

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. Н. Дятлов

КОММЕНТАРИИ К УЧЕБНИКУ ПЛАНИМЕТРИИ
7 КЛАСС

Владикавказ

2024

УДК 373.167.1:51

ББК 22.141

Д998

Дятлов В. Н.

Комментарии к учебнику планиметрии. 7 класс. — Владикавказ: ЮМИ
ВНЦ РАН, 2024. — 80 с.

Представлена запись бесед, проведенных в рамках Владикавказского педагогического математического марафона, посвященных анализу и комментариям учебника «Геометрия. 7–9 классы / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. В. Кадомцев и др. 8-е изд. М.: Просвещение, 2018». Материал охватывает программу 7 класса.

Для учителей средней школы.

ISBN 978–5–904695–??-?

© Южный математический институт —
филиал ВНЦ РАН, 2024

© Дятлов В. Н. 2024

Предисловие

Изучение геометрии в школе сталкивается с определенными трудностями. Причин этому несколько, и одна из возможных — смена учебников и появление линейки разных учебников. Для анализа возможного влияния учебника на учебный процесс в рамках Владикавказского педагогического математического марафона в течение учебного года был прочитан цикл лекций на тему "Изучаем планиметрию по учебнику Атанасяна и соавторов". На эту тему были созданы видеобеседы, расположенные на канале youtube. После этого появилась идея изложить материал в виде текста. Предлагаемое издание содержит запись видеобесед, охватывающих материал седьмого класса.

Жанр этого текста редко встречается в учебной литературе, если встречается вообще. Это комментарии к учебнику. Дело в том, что, как отмечено в приложении 1, не бывает учебников хороших или плохих, в каждом учебнике есть хорошие фрагменты, а есть такие, которые можно подвергнуть анализу, улучшению или критике. Важно как можно эффективнее использовать положительные стороны учебника и быть готовым к компенсации тех, которые недостаточно эффективны в образовательных целях.

В качестве исходного материала для анализа и комментариев был выбран учебник «Геометрия. 7–9 классы / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. В. Кадомцев и др. 8-е изд. М.: Просвещение, 2018». Выбор этого учебника обусловлен тем, что он наиболее используемый в учебном процессе. Восьмое издание выбрано просто потому, что у меня оказался бумажный экземпляр этого учебника.

В предлагаемом тексте представлены мои впечатления при прочтении учебника. Большая часть текста учебника написана хорошо и не нуждается в комментариях. Некоторые достаточно важные детали вызывают трудности при изучении, и на них обращается особое внимание. В частности, это относится к введению некоторых основных понятий и особенно к стилю доказательств. Моменты, которые мне показались недостаточно ясными, анализируются, и предлагаются возможные пути их методической компенсации.

Мне не удалось выполнить рисунки с использованием компьютерной графики, и пришлось оставить их в моем исполнении с помощью ручки и линейки, за что приношу извинения читателям. Дело в том, что вся работа над текстом, начиная от замысла и заканчивая подготовкой оригинал-макета, выполнена мной одним, так что текст публикуется в авторской редакции. Обеспечение более высокого качества рисунков потребовало бы от меня определенных затрат времени, поэтому я предпочел оставить рисунки в таком виде, сохранив освободившееся время для другого.

Текст комментариев предназначен прежде всего учителям, изучающим со своими подопечными планиметрию в объеме материала седьмого класса. Некоторые разделы, в частности, приложения, могут быть полезны всем заинтересованным в эффективности образовательного процесса.

Я благодарен всем участникам Владикавказского педагогического математического марафона, терпеливо отнесшимся к моим рассказам, а также всем, кто просмотрел беседы на эту тему, и особенно тем, кто на них отреагировал.

В. Дятлов

Новосибирск, Академгородок, декабрь 2024 г.

Глава 1. Начальные геометрические сведения

1.1. Геометрические примитивы. Многие области знания устроены более или менее единообразно. Есть определенный набор первичных понятий, можно сказать простейших деталей, и есть способы обращения с этими понятиями, как бы инструменты, с помощью которых с деталями можно что-то делать. После того, как что-то сделали, можно получить новые детали. В конечном итоге, возможно, получатся изделия, а может, все так и останется набором деталей. Понятно, что геометрия, да и вообще математика, хороша тем, что деталей на первом этапе немного. Инструментов тоже не очень много, а всяких манипуляций, которые можно проделать с деталями, применяя инструменты, довольно много, и это позволяет формировать определенные навыки деятельности как основу развития.

В геометрии на плоскости первичными деталями являются точки и прямые, расположенные на данной плоскости. Будем считать их геометрическими примитивами. Каждая деталь должна быть как-то охарактеризована, то есть надо понять, что такое точка и что такое прямая. Именно понять, не давая им определения в смысле характеристики через другие геометрические объекты. В алгебре к таким первичным деталям относятся натуральные числа. Однако к первичным деталям вопрос «что это значит?» можно считать некорректным. Мы не можем геометрические примитивы определить внутри геометрии хотя бы потому, что пока еще ничего геометрического нет, мы занимаемся именно начальными, первичными понятиями. К первичным понятиям применим не вопрос «что это значит?», а вопросы «как мы себе это представляем?», «что мы с этими деталями можем делать?», «как они связаны между собой и с другими деталями?» и т. п. Ответы на эти вопросы даются описанием разных

свойств, взаимодействий, характеристик простейших деталей, и в знак того, что задаются первичные элементы, их характеристики называют аксиомами.

В рассматриваемом учебнике в основном тексте почему-то скрывается термин «аксиома», он появляется позже и в полной мере раскрывается только в дополнении, где приводится система аксиом, то есть система, описывающая характеристики и взаимодействия первичных деталей. Трудно судить о целесообразности такого подхода, может быть, что-то в этом есть, ибо не вполне ясно, как отнесется к повышению формализма обычный современный семиклассник.

При обсуждении с учащимися основных свойств первичных понятий, может быть, стоит обратить внимание на то, что эти свойства безусловные, они относятся ко всем рассматриваемым объектам. Вряд ли на этом надо акцентировать особое внимание, но упоминание позволит в дальнейшем обратить внимание на условные утверждения, в которых есть условие и есть заключение. В частности, например, первое свойство в первом параграфе, а именно «через любые две точки можно провести прямую и притом только одну», сопровождаемое лишь скромным словом «вообще», полезно вместе с формулировкой учебника сформулировать, раскрывая суть слов «можно провести», например, так: «для любых двух точек существует единственная прямая, содержащая эти точки», или «для любых двух точек существует единственная прямая, на которой эти точки лежат (расположены) или этой прямой принадлежат». Такими вариациями обучаемый постепенно подготавливается к использованию связанных с множествами терминов и заодно привыкает к очень полезным словосочетаниям «для любых» и «существует». Сразу не привыкнет, а постепенно может быть привыкнет.

На основе двух геометрических примитивов, а именно точек и прямых, начинают формироваться новые детали. К ним относятся лучи, отрезки и углы.

Берем произвольную прямую и на ней фиксируем какую-либо точку. Образные впечатления, обязательно сопровождающие построения, подсказывают, что данной точкой данная прямая разбивается на две части, и это можно отнести к основным свойствам взаимодействия примитивов. Каждую из образовав-

шихся частей назовем лучом с началом в фиксированной точке.

Взяв две точки на прямой, можно представить, что ими прямая разбивается на несколько частей. Появляется возможность создания новой детали. В учебнике эта деталь, а именно отрезок, определяется на основе приведенного там рисунка. Естественно возникает вопрос: если надо выяснить, будет нечто отрезком или нет, согласно определению из учебника надо апеллировать к данному там рисунку? А если под руками учебника нет? Тогда мы бессильны в понимании того, что такое отрезок, ибо не указаны не зависящие от контекста, можно сказать отчуждаемые, свойства, отличающие новую деталь от других, то есть не приведены отличительные особенности этой детали. Это неподходящий для изучения предмета подход, поэтому всегда при введении нового объекта надо обеспечивать его характеристику, не зависящую от учебника.

Что можно предпринять? Почитав другие учебники или обратившись к приложению в этом учебнике, где неплохо написано об аксиоматике, и соответственно подготовившись, можно дать описание понятия «между». На интуитивной подоплеке этого понятия можно не останавливаться, она, в принципе, довольно естественна, хотя можно и поговорить, обратив внимание на то, что из трех частей, на которые прямая разбивается двумя точками, две можно продолжать неограниченно, а третью — нет. Точки этой части и считаем расположенными между двумя данными точками.

Взяв два луча с общей вершиной, получаем новую деталь, назовем ее углом. Появляются связанные с углами термины. В учебнике сказано: «Любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвернутый, то одна из частей называется внутренней, а другая — внешней областью данного угла ... » и это обстоятельство поясняется на рисунке. Но если мы намерены как-то работать с внутренней частью, то обнаружится, что у нас, как и в случае с отрезком, нет отличительных особенностей этой части. Чем можно руководствоваться, кроме фразы «смотри рисунок»? Надо определяться с внутренней и внешней частями независимо от приведенного в учебнике рисунка. Можно использовать, например, общепринятое понятие выпуклости, не докладывая пока о нем учащимся. Выпуклость множества озна-

чает, что вместе с любыми двумя его точками данное множество содержит весь отрезок с концами в этих точках. Можно обойтись и меньшим свойством, например, если взять две точки на сторонах угла и соединить их отрезком, то внутренней частью угла можно считать ту, в которой этот отрезок лежит. Такая характеристика от рисунка в учебнике не зависит. Можно обратиться к разбиению всей плоскости на две полуплоскости за счет данной прямой и описать внутреннюю часть угла как ту, которая лежит в одной из полуплоскостей, на которые прямая разбивает плоскость, но в этом случае придется использовать свойство прямой, связанное с разбиением плоскости, которое появляется позже.

1.2. Сравнение простейших деталей. В следующем параграфе написано о сравнении отрезков и углов. Появляется понятие геометрических фигур и их равенства. В учебнике ничего насчет того, что считать геометрической фигурой, не находится, сразу сообщается о равенстве геометрических фигур одной фразой «в геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными». Может быть, для семиклассника этого и достаточно, но тогда возникает вопрос: как это понятие применять в доказательствах, которые хотелось бы видеть более или менее строгими? Пока неясно. Далее идет пояснение этой фразы с помощью понятия совмещения или наложения фигур. И здесь приходится обращаться исключительно к интуитивным представлениям, что, по-видимому, достаточно на уровне семиклассников. Скорее всего, это интуитивно более или менее ясное представление придется принять во внимание и использовать далее. Можно попытаться определить понятие равенства геометрических фигур более формально, но это точно приводит к отпугиванию учащихся от геометрии, ибо в седьмом классе высокий уровень формализации воспринимается слабо.

Насчет понятия геометрической фигуры можно отметить следующее. В принципе, есть понятие множества, и есть возможность всегда обращаться к множествам. Зачем тогда давать понятие фигуры? Дело в том, что после того, как введено понятие, надо определяться с его свойствами, и одним из первых надо отметить свойство сопоставления геометрических фигур. Если принять за основу для геометрических фигур равенство мно-

жеств, то получается, что мы не сможем отойти от конкретно расположенной фигуры и увидеть в другом месте с ней одинаковые, так как равенство множеств предусматривает совпадение элементов этих множеств. Тем самым для обнаружения схожих объектов в разных частях плоскости надо иметь понятие равенства, отличное от равенства множеств. Для этого вводится понятие равенства геометрических фигур. При такой точке зрения геометрической фигурой можно считать любое множество на плоскости, понимая равенство фигур, в отличие от равенства множеств, как возможность их наложения при простейших естественных преобразованиях типа перемещения. С этой позиции и несколько точек можно считать геометрической фигурой, но, конечно, в дальнейшем речь будет идти исключительно о множествах, составленных из простейших деталей — точек, отрезков, лучей, углов и т. д., содержательных и интересных с точки зрения многообразия возможностей.

Определившись с представлением о геометрических фигурах и их равенстве, можно перейти к определению сопоставления простейших геометрических фигур, из которых пока есть лучи, отрезки и углы. Что касается лучей, ясно, что любые два луча равны — их можно совместить наложением. С отрезками и углами дело обстоит иначе.

На тему равенства отрезков в учебнике написано, что если налагать один отрезок на другой так, что один из концов одного отрезка совпадет с одним из концов другого и при этом совпадут другие концы, то такие отрезки равны. Абсолютно понятное определение на основе определения равенства фигур. Далее сообщается, что один отрезок считается меньшим, если при попытке наложения при совпадении одного из концов этот отрезок будет частью другого. Возникает вопрос: что такое «одно есть часть другого»? Ответа не находится. Так что либо понятие части придется как-то давать, либо оставить это на интуитивном уровне. Конечно, можно возразить, считая, что нечего морочить голову семиклассникам такими мелочами, и насколько-то с этим можно согласиться. Однако тогда есть шанс превратить математику в описательную дисциплину и отчасти потерять смысл ее изучения. Чтобы так не получилось, можно, не переходя на слишком формальный уровень, тем не менее отмечать те фраг-

менты, которые остаются на относительно интуитивном уровне, как бы поступать честно, не вуалируя уровень строгости введения понятий, но и не отказываясь от него. Скорее всего, на это учащиеся большого внимания не обратят, но по крайней мере при этом можно чувствовать себя более комфортно.

Говоря об отрезках, можно апеллировать к понятию «между», считая меньшим тот отрезок, для которого при наложении с совпадением одного из концов второй конец будет лежать между концами большего отрезка. Можно обратиться и к первичному для множеств понятию принадлежности, заменив слово «между» фразой «принадлежит отрезку». Наконец, часть можно понимать как подмножество.

Далее определяется сопоставление углов. Для задания равенства углов надо обеспечить возможность их совпадения при наложении. Полезно поговорить о том, как обеспечивать наложение. Дело в том, что фигура задается определенным взаимодействием, структурой ее элементов, и при наложении надо смотреть на перенос структуры с одной фигуры на другую. Так было для отрезков — рассматривались задающие отрезок детали, а именно их концы. При изучении углов также надо смотреть на задающие их детали, а именно на вершину угла и его стороны. Значит, при наложении углов надо совместить их вершины, затем совместить одну из сторон угла — соответствующие лучи. Остаются вторые стороны, тоже лучи. В учебнике написано, что вторые стороны надо налагать так, чтобы они оказались «по одну сторону от совместившихся сторон». Возникает вопрос: где раньше было указано, что значит «по одну сторону»? Не находится. Но это не значит, что не надо обращаться к понятию «по одну сторону», надо лишь обратить на него внимание и договориться, как это понятие можно раскрывать. Ясно, что при этом придется обратиться к разбиению плоскости любой прямой, на ней расположенной, на две части, каждая из которых называется полуплоскостью, и слова «по одну сторону» означают «располагаться в одной из полуплоскостей».

После совмещения по одной из сторон углов и договоренности о том, что значит «по одну сторону», можно совмещать вторые стороны, как указано в учебнике, и если они совместятся, то углы равны. Если же не совместятся, то один угол меньше дру-

гого. В учебнике написано, что «меньшим считается тот угол, который составляет часть другого». И здесь, как для отрезков, появляется вопрос: а что значит «часть другого»? Пояснить это нетрудно, но стоит на необходимость этого обратить внимание. Часть может означать, что второй луч меньшего угла расположен внутри большего, а что значит внутри уже известно.

Кстати, в то время как для отрезков слово «часть» можно было трактовать как «подмножество», для углов это не годится, ибо углы это не части плоскости, а два луча, исходящие из одной точки.

1.3. О величинах и их измерении. Создав несколько новых деталей, а именно лучи, отрезки и углы, займемся их характеристиками. Прежде всего надо определить числовые характеристики.

Начнем с отрезков, для углов ситуация аналогичная. Измерение с интуитивной точки зрения означает возможность сопоставления каждому отрезку некоторого числа, называемого длиной этого отрезка, причем так, что должны выполняться следующие очевидные свойства:

- 1) длина должна измеряться положительным числом,
- 2) любые два равных отрезка должны иметь одну длину,
- 3) если отрезок разбить точкой на два отрезка, то длина всего отрезка должна быть равна сумме длин полученных в результате разбиения отрезков, и такое свойство должно выполняться, если отрезок точками разбивается на конечное число отрезков: длина отрезка равна сумме длин отрезков разбиения,
- 4) некоторый отрезок должен быть выбран в качестве эталона, с которым сравниваются все остальные отрезки, и его длина считается равной единице.

В учебнике вопрос измерения начинается с указания необходимости иметь эталон, а свойства, характеризующие длину, скромно отмечены в конце пункта без акцентирования на них внимания. Может быть, для семиклассников так и надо, однако выделение одного свойства, а именно эталона, и всего лишь упоминание других вряд ли способствует формированию математической культуры. Скорее всего, это полезно иметь в виду учителю, сделав акцент на абсолютно естественных свойствах длины,

которые ее полностью определяют. Тем более что в дальнейшем именно эти же свойства лягут в основу понятия величины угла, площади фигуры и т. д.

После выделения основных свойств можно поговорить о том, как измеряется длина отрезка, а именно сопоставлением его с объединением какого-то конечного набора эталонных отрезков или частей эталонного отрезка, то есть приближением отрезка с недостатком и с избытком. Вряд ли такой разговор надолго останется в памяти, ибо применять его при решении задач обычно не приходится, а материал, долго не используемый, может уйти в далекие уголки памяти или вовсе из нее исчезнуть.

Следует отметить, что поскольку отрезок можно отнести к простейшим деталям, есть возможность характеризовать отрезок по его длине. А именно, выше было отмечено, что равные отрезки имеют равные длины. Для отрезков верно и обратное свойство: если длины двух отрезков равны, то и отрезки также равны. Возможно, в учебнике такое свойство где-то есть, мне его найти не удалось, хотя далее это свойство, скорее всего, может быть использовано.

Далее идет текст, посвященный измерению углов. Здесь ситуация абсолютно аналогична ситуации с отрезками. Изложение материала начинается не со свойств, характеризующие меру угла, а с механизма измерения. Свойства скромно отмечены в конце параграфа.

При знакомстве с разными типами углов отмечается любопытная деталь, на которую, скорее всего, никто внимания не обратит. Вводятся понятия углов смежных и вертикальных, при этом доказывается, что вертикальные углы равны. Доказательство основано на том факте, что если углы имеют одинаковую меру, то они равны. При этом не удается ранее найти хотя бы упоминание этого свойства. Возможно, полезно обратить внимание на необходимость предварительного изложения фактов, на которых строятся какие-либо доказательства.

Далее дается определение перпендикулярных прямых. После этого идет фраза «...отметим, что прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются». Всего лишь «отметим». Однако кажущееся столь несущественным свойство сопровождается доказательством, хотя авторы об этом и не сообщают. Это, скорее

всего, первое в учебнике доказательство. Вместе с тем факт этот весьма важный, далее используемый в доказательстве важного утверждения, и отсутствие акцента на нем удивляет.

Можно обратить внимание на стиль доказательства этого утверждения. Оно основано на том, что, перегнув листок, мы получаем что-то определенное (см. учебник). Конечно, можно на это внимания и не обращать, но при работе с учащимися, скорее всего, стоит иметь в виду определенную интуитивность стиля доказательства. Кстати, при предлагаемом уровне строгости такое доказательство, может быть, наиболее оправданное. Так что перегнем, не заостряя на этом внимание учеников.

Глава 2. Треугольники

Как было отмечено, в геометрии прежде всего вводятся первичные детали, то есть геометрические примитивы (точки, прямые), их свойства, правила работы с этими деталями, на основе которых появляются новые детали (луч, отрезок, угол). Из деталей создаются изделия, обладающие более или менее богатым набором свойств и интересные с точки зрения работы с ними в плане постановок задач и средств для их решения. Одним из основных изделий является треугольник. О треугольниках и идет речь в ближайших разделах.

2.1. Определение треугольника. Начнем с цитаты, относящейся к определению треугольника. «Отметим какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками (рис. 49,а). Получим геометрическую фигуру, которая называется треугольником.» После этого определения если спросить, что такое треугольник, неясно, каков может быть ответ. Это определение дано, можно сказать, в повествовательном стиле, при котором поясняется определяемый объект, но не указываются его отличительные характеристики. Можно было написать, например, так: треугольником называют геометрическую фигуру, состоящую из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех соединяющих их отрезков. Разница, кажется, небольшая, но в последнем случае можно дать ответ на вопрос: что такое треугольник? Кстати, относя треугольник к геометрическим фигурам, мы указываем на то, что треугольник — это множество вместе с равенством, характерным для геометрических фигур.

После определения треугольника идут наименования связанных с ним элементов — вершин, сторон, углов. Хорошо прописано применительно к треугольнику свойство равенства треугольников: треугольники равны, если при наложении полностью совместятся их вершины и стороны, при этом совместятся попарно и углы треугольников. Это основа для обращения с равенством треугольников, ибо служит признаком достижения цели (см. приложение 1). Так, при доказательстве равенства треугольника в какой момент можно сказать, что доказательство закончено, то есть что равенство треугольников доказано? В тот момент, когда получены совпадения трех вершин и трех сторон треугольников.

2.2. Первый признак равенства треугольников. Определив понятие равенства треугольников, естественно позаботиться о признаках равенства, при этом по возможности подробно обсудить, что такое признак, зачем он нужен, что он дает, что из себя представляет. В учебнике есть одна фраза насчет признаков, но не отмечено место признаков среди другого типа утверждений — свойств и критериев. О критериях пока, может быть, говорить рано, но о свойствах и признаках, скорее всего, пора.

Если устанавливать равенство треугольников на основе определения, то придется заботиться о совпадении его вершин и сторон при наложении. Естественен вопрос: нельзя ли обойтись проверкой меньшего набора обстоятельств? Как правило, оказывается, что можно, и признаки как раз и предназначены для того, чтобы, проверив меньше условий, чем указано в определении, гарантировать изучаемое свойство. Тем самым в признаках должно быть меньшее количество условий по сравнению с определением, вместе с тем достаточное для гарантии наличия требуемого свойства. Присутствие слова «достаточно» в этом контексте приводит к еще одному наименованию признака — это достаточное условие (наличия требуемого свойства).

После обсуждения термина «признак» плавно переходим к формулировке первого признака равенства треугольников. Он в учебнике сформулирован в классическом стиле, абсолютно лаконично и понятно. После формулировки надо переходить к доказательству. Оно вполне корректно, однако не отличается мотивированностью предлагаемых рассуждений и сопровож-

дается определенной громоздкостью обозначений, чем вызывает некоторое отторжение. Так и хочется просто поверить в справедливость этого признака и не морочиться с доказательством. Однако, помня, что доказательства нужны и полезны не столько для того, чтобы убедиться в справедливости утверждения (можно поверить авторам, вряд ли они станут обманывать), сколько для тренировки навыков и способностей к рассуждениям (см. приложение 2).

Доказательство изложено в статичном (научном) стиле, без обнаружения естественных мотивированных шагов. Статичную конструкцию запоминать непросто, а научиться рассуждать на ее основе проблематично. Если доказательство изложить динамично, с выделением мотивированности предлагаемых действий, то оно может быть достаточно естественным и поучительным.

Обеспечить динамику в тексте непросто, обычно это возможно при общении, однако попробуем это сделать, для чего используем систему вопросов и возможных на них ответов. Кстати, можно договориться о том, что нередко употребляемое слово «подумать» может для нас означать «задать вопрос». Научиться задавать вопросы не проще, а может быть, даже труднее, чем искать на них ответы. Так что начнем думать.

О чем идет речь в формулировке?

Даны два треугольника. Чтобы о них судить, надо как-то обозначить их элементы. Пусть это треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Согласно условию в этих треугольниках равны две стороны и углы между ними. Пусть $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$ и $\angle A_1 = \angle A$ (рис. 2.1). Надо обеспечить возможность наложения одного треугольника на другой так, чтобы выполнялись условия равенства треугольников.

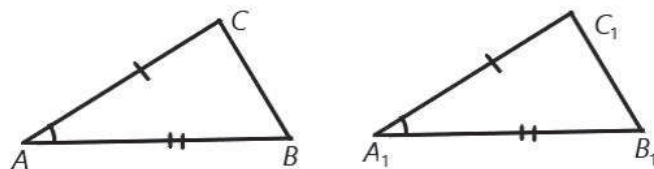


Рис. 2.1.

Что для этого надо сделать, то есть что дополнительно к

тому, что известно по условию, надо обеспечить?

Надо обеспечить возможность наложения третьей стороны.

Чем характеризуется треугольник?

Тремя вершинами и тремя соединяющими их отрезками. Руководствуясь здравым смыслом, естественно совместить для начала вершины, участвующие в обоих соответственно равных отрезках, у нас это вершины A_1 и A (рис. 2.2). Совместив вершины, обратимся к равенству углов.

Что дает равенство углов?

Воспользуемся тем обстоятельством, что от данного луча в данной полуплоскости можно отложить ровно один угол, равный данному. Если даже в учебнике вдруг не находится это абсолютно очевидное (интуитивно) свойство, им надо рассуждения дополнить. После такого отложения стороны угла A и угла, равного углу A_1 , совместятся.

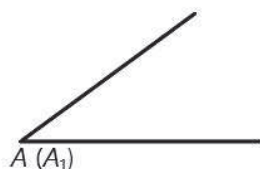


Рис. 2.2.

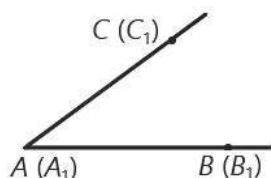


Рис. 2.3.

Перейдем еще к одному обстоятельству из данных, а именно к равенству отрезков. От точки A на одном из лучей угла A отложим отрезок, равный отрезку A_1B_1 . Поскольку $A_1B_1 = AB$, точки B_1 и B совместятся (рис. 2.3). Аналогично можно устроить совмещение точек C_1 и C . Но если совместились точки B_1 с B и C_1 с C , то совместятся и соединяющие их отрезки. Тем самым все условия, участвующие в определении равенства треугольников, выполнены и треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны.

Если обращаться к изложению из учебника, то можно отметить, что в этом признаке из свойств, характеризующих равенство треугольников, убрано единственное, а именно совмещение третьей стороны. Это то свойство, которое надо обосновать. Однако в учебнике, дойдя до конца доказательства, именно это свойство явно не отмечено. Тем самым неясно, почему доказано

требуемое, а не просто проведены какие-то рассуждения. Не была выставлена цель, не были указаны признаки ее достижения (поскольку цели не было), а тогда доказательство трудно считать завершенным.

2.3. Перпендикуляр к прямой. Материал, посвященный существенным деталям треугольника, размещен среди обсуждения признаков равенства треугольников неспроста. Здесь осуществляется подготовка к доказательствам второго и третьего признаков равенства треугольника. Вместе с тем рассматриваемые объекты исключительно важны сами по себе, так что надо отнестись к ним со вниманием, несмотря на то, что связанные с ними свойства здесь не рассматриваются.

Начинается раздел с пункта под названием «перпендикуляр к прямой». Что такое перпендикуляр достаточно ясно, и здесь все хорошо. Далее идет теорема о том, что из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой и притом только один. Формулировка абсолютно понятная, и далее, естественно, идет доказательство. На него обратим некоторое внимание. В учебнике вся информация, относящаяся к доказательству, собрана на одном рисунке. Это типичная для учебников ситуация, однако трудно ее считать удачной. Дело в том, что доказательство имеет свое развитие, это последовательность логически связанных рассуждений, и каждое из них относится к каким-то своим деталям конструкции. Если все такие детали собрать на одном чертеже, то получается месиво, из которого бывает нелегко выделить относящиеся к отдельным шагам детали.

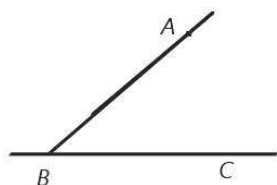


Рис. 2.4.

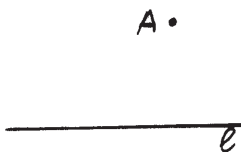


Рис. 2.5.

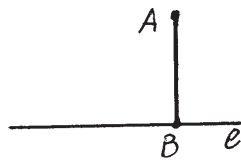


Рис. 2.6.

Попробуем поизучать доказательство, данное в учебнике, и

если сочтем его недостаточно ясным и мотивированным, то будем создавать доказательство на основе естественных мотивированных шагов. Изобразим ту часть чертежа из учебника, которая относится к началу доказательства (рис. 2.4). В учебнике сразу вводятся обозначения B, C точек на прямой, непонятно, какое отношение имеющих к условию. Когда речь идет просто о прямой, естественно для ее обозначения использовать одну строчную латинскую букву, например, говорить о прямой l . Далее в учебнике идет некоторая конструкция, воспринятая мной после определенных усилий. Может быть, семиклассники поймут это легче и быстрее и будут в состоянии логично, мотивированно построить доказательство. Мне в предлагаемых обозначениях удалось с трудом.

Будем рассуждать естественно и динамично, пытаюсь понять, как из условия теоремы обеспечить ее результат. Пусть даны прямая l и не лежащая на ней точка A (рис. 2.5). Надо на прямой подготовить такую точку, чтобы, соединив ее с A , получили перпендикуляр. Как-нибудь точку на прямой взять легко, с этого и начнем, а именно возьмем на прямой какую-то точку, обозначим ее буквой B . Не исключено, что AB уже перпендикуляр, может, удалось угадать (рис. 2.6). Если так, то процесс закончен, цель достигнута.

А если это не перпендикуляр (рис. 2.7), что тогда?

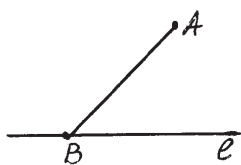


Рис. 2.7.

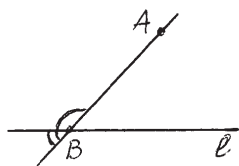


Рис. 2.8.

Просто угадать, куда упадет перпендикуляр, скорее всего, сразу не удастся.

Что тогда делать?

Надо что-то придумывать для обеспечения перпендикуляра. Возникает простой естественный вопрос: где можно реализовать

прямой угол? Ответ ясен: в треугольнике. Это значит, что надо озаботиться треугольником.

Каким?

Примерно понятно — точки A и B суть две его вершины, и надо третью вершину. Ее надо выбрать так, чтобы обеспечить прямой угол.

За счет чего это можно сделать?

Проведя через точку A прямую так, чтобы она пересекла l и не была перпендикуляром, можно заметить возникновение двух смежных углов (рис. 2.8). Они разные. Но если можно будет гарантировать существование такой прямой, для которой отмеченные смежные углы равны, то каждый из них прямой и предложенная прямая — перпендикуляр.

Как обеспечить желаемое равенство?

В этот момент можно проявить творчество и вспомнить о перегибании листа при первых обоснованиях. При перегибании перпендикуляр перейдет в перпендикуляр. Формально перегибание можно устроить следующим образом: обнаружить эти смежные углы в двух равных треугольниках, и тогда каждый из них прямой.

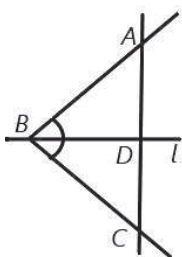


Рис. 2.9.

Надо конструировать треугольники. Для этого с другой стороны от l отложим угол с вершиной в точке B , равный углу между AB и l , затем отложим на стороне второго угла отрезок BC , равный AB , так, чтобы получился треугольник ABC . Обозначив через D точку пересечения AC и l , получим два треугольника ABD и CBD (рис. 2.9). Они равны между собой по первому признаку равенства треугольников, стало быть, $\angle ADB = \angle CDB$, и так как они смежные, а в сумме составляют 180° , каждый из них по 90° и точка D искомая.

2.4. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

Следующий пункт учебника содержит классические определения основных отрезков в треугольнике — медианы, биссектрисы и высоты. По-видимому, это настолько классика жанра, что в любом учебнике их определения окажутся одинаковыми и одина-

ково хорошими. Затем идут штатные определения разных типов треугольников. Далее формулируется теорема, и в этот момент я понимаю, что появляется материал, на котором можно чему-то научиться в плане развития мыслительных способностей. Посмотрим, насколько это удастся.

В принципе, если подходить к геометрии как к набору фактов, то нет какой-то суровой необходимости в их доказательствах — дети готовы поверить, что излагаемые утверждения верны и ими можно пользоваться. Тогда о назначении этого учебного предмета как развивающего логику надо забыть. Однако, как представляется, одна из основных задач геометрии состоит в развитии логических навыков, и к доказательствам теорем стоит относиться с большим вниманием, добиваясь их полной ясности, логичности, естественности (см. приложение 2).

Среди утверждений рассматриваемого параграфа можно остановиться на следующей теореме и сопроводить ее небольшими комментариями. Написано: в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является высотой и медианой. Факт, конечно, не только верный, но и интуитивно очевидный. Доказательство основано на использовании условия и достаточно ясное. А далее написано: «мы установили, что биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведенные к основанию, совпадают. Поэтому справедливы такие утверждения: высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой, и медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой». Однако задумаемся над тем, что же установлено. Переформулируем исходное утверждение: если отрезок от вершины к основанию является биссектрисой, то он также будет медианой и высотой. Так что пока установлено утверждение в одну сторону: если биссектриса, то медиана, а также если биссектриса, то — высота. Если подходить хоть сколько-то формально, то неясно, с чего авторы утверждают большее, чем доказано, не обращая на это внимания. Так что для формальной гарантии справедливости дополнительных утверждений как-то надо хотя бы пояснить, почему они верны. Не скажу, что это трудно, более того, это достаточно легко, но

об этом надо хотя бы упомянуть. Можно для доказательства обосновать факты: если биссектриса, то медиана; если медиана, то высота; если высота, то биссектриса. А можно доказывать три эквивалентности. Встречаются учебники, в которых именно так этот материал и излагается, то есть доказываются несколько утверждений.

Можно было обойтись и меньшими усилиями, просто упомянув о единственности прямой, проходящей через две точки, и тогда это действительно одна и та же линия, которая делит угол пополам, противоположащую сторону пополам и перпендикулярна основанию. Это просто, но об этом надо хотя бы упоминать.

2.5. Второй и третий признаки равенства треугольников. После технической подготовки, необходимой для доказательств, излагаются собственно второй и третий признаки равенства треугольников.

Формулировка второго признака не отличается оригинальностью, она классическая, и естественно посмотреть, что и как надо доказывать. Доказательство, как обычно в этом учебнике, изобилует обозначениями и немотивированными действиями. Что-то рассматривают, зачем-то что-то делают, много обозначений и возникает желание все это доказательство оставить в покое. Однако не будем спешить и попробуем понять, что надо доказывать и как это естественно делать.

Поскольку один признак равенства треугольников уже есть, при доказательстве второго появляется выбор — либо свести дело к проверке условий первого признака, либо воспользоваться определением. Как свести к первому признаку не очень понятно, поэтому пойдем другим путем, а именно проверим выполнение всех условий определения равенства треугольников.

Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, и известно, что $A_1B_1 = AB$, $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$.

Какова цель, достижение которой означает обоснованность утверждения?

В учебнике про цель вообще ничего (и никогда) не говорится, но мы на это внимание обратим и задумаемся о цели, признаках ее достижения и пути, который ведет к этой цели.

Цель: обеспечить совмещение треугольников при наложении.

Выберем элемент, с которого начнем процесс наложения. Можно начать с одного из углов, а можно со стороны. Начнем со стороны. Наложив сторону A_1B_1 на сторону AB и отметив, что отрезки совместились ввиду их равенства, обратимся к углам. Поскольку, как известно, от данного луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному, от луча AB отложим угол с вершиной в точке A , равный углу A_1 , и аналогично поступим с другим углом. Что осталось обеспечить для достижения цели? Осталось гарантировать совпадение третьей вершины. Будем обеспечивать совмещение третьей вершины.

При наложении углов перемещенный луч A_1C_1 совместился с лучом AC , то есть эти лучи расположены на одной прямой, перемещенный луч B_1C_1 совместился с лучом BC , и эти лучи также расположены на одной прямой. Но две прямые могут пересекаться только в одной точке, откуда заключаем, что точка C_1 пересечения A_1C_1 и B_1C_1 совпадает с точкой C пересечения AC и BC . Стало быть, все требования из определения равенства треугольников выполнены и треугольники равны.

В принципе, в учебнике написано примерно так же, но важно в процессе доказательств расставлять акценты, ставить цели и их достигать.

Далее сформулирован третий признак равенства треугольников, по трем сторонам. И здесь формулировка классическая и предельно ясная. Снова зададим вопрос: чего недостает для выполнения всех требований равенства треугольников? Это приведет к постановке цели, а затем будем думать о способах ее достижения. Не хватает гарантии, что при наложении совпадут все соответствующие вершины. Стало быть, цель — гарантировать совпадение вершин. Однако неясно, как это сделать.

Речь идет о точках, у них слабое взаимодействие с другими деталями. С отрезками проще — там достаточно воспользоваться, например, гарантией возможности отложить отрезок, равный данному. Насчет точек такие свойства не припоминаются. Это побуждает подумать насчет того, чтобы доказательство этого признака свести к проверке условий какого-то из уже имеющих двух признаков. В этом проявляется элемент творчества. В учебнике вполне хороший текст доказательства, но все же порассуждаем о нем с точки зрения динамичности развития

действий, и это будет проявлением творчества, то есть выполнения действий неожиданных. Здесь творчество будет состоять хотя бы в выборе признака, на который предстоит опереться.



Рис. 2.10.

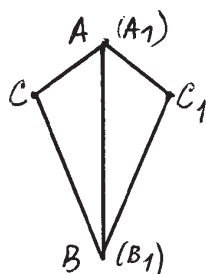


Рис. 2.11.

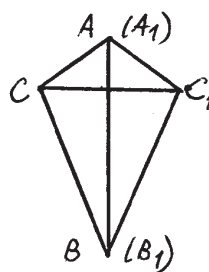


Рис. 2.12.

Пусть даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ и известно, что их стороны соответственно равны. Расположим на одной прямой совмещенные между собой отрезки A_1B_1 и AB (рис. 2.10). Расположим треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC так, чтобы точки C_1 и C оказались в разных полуплоскостях (рис. 2.11). Появилась возможность использования равнобедренных треугольников, ибо есть две пары равных между собой отрезков, это A_1C_1 , AC и B_1C_1 , BC . Соединив C_1 и C , получаем три возможности: (1) отрезок CC_1 пересекает отрезок AB в точке, отличной от A или B , (2) отрезок CC_1 не пересекает отрезка AB , (3) отрезок CC_1 включает в себя либо A , либо B .

В предположении, что прямая CC_1 пересекает отрезок AB и не проходит через какую-либо из точек A , B , получим равнобедренные треугольники CBC_1 и CAC_1 (рис. 2.12). Из равнобедренности этих треугольников получаем, что $\angle BCC_1 = \angle BC_1C$ и $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$. В этом случае углы C_1 и C состояются из двух равных углов как их сумма. Во втором случае появляется разность двух равных углов, в третьем случае угол один. В итоге оказалось, что выполнены условия первого признака, который гарантирует, что треугольники равны.

2.6. Примеры. Комментировать теоретический материал учебника интересно и, возможно, полезно, но при изучении

математики существенна способность применять теоретический материал к решению задач, так что иногда будем обращать внимание и на решение задач.

Разберем несколько примеров на тему равенства треугольников. Рассматриваемые три несложные задачи выбраны из списка задач, представленных в учебнике, из соображений поучительности.

Пример 1 (задача 160). Прямая a проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна ему. Доказать, что

- (а) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B .
- (б) каждая точка, равноудаленная от A и B , лежит на прямой a .

В задаче речь идет о хорошо известном и нередко используемом критерии серединного (раньше, кажется, говорили «серединного») перпендикуляра к прямой.

Начнем доказывать пункт (а).

Что у нас есть?

Есть отрезок AB , его середина и прямая a , проходящая через эту середину и перпендикулярная отрезку. Полезно доказываемое утверждение переформулировать, выделяя данные и требуемый результат, то есть констатировать, что дано и что надо. В таком стиле утверждение (а) можно переформулировать так: если точка принадлежит прямой a , то она равноудалена от A и B , или так: дана произвольная точка на прямой, проходящей через середину M отрезка и перпендикулярной ему; надо доказать, что расстояния от нее до концов отрезка равны между собой.

Можно перейти к формированию действий путем введения обозначений для рассматриваемых деталей. Пусть C — произвольная точка на прямой a (рис. 2.13). Надо доказать, что $AC = BC$.

Как можно обеспечивать равенство отрезков?

Например, представив их как соответственные стороны в равных треугольниках. Это довольно общее наблюдение, полезное не только в нашем доказательстве, но и вообще в разных ситуациях. Иначе говоря, когда есть цель доказать равенство отрезков, изучайте треугольники, в которых эти отрезки

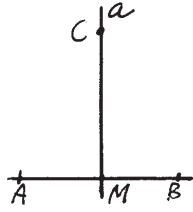


Рис. 2.13.

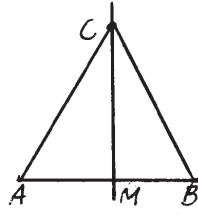


Рис. 2.14.

суть стороны. В нашей ситуации легко обнаружить треугольники, в которых AC и BC — стороны. Это треугольники ACM и BCM (рис. 2.14). Если докажем равенство этих треугольников, то будут равны и изучаемые стороны. Равенство нетрудно получить на основе первого признака равенства треугольников: $AM = BM$ по условию, сторона CM общая и углы AMC и BMC равны, ибо каждый из них по 90° . Тем самым треугольники ACM и BCM равны, стало быть, равны стороны AC и BC .

Займемся обратным утверждением, кстати, обратив внимание на терминологию, связанную с взаимно обратными утверждениями. В принципе, она уже может быть где-то сообщена и отработана, но на всякий случай можно напомнить, что для высказываний P и Q утверждения вида «если P , то Q » и «если Q , то P » называют взаимно обратными, то есть каждое из них обратное по отношению к другому. Тем самым на этот раз надо доказать, что если точка равноудалена от концов отрезка, то она расположена на прямой, проходящей через середину отрезка и перпендикулярной ему.

Ситуация отличается от рассмотренной в пункте (а) тем, что нет признаков достижения цели, а именно признаков принадлежности точки данной прямой, то есть таких утверждений, которые гарантировали бы получение результата — принадлежности точки прямой.

Что делать?

Прибегать к методам здравого смысла и пристального взгляда.

Что подсказывают нам эти методы?

Надо задаться вопросом: чем вообще характеризуется прямая? Если удастся описать такие характеристики, то для до-

казательства расположения точки на прямой надо будет просто проверить, что эта точка удовлетворяет всем таким требованиям. Прямая a состоит из таких точек, для которых отрезок, соединяющий точку на a с точкой на AB , одновременно перпендикулярен AB и проходит через середину. Значит, надо доказать, что если $AC = BC$, то, соединив точку на a с точкой на AB так, чтобы выполнялось одно из требований, получим выполнение второго свойства. Пусть M на AB такова, что CM перпендикулярна AB . Надо при этом доказать, что M — середина AB , то есть что $AM = BM$. Это легко вытекает из свойств равнобедренного треугольника ABC , а именно, высота, проведенная к основанию, является медианой.

Можно подчеркнуть, что все изложенные рассуждения исключительно примитивны и элементарны, однако без такой детализации может оказаться трудным восприятие более сложных обоснований.

Пример 2 (задача 170). Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $AD = A_1D_1$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

Сформулируем условие в более технологичном виде. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. В них проведены биссектрисы AD и A_1D_1 . Известно, что в треугольниках равны по одной стороне, по одному углу и равны биссектрисы, выходящие из равных углов (рис. 2.15).

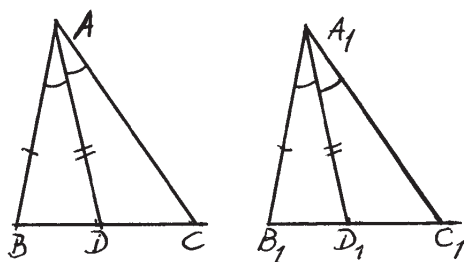


Рис. 2.15.

В чем состоит признак достижения цели, то есть обеспечения равенства треугольников? Либо мы чем-то гарантируем возмож-

ность совпадения треугольников при наложении одного на другой, либо сумеем проверить выполнение какого-то из известных уже признаков равенства треугольников. Здравый смысл подсказывает, что вряд ли надо здесь налагать один из треугольников на другой. Поэтому займемся анализом с точки зрения обеспечения выполнения условий какого-либо признака равенства треугольников. Стало быть, признак достижения цели — доказательство того, что в условиях задачи выполнены условия какого-то из признаков равенства треугольников.

Начнем думать, то есть задавать вопросы, и сначала обратимся к тому, что можно получить из данных за один шаг. Видно, что есть одинаковые элементы. Одинаковы две пары отрезков, один из которых служит стороной, другой — биссектрисой, и есть равные углы. Согласно имеющейся информации для треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ выполнены условия первого признака равенства треугольников. Значит, эти треугольники равны (см. рис. 2.15).

Что можно получить из установленного равенства?

У равных треугольников все элементы равны — углы и соответственные стороны. В частности, $BD = B_1D_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Равны и углы при вершинах D и D_1 , но это вряд ли нас интересует, так как эти углы не участвуют как углы исходных треугольников. На основе добытой информации надо выбрать среди признаков равенства треугольников применительно к исходным треугольникам, какой из них окажется наиболее эффективным или даже просто применимым. Поскольку отмеченные отрезки BD и B_1D_1 не стороны треугольника, а лишь их части, по-видимому, надо обратить внимание на равенство углов. В исходных треугольниках есть равенство пары углов, а именно $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, и прилежащих к ним сторон: $AB = A_1B_1$. Пришли к тому, что для исходных треугольников выполнены условия второго признака, так что треугольники равны. Признак достижения цели выполнен, цель достигнута.

Приведенный ход рассуждений был основан на построении от исходных данных. Полезно попробовать организовать диалог, основанный на анализе результата. Допустим, что не сразу заметили наличие равенства каких-то треугольников или кто-то из учащихся предложил другое направление рассуждений. То-

гда надо ставить вопрос: откуда получить требуемое за один шаг? Обратим внимание на детали: есть равенство отрезков — сторон AB и A_1B_1 — и равенство углов, отметим это отдельно (рис. 2.16).

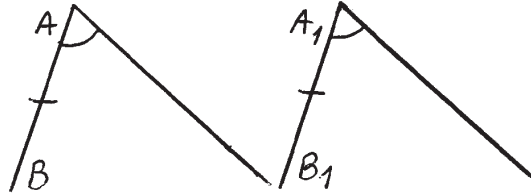


Рис. 2.16.

На какой признак можно ориентироваться, продолжая рассуждения?

Либо надо доказывать равенство сторон, связанных с равными углами, то есть сторон AC и A_1C_1 , либо углов, а именно углов B и B_1 .

Как обеспечить равенство отрезков или равенство углов?

Получив их как детали равных треугольников.

В каких треугольниках можно попробовать обеспечить равенство?

Ясно, что в тех, в которых еще что-то известно, а известно равенство отрезков AD и A_1D_1 . Получилось, что надо обратиться к треугольникам ABD и $A_1B_1D_1$, и провести рассуждения, изложенные выше.

Пример 3 (задача 171). В треугольниках ABC и ADC стороны BC и AD равны и пересекаются в точке O , $\angle OAC = \angle OCA$. Доказать, что треугольники ABO и CDO равны.

Начнем с подготовки чертежа, ибо в условии указаны несколько взаимосвязанных обстоятельств. Внимательно посмотрев на условие, обнаруживаем, что в обозначениях двух треугольников две буквы одинаковые. Это говорит о том, что на одном отрезке AC построены два треугольника. От отрезка AC в одной из полуплоскостей отметим точку B и, чтобы отрезки BC и AD

пересекались, в этой же полуплоскости отметим точку D , например, как на рис. 2.17. Отметим точку O их пересечения. Отметим равные углы (см. рис. 2.17). Поставим цель: доказать, что треугольники ABO и CDO равны (на рис. 2.18 выделены). Признаком достижения цели можно считать проверку выполнения условий какого-то из признаков равенства треугольников.

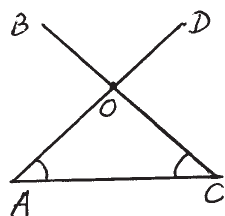


Рис. 2.17.

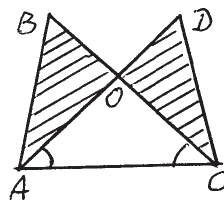


Рис. 2.18.

Начнем думать, например от данных. Что можно получить из данных?

Поскольку $BC = AD$ и $\angle BCA = \angle DAC$, треугольники ABC и CDA равны по первому признаку. Можно считать, что этот ход включает элемент микротворчества, ибо в результате пристального взгляда на основании условий сделан некоторый вывод, а именно обнаружено что-то новое в виде равенства треугольников. Ситуация немного изменилась за счет новой информации. Что-то добыв, этим воспользуемся, то есть отметим, какая информация добавляется за счет равенства треугольников: это равенство отрезков $AB = CD$ и углов $\angle B = \angle D$.

Продолжим думать: что нового появилось относительно треугольников ABO и CDO ?

Появились равные стороны $AB = CD$ и прилежащие к ним углы $\angle B = \angle D$. Настала пора подумать, откуда, за счет чего, за счет какого признака получить требуемое равенство треугольников. Можно попытаться доказать равенство отрезков BO и DO , а можно равенство углов BAO и DCO . Снова элемент творчества, так как надо выбирать из нескольких возможностей, а для этого надо думать и оценивать каждый из вариантов. Здравый смысл может подсказать, что если в задаче больше говорится о равенствах сторон, то может быть пойти на доказательство равенства

отрезков и применение первого признака равенства треугольников.

Откуда можно обеспечить равенство отрезков BO и DO ?

Например, из равенства треугольников, в которых эти отрезки суть стороны. Но в нашем случае это не пройдет, ибо именно для тех треугольников, в которых это стороны, и надо доказывать равенство. Есть еще один ход для работы с отрезками (или углами), а именно обнаружив их как части других отрезков (или углов). Пристальный взгляд подсказывает, что BO — часть BC , DO — часть AD , и остается понять, равны ли отрезки AO и CO . Это сделать совсем нетрудно, отметив, что из равенства углов $\angle CAO$ и $\angle ACO$ следует, что треугольник ACO равнобедренный, а тогда $AO = CO$. Стало быть, $BO = BC - CO = AD - AO = DO$ и выполнение условий первого признака равенства треугольников применительно к треугольникам ABO и CDO гарантирует их равенство.

2.7. Построения циркулем и линейкой. Объявленная в названии пункта тема, насколько я понимаю, сейчас не очень популярна для изучения в школе. Причина, скорее всего, в том, что ни на каких экзаменах она не просматривается, а тогда зачем ее изучать? Вопрос естественный и ответ на него, казалось бы, тоже естественный: незачем. Однако если мыслить не только днем сегодняшним, но и ближайшим, и рассматривать курс геометрии не только с точки зрения более успешной сдачи экзаменов, то обращение к теме о построениях циркулем и линейкой очень даже оправданно.

В качестве мотивировки рассмотрения данной темы в учебнике написано следующее. «Мы уже имели дело с геометрическими построениями: проводили прямые, откладывали отрезки, равные данным, чертили углы, треугольники и другие фигуры. При этом мы пользовались масштабной линейкой, циркулем, транспортиром, чертежным угольником. Оказывается, что многие построения можно выполнить с помощью только циркуля и линейки без масштабных делений. Поэтому в геометрии специально выделяют те задачи на построение, которые решаются с помощью только этих инструментов.»

Хорошая мотивировка, но в современных условиях абсолютно неубедительная. Если потребуется что-то изобразить конкрет-

ное, скорее всего, стоит обратиться не к циркулю и линейке, а к компьютерным возможностям, которые обеспечат практически любые потребности. Но тогда естествен вопрос: зачем учиться выполнять построения с использованием только циркуля и линейки без делений?

Дело в том, что именно этот раздел планиметрии способствует формированию алгоритмического мышления, весьма желательного во многих видах деятельности. Зададимся вопросом: что значит построить с помощью циркуля и линейки? Это не означает создать изображение на листе бумаги. Это значит составить алгоритм действий, решающий поставленную задачу, то есть разбить процесс от исходных данных до результата на последовательность исполняемых шагов, приводящую к требуемому результату. Тем самым надо выделять исходные данные, цель, признак ее достижения и проверку того, что цель достигнута. Поскольку почти всё, что мы делаем, связано с построением алгоритмов, не вредно на элементарном материале, не требующем материальных затрат, формировать навыки построения алгоритмов, используя в качестве исходного материала геометрические фигуры, в качестве инструментов — возможности, предоставляемые циркулем и линейкой без делений. К таким возможностям относят следующие: как написано в учебнике, «линейка позволяет провести произвольную прямую, а также построить прямую, проходящую через две заданные точки. С помощью циркуля можно провести окружность произвольного радиуса, а также окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку».

Среди всевозможных задач на построение следует выделить базовые, которые как фрагменты часто встречаются в других задачах. К ним отнесем следующие алгоритмы:

- (1) построить угол, равный данному,
- (2) построить треугольник по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим углам, по трем сторонам,
- (3) построить биссектрису данного угла, то есть разделить угол пополам,
- (4) разделить отрезок пополам,
- (5) через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой,

(6) через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Обсудим некоторые из базовых построений, часть отнесем к главе 4, ибо они связаны с необходимыми условиями выполнения построений, которые появятся позже, последний оставим читателю. Начнем с первого, тем более что в учебнике именно оно и фигурирует по существу в качестве первого примера задачи на построение.

Пример 1. Построить угол, равный данному.

Можно прочесть предложенное в учебнике построение, но там авторы выполняют какие-то манипуляции, несколько не озаботившись о их мотивировке: почему они так поступают и зачем, почему это приведет нас к цели, то есть к алгоритму, обеспечивающему угол, равный данному, недостаточно ясно. Поэтому будем рассуждать, в частности, задавать вопросы.

Начнем с исходного материала: даны угол и луч l (рис. 2.19, 2.20).

Цель: создать алгоритм, в результате выполнения которого от луча l отложится угол, равный данному.

Для начала надо задуматься о том, как фиксировать меру данного угла с помощью двух инструментов — циркуля и линейки, с тем, чтобы можно было ее применить в произвольной части плоскости. С помощью циркуля можно фиксировать расстояние между двумя точками и использовать его где угодно. Тем самым можно использовать расстояние между двумя точками, расположенными на разных сторонах угла. Ясно, что если эти точки ничем не выделяются, то пользы от такой фиксации нет, ибо после фиксации неясно, где эту информацию далее применять. Другое дело, если удастся чем-то дополнительно используемые точки выделить. И в этот момент проявляется творчество. Можно взять точки, одинаково отстоящие от вершины угла, и сделать это можно с помощью циркуля.

Тем самым начало алгоритма есть: надо циркулем провести окружность произвольным радиусом с центром в вершине данного угла и выделить точки A , B ее пересечения со сторонами угла (рис. 2.21). Появляется переносимый в другое место отрезок AB , соединяющий эти две точки и могущий выступать в качестве меры угла. Теперь следует провести окружность с цен-

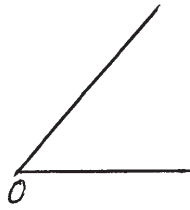


Рис. 2.19.



Рис. 2.20.

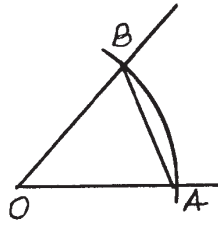


Рис. 2.21.

тром в начале O_1 данного луча тем же радиусом, каким была проведена первая окружность (рис. 2.22). Затем надо провести окружность радиусом, равным отрезку AB , с центром в точке A_1 ее пересечения с лучом l . Точка B_1 пересечения двух построенных окружностей даст точку второго луча искомого угла (см. рис. 2.22).

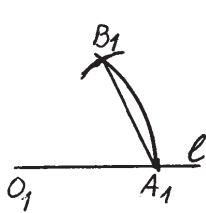


Рис. 2.22.

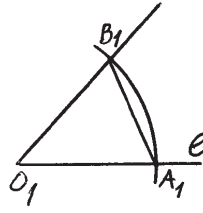


Рис. 2.23.

Приведенные рассуждения следует оформить в виде алгоритма, то есть последовательности исполняемых шагов, приводящего к поставленной цели, и затем убедиться в том, что цель достигнута, а также выяснить, есть ли какие-то ограничения на работу алгоритма, то есть всегда ли построение можно выполнить.

1. Проведем окружность с центром в точке O некоторым радиусом и отметим точки A , B ее пересечения со сторонами угла (см. рис. 2.21).

2. Проведем окружность с центром O_1 тем же радиусом (см. рис. 2.22). Пусть A_1 — точка ее пересечения с данным лучом.

3. Проведем окружность с центром в точке A_1 радиусом AB (см. рис. 2.22). Пусть B_1 — точка ее пересечения с построенной

ранее окружностью.

4. Возьмем луч с началом с точке O_1 , проходящий через точку B_1 (рис. 2.23).

Докажем, что угол $A_1O_1B_1$ искомый. Действительно, треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ равны по трем сторонам, стало быть, угол $A_1O_1B_1$ равен углу AOB .

Пример 2. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Цель: создать алгоритм, обеспечивающий на плоскости треугольник, в котором один из углов равен данному и прилежащие к нему стороны равны данным отрезкам.

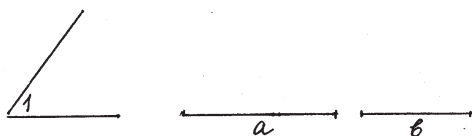


Рис. 2.24.

Определимся с тем, что дано и что требуется. Даны угол 1 и два отрезка, пусть a и b (рис. 2.24). В нашем распоряжении три элемента, и с какого-то надо начинать построение. В принципе, пока эти элементы ничем не выделяются, так что можно попробовать начать с любого из них. Выбор начального элемента можно считать микротворчеством, и в разных ситуациях могут быть разные соображения на этот счет.



Рис. 2.25.

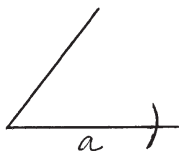


Рис. 2.26.

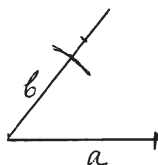


Рис. 2.27.

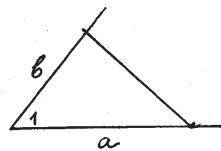


Рис. 2.28.

Начнем с элемента, который труднее построить. Здесь это угол, ибо отрезок сразу переносится в любое место, а угол это

конструкция, хотя и простая. Так что начнем с угла, то есть где-то на плоскости строим угол, равный данному (рис. 2.25). Это одно из базовых построений, рассмотренное в примере 1, и на нем не останавливаемся. Затем на одной из сторон угла надо обеспечить отрезок, равный одному из заданных отрезков. Это можно сделать с помощью циркуля, проведя с центром в вершине угла окружность радиусом, например, a (рис. 2.26). Точка ее пересечения с одним из лучей укажет конец одной из сторон требуемого треугольника. Проделаем то же самое с другим отрезком, то есть с отрезком b , отложив его на второй стороне угла (рис. 2.27). Получим еще одну вершину треугольника. Остается соединить полученные на сторонах угла точки отрезком, и требуемый треугольник построен (рис. 2.28).

Обоснование того, что получен требуемый результат, вытекает из построения. Алгоритм работает при любых данных.

В учебнике построение начинается с откладывания отрезка, равного одному из данных, на заданной прямой. Однако неясно, чем вызвана фиксация некоторой прямой, во всяком случае в условии не отмечено, что надо построить треугольник не только по заданным элементам, но еще и так, чтобы одна из его сторон лежала на заданной прямой. Если такое требование включить в условие, то тогда понятно, что и наши соображения начнутся с построения угла, одна из сторон которого лежит на заданной прямой.

Пример 3. Построить биссектрису данного угла.

Проведем небольшой эксперимент и просто начнем читать данное в учебнике решение поставленной задачи. «Данный угол BAC изображен на рисунке 86. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине A . Она пересечет стороны угла в точках B и C . Затем проведем две окружности одинакового радиуса BC с центрами в точках B и C (на рисунке изображены лишь части этих окружностей). Они пересекутся в двух точках, из которых хотя бы одна лежит внутри угла.» На знаю, как вы, но я уже потерялся в дебрях немотивированности и непредсказуемости предложенных действий. Зачем это делалось, почему эти действия направлены на решение именно этой задачи? Как, например, ученик может на этот вопрос ответить? Поэтому начнем думать и анализировать ситуацию, естествен-

но, задавая вопросы (например самому себе) и пытаясь на них ответить.

Дан угол (рис. 2.29), и требуется обеспечить алгоритм построения точки такой, что луч, исходящий из вершины данного угла и проходящий через эту точку, делит данный угол пополам.

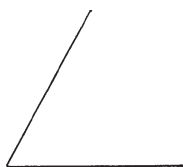


Рис. 2.29.

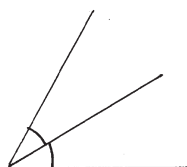


Рис. 2.30.

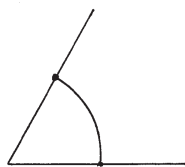


Рис. 2.31.

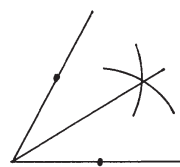


Рис. 2.32.

Прибегнем к одному из активно используемых способов анализа, основанному по существу на необходимых условиях. Допустим, что такая точка построена или что требуемый луч проведен (рис. 2.30). Что особенного при этом появляется? Появляются равные углы. Заметим, что пока участвуют только образы, символов нет, и это неспроста, ибо в геометрии преимущественно мыслят образами, а не символами.

Где встречаются равные углы?

В равных треугольниках: если треугольники равны, то и углы в них соответственно равны. У нас равных треугольников нет, но их и не должно быть, их надо обеспечить.

Как это сделать?

Можно на сторонах данного угла отложить равные отрезки, сделав заготовку для равных треугольников (рис. 2.31). Затем можно поступить, например, так: от точек на сторонах угла отойти на равные расстояния за счет проведения равных окружностей с центрами в этих точках. Точка их пересечения даст равные отрезки и появятся два равных треугольника, в которых появятся требуемые равные углы (рис. 2.32). И это завершает подготовку алгоритма. Теперь можно его оформить, например, с использованием символов, но без использования рисунков.

Пусть дан угол A .

1. От вершины A угла на его сторонах отложим равные отрезки AB и AC .

2. Проведем окружности одним радиусом с центрами в B и C так, чтобы они пересеклись. Пусть E — точка их пересечения внутри данного угла.

3. Треугольники ABE и ACE равны по трем сторонам.

4. По построению и ввиду равенства треугольников угол CAE равен углу BAE .

Предложенный алгоритм выполняется для произвольного данного угла.

Пример 4. Дан отрезок, построить его середину.

Поступим так же, как и в предыдущем примере, а именно предположим, что требуемая точка построена, спрашивается: что в ней особенного можно отметить?

Где мы встречались с серединой отрезка?



Рис. 2.33.

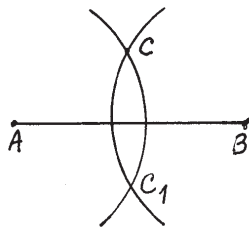


Рис. 2.34.

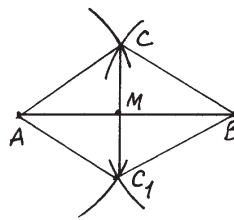


Рис. 2.35.

Когда говорили, что биссектриса, медиана и высота совпадают в некоторой фигуре, называемой равнобедренным треугольником. Значит, надо обратиться к построению детали в равнобедренном треугольнике, которую на данном этапе нашего развития мы построить можем. Поскольку с высотой, то есть с перпендикуляром, дела еще не было, а с биссектрисой уже разобрались, обратим внимание на биссектрису. Сначала надо обеспечить равнобедренный треугольник, в котором данный отрезок AB является основанием (рис. 2.33). Для этого надо подготовить геометрическое место точек, равноотстоящих от концов отрезка, что

сделать возможно, это суть окружности одного радиуса с центрами в концах A, B отрезка. Надо взять их таким радиусом, чтобы они пересеклись. Пусть C и C_1 — точки пересечения таких окружностей (рис. 2.34). По построению $AC = BC$, $AC_1 = BC_1$ и треугольники ABC и ABC_1 равны, поэтому CC_1 — биссектриса угла C (рис. 2.35). Поскольку треугольник ABC равнобедренный, а биссектриса в равнобедренном треугольнике является медианой, точка M пересечения CC_1 и AB искомая (см. рис. 2.35).

Теперь можно составить алгоритм, например, так же, как это описано в учебнике.

1. Проведем окружности с центрами в точках A и B одним радиусом так, чтобы они пересеклись, пусть в точках C и C_1 .

2. Образует треугольники ABC и ABC_1 . Они равны по третьему признаку и равнобедренные по построению.

3. Пусть $M = AB \cap CC_1$.

Точка M искомая.

Действительно, $\angle ACC_1 = \angle BCC_1 = \angle BC_1C = \angle AC_1C$, значит, CM — биссектриса в равнобедренном треугольнике ABC , а тогда она также и медиана и $AM = BM$.

Отметим, что алгоритм действует применительно к любому отрезку.

Пример 5. Даны прямая и точка. Построить прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную точку.

Кстати, отмечу, что в учебнике используется словосочетание «перпендикулярна к чему-то», мне совсем непривычное, и я, как и ранее, в дальнейшем буду использовать словосочетание «перпендикулярна чему-то». Это не только мне привычнее, но и согласуется со словосочетанием «параллельна чему-то», а не «к чему-то».

В задаче дана прямая и дана точка, но где точка расположена относительно прямой — не указано. Какие есть возможности? Их две: точка может быть расположена на прямой и вне нее. Значит, надо рассматривать два случая. Начнем со случая, когда точка, обозначим ее через A , находится на данной прямой l . Тем самым задача состоит в том, чтобы в точке A восстановить перпендикуляр к прямой l .

Снова начинаем думать, то есть задавать вопросы.

Где может появиться перпендикуляр?

Как и раньше, нередко в равнобедренном треугольнике.

Какие детали равнобедренного треугольника, доступные для построения, приведут к перпендикуляру?

Либо биссектриса, либо медиана. Стало быть, надо создать равнобедренный треугольник так, чтобы точка A оказалась, например, серединой его основания. Для этого достаточно отложить от A в разные стороны равные отрезки и взять геометрическое место точек, отстоящих от концов отрезка на одно расстояние. В принципе, приведенных рассуждений достаточно для создания алгоритма построения.

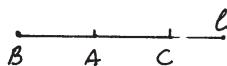


Рис. 2.36.

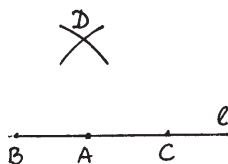


Рис. 2.37.

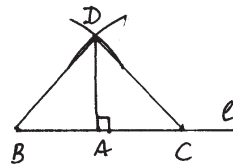


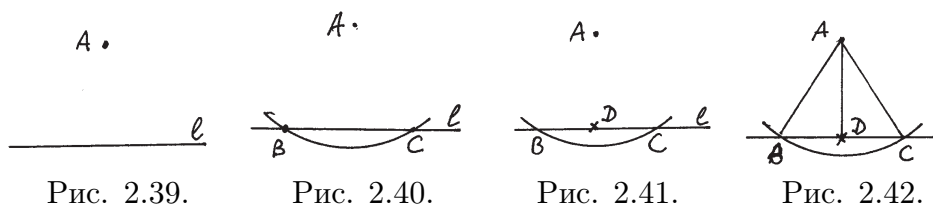
Рис. 2.38.

1. Отложим от точки A равные отрезки AB и AC (рис. 2.36).
2. Проведем окружности одним радиусом с центрами в точках B и C так, чтобы они пересеклись. Пусть D — какая-то из точек их пересечения (рис. 2.37).

3. Вершину D равнобедренного по построению треугольника BCD соединим с точкой A . Прямая DA искомая (рис. 2.38).

Для обоснования того, что AD перпендикулярна l , достаточно использовать тот факт, что медиана в равнобедренном треугольнике является в нем высотой, то есть перпендикулярна основанию.

Пусть точка A расположена вне прямой l (рис. 2.39). Ясно, что потребуется равнобедренный треугольник, на этот раз с вершиной A , и в нем надо будет обеспечить медиану (или биссектрису). Разница по сравнению с первым случаем в том, что теперь равные отрезки будем получать не за счет двух точек на заданной прямой, равноотстоящих от заданной, а за счет геометрического места точек, равноотстоящих от точки A . Иначе



говоря, проведя окружность с центром в A таким радиусом, чтобы она имела пересечения с прямой l , построим середину полученного отрезка. Остается соединить эту середину с точкой A и задача будет решена.

После приведенных рассуждений можно составлять алгоритм.

1. Проведем окружность с центром в точке A таким радиусом, чтобы она имела пересечение с прямой l , пусть в точках B и C (рис. 2.40).

2. Построим середину D отрезка BC (рис. 2.41).

3. Проведем прямую AD (рис. 2.42). Она искомая.

Обоснование того, что $AD \perp l$, снова проводится на основе свойств отрезков в равнобедренном треугольнике.

Ясно, что алгоритм достижения цели в последнем построении далеко не единственный, есть вариации. Здесь был выбран ход с серединой отрезка для того, чтобы подчеркнуть возможность использования подготовленных ранее построений в качестве деталей новых построений.

Глава 3. Параллельные прямые

3.1. Признаки параллельности двух прямых. Начинается материал с традиционного определения параллельных прямых, настолько классического, что изложить его можно только хорошо или очень хорошо. Разумеется, в этот момент неплохо напомнить, что речь идет об идеальных объектах, существующих только в нашем воображении, а именно о бесконечно продлеваемых прямых.

Далее идет пункт, посвященный признакам параллельности двух прямых. Здесь полезно напомнить или вспомнить, что при-

знак — это некоторое (достаточное) условие, гарантирующее наличие интересующего нас свойства. В частности, здесь это какое-либо условие, гарантирующее параллельность двух прямых. Допустим, надо быть уверенными, что рассматриваемые прямые параллельны, но реально проверить это невозможно (они ведь не только мыслимые, но и в мыслях бесконечные). Что тогда делать? Придется придумать какой-то реальный способ, позволяющий гарантировать параллельность. Для этого надо выявить проверяемые обстоятельства, наличие которых гарантирует параллельность.

В качестве проверяемых обстоятельств используют взаимодействие данных двух прямых и третьей, их пересекающей и потому называемой секущей (для данных прямых). При пересечении появляются пары углов, для них вводятся наименования: накрест лежащие (раньше различали внутренние и внешние накрест лежащие, в этом учебнике различие отсутствует), односторонние и соответственные. Это классическая терминология и она, естественно, изложена хорошо. Углы уже более обозримый объект, чем (бесконечные) прямые, можно проверять их сравнение, в частности, равенство, и это можно использовать в качестве проверяемых обстоятельств, гарантирующих параллельность.

После определения типов углов идет теорема, сформулированная весьма лаконично: *если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны*. Красивая формулировка, напоминающая лозунг. Однако прежде чем ее доказывать неплохо бы порассуждать о содержании этого утверждения, переформулировать его с точки зрения большей технологичности в плане доказательства и применения.

Отточенные лаконичные формулировки хороши своей краткостью и возможностью их запоминания и воспроизведения. Однако желательно обладать способностью к таким переформулировкам, в которых абсолютно ясна обстановка, в рамках которой формулируется утверждение, что является его условием и в чем состоит гарантируемый результат. Такой стиль полезен для подготовки естественных шагов при доказательствах и полезен для обнаружения возможности применения утверждений при решении задач.

Обстановкой можно назвать описание ситуации, в рамках

которой будут формулироваться условия и получаться результат. В частности, для рассматриваемого утверждения можно начать с такой фразы: «пусть две прямые пересекаются третьей прямой» или «рассмотрим две прямые и их секущую». Далее можно сформулировать условие, то есть что предполагается, и это можно сообщить, например, так: «предположим, что накрест лежащие углы равны». Затем сообщить результат: «тогда данные прямые параллельны» или «доказать, что данные прямые параллельны». Вместе это может звучать так: *Рассмотрим две прямые и их секущую. Если накрест лежащие углы равны, то данные прямые параллельны.* Разумеется, переформулировки можно использовать при подготовке доказательств, а сами формулировки предлагать, как в учебнике, в отточенном лаконичном виде. Одно другому не противоречит.

Далее идет доказательство. Начало (первый абзац) вполне хорошее. Далее начинаются некоторые построения, и не совсем понятно, почему выбраны предлагаемые действия, а не какие-то другие. Непонятно, на какое утверждение следует опираться для доказательства параллельности. Для выбора такого утверждения надо вернуться назад и проследить, в каких утверждениях параллельность встречалась в результате. Нетрудно обнаружить, что такое утверждение одно, а именно замеченное вскользь в параграфе о перпендикулярных прямых утверждение о том, что две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются. Значит, надо как-то опереться на указанный факт.

В условии ничего неизвестно о том, как расположена секущая относительно данных двух прямых. Поэтому надо рассматривать две возможности. Накрест лежащие углы могут оказаться прямыми. В таком случае секущая перпендикулярна двум данным прямым и является той третьей прямой, которая участвует в найденной формулировке.

А если они не прямые, что тогда?

Тогда надо на основании условий построить прямую, перпендикулярную двум данным прямым, и будет получен результат.

Как придумать такое построение?

Пусть внутренние накрест лежащие углы не прямые. Поскольку надо постараться обеспечить какую-то прямую, перпендикулярную двум данным прямым, проведем небольшой экспе-

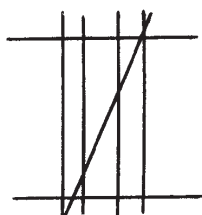


Рис. 3.1.

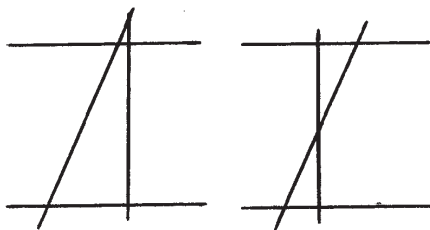


Рис. 3.2.

римент. Будем проводить разные прямые, перпендикулярные одной из данных прямых, и смотреть, какие фигуры в результате появляются, чтобы попытаться воспользоваться какими-то их свойствами и подобрать прямую, относительно которой можно гарантировать, что она перпендикулярна и второй прямой (рис. 3.1). Во всяком случае возникают треугольники, по-разному друг относительно друга расположенные (рис. 3.2), и здесь проявляется творчество: на какие треугольники надо обратить внимание? Скорее всего, на те, которые получаются, когда перпендикулярные прямые пересекают секущую между двумя данными прямыми, как на правом рис. 3.2. В таком случае наблюдаются пары треугольников, расположенных по разные стороны от их общей вершины. Если удастся обнаружить среди них равные, а признаки равенства у нас уже есть, то появится шанс среди проводимых прямых обнаружить такую, которая перпендикулярна второй прямой, и тогда можно будет воспользоваться упомянутым выше утверждением.

Творчество может подсказать нам, что надо обратиться к прямой, перпендикулярной одной из двух данных прямых и проходящей через середину O отрезка AB (рис. 3.3). После таких соображений можно вернуться к данному в учебнике доказательству, при котором желаемая прямая, по-существу, строится. Через точку O проведем прямую OH , перпендикулярную прямой a (рис. 3.4). На прямой b от точки B отложим отрезок BH_1 , равный отрезку AH (рис. 3.5). В результате этих действий, как обосновано в учебнике, получаем равные треугольники $ОНА$ и $ОН_1В$. Следовательно, угол BH_1O прямой так же, как и согласно условию угол AHO . Кроме того, $\angle AOH = \angle BOH_1$. Отсю-

да делаем вывод, что лучи HO и H_1O расположены на одной прямой за счет единственности откладывания угла от данного луча в данной полуплоскости. Стало быть, прямая HH_1 перпендикулярна сразу прямым a и b , а тогда по отмеченному выше утверждению эти прямые параллельны.

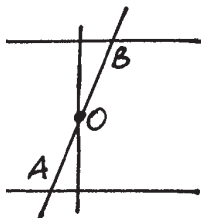


Рис. 3.3.

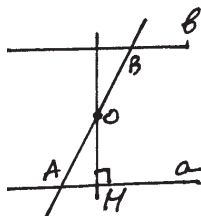


Рис. 3.4.

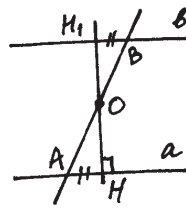


Рис. 3.5.

Представленные в учебнике еще два признака доказываются на основе только что доказанного и в особых комментариях не нуждаются. Можно сказать, что их доказательства очевидны, и вспомнить суть слова «очевидно», употребляемого в математическом тексте. Это слово можно толковать как «интуитивно ясно», и в математике такое толкование недопустимо, а можно его понимать как «нетрудно доказать», и когда встречается в математике слово «очевидно», надо быть уверенным, что сформулированное действительно нетрудно доказать.

3.2. Аксиома параллельных прямых. Наконец-то речь зашла об основах той учебной дисциплины, изучением которой уже давно занимаемся, то есть об аксиомах. Вполне возможно, что в такой задержке есть какой-то смысл, не знаю. Может быть, авторы считали, что на первых порах ученики еще не дозрели до восприятия сколько-то формального подхода к предмету, хотя изучение в условиях элементов недосказанности и волшебства вместо построения структурированного знания трудно считать формирующим культуру мышления.

В первом пункте параграфа, посвященного аксиоме параллельности, вполне приемлемо рассказывается о сути аксиом и

приводятся как бы в качестве примера три безусловных утверждения, которые ранее неоднократно использовались. В следующем пункте рассказано об аксиоме параллельных прямых и упомянуто, что принятие этой аксиомы даст ту геометрию, которая далее изучается. Отказ от аксиомы параллельности приведет к другим геометрическим системам, которые в рамках школы, естественно, не изучаются.

Аксиома параллельности приведена в следующей красивой лаконичной классической формулировке: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Написано красиво, читается легко, однако если задумываться о том, как это утверждение применять, то лучше вместе с такой формулировкой дать более технологичную, более приспособленную к использованию для создания доказательств. Кроме того, в технологичной формулировке должны быть явно прописаны отношения к рассматриваемым объектам, выраженные с использованием слов (кванторов) «для любого», «для любых», «для всякой» и т. п. и «существует», «найдется» и т. п. Дело в том, что любое математическое утверждение не может содержать так называемых свободных переменных или, иначе говоря, объектов, насчет которых нет достаточной определенности их участия в утверждении. Такая определенность достигается с помощью кванторов, и подготовка учащихся на ранних этапах обучения к необходимости абсолютно точно формулировать утверждения будет полезна при дальнейшем изучении математики.

Как можно сформулировать содержание аксиомы параллельности с фиксацией отношения к участвующим в ней объектам? Например, так: для любой прямой и для любой не лежащей на ней точки существует единственная прямая, параллельная данной и проходящая через данную точку. Такая формулировка, возможно, более занудливая, чем таковая из учебника, но она технологична и когда доведется использовать аксиому параллельности, лучше иметь в виду технологичную формулировку, ибо она поможет выстраивать цепочку рассуждений.

В исходной формулировке конечно же отношение к точке и прямой есть, но оно явно не выражено, а понимается, как говорят, по умолчанию. Надо знать, что по умолчанию всегда объект

считается связанным квантором общности, так что когда пишут «через точку, не лежащую на данной прямой», имеют в виду через произвольную точку, а не только через какую-то особым образом выбранную, а также речь идет о произвольной прямой, не включающей данную точку, а не о какой-то одной, специальной. Умолчание в формулировках довольно распространено, и чтобы успешно формулировки понимать и уметь с ними работать, надо обладать способностью давать равносильные формулировки с явным указанием отношения к участвующим в них объектам.

Далее в тексте учебника идет пояснение о названиях некоторых утверждений и сообщается, что среди таковых бывают следствия, к которым авторы относят утверждения, непосредственно выводимые из аксиом или теорем. На самом деле деление утверждений на типы довольно условное, и например если какой-то существенный факт легко выводится из другого, это еще не повод называть его просто следствием, может, лучше повысить его статус и назвать теоремой.

В качестве первого следствия дается факт о том, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую. Идет доказательство. Ясно, что конструктивно проверить справедливость не представляется возможным, ибо прямые — существа мыслимые. Как в таком случае поступают? Для ответа на такой вопрос лучше переформулировать утверждение в стиле «Если что-то выполнено, то гарантируется что-то другое.» Рассматриваемое в таком виде утверждение можно сформулировать следующим образом.

Пусть a и b — произвольные параллельные прямые. Если прямая c пересекает прямую a , то c пересекает и прямую b .

Доказательства непосредственно сопровождающих аксиому параллельности фактов элементарны, так что можно о них сказать, что они очевидны в указанной ранее трактовке. Вместе с тем поучителен метод их доказательства, а именно метод доказательства от противного, и на суть этого метода желательно обратить особое внимание.

Метод доказательства от противного применяется в ситуациях, когда конструктивно обеспечить декларируемый результат не представляется возможным, как это происходит в случае параллельных прямых. Кратко напомним, в чем суть этого метода.

Представим формулировку утверждения в следующем виде. Пусть P и Q — некоторые свойства и утверждение гласит: если выполнено P , то выполнено Q . Начиная доказывать от противного, предполагают, что P выполнено, а Q — нет. Если в этой ситуации удастся получить противоречие с выполнением P , то предположение о невыполнении Q несостоятельно и Q должно быть верным.

Иначе можно сказать, что для доказательства факта «из P следует Q » достаточно убедиться в справедливости факта «из отрицания Q следует отрицание P », то есть «если неверно Q , то неверно и P ».

Далее речь идет об обратных утверждениях. Здесь желательно обратить внимание на понятие обратного по отношению к данному утверждения. Если исходное сформулировать в виде «если P , то Q », обратное к нему это утверждение «если Q , то P ». Конечно же, они совсем не равносильны, это два разных факта, и справедливость одного из них не влечет автоматически справедливость другого. При изучении параллельности полезно заодно обращать внимание на взаимодействие разных утверждений, формулировать обратные к данным, обсуждать, будут ли они верны, а такое тоже бывает.

В частности, полезно привести соответствующие примеры. Можно вернуться назад и напомнить формулировку такого доказанного ранее утверждения: «если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны». Далее можно привести формулировку обратного к этому утверждения: «если прямые параллельны, то накрест лежащие углы равны», и обсудить, можно ли считать верным обратное утверждение, если прямое доказано. Надо обратить внимание на то, что справедливость прямого утверждения не влечет автоматически выполнения обратного. Его надо доказывать отдельно, и здесь могут использоваться совсем другие соображения и методы рассуждений. Это наглядно видно из стиля доказательств, приведенных в учебнике, хотя там акцента на сути взаимосвязанных утверждений не ставится.

Изучаемый здесь материал еще раз может послужить поводом для разговора о том, что такое свойство, признак и критерий, ибо рассматриваемые факты дают пищу для этого.

3.3. Углы с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами. В учебнике приведены два естественных утверждения насчет углов с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами. Полезно напомнить, что означают упомянутые понятия.

После прекрасной формулировки, представленной в таком виде: «если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180° », сразу идет доказательство, выполненное без обсуждения мотивированности предлагаемых действий.

Попробуем разобраться в ситуации, не обращаясь к конкретным обозначениям, а рассуждая в терминах участвующих объектов. Будем считать, что рассматриваемые углы неразвернутые.

Как могут быть расположены на плоскости углы, удовлетворяющие условиям утверждения? На каком принципе можно это понять? Для двух данных углов с соответственно параллельными сторонами через их вершины проведем прямую. Появятся две полуплоскости. Может оказаться так, что все лучи, формирующие заданные углы, расположены в одной из полуплоскостей, например, как на рис. 3.6, а могут в разных полуплоскостях, как на рис. 3.7. Может быть такая ситуация, при которой по одному из образующих углы лучей лежат в одной из полуплоскостей, а два других — в разных, как на рис. 3.8. Наконец, возможна ситуация, как на рис. 3.9.

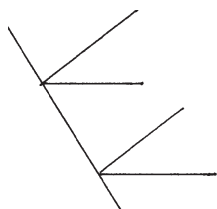


Рис. 3.6.

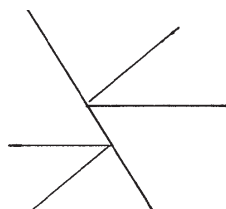


Рис. 3.7.

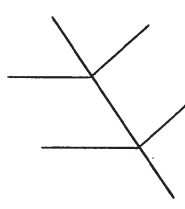


Рис. 3.8.

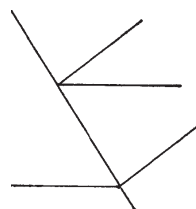


Рис. 3.9.

Все ситуации можно объединить в одну следующим образом. Нарисуем две пары взаимно параллельных прямых (рис. 3.10), и

пусть в одной из точек пересечения находится вершина O одного из углов, а в противоположной ей — вершина O_1 другого (см. рис. 3.10). Для простоты обозначим угол POQ через α , смежный с ним — через β , соответственно пусть $\angle PO_1Q$ равен α_1 и смежный с ним равен β_1 . Надо доказать, что либо $\alpha = \alpha_1$, либо $\alpha + \beta_1 = 180^\circ$.

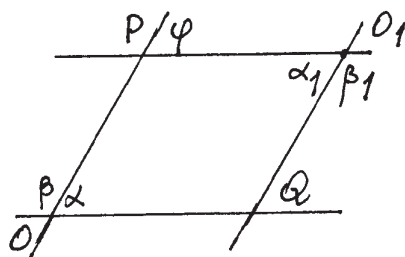


Рис. 3.10.

Если рассуждать в рамках отдельно расположенных углов, то для рассуждений о них не хватает взаимодействия между ними, ибо неясно, как они друг относительно друга расположены. При использовании ситуации, изображенной на рис. 3.10, их можно связать с помощью посредника, в качестве которого можно взять, например, угол с вершиной P , обозначим его через φ (см. рис. 3.10). Поскольку прямые параллельны, ясно, что $\alpha = \varphi$. С другой стороны, либо $\varphi = \alpha_1$, либо $\varphi + \beta_1 = 180^\circ$. Тем самым требуемый результат получен для любой ситуации.

Обратимся к второму утверждению параграфа: «если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180° ».

Посмотрев на доказательство в учебнике и посчитав, что оно занимает 30 строк, хочется сразу отложить его до лучших времен, когда наша выносливость в обращении со столь длинными фрагментами станет получше. Однако в те лучшие времена вряд ли доведется вернуться к планиметрии, тем более к материалу седьмого класса. Так что ничего не остается, как начать думать,

то есть задавать вопросы, и пытаться конструировать доказательство самостоятельно.

Как могут появиться углы с взаимно перпендикулярными сторонами? Взяты две пересекающиеся прямые, в одном из образованных с их помощью углов взята точка, например, как на рис. 3.11, и через эту точку проведены прямые, перпендикулярные сторонам угла. Других ситуаций быть не может. Обозначим для краткости угол POQ через α , смежный с ним угол — через β и соответственно угол PO_1Q через α_1 , смежный с ним — через β_1 . Надо доказать, что либо $\beta_1 = \alpha$, либо $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$.

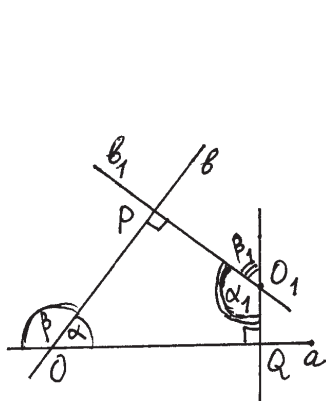


Рис. 3.11.

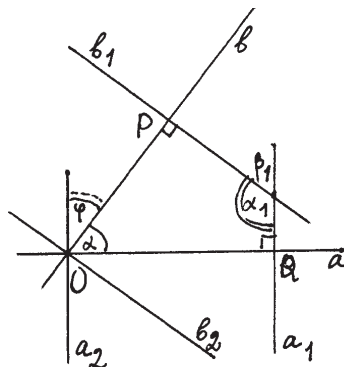


Рис. 3.12.

Проявим творчество по причине недостаточной комфортности рассматривать взаимодействие углов, вершины которых находятся в разных точках. Совместим вершины углов за счет проведения через одну из них, например через O , прямых, параллельных сторонам другого угла. Получим ситуацию, изображенную на рис. 3.12. Для удобства дадим обозначения прямым (см. рис. 3.12): $a_2 \parallel a_1$, $b_2 \parallel b_1$. Для сопоставления углов, образованных прямыми a , b и прямыми a_1 , b_1 , появился посредник, это углы, образованные прямыми a , b и прямыми a_2 , b_2 . Тот факт, что углы между a , a_1 и b , b_1 равны 90° , а прямые a_1 , a_2 и b_1 , b_2

параллельны, приводит к тому, что углы между a , a_2 и b , b_2 равны 90° . Появился посредник между интересующими нас углами, это угол φ между b и a_2 (см. рис. 3.12). Тогда $\alpha + \varphi = 90^\circ$ и $\beta_1 + \varphi = 90^\circ$, стало быть, $\beta_1 = \alpha$. Аналогично можно заключить, что $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$.

Глава 4. Соотношения между сторонами и углами треугольника

4.1. Сумма углов треугольника. Знакомясь с материалом учебника, можно отметить, что встречаются разделы, не нуждающиеся в комментариях. К таковым, по-видимому, относятся такие, в которых даются определения классических понятий и доказываются очень классические утверждения. В частности, в очередном параграфе хорошо изложен материал, относящийся к сумме углов треугольника, к понятию внешнего угла треугольника и к определению остроугольного и тупоугольного треугольников, так что этот материал в комментариях не нуждается.

Параграф, посвященный соотношениям между сторонами и углами треугольника, изложен весьма статично, без мотивированности действий, так что на материале этого параграфа ненадолго остановимся.

Здесь формулируется и доказывается такая теорема: в треугольнике 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство, как обычно, не опирается на взаимодействие геометрических образов и носит формальный характер. Попробуем воссоздать образность обоснования этого утверждения.

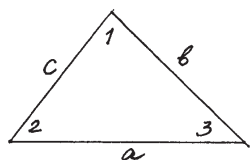


Рис. 4.1.

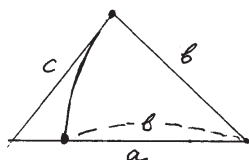


Рис. 4.2.

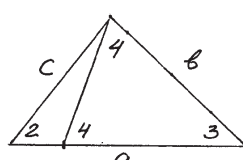


Рис. 4.3.

Есть треугольник, введем краткие обозначения для его сторон и углов, как на рис. 4.1. Пусть $a > b$, доказать, что $\angle 1 > \angle 2$.

Вопрос: как связать углы 1 и 2? Какие есть средства для их сопоставления?

Во-первых, неравенство $a > b$. Это интересное обстоятельство, но пока неясно, как используемое. В такой ситуации нередко поступают так: выполняют действия, которые можно выполнить, на всякий случай, с небольшой надеждой, что в процессе появятся мотивированные ходы. Надо как-то соотнести угол 1 с углами, прилежащими к стороне a . Сравнение отрезков позволяет отложить на большем из них отрезок, равный меньшему, и здесь может проявиться творчество. Отложим на стороне a от вершины угла 3 отрезок, равный b (рис. 4.2). Появляются новые углы и совершённое действие позволяет обратиться к углу 4 (рис. 4.3). Новый треугольник равнобедренный, угол 4 меньше угла 1, и получили посредника в виде угла 4, с которым можно сравнивать как угол 1, так и угол 2, ибо угол 4 внешний для треугольника, оставшегося от откладывания отрезка. В итоге имеем $\angle 1 > \angle 4$, как отмечено выше, и $\angle 4 > \angle 2$, ибо внешний угол больше любого внутреннего, не смежного с ним. Стало быть, $\angle 1 > \angle 2$.

Процедура доказательства в геометрических образах создана, и теперь, если угодно, можно оформить доказательство в отчуждаемом виде, то есть с более активным использованием символьных обозначений. В принципе, можно обратиться к доказательству в учебнике, а оно именно в символьном виде сразу исполнено, но можно и формализовать предложенные соображения.

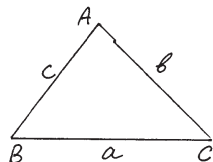


Рис. 4.4.

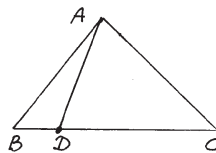


Рис. 4.5.

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 4.4). Пусть $AB < AC < BC$. Докажем, что $\angle A > \angle B$. На стороне BC отложим отрезок

CD , равный AC . Треугольник ACD равнобедренный (рис. 4.5). В треугольнике ACD имеем $\angle CAD = \angle CDA$. Далее, $\angle CDA > \angle B$ как внешний угол треугольника ABD и $\angle BAC > \angle CAD$, откуда получаем, что $\angle BAC > \angle CAD = \angle CDA > \angle B$.

Изложенное показывает отличие поиска пути решения от оформления результата. Конечно, желательно уметь выполнять обе эти процедуры, ибо без подготовки пути решения невозможно оформить результат ввиду его отсутствия, и при способности получения результата надо уметь его представить в отчуждаемом виде для возможного ознакомления с ним других участников общения.

Обратимся к второй части теоремы: против большего угла лежит бо́льшая сторона. Снова будем размышлять в геометрических образах. Поскольку идет опора на материал учебника, а там этот факт доказывается от противного, не будем излишне фантазировать и тоже наметим обоснование от противного. Пусть, как на рис. 4.4, $\angle A > \angle B$. Предположим, что при этом либо $a = b$, и в таком случае $\angle A = \angle B$, что противоречит предположению, либо $a < b$ и получаем противоречие с условием за счет доказанного в первой части.

Ясно, что после такого обсуждения в геометрических образах нетрудно оформить доказательство в символах, что оставим читателю.

Следующий пункт учебника посвящен неравенству треугольника. Здесь сформулирована теорема: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. Результат этой теоремы носит название «неравенство треугольника». Может быть, стоит здесь отметить очень распространенный прием использования фигуры речи, когда для краткости опускаются какие-то важные детали ситуации, не всегда при надлежащем указании на определенную договоренность. Дело в том, что в геометрии нет суммы сторон, ибо сторона это отрезок, а операция сложения отрезков не определялась. Ясно, что формулировку следует понимать не буквально, а следующим образом: длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон. Однако обычно так этот факт не формулируют.

Несмотря на то, что сумма отрезков не определялась, согласно условию придется разбираться с отрезком, длина которого

равна сумме длин двух данных отрезков. Сделать это естественно так: от конца одного из отрезков отложить другой. Применим это соображение в исследуемой ситуации, а именно, например, от конца стороны a отложим отрезок, равный c (рис. 4.6). Появился равнобедренный треугольник, и можно отметить в нем пару равных углов (рис. 4.7). Обнаруживается, что есть треугольник, в котором одна из сторон составлена как сумма двух сторон исходного треугольника, и остается в плане сравнения длин сопоставить углы. Ясно, что $\angle 1 + \angle 2 > \angle 1$, стало быть, расположенная против угла $1 + 2$ сторона $a + c$ больше стороны b : $a + c > b$. Теперь можно оформить приведенные рассуждения в отчуждаемом виде, но поскольку это сделано в учебнике, здесь можно и не оформлять.

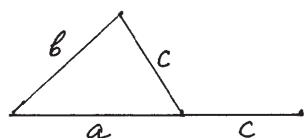


Рис. 4.6.

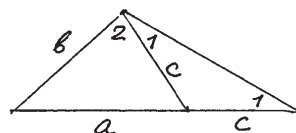


Рис. 4.7.

4.2. О некоторых свойствах прямоугольных треугольников. Очередной параграф, посвященный прямоугольным треугольникам, написан вполне приемлемо, его стоит изучить по тексту из учебника. Более того, полезно иметь в виду, что формирование способности изучения материала по литературе является неотъемлемой частью образованности. Одна из основных целей в процессе получения образования состоит в том, чтобы научиться читать и не только понимать смысл прочитанного, но и быть способным делать самостоятельно что-то новое в результате общения с литературой. Конечно, для реализации такой цели желательно, чтобы литература ей способствовала, то есть чтобы на ее основе можно было чему-то научиться. В частности, рассматриваемый учебник нередко написан так, что по нему можно

не только научиться геометрии, но и приобрести метапредметные навыки. В частности, очередной параграф вполне отвечает образовательным целям и его желательно самостоятельно изучать.

Тем не менее на одном моменте остановлюсь. Он относится к признакам равенства прямоугольных треугольников. Казалось бы, есть уже набор признаков равенства треугольников вообще, зачем еще обращаться отдельно к специальным треугольникам? Какой-то смысл в этом есть, ибо специфика треугольника может позволить проведение проверки меньшего количества условий для достижения результата. В частности, с прямоугольными треугольниками дело обстоит именно так. Почти все из изложенных признаков равенства прямоугольных треугольников доказываются на основе общих признаков с учетом того, что один из углов прямой, но один из признаков, достаточно важный, так доказать не получается. Знатоки легко поймут, на чем можно построить его доказательство, но этот материал далеко-далеко впереди, а признак нужен бывает сейчас. Так что придется обратиться к конструкции, на которой доказывался начальный признак равенства треугольников, а именно к процедуре наложения.

Напомним, в чем этот признак состоит: если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

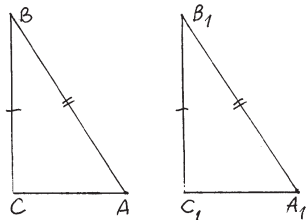


Рис. 4.8.

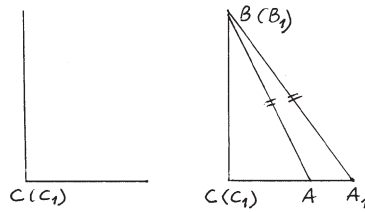


Рис. 4.9.

Даны два прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Возьмем один из них, допустим ABC , и начнем с ним работать (рис. 4.8).

Несложный анализ показывает, что в условиях этого утверждения применить общие признаки не представляется возможным. Значит, надо заниматься совмещением. Что можно совместить? Можно совместить углы и можно совместить отрезки. Можно совместить катеты или гипотенузы (по отдельности), но неясно, под каким углом друг относительно друга они расположены. Поэтому совмещение сразу двух отрезков непродуктивно, а индивидуальное тем более непродуктивно. Единственное что здесь можно совместить надежно, так это прямые углы. Их для начала и совместим (рис. 4.9 слева). На одной из сторон совмещенного угла отложим отрезок CB и совмещенный с ним отрезок C_1B_1 (рис. 4.9 справа). В треугольнике ABC была еще точка A , отметим ее. Третья точка A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ будет расположена на соответствующей стороне угла и либо попадет в точку A , то есть с ней совместится, и тогда все сходится, либо будет отлична от точки A (см. рис. 4.9 справа). Но отрезки AB и A_1B_1 по условию между собой равны. Получился равнобедренный треугольник AA_1B , в котором угол $BA A_1$ тупой как внешний угол прямоугольного треугольника, а равный ему угол AA_1B острый как угол в прямоугольном треугольнике $A_1B_1C_1$. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что точка A_1 при наложении окажется отличной от точки A , несостоятельно.

Порассуждав о теоретических моментах, остановимся на рассмотрении нескольких несложных задач.

Пример 1 (задача 266). На сторонах угла O отмечены точки A и B так, что $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке C . Докажите, что луч OC — биссектриса угла O .

Встретив в условии задачи слово «доказать», вполне возможно, что учащийся сразу откажется от идеи подумать над решением предложенной задачи. Однако надо помнить: ценность геометрии не столько в том, чтобы помнить излагаемые в ней факты (кстати, редко и мало кому в жизни нужные, хотя этот тезис спорный), сколько в формировании способности к рассуждениям, сначала используя геометрические образы, а за-

тем оформляя развитые идеи в виде формального текста. Так что не надо уклоняться от задач со словом «доказать», тем более что на самом-то деле ничего в них страшного нет, просто надо привыкнуть думать, то есть задавать вопросы, и искать на них ответы.

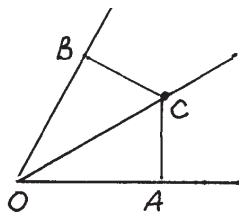


Рис. 4.10.

Где появляются равные углы? В равных треугольниках. Значит, углы, равенство которых надо доказать, предстоит увидеть в треугольниках, о которых будем доказывать их равенство. Ясно, что исследуемые углы суть углы в треугольниках AOC и BOC (рис. 4.10). Стало быть, надо обратиться к изучению этих треугольников.

Что об этих треугольниках известно? В них $OB = OA$ и OC общая. Смотрим, есть ли признак равенства прямоугольных треугольников по равенству катетов и гипотенуз? Есть. На его основе заключаем, что $\triangle AOC = \triangle BOC$, откуда следует, что $\angle AOC = \angle BOC$.

Пример 2 (задача 267). Докажите, что два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведенные из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведенным из концов этой стороны, другого треугольника.

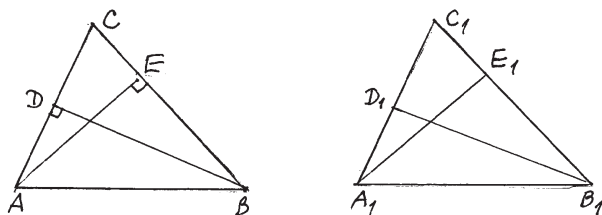


Рис. 4.11.

Нарисуем объекты согласно условию задачи (рис. 4.11) и отметим данные в условии равенства: $A_1E_1 = AE$, $B_1D_1 = BD$, $A_1B_1 = AB$.

Начнем рассуждения с вопроса, относящегося к результату: на какой признак равенства треугольников скорее всего следует рассчитывать, какой из признаков затрагивает только одну сторону?

В нашем распоряжении три инструмента, три признака равенства треугольников. Один из них затрагивает две стороны и угол между ними, второй — одну сторону и два угла и третий три стороны. Так что обратим внимание на второй из признаков. Согласно этому признаку надо доказать равенство прилежащих к равным сторонам углов. Появилась цель: надо изучать углы и пытаться доказать, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Началась переформулировка. Надо доказать равенство углов.

Откуда можно взять равенство углов?

Из равных треугольников. Надо искать, с какими треугольниками эти углы связаны. Лучше обратить внимание на прямоугольные треугольники, благо у нас таковые присутствуют. Из условия можно сделать вывод, что $\triangle A_1B_1D_1 = \triangle ABD$ и $\triangle A_1B_1E_1 = \triangle ABE$ по гипотенузе и катету. Стало быть, $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$, $\angle ABE = \angle A_1B_1E_1$, так что требуемое равенство углов доказано и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Пример 3 (задача 270). Внутри угла дана точка A . Постройте прямую, проходящую через точку A и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

Изобразим на чертеже ситуацию согласно данным задачи (рис. 4.12) и зададимся вопросом: как должна проходить прямая, которую надо построить? Ясно, что она должна включать в себя точку A и отсекать на сторонах угла равные отрезки, иначе говоря, надо обеспечить равнобедренный треугольник, основание которого проходит через заданную точку A (рис. 4.13). Будем вспоминать всё, что знаем о равнобедренном треугольнике, и выбирать, что из известного могло бы здесь пригодиться.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Надо это здесь или нет?

Вряд ли, ибо про них ничего не сказано, а механизмы их построения не встречались.

Есть факт совпадение высоты, медианы и биссектрисы, проведенным из вершины. За это можно зацепиться, поскольку что-

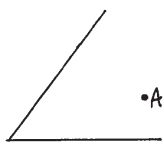


Рис. 4.12.

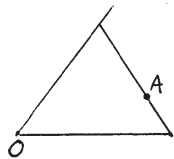


Рис. 4.13.

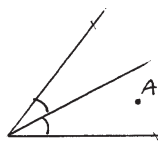


Рис. 4.14.

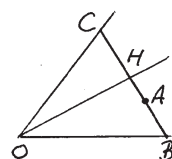


Рис. 4.15.

то связанное с построением каких-то из этих отрезков было.

Что можно делать при заданном угле?

Проводить биссектрису. После получения биссектрисы можно вспомнить, что она должна быть и высотой, а значит, требуемая прямая должна быть перпендикулярна биссектрисе. Но возможность построения перпендикуляра к данной прямой, включающего данную точку, есть. Стало быть, после построения биссектрисы, опустив на нее перпендикуляр из точки A , получим высоту в искомом треугольнике, а значит, в итоге придем к равнобедренному треугольнику и цель будет достигнута.

Здесь можно ненадолго остановиться и задуматься: как была получена гарантия того, что получаемый треугольник равнобедренный? На каком основании это утверждается? Для этого необходим такой факт: если в треугольнике биссектриса является высотой, то такой треугольник равнобедренный. Было ли ранее это утверждение обосновано или хотя бы написано? Оно представляет собой признак равнобедренности треугольника, а мы имели дело только с его свойствами, то есть с утверждениями вида «если треугольник равнобедренный, то ...», с помощью которого обосновать равнобедренность невозможно. Что делать? Либо доказывать утверждение о том, что совпадение биссектрисы с высотой гарантирует равнобедренность, либо искать в учебнике, где такой факт присутствует. Можно доказать, это нетрудно, а можно найти его, правда, среди задач, это задача 133, и поскольку она там не доказана, полезно этот факт доказать, что предлагается читателю сделать самостоятельно.

Составим алгоритм действий, приводящих к требуемому результату.

1. Строим биссектрису данного угла (рис. 4.14).

2. Проводим прямую, проходящую через данную точку A и перпендикулярную построенной биссектрисе (рис. 4.15).

3. Прямая из п. 2 требуемая.

Обоснование: действительно, в треугольнике BCO прямая OH является биссектрисой и высотой (см. рис. 4.14), а значит, треугольник BCO равнобедренный и $OB = OC$.

4.3. Расстояние от точки до прямой и между параллельными прямыми. Начиная решать проблему определения расстояния от точки до прямой, надо сразу договориться, что при заданных точке и прямой расстояние должно зависеть только от этих объектов и ни от каких-либо других. На данном этапе нашей образованности есть пока только расстояние между двумя точками. Ясно, что для определения расстояния от точки до прямой надо брать расстояния от точки до разных точек на прямой и размышлять, расстояние до какой точки надо положить в основу расстояния от точки до прямой, чтобы гарантировать независимость этой величины от посторонних объектов, в качестве которых здесь выступают точки на прямой. Отметив, что длина перпендикуляра из точки на прямую меньше длины любого другого отрезка, соединяющего данную точку с точками прямой (катет в прямоугольном треугольнике всегда меньше гипотенузы), можно утверждать, что это число однозначно определяется заданными точкой и прямой. Тем самым естественно считать расстоянием от точки до прямой длину перпендикуляра из этой точки к данной прямой.

Материал в учебнике изложен хорошо, и здесь лишь подчеркнута причина, по которой длина именно выбранного отрезка берется в качестве расстояния от точки до прямой.

В этом же пункте присутствует теорема: все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой, а также в качестве замечания отмечено, что верно и обратное к этому утверждение. Непонятно при этом, почему одно из этих утверждений имеет статус теоремы, а обратное оформлено всего лишь как замечание. Формулировка теоремы лаконична и красива, но когда началось доказательство, хотелось бы иметь более технологичную формулировку. Есть уверенность в том, что читатель уже достаточно привык к технологичным переформулировкам, чтобы привести ее самостоятельно, но поскольку есть

идея пообсуждать доказательство, приведу технологичную формулировку.

Начиная доказывать, надо постараться понять, как можно охватить сразу **все** точки прямой. Или этого делать необязательно и тогда в каком виде начать доказательство? Рассмотрим две параллельные прямые, пусть k и l . Тот факт, что все точки прямой k находятся на одинаковом расстоянии от прямой l можно выразить так: для любых двух различных точек A и B на прямой k расстояние от A до прямой l равно расстоянию от B до прямой l . Такая формулировка технологична, ибо две точки рассмотреть хотя бы возможно (а всех точек множество бесконечное и неясно, как его сразу в одном рассуждении охватить).

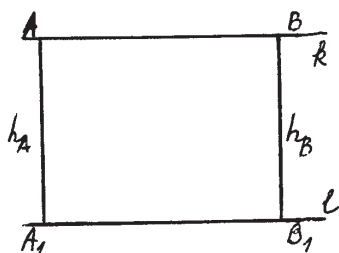


Рис. 4.16.

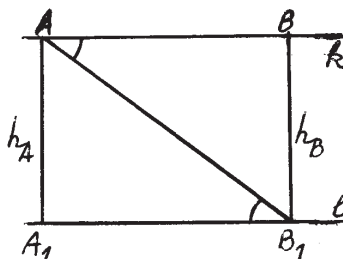


Рис. 4.17.

Пусть перпендикуляры из точек A и B опустятся соответственно в точки A_1 и B_1 (рис. 4.16). Пусть длины AA_1 и BB_1 равны соответственно h_A и h_B . Надо доказать, что $h_B = h_A$.

Где мы встречались с равными отрезками?

В равных треугольниках. В принципе, можно было бы использовать и другие равные фигуры, но пока нет никаких сведений о признаках равенств отличных от треугольников фигур (кстати, и не будет). Так что отрезки AA_1 и BB_1 надо реализовать как стороны треугольников так, чтобы потом можно было доказать равенство этих треугольников.

Как надо находить или строить треугольники, в которых данный отрезок является стороной?

Надо к двум точкам, концам данного отрезка, добавлять еще какую-то точку, и тогда получаются треугольники, из которых

надо выбрать наиболее перспективные. Это общее наблюдение, нередко полезное при необходимости обнаруживать треугольники. Процесс добавления третьей точки в известной мере творческий, каждый раз, добавляя, надо смотреть, достаточно продуктивна добавляемая точка или недостаточно в том смысле, что будет получаемый треугольник полезен или нет. В рассматриваемой ситуации к точкам A , A_1 добавим, например, точку B_1 (рис. 4.17). Получили треугольники AA_1B_1 и B_1AB . В этих треугольниках гипотенуза AB_1 общая и есть равенство углов $\angle A_1B_1A = \angle B_1AB$ как накрест лежащих при пересечении параллельных прямых третьей. Стало быть, по одному из признаков равенства прямоугольных треугольников $\triangle AA_1B = \triangle B_1BA$, откуда делаем вывод, что $h_A = h_B$.

4.4. Несколько задач на построение.

Пример 1. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Даны отрезок (будущая сторона) и два угла (рис. 4.18).

Цель: создать алгоритм, обеспечивающий на выходе треугольник, у которого одна из сторон совпадает с данным отрезком и прилежащие к ней углы равны заданным углам.

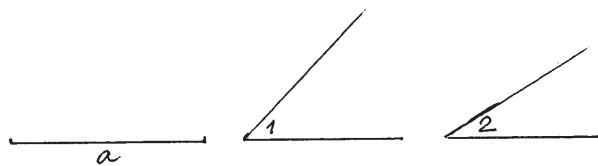


Рис. 4.18.

Отметим, что для треугольника есть необходимое условие его существования, связанное с углами: сумма углов треугольника равна 180° . Иначе это утверждение можно сформулировать так: если три угла в сумме больше или равны 180° , то эти углы не могут быть углами никакого треугольника. В частности, если уже два угла в сумме больше или равны 180° , то для третьего угла места не останется и треугольника не получится. Стало быть, проектируемый алгоритм может дать результат только в том случае, если данные углы в сумме меньше 180° .

С чего начать?

Как уже отмечалось, при построении можно начать с разных элементов и выбор может оказаться элементом творчества. Иногда выбор можно чем-то мотивировать. Начнем с одного из углов (а можно было и с отрезка), рассудив так: угол это уже конструкция, и если с него начать, то не надо будет привязывать его к другим элементам. В любом месте плоскости нарисуем угол, равный заданному углу 1 (рис. 4.19). Надо связать с этим углом данный отрезок и приладить к нему угол 2.



Рис. 4.19.

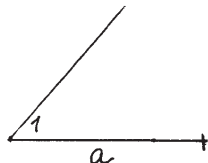


Рис. 4.20.

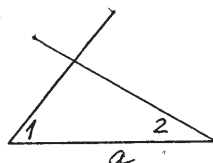


Рис. 4.21.

Где это разумно сделать?

В условии сказано, что угол должен прилежать к данному отрезку, поэтому на следующем шаге на одной из сторон угла отложим отрезок, равный данному (рис. 4.20). Его конец даст место приложения вершины второго угла, и обе эти точки обеспечивают две вершины искомого треугольника. А именно, от второго конца отрезка отложим угол так, чтобы одна из его сторон включала имеющийся отрезок (рис. 4.21). Вторая сторона этого угла пересечет сторону угла 1 (отсутствие такого пересечения противоречит условию $\angle 1 + \angle 2 < 180^\circ$, можете доказать самостоятельно). Точка пересечения этих сторон углов 1 и 2 даст третью вершину требуемого треугольника.

Алгоритм спроектирован, теперь можно его оформить.

1. В произвольной части плоскости создадим угол, равный углу 1 (базовое построение).
2. От вершины построенного угла на одной из его сторон отложим отрезок, равный данному.
3. Построим угол, равный второму углу, так, чтобы его вершина совпала со вторым концом отрезка, одна из сторон включала данный отрезок, а вторая имела общую точку с второй стороной первого угла.

4. Стороны углов, не содержащие данного отрезка, пересекутся в некоторой точке.

5. Концы отрезков и точка пересечения суть вершины требуемого треугольника.

Достижение цели, по существу, следует из содержания алгоритма. Отметим еще раз, что задача имеет решение, если сумма данных углов меньше 180° .

Пример 2. Построить треугольник по трем сторонам.

Даны три отрезка.

Надо создать алгоритм, у которого на входе три данных отрезка, а на выходе треугольник, у которого данные отрезки равны его сторонам.

Пусть даны три отрезка (рис. 4.22). Сразу отметим, что для треугольника есть, как и в случае с углами, необходимое условие его существования, связанное с длинами сторон: длина каждой стороны должна быть меньше суммы длин двух других его сторон. Это означает, что если указанное условие не выполнено, то из таких отрезков треугольник построить нельзя.

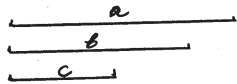


Рис. 4.22.



Рис. 4.23.

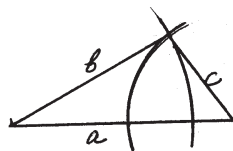


Рис. 4.24.

Начнем с какого-либо из отрезков. Они равноправны, но может быть какой-то равноправнее. Лично мне нравится самый большой отрезок, с него и начну. Расположим где-то на плоскости отрезок a (рис. 4.23). У нас есть еще два отрезка. Порассуждаем, как в одном из прежних примеров на построение.

Где геометрические места точек, удаленных от концов данного отрезка на расстояния, равные длинам двух других отрезков?

Известно где — это окружности с центрами в концах данного отрезка соответствующих радиусов. Значит, надо к этому отрезку приделать две окружности (рис. 4.24). Можно обратить внимание на еще одно проявление необходимых условий: если

две оставшиеся стороны треугольника равны данным двум оставшимся отрезкам, то их концы должны быть расположены на проведенных окружностях, в других местах эти отрезки искать не надо. Ясно, что искомая третья вершина (две из них суть концы первого отрезка) должна быть на каждом из построенных двух геометрических мест, а значит, она есть не что иное как точка, общая для проведенных окружностей.

Спроектированное построение возможно лишь в случае, когда проводимые окружности пересекаются, а это гарантируется отмеченным ранее необходимым условием: каждый из отрезков должен быть меньше суммы двух других. Отсутствие этого условия приведет к отсутствию общей для планируемых окружностей точек.

Создание алгоритма построения оставим читателю.

Пример 3 (задача 314(в)). Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Пусть даны два отрезка, отрезок a для катета и отрезок c для гипотенузы (рис. 4.25). Надо составить алгоритм, в результате работы которого будет обеспечен прямоугольный треугольник, в котором катет равен a , а гипотенуза — c .

С чего желательно начинать построение?

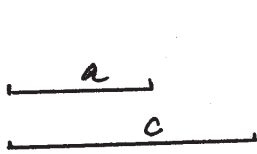


Рис. 4.25.

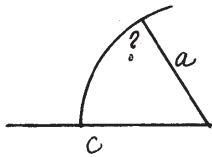


Рис. 4.26.

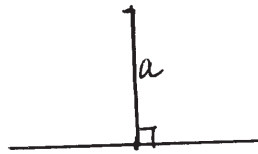


Рис. 4.27.

Допустим, что начнем с гипотенузы. Далее надо найти геометрическое место точек, дающих заданный катет. Ясно, что это окружность с центром в одном из концов гипотенузы, проведенная радиусом, равным второму отрезку. Однако угадать, где надо на этой окружности взять точку так, чтобы получился прямой угол, трудно (рис. 4.26). А построить прямой угол легко. Поэтому начнем с прямого угла.

Для получения прямого угла естественно использовать данный катет и из одного из его концов восставить перпендикуляр

(базовое построение), чем обеспечивается прямой угол (рис. 4.27). На хватает гипотенузы.

Куда ее приделать?

Естественно, к другому концу катета.

Где при этом должен быть второй конец гипотенузы?

Ясно, что на окружности радиусом, равным длине второго отрезка (рис. 4.28). Получаем прямоугольные треугольники, любой из которых удовлетворяет требуемому условию.

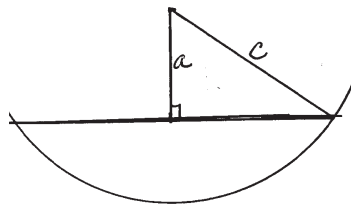


Рис. 4.28.

Пример 4 (задача 316). Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон.

Что у нас есть? Есть три отрезка: сторона a , высота к ней h и медиана m к одной из двух других сторон (рис. 4.29). Начало более или менее понятно: надо взять прямую, обозначим ее через l , и на ней разместить базовый элемент, а именно сторону, иначе говоря, отложить отрезок, равный a .

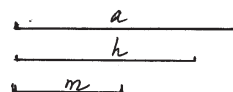


Рис. 4.29.

Будем на основе необходимых условий рассуждать следующим образом. Если убрать одно из условий, то остальные могут указать геометрическое место точек, на котором расположены требуемые элементы. Попробуем понять, где геометрическое место точек, в которых может оказаться второй конец высоты (один из концов на прямой, содержащей сторону a) или второй конец медианы. С высотой понятнее, с нее и начнем. Второй конец высоты расположен на прямой l_1 , параллельной прямой l и отстоящей от нее на h (рис. 4.30). За пределами прямой l_1 третью вершину искать не надо, ее там точно нет. Возьмем какой-либо из концов отрезка a , например левый, и задумаемся, где геометрическое место концов отрезка, равного медиане. Ясно, что это окружность с центром в левом конце и радиусом m (рис. 4.31).

Какую точку на окружности выбрать? Сначала пофантази-

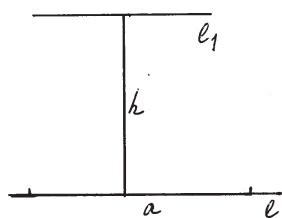


Рис. 4.30.

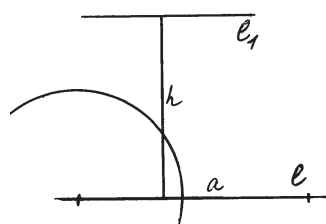


Рис. 4.31.

руем. Допустим, что одна из сторон треугольника есть, это a , место расположения третьей вершины есть, это параллельная l прямая l_1 , а медиана должна прийти в середину одной из оставшихся сторон.

Где эти середины?

На прямой l_2 , параллельной l и находящейся на одинаковом расстоянии от l и l_1 . Получили, что конец медианы должен находиться на окружности и на прямой l_2 , значит, это точка их пересечения. Тем самым в нашем распоряжении есть две вершины и середина стороны. Как получить третью вершину? Проведя через одну из вершин отрезка a прямую, проходящую через пересечение l_2 и окружности (рис. 4.32), до пересечения с прямой l_1 .

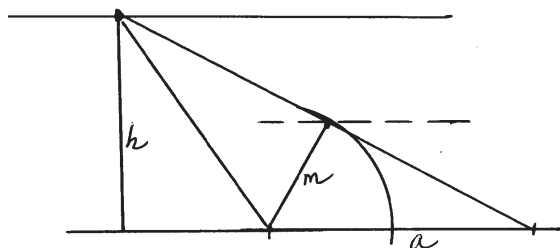


Рис. 4.32.

Из проведенного анализа можно сделать вывод, что, во-первых, результат неоднозначен, требуемый треугольник не единствен с точки зрения его расположения на плоскости, и во-вторых, что построение можно реализовать при условии, что длина медианы больше половины длины высоты, ибо в противном случае

необходимых для построения точек пересечения не будет.

Можно составить алгоритм, обеспечивающий требуемое построение.

1. На некоторой прямой отложить отрезок, равный данной стороне.

2. Провести прямую, параллельную первой прямой и отстоящей от нее на расстояние, равное высоте.

3. Провести окружность с центром в одном из концов построенного отрезка радиусом, равным медиане.

4. Через середину отрезка между параллельными прямыми, равного высоте, провести прямую, параллельную первой прямой.

5. Убедившись в наличии точек пересечения окружности из п. 3 и прямой из п. 4, отметить одну из них.

6. Через конец стороны из п. 1 и точку из п. 5 провести прямую.

7. Фиксировать точку пересечения прямой из п. 6 и прямой из п. 2. Это третья из вершин требуемого треугольника.

Читатель может заметить, что в алгоритме не использовались обозначения. Это сделано для того, чтобы не приводить дополнительную серию рисунков, связанных с возможными обозначениями. Рекомендую этот алгоритм записать с использованием обозначений получаемых точек.

Пример 5 (задача 317). Дан треугольник ABC . Постройте отрезок DE , параллельный прямой AC , так, чтобы точки D и E лежали на сторонах AB и BC и $DE = AD + CE$.

Изобразим треугольник ABC (рис. 4.33), на рисунке получился остроугольный, но все рассуждения не будут использовать это обстоятельство.

Будем экспериментировать, а именно проводить прямые, параллельные нижней стороне, и рассуждать, какую из них надо обеспечить (рис. 4.34). Исходя из рисунка, стоит выбрать прямую, дающую выделенный на рис. 4.34 отрезок DE . Интуитивно можно понять, что прямую надо выбрать так, чтобы отрезок ее между сторонами треугольника можно было разрезать точкой P на две части, одна из которых равна нижней части левой боковой стороны, а вторая — правой (рис. 4.35). Эта ситуация достаточно полезна, чтобы на нее обратить особое внимание.

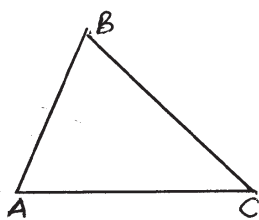


Рис. 4.33.

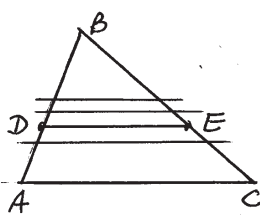


Рис. 4.34

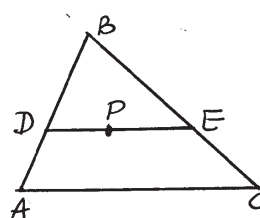


Рис. 4.35.

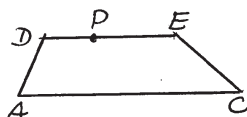


Рис. 4.36.

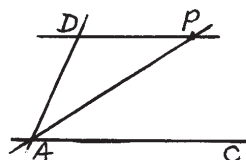


Рис. 4.37.

Отвлечемся от некоторых деталей чертежа и оставим только то, от чего зависит получение результата (рис. 4.36). Каким технологичным свойством должна обладать точка P ? Можно сказать, что здесь начинается моделирование ситуации, то есть выделение фрагментов, отражающих существенные особенности интересующей нас ситуации. Есть две параллельные прямые и их секущая AD (рис. 4.37). Надо на одной из параллельных прямых отметить точку P так, чтобы $AD = PD$. Это сделать нетрудно. Предположим, что точка P уже есть. Тогда треугольник ADP равнобедренный, это равносильно тому, что углы DAP и APD равны, а ввиду параллельности равны и углы DPA и PAC (см. рис. 4.37). Стало быть, равны и углы DAP и PAC . Выходит, что AP — биссектриса угла A , а ее построение относится к базовым.

Теперь можно перейти к подготовке алгоритма. Надо построить биссектрисы углов A и C . Через точку их пересечения провести прямую, параллельную AC . Предыдущие наблюдения гарантируют, что эта прямая искомая.

Составление алгоритма оставим читателю.

Приложение 1. Что значит «хороший учебник»

Нередко доводится встречаться с выражением мнения на тему качества учебников. О каких-то учебниках говорят, что они хорошие, о каких-то — плохие. Как в этом разобраться, какой из учебников хороший, а какой плохой? Высказывания о качестве учебников основаны на каких-то признаках или критериях качества или скорее отражают предпочтения и привычки авторов высказываний? Стоит ли руководствоваться такого рода мнениями или попытаться понять, каковы отличительные особенности хорошего учебника?

Ни на что не претендуя, рискну порассуждать на тему качества учебника.

О целях образования.

Прежде чем судить о том, хороший учебник или не очень, или даже плохой, надо сначала определиться с тем, что можно считать результатом, целью образования. После этого можно озадачиться признаками ее достижения и затем рассуждать о том, какие для этого подходят средства и каким условиям они должны удовлетворять.

Нередко можно услышать ответ, что результат обучения — это объем знаний, информации, полученный учащимся. Однако нетрудно понять, что, исходя из такой установки, во-первых, самым образованным стоит считать Интернет, там накоплено много информации, а во-вторых, мало кто в жизни всей информацией из учебников будет пользоваться, например, вряд ли многим понадобится теорема косинусов или теорема синусов, хотя они изучаются и считается, что их знание входит в результат обучения.

Конечно, владение определенным объемом информации может быть полезно, однако особенно в современном быстро меняющемся мире полезнее способность к реагированию на изменчивость. Такая способность позволит достаточно оперативно адаптироваться к ситуации, а для этого необходимо владение общими принципами деятельности. В такой ситуации естественнее принять известную точку зрения, согласно которой результатом образования является развитие, которое можно понимать как способность ориентироваться в разных ситуациях, оценивать обстановку, ставить цели и формулировать признаки их достижения,

выбирать подходящий инструментарий и иметь способность выбранными инструментами воспользоваться для достижения цели.

Попробуем порассуждать о качестве учебников, исходя из изложенных принципов.

Кроме предметных знаний каждая учебная дисциплина несет в себе метапредметные, общеобразовательные навыки, и именно они могут остаться надолго и сыграть положительную роль. Тем самым приоритет, возможно, стоит отдать формированию метапредметных знаний, умений и навыков, а также (не побоюсь этого сейчас не очень популярного термина) компетенций. В таком случае от учебника в первую очередь желательно ожидать наличия средств, формирующих общекультурные, общеобразовательные, метапредметные результаты.

Для обсуждения достижения этой цели можно сначала хотя бы в общих чертах представить себе, как происходит деятельность вообще. Для получения некоторого результата надо

- иметь исходные данные, исходный материал,
- поставить цель, которую надо достичь,
- сформулировать признаки или лучше критерии достижения поставленной цели,
- проанализировать имеющийся инструментарий с точки зрения его применимости для достижения цели на основе имеющегося материала, при этом располагая признаками применимости инструментов для реализации определенных действий и инструкциями по их применению,
- после анализа инструментария надо отобрать инструменты, с помощью которых можно пытаться достичь цель,
- опираясь на инструкции по применению инструментов и обладая необходимыми навыками, построить план действий, который может привести к достижению цели, желательно план, состоящий из исполняемых шагов, то есть действий, которые мы можем совершить с помощью имеющихся инструментов на базе имеющихся у нас навыков обращения с выбранными инструментами,
- выполнить действия согласно намеченному плану, проверяя наличие признаков достижения цели, и если таковые выполняются, то цель достигнута и задача решена, если не удается в

результате действий прийти к состоянию выполнения признаков достижения цели, то надо вернуться на какой-то из предыдущих этапов, возможно, на самый первый, и провести анализ ситуации — либо цель недоступная, либо инструменты негодные, либо исполнители недостаточно подготовлены для достижения цели с помощью имеющегося инструментария.

Если согласиться с изложенной цепочкой действий в плане моделирования деятельности, то учебники прежде всего стоит оценивать с точки зрения формирования деятельностных навыков, а именно:

- постановки задачи, определения цели,
- формулировки признаков достижения цели,
- выбора инструментария,
- способности использования выбранных инструментов,
- выполнения работы по достижению цели с помощью выбранных инструментов,
- анализа получаемых результатов и способности принять решение либо о достижении цели, либо об отсутствии такового и о дальнейших действиях.

Эти навыки можно отнести к метапредметным и именно о них заботиться в первую очередь.

Из школьных предметов наиболее эффективны для достижения метапредметных целей математические учебные дисциплины, ибо они не предполагают никаких материальных дополнений (кроме простейших средств для письма), обладают большими возможностями по развитию разных навыков — логических, образных, интуитивных и т. п., позволяют проследивать цепочки действий от данных до результата, включающие все жизненно важные этапы от постановки задачи до ее решения. Поэтому на учебники по математике желательно обратить особое внимание.

Поскольку одной из основных целей математического образования является формирование логического мышления, естественно особое внимание обратить на точность и ясность формулировок определений и утверждений. Они должны быть понимаемы и воспроизводимы учащимися. Избыточное обращение к интуитивности, размытость в формулировках могут сыграть отрицательную роль. Вместе с тем нежелательно увлечение ла-

коничностью и красотой формулировок в ущерб технологичности.

Неотъемлемой частью математических предметов являются обоснования формулируемых фактов. От них так же, как и от формулировок, в первую очередь надо ожидать внятности, естественности, динамичности, возможности их воспроизведения и формирования навыков рассуждений. Доказательства в научном стиле (см. приложение 2), обычно присутствующие в учебниках, несут мало пользы.

Баланс между предлагаемым, воспринимаемым и усваиваемым.

Естественно соблюдать баланс между тем, что в учебнике дано, и тем, что учащийся в состоянии усвоить. Дать нетрудно, авторы обладают весьма большим объемом знаний, однако не все эти знания надо отражать в учебнике, ибо способность к восприятию у учащихся ограничена. Надо соблюдать меру того, что мы даем, так как нередко все это взять учащийся не в состоянии. (Как утверждают математики, надо знать меру, норму и предел.) Увеличение объема изучаемого материала, а тем более обращение к дополнительным темам, может привести к отказу учащихся от изучения предмета вообще.

Об акцентировании материала.

Одной из важных черт учебника является акцентирование материала. Текст, написанный однородно, без выделения важных деталей, трудно понимать и изучать. Должны быть в небольшом количестве существенные детали, на которые надо обращать особое внимание и около которых наращивается второстепенный материал. В таком случае достаточно освоить небольшой объем сведений и принципы их использования, чтобы далее обогащать освоенное дополнительной информацией.

О технологической составляющей.

Если есть намерение обеспечивать развитие на основе формирования метапредметных навыков, то надо в структуре текстов учебника отразить общую структуру деятельности, о которой говорилось выше. Она подразумевает, если оперировать крупными блоками, три составляющие. Для понимания постановки задачи, включающей описание исходной информации, по-

становку цели средства ее достижения, надо знать язык, используемый на всех этапах работы над задачей, то есть надо знать определенный объем теории. Для того чтобы ориентироваться в средствах, используемых для достижения цели, надо не только обладать инструментарием, но также понимать возможности его использования и иметь способность выстраивания технологических цепочек применения инструментария. Наконец, если речь идет об учебном предмете, то надо обеспечить объем практики, желательный для формирования умения и навыков. Тем самым учебники желательно организовывать с учетом теории, технологии и практики. Во всех известных мне учебниках есть теоретическая и практическая составляющие, а технологическая отсутствует, хотя именно она нацелена на формирование метапредметных навыков.

О характере математических дисциплин в школе.

В школе изучаются математические предметы двух направлений — символные и образные, иначе говоря, имеющие дело в основном с символными средствами (алгебра и начала анализа) и в большой степени с образным восприятием действительности (геометрия). Разумеется, в алгебре и началах анализа необходимо использовать образную поддержку, а в геометрии без символов не обойтись, в таком разделение имеется в виду отличительная особенность предмета.

Поскольку в данном тексте речь шла о геометрии, порассуждаем об учебнике геометрии.

Изучение геометрии начинается в основном в седьмом классе. К этому моменту учащиеся вряд ли созрели для восприятия абстрактных логических конструкций. Поэтому на первых порах возможно обращение к наглядности и интуитивности. Однако не следует забывать и о формировании по возможности строгости в определениях, утверждениях и рассуждениях. Размытость в текстах может сформировать впечатление высокой степени образности предмета в ущерб основной его цели, а именно формирования культуры рассуждений.

Нередко формулировки основных понятий и утверждений даются в веками отточенном виде, очень лаконичном, по стилю похожими на лозунги. Такие формулировки ввиду краткости легче запомнить, однако с точки зрения их использования пред-

почтительнее более технологичный стиль, при котором детально прописывается взаимодействие всех участвующих в понятии или утверждении элементов. В основном тексте настоящего эссе на это неоднократно обращалось внимание.

Заключение. Какие из имеющихся учебников хорошие?

В качестве резолюции предлагается принять мнение, что хороших учебников нет, равно как нет и плохих. В каждом учебнике можно найти хорошее и плохое. Это не значит, что от них надо отказываться или принимать буквально и полностью. Для достижения метапредметных результатов надо использовать хорошие моменты из выбранного учебника и, ориентируясь на изложенные выше соображения, адаптировать материал с точки зрения формирования общеобразовательных результатов.

Приложение 2.

О доказательствах в школьном курсе геометрии

Одной из основных целей курса геометрии в школе служит возможность формирования способности к логическому мышлению, поскольку в этом курсе есть возможность и иногда необходимость проведения доказательств.

Предъявление доказательств формулируемых утверждений имеет по крайней мере две цели. Одна из них — убеждение в справедливости утверждений. Эта цель с образовательной точки зрения не самая существенная, так как ученики готовы поверить в справедливость утверждений, особенно если они интуитивно достаточно естественные и ясные. Вторая цель состоит в формировании способности к логическим выводам, способности рассуждать на основе правил логики. Однако логические правила, достаточно ясные сами по себе, служат лишь инструментом в построении цепочки рассуждений, составляющей доказательство. Вся цепочка создается с использованием рассуждений на основе анализа ситуации, правдоподобных гипотез, критического анализа подходящих предположений и выбора из них перспективных. При этом развивается здравый смысл, интуиция, внимательность и другие метапредметные качества.

Необходимость сопровождения утверждений их доказательствами не вызывает сомнений. Все школьные учебники геометрии содержат доказательства большинства излагаемых в них утверждений. Интересно, служат ли они цели развития логического мышления и насколько? Для попытки ответить на этот вопрос сначала определимся с тем, какого типа могут быть доказательства и какие цели достигаются для каждого из типов.

Научный стиль доказательств.

Для чего приводятся доказательства в математических текстах? Наличие доказательств и стиль их изложения зависит прежде всего от назначения текста. Если это научный текст и излагаются факты, ранее никому неизвестные, обнаруженные автором и предложенные коллегам, то естественно их сопроводить обоснованиями, гарантирующими справедливость формулируемых утверждений. Как правило, такие доказательства оформляются в отчуждаемом стиле, с минимумом мотивирующих соображений и неформальных пояснений основных идей, то есть

таком, который не предполагает дополнительных соображений о их создании, мотивированности рассуждений, состоит из цепочек логических связей и обосновывает утверждение. Такой стиль характерен для большинства научных работ и чаще всего используется в вузовских учебниках.

В научной литературе иной стиль доказательств вряд ли уместен, использование его в учебниках для вузов может быть мотивировано тем, что идет подготовка специалистов узкого профиля и они должны привыкать к стилю научной литературы.

Образовательный (методический) стиль доказательств.

Иначе дела обстоят с учебным материалом в школе. Здесь нет цели подготовки узких специалистов, прежде всего школа должна обеспечить общее развитие и информированность в некоторых базовых для каждого предмета деталях. Поэтому присутствие доказательств и их стиль изложения должны подчиняться другим принципам. Здесь нет фактов, которые были бы ранее неизвестны, так что обосновывать с целью гарантии справедливости не требуется, все факты в учебниках очень давно и очень хорошо известны и обоснованы. В таком случае естествен вопрос: а зачем их доказывать вообще, может, просто сообщить и написать фразу типа «фирма гарантирует»? В принципе, такое возможно, если либо совсем отказываться от формирования логической культуры, либо давать доказательства в научном стиле, который на начальном этапе изучения математики нецелесообразен. Но если считать основной целью образования развитие личности на базе определенных учебных предметов, то доказательства совершенно необходимы. Именно они могут формировать культуру мышления, рассуждений, и не только в изучаемом предмете, но и в других дисциплинах. Так что доказательства нужны, доказательства важны.

Особенности методического стиля доказательств.

От доказательств в учебной математической литературе хочется ожидать наличия хотя бы следующих особенностей.

1. Доказательства желательно оформлять в стиле естественных мотивированных рассуждений с демонстрацией развития событий, ведущих от данных к результату. Такой стиль построения доказательств можно назвать образовательным или методическим. Доказательства в методическом стиле не только форми-

руют культуру мышления, но и повышают интерес к предмету, ибо способность выстраивать логические мотивированные естественные цепочки рассуждений может вызывать чувство удовлетворенности от освоения предмета, что служит поводом для интереса к нему и потребности в дальнейшем изучении. Конечно, после получения доказательства в таком стиле можно его оформить и в научном стиле, то есть в виде последовательности логических переходов, но это зависит от разных обстоятельств — от уровня подготовленности учащихся, необходимости обучать научному стилю доказательств и т. п.

2. Желательно, чтобы детали, используемые в доказательствах, могли быть повторены и употреблены в других ситуациях, возможно, в других доказательствах и при решении задач. В таком случае повторяемые фрагменты запоминаются, формируется способность распознавания их применения в разных ситуациях, в частности, при решении задач. Более того, способность распознавания применимости определенного инструментария носит общий характер и полезна не только при изучении школьных предметов, но и вообще в любой деятельности.

3. Хотелось бы организовывать и оформлять доказательства в учебной литературе в динамичном стиле, то есть подчеркивать развитие рассуждений, в частности, в геометрии использовать в процессе доказательств не один чертеж, а несколько, подчеркивающих динамику процесса. На такой серии чертежей можно прослеживать переходы от одного состояния обоснованности к другому, пока не достигнется состояние полной обоснованности. К сожалению, динамику развития обоснования трудно обеспечить в статичном тексте, хотя сделать это возможно и к этому надо стремиться. Динамику может сформировать и поддержать учитель в процессе общения с учениками, но тогда он должен хорошо ее знать, быть готовым к возможным вариациям в процессе проведения доказательств с группой учащихся (мало ли что они предложат). Но для этого учителя надо обеспечивать примерами и, возможно, шаблонами отдельных фрагментов доказательств в отдельных пособиях.

Подготовить в методическом стиле можно многие доказательства из учебника. Изложить их в рамках учебника в таком, весьма полезном стиле, скорее всего, затруднительно, но не по

причине невозможности организации доказательств в таком стиле, а по причине увеличения объема текста. Так что приходится пытаться решить проблему: с одной стороны, полезности изложения доказательств в методическом стиле и трудности реализации такого плана. Возможные варианты решения указанной проблемы представляются интересными с точки зрения методики преподавания геометрии.

Заключение.

В предложенном выше тексте книжки были попытки построения доказательств в динамичном методическом стиле. Насколько они оказались удачными, судить вам, дорогие читатели.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Начальные геометрические сведения	5
1.1. Геометрические примитивы	5
1.2. Сравнение простейших деталей	8
1.3. О величинах и их измерении	11
Глава 2. Треугольники	13
2.1. Определение треугольника	13
2.2. Первый признак равенства треугольников	14
2.3. Перпендикуляр к прямой	17
2.4. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	19
2.5. Второй и третий признаки равенства треугольников	21
2.6. Примеры	23
2.7. Построения циркулем и линейкой	30
Глава 3. Параллельные прямые	40
3.1. Признаки параллельности двух прямых	40
3.2. Аксиома параллельных прямых	44
3.3. Углы с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами	47
Глава 4. Соотношения между сторонами и углами треугольника	51
4.1. Сумма углов треугольника	51
4.2. О некоторых свойствах прямоугольных треугольников	54
4.3. Расстояние от точки до прямой и между параллельными прямыми	60
4.4. Несколько задач на построение	62
Приложение 1. Что значит «хороший учебник»	70
Приложение 2. О доказательствах в школьном курсе математики	76