Ю. Г. Решетняк

К СТОЛЕТИЮ АКАДЕМИКА А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

Выдающийся российский математик академик Александр Данилович Александров родился 4 августа 1912 г. в деревне Волынь Рязанской области.

В 1929 г. А. Д. Александров поступил на физическое отделение физико-математического факультета Ленинградского государственного университета (ЛГУ) и окончил его в 1933 г. по специальности физик-теоретик.

Научными руководителями А. Д. Александрова были профессор Владимир Александрович Фок, выдающийся физик (впоследствии академик АН СССР) и математик профессор Борис Николаевич Делоне, член-корреспондент АН СССР.

Первые научные публикации Александра Даниловича были посвящены некоторым задачам из теоретической физики. С 1936 г. его научные интересы практически полностью лежат в области математики. В 1935 г. он защищает кандидатскую, а в 1937 г. — докторскую диссертацию.

В 1942 г. А. Д. Александров был удостоен Государственной премии (тогда она называлась Сталинской) второй степени.

В 1946 г. Александр Данилович был избран членом-корреспондентом АН СССР. С апреля 1952 по октябрь 1964 г. он — ректор Ленинградского государственного университета. В 1964 г. А. Д. Александров избирается действительным членом Академии наук и переезжает на работу в Новосибирск. В Сибири он работает в Институте математики и в Новосибирском государственном университете. В 1986 г. Александр Данилович покидает Новосибирск и возвращается в Ленинград. Летом 1997 г. Александра Даниловича не стало. Похоронен на Богословском кладбище в Санкт-Петербурге.

А. Д. Александрову принадлежат результаты первостепенной значимости в геометрии, теории уравнений в частных производных, в теории функций вещественной переменной, в математической кристаллографии.

Исследования А. Д. Александрова в области геометрии начинаются с работ по теории смешанных объемов выпуклых тел, в которых было дано существенное развитие результатов Г. Минковского и других классиков этой науки. Неравенства, полученные А. Д. Александровым, нашли применение в связи с решением одной проблемы Ван-дер-Вардена, полученным в 1980 г. красноярским математиком Г. П. Егорычевым.

А. Д. Александрову принадлежит решение проблемы Г. Вейля о реализации выпуклой поверхности с заданной внутренней метрикой. Проблема может быть сформулирова-

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3–9
© Ю. Г. Решетняк, 2012

на следующим образом. Предположим, что на сфере задана квадратичная дифференциальная форма, которая во всякой локальной системе координат допускает представление $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$. Далее предположим, что эта квадратичная форма положительно определенная, функции E, F и G аналитические, и ее гауссова кривизна, вычисленная по известным формулам дифференциальной геометрии, всюду положительна. Требуется доказать, что существует замкнутая выпуклая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, линейный элемент которой совпадает с данной квадратичной формой.

Проблема была сформулирована в 1916 г. Германом Вейлем, который наметил также и некоторый план ее решения. Задача сводилась к доказательству теоремы существования некоторого решения одного нелинейного уравнения эллиптического типа. Для завершения доказательства требовалось получить априорные оценки для решений возникающих дифференциальных уравнений. Такие оценки были получены Гансом Леви в 1935 г. (Другой более простой способ получения оценок требуемого вида был указан Л. Ниренбергом в 1953 г.)

А. Д. Александров предложил чисто геометрический подход к решению проблемы Вейля, не требующий привлечения мощной аналитической техники. А. Д. Александров рассмотрел аналог проблемы Г. Вейля для многогранников. В этом случае дело сводится к следующему. Если мы имеем некоторый выпуклый многогранник в трехмерном пространстве, то, разрезая его вдоль отдельных ребер, мы получим набор плоских многоугольников. Зная порядок, в котором эти многоугольники приклеиваются друг к другу, мы можем восстановить исходный многогранник, склеивая многоугольники в заданном порядке.

Упомянутый набор плоских многоугольников вместе с указанием того, какие стороны и в каком порядке должны склеиваться, называется разверткой данного выпуклого многогранника. Примером может служить хорошо известная развертка куба в виде некоторого крестообразного многоугольника.

А. Д. Александровым был поставлен следующий вопрос. Предположим, что задан набор плоских многоугольников и указано правило склеивания этих многоугольников по сторонам. Спрашивается, при каких условиях это будет разверткой выпуклого многогранника? Иначе говоря, какие условия должны выполняться для того, чтобы, склеивая многоугольники данного набора в пространстве в соответствии с заданным правилом (при этом разрешается перегибать многоугольники из данного набора, если иначе склеить их не удается), можно было бы получить из них замкнутый выпуклый многогранник? А. Д. Александров указал простые необходимые и достаточные условия, при которых это возможно.

Для произвольных выпуклых поверхностей вопрос решается путем приближения многогранниками. Выпуклая поверхность может рассматриваться как метрическое пространство, если понимать под расстоянием между произвольными двумя точками точную нижнюю границу длин кривых на поверхности, соединяющих эти точки. Возникла задача — описать метрические пространства, которые получаются таким образом из произвольных выпуклых поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. С этой задачей Александр Данилович блестяще справился. Ее решению посвящена книга А. Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей». В ней содержится, среди прочих, и теорема сравнения для треугольников на выпуклой поверхности, аналог которой для случая римановых пространств произвольной размерности был позже доказан сибирским геометром В. А. Топоноговым. Теорема сравнения Топоногова сыграла важную роль в развитии теории римановых пространств кривизны, ограниченной снизу. Этот, несомненно, замечательный результат Топоногова своим источником имеет некоторое наблюдение, сделанное А. Д. Александровым для случая двумерных многообразий.

Продолжая свои исследования по внутренней геометрии выпуклых поверхностей, Александр Данилович пришел к понятию двумерного многообразия ограниченной кривизны (ДМОК). Теория таких многообразий представляет собой нерегулярный аналог двумерной римановой геометрии. В классической теории поверхностей для каждой точки поверхности определено некоторое число — гауссова кривизна поверхности в этой точке. В теории ДМОК вместо нее рассматривается некоторая вполне аддитивная функция множества — интегральная кривизна. Двумерные римановы многообразия автоматически являются многообразиями ограниченной кривизны. Для них кривизна множества равна интегралу от гауссовой кривизны по площади. Другой пример ДМОК — многогранные поверхности. На них кривизна как функция множества сосредоточена на дискретном множестве — множестве вершин многогранника. Кривизна вершины равна разности $2\pi - \Theta(X)$, где $\Theta(X)$ есть полный угол при вершине X данного многогранника, т. е. сумма углов при точке X граней многогранника, сходящихся в ней. Если в вершине X кривизна равна нулю, то некоторая ее окрестность изометрична кругу на плоскости.

Для решения различных задач теории ДМОК Александровым был предложен метод, состоящий в том, что та или иная задача рассматривается сначала для многогранных поверхностей. Для этого случая задача решается с помощью преобразования поверхности посредством некоторых простых геометрических преобразований. Затем предельным переходом устанавливается требуемый результат в общем случае. Александров назвал эту технику исследования задач теории ДМОК методом разрезания и склеивания. Результаты, полученные таким путем, приводят к некоторым новым результатам в двумерной римановой геометрии, причем среди них есть и такие, относительно которых неизвестно, как получить их другими методами.

Для кривых в двумерном многообразии ограниченной кривизны определено понятие интегральной геодезической кривизны. Если кривая является простой дугой, то при условии, что она имеет направление в каждом из своих концов, для нее определены понятия поворота по одну ее сторону и по другую. В том случае, когда кривая является кратчайшей, повороты с разных ее сторон неположительны. Их сумма равна интегральной кривизне кривой как подмножества многообразия. Если эта последняя равна нулю, то повороты с обеих сторон геодезической кривой равны нулю. Для многообразий ограниченной кривизны А. Д. Александровым установлен аналог интегральной формулы Гаусса–Бонне.

Дальнейшее развитие идей, изложенных в книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», привело А. Д. Александрова к построению теории метрических пространств кривизны, ограниченной сверху, и кривизны, ограниченной снизу. Эти пространства А. Д. Александрова в последнее время приобрели известную популярность среди математиков, занимающихся построением математического анализа на произвольных метрических пространствах.

В работах А. Д. Александрова по теории нерегулярных римановых пространств дано развитие геометрической концепции пространства, в чем и состоит непреходящее значение этих его работ. Данные исследования Александра Даниловича можно поставить в один ряд с работами таких выдающихся геометров, как Н. И. Лобачевский, Б. Риман и Э. Картан.

В 1947 г. А. Д. Александров наметил план построения теории кривых, аналогичной классической теории кривых из курса дифференциальной геометрии. При этом основные понятия теории кривых — интегральная кривизна и интегральное кручение, по Александрову, определяются сначала для простейших кривых — для ломаных, т. е. кривых, составленных из конечного числа прямолинейных отрезков. Реализацию этой программы Александр Данилович поручил своим ученикам. Окончательный текст был опубликован в монографии, написанной совместно с Ю. Г. Решетняком в 1989 г. Теория получилась не столь изящной, как этого хотелось Александру Даниловичу. Отсутствие желанной простоты и послужило причиной длительной (более чем на 38 лет) задержки с публикацией.

К числу классических результатов дифференциальной геометрии принадлежат разного рода теоремы о единственности объектов, обладающих теми или иными свойствами. Например, классическая теорема Дарбу: поверхность, все точки которой омбилические, есть сфера. Другой пример — теорема Минковского, согласно которой замкнутая выпуклая поверхность однозначно определяется заданием гауссовой кривизны как функции нормали. А. Д. Александрову принадлежит большой цикл работ, в которых доказываются некоторые общие теоремы единственности для выпуклых поверхностей. А именно, доказывается, что выпуклая поверхность однозначно определяется заданием функции $\Phi(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}.\mathbf{n})$, где k_i есть главные кривизны в точке поверхности с нормалью $\mathbf{n}$. Функция Φ при этом должна удовлетворять некоторым естественным условиям. Доказательство теорем единственности сводится к установлению свойств некоторых, вообще говоря, нелинейных уравнений эллиптического типа.

С работами А. Д. Александрова о теоремах единственности теории поверхностей связаны его работы о принципе максимума для уравнений эллиптического типа.

Большой цикл работ был выполнен Александром Даниловичем по хроногеометрии — направлению, занимающемуся вопросами геометрических оснований теории относительности. В этом направлении работали также и некоторые из его учеников. Александру Даниловичу принадлежат исследования теории меры, теории уравнений в частных производных, в кристаллографии, и этот список далеко не полон.

В своих геометрических исследованиях А. Д. Александров весьма убедительно показал эффективность и силу синтетических методов исследования в геометрии при изучении строения рассматриваемых геометрических образов в целом.

Как автор математических работ Александр Данилович был блестящим стилистом – качество, редко встречающееся среди математиков. Он, как правило, обращал внимание не только на то, какие результаты получены в той или иной работе, но также и на то, как написана эта работа.

А. Д. Александров был ярким и интересным человеком. Он достиг больших высот в науке и был первоклассным спортсменом — имел звание мастера спорта по альпинизму. Александр Данилович был блестящим полемистом, и победить его в споре никому не удавалось.

Конец сороковых — начало пятидесятых годов прошлого века были трудным временем для граждан СССР. Только что окончилась война. Страна буквально лежала в руинах. В 1946 г. был неурожай, вызвавший голод в некоторых регионах страны. Послевоенное восстановление народного хозяйства сопровождалось разного рода идеологическими кампаниями, смысл которых не всегда был понятен. Начало этим кампаниям положило постановление ЦК ВКП(б) в августе 1946 г. о журналах «Звезда» и «Ленинград». Была кампания по борьбе с космополитизмом и преклонением перед Западом. Для математиков единственным результатом этой кампании, по-видимому, явилось то, что неравенство Шварца стало неравенством Буняковского. Кроме того, некоторые математики функции ограниченной вариации стали называть функциями с ограниченным изменением. Последняя новация, однако, развития не получила.

В конце сороковых и в начале пятидесятых годов А. Д. Александров много сил отдавал вопросам философии науки. В ученом мире страны в то время возникли дискуссии о «физическом идеализме», и некоторые философы и физики весьма агрессивно доказывали, что теория относительности не соответствует диалектическому материализму, является продуктом загнивания капитализма и «нам это не надо».

Имела место дискуссия по методологическим проблемам математики, когда профессор Е. и доцент Е. писали о формализме и вообще идеологической неполноценности некоторых направлений математики. (В публично оглашаемых материалах так и говорилось: профессор Е. и доцент Е. Доцент Е. — это, по-видимому, доцент Ермилин. А. С. Сонин в одной из своих книг, посвященных идеологическим кампаниям в СССР, пишет о письме Ермилина в ЦК КПСС об идеологическом неблагополучии в советской математике. Кто есть профессор Е., я также знаю. Среди ленинградских математиков профессоров Е. тогда было не очень много, и кто из них мог написать «телегу» в ЦК, легко вычисляется.) Дело сводилось к тому, чтобы запретить математикам заниматься тем, чем они хотят. Во всех этих идеологических обсуждениях А. Д. Александров участвовал. Его позиция всегда была неизменной: защищать науку от опасных и несправедливых обвинений. Надо сказать, что если доцент Е. как ученый не был серьезной фигурой, то о профессоре Е. этого сказать нельзя. Отмахнуться от высказанного им мнения было невозможно.

Нападение профессора Е. и доцента Е. на математику было отбито следующим образом. Математическое руководство страны предложило написать книгу о методологических проблемах математики. Это предложение было утверждено на высшем уровне. Для написания книги придумали процедуру, рассчитанную на то, чтобы книга вышла в свет как можно позже. Сначала был издан ограниченным тиражом первый вариант книги. Каждый экземпляр был снабжен своим номером, и весь тираж разослан по разным учреждениям, в которых люди занимались математикой. Там проводились обсуждения, и их результаты направлялись в редколлегию для того, чтобы учесть в окончательном варианте. Книга вышла в 1957 г. под названием «Математика, ее содержание, методы и значение». В общем сработал принцип Ходжи Насреддина: книга вышла когда, как говорится, шаха не стало, и идеологическая обстановка в стране в целом изменилась. В работе над этой книгой Александр Данилович принимал самое деятельное участие.

С 1952 по 1964 г. А. Д. Александров был ректором Ленинградского государственного университета. Осенью 1952 г. состоялись лыжные соревнования среди студентов и сотрудников университета, в которых Александр Данилович принял участие и занял первое место.

Известны выдающиеся заслуги Александра Даниловича в деле защиты научной биологии. Благодаря его поддержке преподавание научной генетики в Ленинградском государственном университете было возобновлено уже в 1957 г., тогда как в других университетах страны, в том числе в Московском госуниверситете, это произошло значительно позднее. В связи с этим математик А. Д. Александров в 1990 г., наряду с группой биологов, был награжден последним правительством СССР орденом Советского Союза за заслуги в развитии биологии.

Уже в 1980-е гг. А. Д. Александров принял активное участие в обсуждение проблем преподавания математики. Начало обсуждению положила статья академика Л. С. Понтрягина в журнале «Коммунист» — главном печатном органе ЦК КПСС. Понтрягин критиковал, и, надо сказать, совершенно справедливо, некоторые школьные учебники, разработанные под руководством академика А. Н. Колмогорова. Особенно плохим оказался школьный учебник по геометрии. Статья Понтрягина содержала также и некоторые выпады против теоретической математики, чем, как можно понять, она особенно понравилась партийным боссам (это видно из редакционного комментария к статье).

Александр Данилович считал, что в столь важном деле, как обучение математике молодых граждан страны, он не может оставаться в стороне. Совместно с профессором А. Л. Вернером и школьным учителем математики В. И. Рыжиком им был написан курс геометрии. Учебник А. Д. Александрова с соавторами был издан большим тиражом, и по нему велось и ведется в настоящее время преподавание геометрии во многих российских школах.

Всю жизнь А. Д. Александров придерживался коммунистического мировоззрения. На вопрос, верит ли он в коммунизм, он неизменно отвечал, что для него это не есть вопрос веры, это вопрос знания. При этом Александр Данилович прекрасно понимал порочность политической системы, действовавшей в СССР, и не скрывал своего отношения к ней.

Академик Александр Данилович Александров прожил большую и содержательную жизнь. Он был великим гражданином великой страны.

Материал поступил в редколлегию 28.06.2012

Адрес автора
РЕШЕТНЯК Юрий Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: sskut@math.nsc.ru