовлетворяет (см. [21]) простому функциональному уравнению

$$\widehat{C}(3k)=\operatorname{ch}(k)\widehat{C}(k),\quad \widehat{C}(0)=1,\quad \operatorname{ch}(k)=\frac{e^k+e^{-k}}{2}.\tag{47}$$

Это функциональное уравнение однозначно разрешимо в классе целых функций, но, как легко видеть, его решение не является почти периодической функцией.

Литература

1. *Bargmann V.* On the connection between phase shifts and scattering potential // Rev. Modern. Phys.—1949.—Vol. 21.—P. 488–493.
2. *Гельфанд И. М. Левитан Б. М.* Определение дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1951.—Т. 15, № 4.—С. 309–360.
3. *Ablowitz M. J., Clarkson P. A.* Solitons, Non-Linear Evolution Equations and Inverse Scattering.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
4. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений.—М.: Мир, 1985.
5. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. М., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи.—М.: Наука, 1980.
6. *Тахтаджян Л. А., Фадеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов.—М.: Наука, 1986.
7. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача теории рассеяния.—Харьков, 1960.
8. *Новокшенов В. Ю.* Введение в теорию солитонов.—Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.
9. *Будылин А. М., Буслаев В. С.* Уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко и асимптотическое поведение решений нелинейного уравнения Шрёдингера при больших временах // Алгебра и анализ.—2000.—Т. 12, № 5.—С. 64–105.
10. *Korotyaev E.* Inverse scattering on the real line // Inverse Problems.—2005.—Vol. 21.—P. 325–341.
11. *Шабат А. Б.* Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений // Функц. анализ и его прилож.—1975.—Т. 9, № 3.—С. 75–78.
12. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 6.—С. 897–912.
13. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969.
14. *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.—М., 1958.

15. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Высш. шк., 1991.
16. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.
17. *Шабат А. Б.* Разностное уравнение Шрёдингера и квазисимметрические многочлены // Теорет. и мат. физика.—2015.—Т. 184, № 2.—С. 216–227.
18. *Шабат А. Б.* Обратная спектральная задача для дельтаобразных потенциалов // Письма в журн. эксперим. и теорет. физики.—2015.—Т. 102, № 9.—С. 705–708.
19. *Шабат А. Б.* Теория рассеяния для дельтаобразных потенциалов // Теорет. и мат. физика.—2015.—Т. 183, № 1.—С. 105–119.
20. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1989.
21. *Dovgoshey O., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M.* The Cantor function // Expo. Math.—2006.—Vol. 24.—P. 1–37.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт ВНЦ РАН
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: kulaevrch@mail.ru

Шабат Алексей Борисович
Карачаево-Черкесский государственный университет
Россия, 357190, Карачаевск, ул. Ленина, 29;
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
Россия, 142432, Черноголовка, пр. Ак. Семенова, 1-А
E-mail: shabatab@mail.ru

Кулаев Руслан Черменович,
Шабат Алексей Борисович

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ
ДЛЯ ФИНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ
В ПРОСТРАНСТВЕ МЕР БОРЕЛЯ

Ответственный за выпуск
Вазагаева М. У.

Подписано в печать 15.04.2016.
Формат $60 \times 84\,{}^1\!/_8$. Усл. п. л. 2,21. Тираж 75 экз.