

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. Н. Дятлов

РАССУЖДЕНИЯ О ПРЕПОДАВАНИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Владикавказ
2018

УДК 517.1
ББК 22.16
Д 998

Дятлов В. Н.

Рассуждения о преподавании математического анализа. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2018. — 156 с.

Изложен авторский опыт многолетнего преподавания математического анализа. Обращается внимание на трехчастную структуру учебных материалов и расстановку приоритетов. С этих позиций описаны детали изложения математического анализа.

Для преподавателей математического анализа.

ISBN 978-5-904695-39-2

© Южный математический институт —
филиал ВНЦ РАН, 2018
© Дятлов В. Н., 2018

Dixi et animam levavi
(Сказал и облегчил тем душу)

ВВЕДЕНИЕ

Преподавание — весьма важный и непростой процесс передачи социально значимого опыта от людей старшего поколения более молодым. Поскольку далее речь пойдет о преподавании, в первую очередь стоит определиться с тем, что можно считать целями преподавания любого предмета (а не только математического анализа) и решаемыми в процессе достижения этих целей задачами.

Трудно выделить одну цель в преподавании той или иной учебной дисциплины, таких целей несколько, и можно отметить основные из них. Разумеется, одна из целей — передача предметной информации, т. е. формирование навыков в использовании научного языка, присущего той области науки, учебная дисциплина которой изучается. Вместе с тем полученная в рамках данной образовательной дисциплины информация может не быть использована специалистом в его будущей деятельности, и тогда, казалось бы, можно считать изучение этой дисциплины делом бессмысленным, пустой тратой времени. Если ограничиваться только одной указанной выше целью, то так оно и произойдет (и часто происходит).

Еще одной целью можно считать формирование в рамках данной дисциплины способности обучаемого к восприятию и обработке информации вообще. Имеется в виду способность проведения анализа поставленной задачи, мотивированный выбор пути ее решения, выбор средств (методов) для ее решения и выполнение всех деталей для получения результата. Эта цель представляется столь же важной, сколь и первая, ибо не только затрагивает язык данной предметной области, но также нацелена на выработку навыков работы с понятиями, правилами (утверждениями), позволяет сформировать надпредметные умения и навыки, необходимые для продолжения образования и дальнейшей профессиональной деятельности, что особенно важно в связи с усиливающейся в последнее время тенденцией непрерывного процесса образования каждого человека в течение продолжительного времени.

Можно выделить и другие цели, но они либо весьма общие и потому для конкретных выводов бесполезны, либо довольно частные, сопровождающие отмеченные выше и оказывающие на содержание и организацию образования меньшее влияние.

Ориентированность преподавания учебной дисциплины на восприятие и обработку информации порождает необходимость решения содержательных и организационных задач для обеспечения достижения такой цели. Поскольку обучение — явление многоплановое, подробно остановимся на нескольких его аспектах, а именно на содержании предметного материала и его восприятии, организации материала, отдельных сторонах процесса обучения, методах и организации контроля.

По поводу содержания можно отметить, что скорее речь пойдет об особенностях преподавания математического анализа, чем о содержании математического анализа как образовательной дисциплины. Различие в том, что содержание дисциплины состоит из набора конкретных тем, предназначенных для изучения, в то время как особенности преподавания кроме содержания дисциплины включают в себя много сопутствующих деталей, связанных с процессом обучения, т. е. в том числе отражают индивидуальные предпочтения преподавателя.

Чтобы повысить значение содержания образования и уменьшить зависимость процесса обучения от сопровождающих его специалистов, надо обратить внимание на учебные материалы. Поэтому сначала поговорим о структуре учебных материалов, а именно о предлагаемой ниже трехчастной структуре учебных материалов, о характере изложения материала при работе со студентами, основанном на компоновке и акцентировании изучаемого материала, об организации процесса обучения и контроля. Затем последовательно будут изложены особенности трехчастно организованного материала для конкретных тем, и это займет большую часть текста. Детально остановимся на первых шагах в изучении анализа как наиболее ответственных за переход обучаемого от школьных традиций к вузовским.

Содержание курса математического анализа довольно устоявшееся с точностью до последовательности изложения отдельных разделов. Здесь будет взят ориентир на классическое расположение тем:

(1) введение в анализ, одномерный анализ (предел последовательности и функции, непрерывность, дифференцирование, интегрирование, в том числе несобственный интеграл), числовые ряды;

(2) дифференцирование функций нескольких переменных (производные и дифференциал, теоремы о неявном и обратном отображениях, экстремум, замена переменных);

(3) ряды и интегралы, зависящие от параметра (равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов, свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов, интеграл, зависящий от параметра, ряды Фурье);

(4) интегрирование функций нескольких переменных (двойные, тройные, многократные интегралы);

(5) криволинейные и поверхностные интегралы (интегрирование функций и дифференциальных форм или векторных полей).

Можно принять и иную последовательность изложения, например, сведения о числовых рядах излагать сразу в теме о пределе последовательности из тех соображений, что для определения основных связанных с числовыми рядами понятий ничего большего, чем относящееся к пределу последовательности, не требуется. Это действительно так, если смотреть с точки зрения математического анализа как раздела математики, несколько не заботясь об образовательной роли этого предмета. Можно, например, раздел о равномерной сходимости излагать сразу после одномерного анализа, прежде чем студент узнает о дифференцировании функций нескольких переменных. Можно основывать изучение интеграла, зависящего от параметра, на базе интеграла Лебега. Можно интегрирование по многообразиям начинать с дифференциальных форм, а можно ограничиваться интегрированием функций и векторных полей, и т. д. Здесь изложение будет идти в ракурсе отмеченного выше следования отдельных тем.

Предлагаемые рассуждения относятся к методике преподавания конкретной математической дисциплины и состоят из изложения набора методов (способов) достижения указанных выше целей, поэтому вопросы содержания курса математического анализа как учебной дисциплины затрагиваются настолько, насколько это отвечает более полному раскрытию методической составляющей.

Подчеркну, что здесь изложен авторский опыт преподавания математического анализа на механико-математическом и физическом факультетах Новосибирского государственного университета. Особо подчеркиваю, что я никого ни в чем не намерен убеждать, ничего никому не буду навязывать, ни в одном моменте не претендую на первичность подхода, вполне возможно, что так же поступают другие преподаватели. Это всего лишь

готовность поделиться с коллегами информацией и соображениями, накопившимися у меня в течение многих лет преподавания.

Материал, связанный с содержанием курса, по существу, представляет собой отрывки теоретической и большую часть технологической составляющих материала, подготовленного для изучения студентами перед решением задач. Здесь к нему добавлены разные наблюдения с точки зрения мотивированности тех или иных моментов, способности к их усвоению и т. п., иначе говоря, наблюдения, которые могут быть любопытны для преподавателя. Там, где технологическая составляющая традиционна и известна всем, я оставил лишь описание содержания вместе с небольшими комментариями.

Я благодарен всем, кто так или иначе повлиял на содержание и появление этого текста.

В. Дятлов

Новосибирск, Академгородок, январь 2018 г.

Глава 1. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ

§ 1.1. Трехчастная структура учебных материалов

Обычно учебный материал состоит из двух частей: теории, включающей в себя основные понятия и факты, и практики, состоящей из примеров и упражнений. В теории закладываются основы понятийного поля (знания), в практической части путем решения задач формируются компетенции (умения и навыки), основанные на теоретическом материале. Предполагается, что в результате обучающийся должен научиться решать задачи, формулируемые в терминах изложенного теоретического материала. Вместе с тем любой набор примеров конечен, и если поставленная задача не соотносится ни с одним из рассмотренных примеров, то встает проблема поиска путей ее решения.

Для формирования навыков решения задач предлагается традиционную структуру учебного материала дополнить промежуточной между теорией и практикой частью, включив в нее совокупность правил, руководствуясь которыми можно выяснить целесообразность применения данного фрагмента теории к решению конкретной задачи, и если таковая есть, составить путь решения.

О наборе правил, алгоритмов, методов, основанном на теоретическом материале и применяемых для решения задач, будем говорить как о *технологической составляющей* учебного материала. Таким образом, предлагается использовать трехчастную структуру учебных материалов: теория — технологии — практика.

Исходя из опыта применения такой структуры в учебном процессе, можно сказать, что для эффективности технологической части желательно, чтобы она удовлетворяла определенным требованиям.

1. Необходимы средства распознавания применимости того или иного метода к решению данной задачи. Такие средства должны состоять из

достаточно легко проверяемых особенностей, позволяющих в случае их наличия в постановке задачи с высокой степенью определенности принять решение о выборе данного метода для анализа задачи.

Выбор метода является ответственным шагом. От этого нередко зависит успех в решении задачи. Поэтому механизм распознавания — существенное звено в технологической составляющей.

2. Желательно представлять правила в виде набора шагов, каждый из которых должен либо состоять из вопроса, в результате ответа на который происходит выбор дальнейших действий, либо содержать исполняемые действия, т. е. такие рекомендации, которые могут быть выполнены без дополнительных разъяснений при определенной предварительной подготовке.

Умение ставить вопросы не менее важно, чем способность давать на них ответы. Чем уместнее вопрос, тем содержательнее и эффективнее на него ответ, и тем больше шансов решить поставленную задачу. Стиль работы над задачей, при котором деятельность сопровождается вопросами, придает динамику и направленность процессу решения. Для того чтобы научить ставить вопросы, надо обеспечить обучающихся обозримым набором вопросов, которые желательно задавать в соответствующих ситуациях.

Разумеется, каждый вопрос предполагает поиск ответа, и надо предложить набор возможных ответов, достаточно представительный для выбора очередного шага. Система постановки вопросов и поиска ответов на них приводит к целенаправленному разветвлению процесса решения задачи, позволяет ставить цели и идти к ним.

Разбиение решения на исполняемые шаги повышает активность студента, так как позволяет свести задачу к выполнению доступных ему действий. Кроме того, оно побуждает обучаемого осваивать элементарные средства, поскольку поддерживает способность решать более трудные задачи при условии умения решать базовые.

3. Весьма желательно иметь признаки завершения решения. Даже в самых простейших ситуациях надо понимать, какова цель, какого вида может или должен быть ожидаемый результат, каковы отличительные признаки этого результата. Такие признаки позволяют быть уверенным в завершении решения задачи.

Обычно бывает ясно, какой ожидается результат. Однако даже в казалось бы простых случаях не всегда очерчивается цель. Например, даже

в таком простом вопросе, как решение уравнения (на школьном уровне), может быть недостаточно ясно, что должно быть результатом.

Наличие правил, обладающих перечисленными свойствами, позволяет организовывать решение задачи как целенаправленный процесс, мотивированно намечать последовательность действий, способную привести к решению, выбирать очередной шаг, исполнять его и переходить к следующему, и действовать так либо до решения задачи, либо до осознания того, что выбранный путь к решению не приведет. Во всяком случае организация решения как серии мотивированных действий лучше, чем выполнение случайных операций. Желательно руководствоваться принципом: ни одного немотивированного действия! Каждый шаг должен быть чем-то вызван.

Технологическая составляющая при изучении предмета приводит к повышению инициативы обучаемого. Она формирует способность к поиску путей решения вместо ожидания демонстрации примеров, простым повторением которых решаются задачи, побуждает обращаться к теоретическому материалу. При такой организации материала меняется традиционная направленности процесса «от преподавателя к обучаемому» на противоположную, т. е. «от обучаемого к преподавателю». Активным участником процесса может стать обучаемый, преподаватель может оказаться в роли консультанта, партнера, готового проанализировать, прокомментировать и оценить целесообразность предлагаемых обучаемым действий.

Более того, наличие технологической составляющей в учебном материале позволяет достаточно эффективно использовать его для самостоятельного изучения предмета, в результате обучаемый привыкает к чтению учебной (а в будущем и научной) литературы, а формирование способности получения знаний из литературы является одной из главных задач всего процесса образования.

Конечно, если на практических занятиях рассматриваются теоретические задачи, в которых надо что-то доказать, то в них выделить технологическую составляющую трудно и нередко невозможно. Эти задачи направлены на развитие творчества и не предназначены для массового обучения предмету. Они доступны только весьма талантливым и мотивированным студентам, тогда как становиться образованными должны не только такие, но и обычные, способные молодые люди.

Иногда можно встретить точку зрения, согласно которой необязательно обучать студентов решению технических задач. Ее мотивируют тем, что правила выполнения упражнений на отработку определенной техники (например, нахождения производных) известны и при необходимости обучаемый может либо воспользоваться такими правилами, либо обратиться к справочному материалу. Однако овладение в достаточной степени совершенства техникой решения простейших задач позволяет повысить уровень языка, как говорят, «видеть за деревьями лес», т. е. мыслить не категориями отдельных деталей, а более абстрактными категориями.

§ 1.2. Акцентирование

Любой материал состоит из фрагментов. На одни из них требуется обратить особое внимание, другие играют в рассматриваемом контексте вспомогательную роль. Поэтому на первых порах необходима расстановка акцентов со стороны преподавателя, ибо студенты ввиду их недостаточной осведомленности обычно не в состоянии отделить главное от второстепенного. В частности, одной из целей преподавания можно считать формирование способности расставлять приоритеты в изучаемом (или создаваемом) материале.

Можно заметить, что главные моменты требуют неоднократного к ним обращения, в то время как второстепенные такого не предполагают. Однако бывает так, что преподаватель постоянно обращает внимание на детали, с его точки зрения существенные, но на самом деле решающей роли при изучении данного материала не играющие. В результате может оказаться (и обычно оказывается) так, что студенты второстепенный материал воспринимают как основной и запоминают, а центральные, ключевые детали вовсе не осваивают.

Влияние расстановки приоритетов проявляется во всех деталях изучаемого материала — в определениях, формулировках, доказательствах, в поиске пути решения и даже в выполнении действий при решении задачи. Можно привести много этому примеров, и таковые появятся при рассмотрении конкретного материала. Здесь ограничимся примерами того или иного ожидаемого образовательного результата в зависимости от акцентирования.

ПРИМЕР 1. Всем известно определение предела функции в точке. Разумеется, в этом определении важна обстановка, в которой дается определение, т. е. указание рассматриваемых объектов. К ним необходимо отнести функцию, заданную предельную точку области определения, и можно отнести множество, по которому рассматривается предел. Эти объекты так или иначе отражаются в связанной с пределом символике. При любых разновидностях обозначений указываются функция, точка, в которой берется предел, и если рассматривается предел по множеству, то отмечается принадлежность переменной этому множеству. Эти детали повторяются каждый раз при обращении к пределу и устойчиво запоминаются. В итоге нередко оказывается так, что при ответе на вопрос, что такое предел функции в точке, можно услышать информацию о точке, нередко без упоминания о том, что она предельная для области определения (этот факт не отражается в обозначениях), и практически всегда сообщается весьма несущественная информация о принадлежности точки заданному множеству. Поскольку логическая структура определения не отражается в символике и не повторяется каждый раз, она без особого акцентирования не запечатлевается, и требуются особые усилия для ее запоминания. Здесь внимание переходит с логической структуры понятия на детали, которые часто можно употребить по умолчанию, в частности, на множество, по которому берется предел.

ПРИМЕР 2. К акцентированию можно отнести и подготовку исполняемых действий после выбора средства, применяемого для решения данной задачи. Нередко бывает так, что применение конкретного метода связано с деталями, изменение которых невозможно, которые непременно должны присутствовать. Их можно отнести к незыблемым деталям, которые нельзя трогать, они всегда должны быть. В качестве самого примитивного примера можно привести весьма важную в техническом отношении процедуру выделения полного квадрата (или, говорят, квадрата двучлена). Вспомнив формулу $(u + v)^2 = u^2 + 2 \cdot u \cdot v + v^2$ (точки, символизирующие умножение, проставлены умышленно, они служат для расстановки акцентов), акцентируем внимание на том, что множитель 2 в этой формуле присутствует всегда, он незыблем, он всегда должен быть, и если его нет, то процесс выделения квадрата двучлена надо организовывать на основе обеспечения этого множителя путем изменения остальных составляющих.

ПРИМЕР 3. Еще один яркий пример акцентирования появляется при использовании замечательных пределов для нахождения предела функции в точке. Там есть акцент общего плана, а именно все такие пределы рассматриваются в нуле, и есть акценты частного характера. К частным акцентам относятся неизменяемые фрагменты соответствующих формул. Для каждой формулы необходимо отмечать, какие фрагменты в ней мы можем настроить и что настройке не подлежит, оно незыблемо. Кратко пройдемся по всем пяти замечательным пределам и отметим неизменяемые фрагменты.

1. В выражении $\frac{\sin z}{z}$ мы не вправе вмешиваться в аргумент синуса: то z , которое является аргументом у синуса, незыблемо, его трогать нельзя, а знаменатель можно изменять, он доступен внешним воздействиям, его можно изменить путем умножения числителя и знаменателя дроби на такую величину, чтобы получилось то же выражение, которое находится в аргументе синуса.

2. В выражении $(1+z)^{1/z}$ в первую очередь необходимо обеспечение единицы в основании степени, без нее речи об использовании этого предела не идет. Если основание представимо в виде «единица плюс бесконечно малая», надо отметить, что добавку z в основании трогать нельзя — она находится «внутри» и «снаружи» недоступна. Стало быть, изменять все выражение, добиваясь того, чтобы на всех местах, где стоит z , находилось одно и то же выражение, можно исключительно за счет изменения показателя степени.

3. В выражении $\frac{e^z - 1}{z}$, во-первых, непременно вычитаемая единица, и если ее нет, то и речи об этом пределе нет. Далее, здесь внутренним, извне недоступным, является показатель степени у экспоненты. Значит, он незыблем, и если в знаменателе находится отличная от него величина, ее можно изменять, умножая числитель и знаменатель на такое выражение, чтобы в знаменателе оказалось то же, что и в показателе степени у экспоненты.

4. В выражении $\frac{\ln(1+z)}{z}$ непременно единица внутри логарифма, и, как и выше, если ее нет, то и речи об этом замечательном пределе нет. Ясно, что величина, прибавляемая к единице под логарифмом, незыблема, она внутренняя и снаружи недоступна. Значит, надо работать с выражением, находящимся в знаменателе.

5. В выражении $\frac{(1+z)^\alpha - 1}{z}$ неперенная единица в скобках в числителе, добавляемое к ней выражение z снаружи недоступно, вычитаемая в числителе единица также необходима, но ее проще обеспечить, ибо она не внутри выражения, а знаменатель можно изменять, добиваясь единообразия на всех местах вхождения z в этот замечательный предел.

Таким образом проявляется акцентирование всех фрагментов, участвующих в составляющих замечательные пределы выражениях. Без такого анализа нахождение предела функции в точке с применением замечательных пределов может оказаться случайным блужданием.

Расстановка акцентов в сопровождающих курс доказательствах продемонстрирована на примере доказательства теоремы о пределе произведения последовательностей в конце § 2.2.

Для каких-то неоднократно встречающихся ситуаций можно акцентировать внимание на типичных способах рассуждений или типичных преобразованиях. Если отмечаемая ситуация повторилась, рекомендуется выполнить характерные для нее действия. Исходя из опыта, можно сказать, что для устойчивого распознавания отличительных особенностей той или иной ситуации и выполнения соответствующих действий обычно необходима пятикратная встреча с этой ситуацией.

Расстановка приоритетов полезна и при планировании содержания и последовательности изложения материала. В качестве примера можно обсудить вопрос о том, с чего начинать курс математического анализа. Традиционно он начинается с элементов теории множеств, доказательства теоретико-множественных равенств и включений, а также понятий и соотношений, относящихся к абстрактным отображениям. Однако вчерашние школьники в массе своей абсолютно не готовы к той высокой степени абстракции, которая предполагается при изучении этого на первый взгляд простого, но весьма абстрактного материала, они не в состоянии его оперативно освоить, и кроме формирования комплекса неполноценности постановка этих тем в начале изучения анализа мало что приносит. Вместе с тем если опереться на пусть не очень хорошо освоенный, но все же встречавшийся в школе материал, то процесс вхождения в курс анализа может оказаться не столь экстремальным.

§ 1.3. Об организации процесса обучения и контроля

Традиционно в российских вузах преобладает пришедшая из прежних времен система обучения, состоящая из лекций и практических занятий. На лекциях излагается теоретический материал, на практических занятиях на основе теоретического материала отрабатываются навыки решения задач. В течение семестра проходят контрольные работы и коллоквиумы, в конце семестра идут зачеты и экзамены.

При такой организации предполагается высокая заинтересованность студента в овладении материалом и способность его к достаточно своевременному и качественному восприятию всего изложенного. Однако как прежде, так и сейчас высокая мотивированность и способность эффективно осваивать материал скорее является исключением, чем правилом. Конечно, можно ориентироваться на весьма небольшую группу одаренных студентов, оставляя без внимания остальную массу, однако в таком случае либо придется большинство исключать из процесса обучения, либо сильно занижать уровень требований для получения положительной отметки. Во втором случае на выходе может получиться пара — тройка хороших специалистов и масса молодых людей, слабо подготовленных к дальнейшей профессиональной деятельности.

Даже в случае высокой заинтересованности в изучении материала обычно наблюдается разрыв между уровнем сложности учебных курсов и способностью студента к их восприятию и изложению. Начиная студент не понимает того, что значит выучить материал, с чего начать решение задачи, нередко недостаточно уверенно знает необходимую для освоения курса предварительную информацию. Можно сказать, что обычно он недостаточно социально адаптирован к продолжению образования в вузе. Можно искать причины такого явления, но они нередко находятся за пределами наших компетенций, в области, недоступной нам для изменения ситуации, поэтому естествен вопрос: что мы можем предпринять для сохранения контингента студентов и формирования из них хоть сколько-то образованных и способных к деятельности специалистов?

Не претендуя на истину в последней инстанции, приведу основанные на личном опыте соображения, которые могли бы способствовать улучшению ситуации.

1. Желательно своевременно снабжать студентов оформленными в трехчастной форме учебными материалами, хотя бы в виде расположенных в свободном доступе файлов. Организация материала, при которой происходит мотивированное разбиение процесса решения несложных

задач на исполняемые шаги, позволяет приучать студентов к самостоятельной работе с текстом и с учебной литературой.

Повышает уровень подготовки и своевременное обеспечение студентов записями прочитанных лекций в виде напечатанных пособий или хотя бы файлов. Кроме того, оказалось полезным размещение в Интернете видеозаписей лекций, осуществляемое не позднее чем на следующий день после прочтения лекции. Были опасения, что, обладая такой поддержкой, студенты перестанут посещать лекции, однако они не реализовались — посещаемость осталась на довольно высоком уровне. Вместе с тем студенты, которые по каким-то причинам не смогли посетить лекцию (болезнь, задержки транспорта, необходимость срочной подготовки к другому курсу и т. п.), имели возможность просмотреть всю лекцию в исполнении лектора и изучить материал, используя подробную напечатанную запись изложенного на лекции материала. Эффект был весьма положительным.

2. Хорошо показывает себя практика приема заданий у студентов в течение семестра. Эти мероприятия проводятся в дополнительное к занятиям время и направлены на повышение активности студентов и формирование способности устно отстаивать корректность решения задач. При ответственном отношении к делу своевременно выясняется, кто из студентов на каком уровне развития находится, можно вовремя обратить внимание на проблемы и при желании принять меры. Для ответственных студентов сдача заданий заметно повышает уровень их подготовки.

3. Вместе с организацией учебного процесса эффективна описываемая ниже система контроля.

В ситуации, когда студент, по существу, впервые лишь в самом конце семестра, порой лишь на экзамене встречается с необходимостью что-то самостоятельно рассказать, трудно ожидать от него хорошего изложения изученного. Одна из причин в том, что уже достаточно давно из традиций школы исчезли устные экзамены, и выпускники слабо представляют себе, что значит изучить материал и дать устный ответ на поставленный вопрос. У них создается впечатление, что достаточно либо прочесть и, как ему кажется, понять изложенное, либо заучить последовательность фраз и символов, не особенно понимая скрываемое за этим содержание. Вторая из причин состоит в том, что он лишь спустя несколько месяцев после начала обучения в вузе впервые должен что-то воспроизводить. А он к этому не готов, и в качестве результата нередко получает оценку «увы», не очень удовлетворяющую ни его, ни преподавателей. Для формирования активной позиции студента в изучении пройденного требуется значитель-

но меньший промежуток времени для проведения первого контроля, на его основе анализа недостатков и принятия мер к их устранению.

Обычно в качестве такого контроля выступает так называемый коллоквиум. Однако нередко не прописаны ни форма его проведения, ни содержание, ни степень ответственности, ни существенность поощрения при хорошем результате. В такой ситуации эта процедура может оказаться формальностью с невысоким уровнем ответственности и слабой мотивацией в достижении высокого результата.

Тем самым появляется потребность в как можно более раннем стимулировании студента к изучению теоретического материала, постепенному формированию способности его воспроизведения в устной или (лучше) письменной форме, возможности повышать качество подготовки без применения карательных мер, повышению познавательной самостоятельности. Для реализации этой потребности может быть использована следующая система организации аттестации.

Весь планируемый в семестре материал разбивается на три логически обособленных блока. Например, для первого семестра это может быть «предел и непрерывность функций одной переменной», «дифференциальное исчисление функций одной переменной», «первообразная и интеграл; числовые ряды». Контроль усвоения первой части проводится в конце октября — начале ноября в виде письменной работы. Каждый билет состоит из нескольких теоретических вопросов, ответ на каждый из которых оценивается числом от трех до пяти. Оценкой три снабжаются вопросы, в которых надо дать определение или сформулировать какое-то утверждение, иногда сообщить простейшее доказательство. Оценкой четыре сопровождаются вопросы, состоящие в формулировке и доказательстве средней сложности утверждений. Формулировка и доказательство трудных теорем снабжаются отметкой пять. В билете от трех до пяти вопросов с отметкой 3, один или два вопроса с отметкой 4 и один вопрос с отметкой 5. Для получения отметки 3 за каждую треть курса необходимо написать верные ответы на все вопросы, оцениваемые на 3, для получения отметки 4 — заработать отметку 3 и дать ответы на все вопросы с расценкой 4. Для получения пятерки надо дать верные письменные ответы на все вопросы билета.

Результат такого коллоквиума идет в зачет экзамена, т. е. в экзаменационную сессию студент может зачесть полученную ранее отметку и не отвечать на вопросы по этой части, хотя должен быть готов ответить на несложные вопросы этой части как дополнительные. Вместе с тем у него сохраняется возможность в процессе экзамена повысить отметку,

пройдя всю процедуру на экзамене. В качестве итоговой отметки берется минимум из отметок за три части курса.

Студент имеет право предпринять попытку повышения отметки за те части курса, которые контролировались в течение семестра. Официально можно разрешить одну (или две) попытки повышения отметки. Однако, в принципе, можно допустить и большее число попыток.

В билеты включаются только вопросы теории, изложенные в лекциях. Перечень выносимых на проверку вопросов и их расценки становятся известными студентам примерно за две недели до проведения аттестации. Содержание билетов также доступно заранее, примерно за неделю до проверки. Отсутствие в билетах задач мотивируется тем, что, во-первых, формирование практических навыков и их контроль проводится ассистентами, и недостаточно ясна потребность в дополнительной проверке качества усвоения материала. Во-вторых, хочется добиться от студентов хотя бы способности осмысленно оперировать терминологией курса, понимания взаимосвязей как между его частями, так и между элементами курса и другими изучаемыми предметами. В-третьих, заранее зная, какую отметку они получают за определенного уровня ответ, студенты готовы приложить усилия для достижения желаемого результата. Наконец, при необходимости сдачи заданий в течение семестра можно не дублировать решение задач на экзамене.

Вместе с тем можно включать в билеты и несложные задачи, регулярно решаемые на основе теоретического материала. Трудно сказать, насколько это сделает аттестацию более точной и насколько изменит уровень овладения языком данной дисциплины, но уровень определенности в ожидаемом результате точно понизит.

Эффект проведения таких мероприятий по контролю знаний оказался следующим. Сначала студенты недостаточно оценили возможности, предоставляемые этой системой. Первая попытка показывала обычно низкую их способность к изложению изученного. Опираясь на первый опыт, они могли процесс повторить, обычно вторая попытка была уже существенно лучше первой. К тому же после того, как они осознавали, что полученная здесь отметка позитивно влияет на результат экзамена, их усердие сильно возрастало. Они готовы были изучить материал до уровня получения желаемой отметки. К моменту проведения контроля за третью часть, уже на экзамене, в подавляющем большинстве мы видели студентов, достаточно подготовленных для изложения материала курса.

Глава 2. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 2.1. Начало курса. Восприятие кванторов.

Повторение свойств функций

Одной из важных особенностей курса математики как учебной дисциплины в школе является нацеленность на выполнение действий, связанных с преобразованиями, при этом логическая составляющая решения затрагивается слабо. Но в вузе, особенно в курсе математического анализа, происходит существенная переориентация с преобразовательной составляющей на логическую сторону решения. Это вызывает серьезные, нередко непреодолимые, трудности у студентов первого курса. Они не понимают, что от них ожидается, с чего начать решение задачи, что предполагается в качестве результата. Определенную трудность составляет восприятие кванторов. Практически никто из начинающих студентов не в состоянии ответить на вопрос: в утверждении «для любого $x \in X$ выполняется высказывание $P(x)$ » можно взять в качестве x одно, конкретное значение, или нельзя. Поэтому предлагается начинать изучение математического анализа не с элементов теории множеств (они, кстати, долгое время не потребуются в том стиле, в котором это часто дается на первых занятиях), а с освоения высказываний (утверждений) с кванторами на основе изучения основных связанных с функциями понятий и свойств. Выбор функций в качестве основы для понимания работы с кванторами неслучаен — именно функции являются основой всего дальнейшего курса анализа и безупречное знакомство с ними крайне важно.

Поскольку преподаватели привыкли обращаться с кванторами, им может показаться, что первокурсники должны обладать соответствующими навыками, и в процессе обучения может возникать противоречие между мыслимым и реальным. Поэтому сначала остановимся на общих связанных с кванторами вопросах: как словесно оформлять высказывания с кванторами, брать отрицание, как относиться к кванторам общно-

сти и существования в зависимости от того, в каком контексте они встречаются. Затем поговорим о возрастании трудности восприятия высказываний с кванторами и в связи с этим о последовательности изложения материала. Цель данного фрагмента — подчеркнуть детали, на которые стоит обратить внимание.

1.1. ЗАПИСЬ ПРЕДЛОЖЕНИЙ С КВАНТОРАМИ СРЕДСТВАМИ ЯЗЫКА. Говоря о разнообразии выражения высказываний с кванторами средствами языка, мы имеем в виду в первую очередь не замену одних слов им равнозначными (например, вместо слов «для всех» можно говорить «для любого» или же вычурное «каково бы ни было», а «найдется» заменять словом «существует»). Большое разнообразие записи высказываний с кванторами связано с положением кванторных приставок и даже употреблением по умолчанию, а также с использованием особых словосочетаний, которые заменяют кванторные приставки и даже их комбинации (последнее подробнее обсуждается ниже в п. 1.2.)

Рассмотрим особенности записи высказываний с квантором общности на примере следующих эквивалентных высказываний:

- (1) $(\forall x \in A) \quad f(x) \geq 0$;
- (2) $f(x) \geq 0, x \in A$;
- (3) $f(x) \geq 0$.

Аналогично высказывания с квантором $\exists$ также допускают различную запись:

- (4) $(\exists(a, b) \subset \mathbb{R} \forall x \in (a, b)) \quad f(x) \geq 0$;
- (5) $(\exists(a, b) \subset \mathbb{R}) \quad f(x) \geq 0 \text{ на } (a, b)$;
- (6) $f(x) \geq 0 \text{ на некотором интервале } (a, b)$.

В (2) кванторная приставка уходит в конец, и происходит это по той причине, что мы преимущественно интересуемся высказыванием, понимая или подразумевая, как в нем связана переменная, а в (3) пропадает вовсе — подразумевается, что она легко восстанавливается из контекста. В (5) кванторная приставка $\forall x \in (a, b)$ отправляется в конец, превращаясь в лаконичное «на (a, b) ». После этого и первая приставка $\exists(a, b) \subset \mathbb{R}$ убегает в конец, занимая свое место между «на» и (a, b) в виде слова «некотором». Данные примеры показывают основную тенденцию, имеющую место при записи сложных высказываний с кванторами, — кванторные приставки иногда уходят в конец и принимают изящные лаконичные формы. Математики стремятся украсить и разнообразить свою речь. Действительно, записи типа (3) и (6) по сравнению с формальными

развернутыми формами (1) и (4) легче читаются, однако чаще остаются непонятыми.

Бывает так, что обогащение кванторной группы дополнительными деталями переносит акцент на детали и заслоняет существо дела. Например, иногда систематически говорят «для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ », желая подчеркнуть тот факт, что содержательность применения квантора общности будет при малых значениях ε . Однако я встречался с ситуацией, когда воспринималось именно добавление «сколько угодно малое», исчезала сущность символа как всего лишь обозначения детали некоторого процесса, и ε начинало восприниматься как какое-то конкретное обозначенное буквой число (наподобие e , π), сколь угодно малое, но им (студентам) не сообщаемое.

Иногда переход кванторной приставки в конец приводит к неоднозначной трактовке. Например, как понимать предложение

Для всех $x \in A$ верно $P(x, y)$ для некоторого $y \in B$?

Как

$$(\forall x \in A \exists y \in B) \quad P(x, y)$$

или

$$(\exists y \in B \forall x \in A) \quad P(x, y)?$$

Ясно, что ситуации, приводящие к неоднозначности, недопустимы.

Работая с высказываниями, можно придерживаться следующих принципов.

- (1) Если важна структура высказывания, например, при выводе одного высказывания с кванторами из другого, желательно использовать развернутую форму типа (1), (4).
- (2) Все переменные должны либо иметь конкретные значения, либо быть связаны кванторами. Однако кванторы общности, стоящие в начале, можно опускать: если переменная явно никак не связана, то подразумевается, что она связана квантором $\forall$, как в случае (3). (Квантор $\exists$ опускается в исключительных ситуациях, например, «в окрестности точки» означает «в некоторой окрестности точки».) Вообще употреблением кванторов по умолчанию следует пользоваться с осторожностью.

1.2. МАКРОСЫ. В программировании макросами называют короткие команды, которые заменяют большие часто повторяющиеся части

текста. В математике также встречаются макросы. Под *макросом* будем понимать какое-то компактное словосочетание, которое разворачивается в детальное высказывание. Приведем несколько примеров.

$P(n)$ выполняется начиная с некоторого номера означает

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0) \quad P(n);$$

$P(x)$ выполняется для достаточно больших x означает

$$(\exists x_0 \in \mathbb{R} \forall x \geq x_0) \quad P(x);$$

$f(x)$ локально ограничена означает

$$(\forall [a, b] \subset \text{dom } f \exists C > 0 \forall x \in [a, b]) \quad |f(x)| \leq C;$$

$f(x)$ локально обратима означает

для любого $x \in \text{dom } f$ существует интервал (a, b) , содержащий x , такой, что сужение $f(x)$ на (a, b) обратимо.

В некотором смысле многие понятия в анализе, такие как предел и производная, — это макросы.

1.3. ВОСПРИЯТИЕ КВАНТОРОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СИТУАЦИЙ С ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ. Поскольку встречаться с кванторами приходится на протяжении всего времени общения с математикой, важно хорошо понимать, как работать с утверждениями, содержащими кванторы.

Отношение к кванторам общности и существования неоднозначно и зависит от статуса утверждения с их участием, а именно от того, надо ли такое утверждение доказывать или оно уже дано и его можно использовать.

Ситуация 1. Квантор общности участвует в утверждении, которое надо доказывать. Тогда квантор «для любого» можно представлять себе как внешнее требование, не зависящее от нас, которое мы должны удовлетворить. Если в утверждении есть слова «для любого», представьте себе, что кто-то будет предлагать вам какие-то значения величины, сопровождаемой словами «для любого», а вам предстоит при этом выполнить все действия, которые следуют за этими словами. Пусть для определенности величина, к которой относятся слова «для любого», обозначается буквой ε , и для еще большей определенности (так чаще всего бывает) добавим требование: $\varepsilon > 0$. Тогда выражение «для любого $\varepsilon > 0$ » надо

понимать так: кто-то будет давать какие-то положительные числа в качестве ε . Мы, в свою очередь, должны будем обеспечить справедливость какого-то утверждения (обозначим его через $P(\varepsilon)$), связанного с выбранным ε . С чего начать обеспечение требуемого утверждения? Во-первых, надо посмотреть, что от нас потребуется в утверждении $P(\varepsilon)$, и задать-ся вопросом: *откуда можно получить выполнение $P(\varepsilon)$* ? Иначе говоря, пойти с конца, пытаясь понять, какие действия надо предпринять для обеспечения $P(\varepsilon)$. Значение ε нам неизвестно, поэтому надо заботиться о том, чтобы выработать **правило** обеспечения справедливости $P(\varepsilon)$, зависящее, естественно, от ε . Если такое правило выработать удастся, то можно гарантировать, что мы обеспечим выполнение утверждения

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad P(\varepsilon).$$

Ситуация 2. Квантор общности встретился в утверждении, которое дано, и мы имеем право это утверждение использовать. Тогда выбор той величины, к которой относится этот квантор, в наших руках, мы вправе придать ей то значение, которое нам требуется, и использовать с этим значением всё, что сообщается в утверждении.

Очень важно не смешивать эти две ситуации!

Иначе следует относиться к квантору существования.

Ситуация 3. Квантор существования стоит в утверждении, которое мы доказываем. В таком случае это наши возможности, мы можем подбирать величину, о существовании которой говорится, исходя из всех имеющихся ресурсов. Конечно, в каждом конкретном случае гарантия существования осуществляется по-разному, однако в некоторых ситуациях есть наблюдения, носящие рекомендательный характер.

Ситуация 4. Квантор существования находится в утверждении, которое известно, нам дано, и мы можем его использовать. В этом случае квантор существования — это пришедшая извне (из имеющегося утверждения) информация, которую мы можем использовать в наших целях.

Формирование корректного отношения к кванторам — процесс длительный, и он эффективно реализуется на простейших высказываниях с кванторами, заложенных в определениях базовых понятий, связанных с функциями.

1.4. **Запись высказываний при помощи языка общения.** Язык общения гораздо богаче математического языка символов (хотя при этом

менее строг) и предоставляет разные способы записи одного и того же факта (высказывания). Особенно это разнообразие проявляется в случае импликации. Полезно обсудить со студентами некоторые способы записи импликации $P \Rightarrow Q$:

- (1) пусть P , тогда верно Q ;
- (2) если P , то Q ;
- (3) из P следует Q .

Это понятные и нейтральные формы записи. Можно постараться пользоваться именно такими формами.

Однако есть и другие способы записи $P \rightarrow Q$:

- (4) для того чтобы выполнялось P , необходимо выполнение Q ;
- (5) Q — необходимое условие для выполнения P ;
- (6) P выполнено только тогда, когда выполнено Q ;
- (7) P выполнено только в том случае, если выполнено Q ;
- (8) P выполнено, только если выполнено Q .

Это уже более тонкие формы, несущие в себе некоторую окраску. Например, формы (4) и (5) подчеркивают, что при выполнении P с неизбежностью (с необходимостью) выполняется и Q , или что P не может выполняться без Q . Это несколько непривычное выражение можно легко понять, если заметить, что слово «необходимо» здесь означает «не обходимо», т. е. «нельзя обойти», т. е. «обязательно будет выполнено», т. е. если выполнено утверждение P , то нельзя обойти выполнение утверждения Q , оно также будет выполнено, т. е. из P следует Q . Такие формы встречаются в формулировках теорем в случае, когда P — интересующий нас факт, а Q — (относительно) легко проверяемое условие. Такая теорема означает, что нечего пытаться доказать P , если Q неверно.

Если записать ту же импликацию в другом порядке: $Q \leftarrow P$, то можно описать ее словами так:

- (9) Q следует из P ;
- (10) для выполнения Q достаточно выполнения P ;
- (11) P — достаточное условие для выполнения Q ;
- (12) Q выполнено, когда выполнено P .
- (13) Q выполнено в том случае, если выполнено P .

И здесь (9) нейтральная, а (10)–(13) — окрашенные формы. Они применяются в случае, когда Q — интересующий нас факт, а P — легко проверяемое условие, и подчеркивают, что если мы хотим установить Q , нам достаточно доказать, что выполняется P .

1.5. ВОЗРАСТАНИЕ ТРУДНОСТИ ВОСПРИЯТИЯ КВАНТОРОВ. Обычно студент впервые сталкивается с кванторами при изучении точных границ числовых множеств. В этом определении используется кванторная группа вида $\forall \exists$, достаточно трудная для восприятия. Естественно возникает вопрос: что студент должен делать при решении задач, относящихся к точным границам? Без предварительной подготовки ответить на такой вопрос непросто. Поэтому желательно выяснить, какие высказывания с кванторами воспринимаются легче в том плане, что достаточно ясно, что делать для решения задач, и предварительно изучить материал с этими наборами кванторов.

Можно изучать высказывания на материале, связанном с относящимися к функциям понятиями и свойствами, и располагать его в порядке возрастания трудности восприятия:

- (1) один квантор существования,
- (2) один квантор общности,
- (3) два квантора общности,
- (4) квантор существования и затем квантор общности,
- (5) квантор общности и затем квантор существования.

Нетрудно заметить, что последнее высказывание отражает структуру определения (или основного свойства) точных границ. После этого остается один шаг до определения предела, и если предварительный материал неторопливо освоен, восприятие определения предела никаких трудностей не вызывает.

Напомним относящиеся к функциям понятия и свойства, в которых участвуют отмеченные в пп. (1)–(5) последовательности кванторов.

Возможно, самое неожиданное здесь — понятия, соответствующие п. (1). Они обычно сообщаются в форме, в которой явного указания квантора нет. Это понятия области определения и множества значений, а также образа и прообраза множества. Напомним, что область определения $D(f)$ и множество значений $E(f)$ функции f можно охарактеризовать так:

$$D(f) = \{x \in X : (\exists y \in Y) y = f(x)\},$$

$$E(f) = \{y \in Y : (\exists x \in X) y = f(x)\}$$

(здесь и ниже смысл необъясняемых символов достаточно ясен из контекста).

Поскольку здесь наличие квантора существования мотивировано иным по сравнению с обычным подходом к определению функции, на этих

объектах можно внимания не заострять, а сразу обратиться к свойству, связанному с одним квантором общности. Это свойство четности функции: функцию f называют *четной* (*нечетной*), если **для любого** элемента x из $D(f)$ противоположный ему элемент $-x$ также входит в $D(f)$ и имеет место равенство $f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$). Кратко это можно выразить так:

$$(\forall x \in D(f)) \quad (-x \in D(f)) \wedge (f(-x) = f(x))$$

(соответственно $f(-x) = -f(x)$).

Обратим внимание на то, что в приведенном определении использованы все требования в явном виде, без умолчания. Это сделано для того, чтобы, во-первых, студент мог сформулировать это свойство во всей его полноте и, во-вторых, чтобы при формулировке отсутствия свойства четности (нечетности) были явно прописаны все необходимые для проверки условия.

Далее идет свойство, связанное с кванторной группой вида $\forall \forall$, это монотонность. Здесь надо обратить внимание на устойчивое словосочетание «монотонность функции **на промежутке** (или на множестве)» и подробно обсудить отрицание монотонности, в частности, различие в написании: невозрастающая (неубывающая) вовсе не то, что она не возрастает (не убывает). Первое — отражение свойства, второе — отрицание соответствующего свойства.

Завершают первое знакомство с кванторами свойства периодичности (группа вида $\exists \forall$), ограниченности (группа вида $\exists \forall$) и, самое важное для приобщения к кванторам, свойство неограниченности, определяемое с использованием кванторной группы $\forall \exists$. Это последний шаг перед точными границами, связанными с той же кванторной группой, и определением предела последовательности, отличающегося добавлением одного квантора общности.

Восприятие квантора общности в утверждении, которое надо доказать, легче усваивается на примере неограниченности функции или последовательности по той причине, что есть возможность графической интерпретации, отражающей процесс изменения функции. Та же кванторная группа при анализе точных границ множества, последовательности или функции воспринимается с большим трудом. Первое знакомство с квантором общности на примере неограниченности помогает при изучении точных границ и далее — предела последовательностей.

Поскольку первым в определении неограниченности стоит квантор общности, при обосновании неограниченности (например, сверху) функции f на множестве X внимание акцентируется на следующей процедуре: ориентируясь на неизвестное нам число C , пытаться сформировать правило поиска элемента $x \in X$ такого, что $f(x) > C$. Здесь можно начать формирование навыков создания и использования устойчивых ситуаций и словосочетаний, полезных для начала изучения курса. С чего начинать доказательство неограниченности, например, сверху? Предлагается начинать с устойчивого выражения «пусть дано произвольное число C ». После этого в наших действиях можно руководствоваться фразой «посмотрим, что от нас требуется» и затем «как можно требуемое обеспечить?». При доказательстве неограниченности сверху можно предлагать такую процедуру: «попробуем ограничить функцию (последовательность) снизу чем-то более простым и вместе с тем большим». Если из оценки снизу удастся по заданному C указать требуемое x (или n), то обоснование завершено. Если пока не удастся, надо либо еще раз проделать ту же процедуру, либо предпринять что-то иное. Покажем, как эти соображения работают на простейшем, но вместе с тем важном примере.

ПРИМЕР 1. Доказать неограниченность последовательности $x_n = \frac{a^n}{n}$, $a > 1$.

Начнем с канонической фразы: пусть дано (произвольное) C . Требуется указать такое $n \in \mathbb{N}$, для которого $x_n > C$.

Здесь мы, по-существу, впервые встречаемся с необходимостью сопоставлять показательную и степенную функции. В первую очередь надо вспомнить, в каком утверждении или равенстве ранее встречалось такое сопоставление. Иногда студенты догадываются или вспоминают, что такое сопоставление присутствует в формуле бинома. Значит, надо представить числитель в виде $a = 1 + \alpha$ и воспользоваться формулой бинома (кстати, потребность в использовании формулы бинома мотивирует представление a в виде суммы единицы и положительной добавки). Можно выписать в числителе несколько членов в разложении:

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1 + \alpha)^n}{n} = \frac{1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \dots}{n}$$

и спросить: как ограничить дробь снизу? В качестве ответа предложить ограничить либо снизу числитель, либо сверху знаменатель, в результате

любой из этих операций дробь становится меньше. Как ограничить числитель снизу? Ясно, что, например, удалив все слагаемые, кроме одного. Какое из слагаемых оставить? Можно для начала предложить оставить самое первое слагаемое, т. е. единицу, и задать вопрос: такая оценка нашей цели сообразна? Оказывается, что нет, это оценка верная, но бесполезная. Быстро становится ясным, что для того чтобы, оценивая снизу, получить большую величину, надо оставить такое слагаемое, в котором один множитель уйдет на компенсацию знаменателя, а другой обеспечит неограниченность сверху. Завершается решение достаточно быстро:

$$\frac{1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \dots}{n} \geq \frac{\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2}{n} = \frac{n-1}{2}\alpha^2,$$

и в качестве требуемого n можно взять любое из множества решений неравенства $\frac{n-1}{2}\alpha^2 > C$.

1.6. ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭСКИЗОВ ГРАФИКОВ. Поскольку начинающие студенты далеко не всегда хорошо понимают, как отразить на графике весь комплект изученных свойств функций, а также ввиду исключительной важности свободного построения графиков функций из небольшого, но нередко встречающегося набора, завершить раздел, посвященный функциям, можно формированием способности сделать прикидку графика функции на основе ее свойств без использования производной. Это можно делать, привлекая следующие соображения.

Для определенности и единообразия можно проводить простейшее исследование функции и последующее построение графика путем выполнения пожеланий пунктов следующего ниже перечня, хотя в каких-то ситуациях от этого перечня возможны отклонения.

Перечень действий для исследования функции в целях построения ее графика.

1. Найти область определения.
2. Исследовать особенности функции, упрощающие построение графика, а именно установить, будет ли она четной, нечетной, периодической.
3. Найти нули функции или установить их отсутствие, указать промежутки ее знакопостоянства.
4. Изучить поведение функции на концах области определения и характер ее обращения в нуль.

5. Исследовать монотонность и экстремумы.

Содержание пп. 1–3 достаточно ясно, на пп. 4, 5 остановимся немного подробнее.

Что имеется в виду под изучением поведения функции на концах области определения и характером ее обращения в нуль? На концах области определения полезно констатировать, какой из более простых по сравнению с исследуемой функций можно данную приблизить. При больших значениях аргумента это получается путем удаления из задания функции тех деталей, которые практически не оказывают влияния на ее значения. В конечных точках надо увидеть, будет ли функция неограниченной вблизи таких точек или она неограниченно приближается к какому-то конечному значению. По существу, здесь исследуются вертикальные асимптоты или поведение функции на границе области определения в сопровождении словосочетаний, не апеллирующих к связанным с пределом терминам. На левом и правом концах числовой прямой речь также идет об асимптотических сравнениях с функциями, которые нам хорошо известны.

При исследовании монотонности и экстремумов естественно использовать известные свойства монотонности элементарных функций и отображения, относящиеся к композиции монотонных функций. Этого оказывается достаточно для многих ситуаций.

Подчеркну, что здесь речь идет о развитии первичного обращения с графиками, основанного на базовых свойствах элементарных функций, а также об элементарной прикидке вида графика. Такие навыки, во-первых, побуждают повторить, вспомнить или изучить свойства элементарных функций, весьма часто используемые на протяжении всего курса, а также пригождаются при построении графиков функций, завершающем изучение свойств дифференцируемых функций, избавляя от грубых ошибок путем элементарной оценки правдоподобности получаемых результатов.

Покажем на примерах несложных функций, как работает предложенный перечень. Оказывается, что и в простых ситуациях могут быть неожиданности. Постараемся ограничиваться элементарными средствами, не предполагающими использования производной, но и пренебрегать совсем этим техническим средством не будем, так что при острой необходимости можно привлечь и производную.

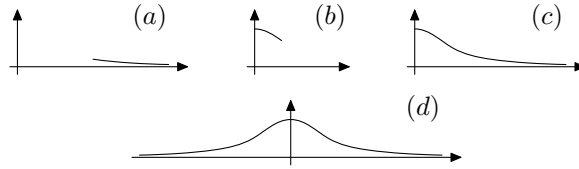


Рис. 1



Рис. 2

ПРИМЕР 1. Построим график функции $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Функция определена при всех действительных x . Она непериодическая, например потому, что значение 1 она принимает единственный раз, при $x = 0$. Функция четная:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = f(x) \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}.$$

Ввиду четности дальнейшее изучение пройдет для $x \geq 0$.

На множестве $[0, +\infty)$ функция $x^2 + 1$, стоящая в знаменателе, при увеличении x неограниченно возрастает, следовательно, наша функция убывает и неограниченно приближается к нулю. Тем самым на правом конце области определения, при далеких положительных x ее график будет прижиматься к оси абсцисс и выглядеть так, как показано на рис. 1(a).

На другом конце рассматриваемого множества, т. е. при $x = 0$, она равна 1. Однако приблизиться к единице она могла разными способами — с горизонтальной, наклонной или вертикальной касательной, т. е. одним из указанных на рис. 2 способов. Обычно такое исследование проводится с помощью производной, однако в нашем случае можно обойтись и без нее. Обратим внимание на то, что выражение $\frac{1}{x^2 + 1}$ для $|x| < 1$ равно сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $-x^2$:

$$\frac{1}{x^2 + 1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Поскольку нас интересует, как будет выглядеть график около нуля оси абсцисс, естественно считать x малыми, близкими к 0. А тогда значения x^4 , x^6 и т. д. существенно меньше, чем x^2 , значит, если «пожертвовать» этими малыми по сравнению с x^2 слагаемыми, то можно считать, что наша функция близка к функции $1 - x^2$, вид которой около нуля известен. Вместе с тем нетрудно понять, что $f(x) > 1 - x^2$ и $f(x) \leq 1$. Тем самым график нашей функции будет между графиками функций $y = 1 - x^2$ и $y = 1$ и вид его показан на рис. 1(b). Изображая рис. 1(a), (b) на одной координатной плоскости, получим эскиз графика функции f для положительных x (рис. 1(c)) а распространив картинку по четности на всю числовую прямую, придем к эскизу всего графика функции (рис. 1(d)).

По-видимому, у нее будет меняться направление выпуклости, но это можно исследовать, привлекая вторую производную, что в наши планы пока не входит.

ПРИМЕР 2. Построим график функции $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Отличие функции этого примера от функции предыдущего лишь в том, что здесь в знаменателе стоит знак минус, тогда как там — плюс. Однако различия в свойствах функций и их графиках существенны.

Функция определена на всем множестве $\mathbb{R}$, кроме точек -1 и 1 . Она четная и непериодическая, так что изучать ее можно лишь на множестве неотрицательных действительных чисел.

Функция не обращается в нуль, и неравенство $\frac{1}{x^2 - 1} > 0$ выполнено на множестве $|x| > 1$, т. е. на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. На оставшемся множестве $(-1, 1)$ она отрицательна.

Изучим поведение функции на концах области определения. При увеличении x знаменатель возрастает и неограниченно увеличивается, так что функция, убывая, приближается к нулю. Это отражено на рис. 3(a). Если аргумент приближается к значению 1, оставаясь справа от этой точки, то знаменатель приближается к нулю, а график функции, положительной справа от 1, неограниченно приближается к вертикальной прямой $x = 1$ справа (рис. 3(b)). Если подходить к 1 слева, то приближение знаменателя к нулю останется, а знак изменится, стало быть, значения функции около 1 слева будут большими по абсолютной величине, но отрицательными, а ее график «прильнет» к вертикальной прямой $x = 1$ слева, как показано на рис. 3(c).

Осталось, по существу, понять, как выглядит функция около точки

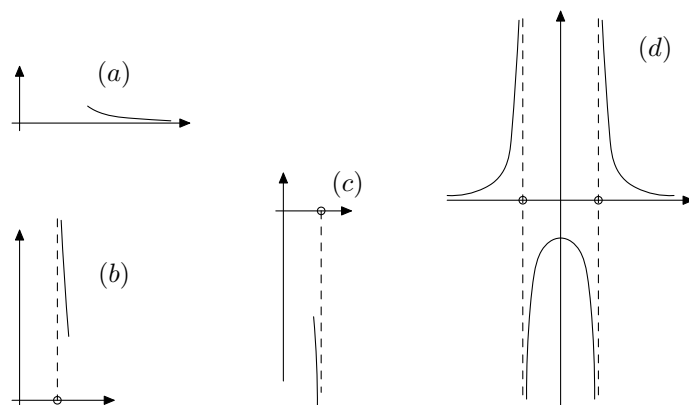


Рис. 3

$x = 0$. Аналогично предыдущему можно сказать, что

$$\frac{1}{x^2 - 1} = -1 - x^2 - x^4 - \dots,$$

и, пренебрегая сравнительно малыми величинами $x^4, \dots$, можно написать приближенное равенство $\frac{1}{x^2 - 1} \approx -x^2 - 1$, а вид этой функции около нуля известен. Осталось, соединив информацию рис. 3(a)–(c) и приняв во внимание четность функции, изобразить график самой функции (рис. 3(d)).

ПРИМЕР 3. Построим график функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Данная функция определена на множестве $|x| \geq 1$, т. е. на множестве $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Функция четная, так что при ее исследовании можно ограничиться множеством $[1, +\infty)$. Функция обращается в нуль в точках ± 1 и возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Если x неограниченно возрастает, то при больших значениях x вычитание единицы практически незаметно, так что при таких x функция будет близка к функции $y = \sqrt{x^2} = x$, оставаясь меньше функции $y = x$. Это наблюдение говорит о том, что при далеких x график нашей функции будет «прижиматься» к графику функции $y = x$ снизу так, как показано на рис. 4(a).

Будем теперь приближаться к точке 1 (естественно, справа). Как узнать характер входа в нуль функции $f(x)$? Можно найти ее производную, а можно пока обойтись и простыми наблюдениями. Представим

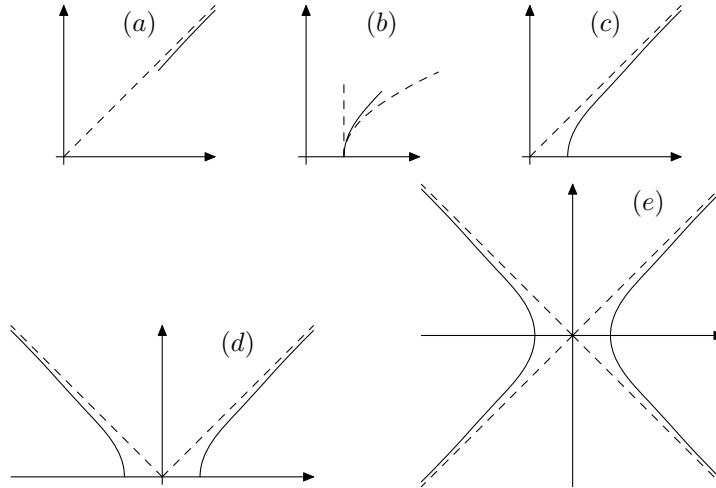


Рис. 4

функцию в виде $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ и заметим, что из двух сомножителей под корнем один обращается в нуль, а другой нет, поэтому характер обращения функции в нуль будет определяться только одним из этих сомножителей, а именно $x - 1$, второй множитель (под корнем) будет примерно равен 2. Поэтому около точки $x = 1$ можно написать, что $f(x) \approx \sqrt{2(x-1)}$, а вид этой функции понятен — это сдвинутый и немного растянутый по оси Oy корень квадратный (рис. 4(b)). Наша функция будет немного больше функции $\sqrt{2(x-1)}$. Вспомнив, что функция возрастает на $[1, +\infty)$, и соединив фрагменты графика, изображенные на рис. 4(a),(b), получим эскиз графика функции при положительных x (рис. 4(c)). График всей функции получится из построенной части распространением по четности, т. е. симметрией относительно оси ординат (рис. 4(d)).

Кстати, можно заметить, что это части гиперболы, но не той, которую школьники привыкли видеть как график функции $y = \frac{1}{x}$, а повернутой по часовой стрелке на угол $\pi/4$ (рис. 4(e)).

§ 2.2. Точные границы и предел последовательности

2.1. Точные границы. Обычно определение предела последовательности предваряется знакомством с точными границами, и здесь в менее привычной по сравнению с неограниченностью ситуации присутствует кванторная группа «для любого — существует». Дело, в частности, в том, что здесь появляется серия «теоретических» задач, в которых требуется что-то доказать о точных границах не для конкретных объектов, а вообще для числовых множеств: имеются в виду утверждения типа «точная граница суммы множеств равна сумме точных границ каждого из множеств, составляющих сумму». Возникает потребность гарантировать существование чего-то не на основе свойств конкретного объекта (функции, последовательности), а на основании указанных в условии данных. Появляется связка «дано — надо», в которой должна быть построена логическая цепочка от данных к требуемому. Эта, на первый взгляд тривиальная, процедура оказывается довольно трудной для восприятия и реализации. Приходится конструировать цепочки от данных к требуемому, создавать схемы рассуждений, применяемые при анализе задач определенных типов, формировать мотивы выполнения тех или иных действий.

Покажем построение цепочки от данных к результату на примере простейшей задачи, касающейся точных границ, подчеркнув при этом содержание теоретической и технологической составляющих анализа задачи.

ТЕОРИЯ. Будем ориентироваться на следующую характеристику точной верхней границы в соответствующих условиях.

Теорема (критерий точной верхней границы). *Если A — непустое ограниченное сверху множество в $\mathbb{R}$, то равенство $\sup A = a$ равносильно тому, что*

- 1) a — верхняя граница A ;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ число $a - \varepsilon$ не является верхней границей A , т. е.

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A) \quad x > a - \varepsilon.$$

ТЕХНОЛОГИИ. Согласно критерию точной верхней границы для доказательства того, что указанное число $a \in \mathbb{R}$ является точной верхней границей непустого множества X , надо, во-первых, проверить, что это верхняя граница, а затем рассуждать так. Поскольку условие начинается с квантора общности, находящегося в утверждении, которое надо

доказать, мы не вправе распоряжаться величиной ε и должны начать рассуждения для непустого множества в $\overline{\mathbb{R}}$ словами «пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$ », подчеркивая этим, что мы ориентируемся на внешнее, не зависящее от нас обстоятельство. Затем согласно критерию надо сформировать правило, согласно которому можно указать элемент x данного множества X , удовлетворяющий второму условию критерия. Гарантия существования такого элемента вытекает либо из условия, либо, если множество задано конкретно, из определяющих это множество свойств. Наличие указанного правила означает завершение обоснования.

Если в задаче говорится о конкретных объектах — множестве, последовательности, функции, то обеспечение существования требуемого элемента происходит на основе задания данного объекта. Если же требуется доказать что-то о точных границах вообще, то гарантию существования требуемого элемента надо искать на основе условия, задавая вопрос типа «что может обеспечить требуемое?» и т. п.

Разберем один простой теоретический пример с высокой степенью подробности в исполнении всех шагов доказательства. Такая подробность на первый взгляд может показаться избыточной, однако если вспомнить образовательную цель предмета, то высокая степень подробности с точки зрения формирования первых навыков работы с кванторами в теоретическом утверждении вполне оправдана.

ПРИМЕР 1. Докажем, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ и для любого числа $\lambda > 0$ справедливо равенство

$$\sup \lambda A = \lambda \sup A$$

(здесь $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$).

Обозначим $a = \sup A$. Требуется доказать, что λa — точная верхняя граница множества λA . Как указано выше, для этого надо проверить, что λa — верхняя граница и что число, полученное сдвигом влево на произвольное $\varepsilon > 0$, уже не будет верхней границей. На чем основывать проверку? Разумеется, на данных в условии свойствах. Так как $a = \sup A$, число a — верхняя граница множества A , стало быть, $(\forall x \in A) x \leq a$. Умножив неравенство на положительное число, получаем $(\forall x \in A) \lambda x \leq \lambda a$, так что λa — верхняя граница множества A .

Проверим второе свойство. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется подобрать такое $x \in A$, что $\lambda x > \lambda a - \varepsilon$. Поскольку надо увидеть,

каким свойством должен обладать искомый элемент x , запишем последнее неравенство, изолировав в нем x : $x > a - \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

Что может гарантировать существование требуемого элемента? В теоретической задаче, скорее всего, ее условие. Согласно условию для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $x \in A$, что $x > a - \varepsilon_1$. Поскольку здесь квантор общности применяется в ситуации, которая нам дана, мы вправе распоряжаться ε_1 и брать для него те значения, которые будут целесообразны. Условие гарантирует, что при любом выборе ε_1 есть соответствующий элемент в множестве A .

Сопоставляя выписанные выше неравенства, можно заметить, что в качестве ε_1 целесообразно взять $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, и цепочка «дано — надо» выбора требуемого элемента в множестве λA выстраивается так: берем $\varepsilon > 0$, по нему берем ε_1 так, что $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, по этому ε_1 найдется элемент $x \in A$ такой, что $x > a - \varepsilon_1 = a - \frac{\varepsilon}{\lambda}$, а это означает, что $\lambda x > \lambda a - \varepsilon$. Правило выбора по заданному $\varepsilon > 0$ требуемого $\lambda x \in \lambda A$ сформировано, стало быть, утверждение доказано.

Полезно разобрать примеры нахождения точных границ каких-то конкретных последовательностей и предложить несколько задач на эту тему.

2.2. Предел последовательности. Формирование понятия.

Понятие предела последовательности и вообще понятие предела — центральное понятие в курсе математического анализа, и от его освоения во многом зависит дальнейшая судьба студента. Конечно, можно давать определение предела в высокой степени общности и сразу для очень общих объектов, рассчитывая на то, что все дальнейшие ситуации с пределом (например, предел функции) суть частные случаи этого общего определения, и остается только указывать необходимые в конкретных ситуациях модификации. Однако с подходом от общего к частному трудно согласиться, если рассматривать курс математического анализа как образовательную дисциплину, а не только как область математики. Такой подход вряд ли принесет образовательную пользу, т. е. в результате трудно ожидать формирования базовых навыков при изучении математики у обычных студентов. Поэтому предлагается начинать с самого простого определения, без каких-либо украшений, сокращений, макросов, и целью должно быть не экономия времени или наших усилий, или демонстрация

найденных нами «упрощений», а формирование устойчивых навыков обращения с содержащими кванторы высказываниями, в частности, на базе понятия предела, поддержанных разными интуитивными средствами такими, как возможности графиков функций.

Исходя из указанной цели, предлагается начинать разговор о пределе последовательности с естественности этого понятия.

Пусть даны последовательность x_n и число a . Договоримся о том, как математически выразить интуитивно ясное представление о том, что последовательность x_n неограниченно приближается к числу a , т. е. значения x_n при неограниченном увеличении n становятся всё ближе и ближе к a .

Сначала обратимся к геометрической поддержке. Так как последовательность — это функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, для ее геометрического представления можно использовать график как множество всех упорядоченных пар (n, x_n) на координатной плоскости. Правда, в этом случае сплошной линии, как у графиков обычных функций, не получится, а будет дискретное множество, но это обстоятельство не должно нас смущать.

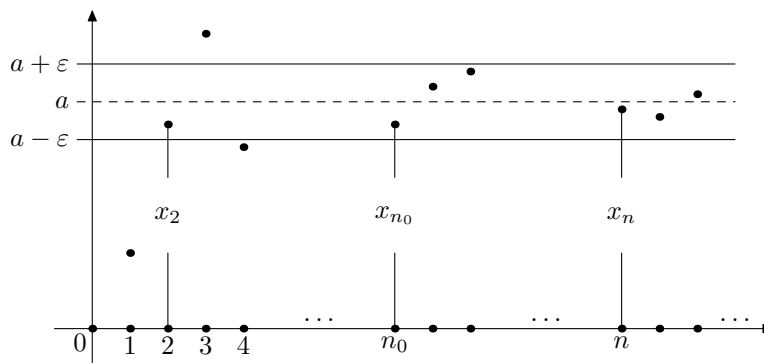


Рис. 1

Изобразим координатную плоскость, на которой по оси абсцисс отметим натуральные $n = 1, 2, \dots$ и над каждой отмеченной точкой на высоте x_n поместим в виде точки значение x_n последовательности. На оси ординат отметим точку a (рис. 1). Нередко используют интерпретацию, изображая элементы последовательности в виде точек на числовой пря-

мой. Однако такая интерпретация недостаточно динамична и, по-моему, хуже формирует адекватное представление о пределе и не переносится на предел функции, поэтому мной не используется.

Поскольку нас интересует неограниченное приближение x_n к a «в перспективе», при далеких номерах n , расположение последовательности при начальных номерах нас не интересует. Представим себе, что есть два участника договоренности: **Вы** и **Я**. Вы намерены убедить меня в том, что последовательность x_n неограниченно приближается к a , и если удастся это сделать, то мы вместе назовем это обстоятельство выражениями « a есть *предел* последовательности x_n » или «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a » (последние выражения не следует понимать буквально, это термины, которые означают лишь то, что за ними кроется).

Так как Вы убеждаете меня в неограниченном приближении, Я должен проверять, насколько значения x_n отличаются от величины a , для чего подготовлю число, которым буду измерять точность приближения, или, иначе говоря, величину отклонения x_n от a . Естественно, число должно быть положительным. Я буду обозначать его греческой буквой ε . Согласно договору приближение должно быть неограниченным, т. е. надо гарантировать невозможность вставить границу между значениями x_n с далекими номерами и числом a . Это можно гарантировать, например, такой процедурой. Я буду предлагать Вам какое-то, неизвестное Вам заранее значение $\varepsilon > 0$, а от Вас буду ожидать, что Вы обеспечите отклонение x_n от a в пределах заданной точности ε для всех далеких номеров n , т. е. сумеете найти такой номер n_0 , что для всех номеров $n \geq n_0$ отклонение x_n от a будет в пределах от $-\varepsilon$ до ε . Последнее можно выразить так: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, или так: $|x_n - a| < \varepsilon$. Обратившись к рис. 1, об этом можно сказать так: Вы обеспечите такой номер n_0 , что для всех n , лежащих правее от этого номера, отмеченные на высоте x_n точки, изображающие элементы последовательности, окажутся в полосе между горизонтальными линиями, проведенными на высотах $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. Если Вы не можете обеспечить отклонение x_n от a в пределах заданной мной точности $\varepsilon > 0$ для всех далеких номеров n , то Я не готов согласиться с тем, что x_n неограниченно приближается к a .

Сформулируем эту договоренность в математических терминах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $a \in \mathbb{R}$ будем называть *пределом последовательности* x_n , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для

любого $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, при этом будем использовать обозначение $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

С использованием кванторов соотношение $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ запишется так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Часть обозначения вида $n \rightarrow \infty$ подчеркивает, что мы оцениваем близость x_n к a при неограниченном возрастании номеров n . Часто в этом случае говорят «при n , стремящемся к бесконечности». Заметим однако, что каждое число находится на своем месте и никуда не стремится, тем самым эту фразу не следует воспринимать буквально. Это всего лишь фигура речи, фрагмент термина, за которым скрывается определенное содержание. Поскольку ни при каких других обстоятельствах мы оценивать отклонение x_n от a не будем, в обозначениях часть $n \rightarrow \infty$ иногда (даже, скорее всего, всегда, если достаточно ясно, по какой переменной происходит переход к пределу) можно опускать и писать просто $a = \lim x_n$.

Тот факт, что $a = \lim x_n$, выражают также словами «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a » и записывают $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ или, короче, $x_n \rightarrow a$. Термин «стремится» носит эмоциональную, интуитивную окраску, и встречаются случаи, когда в результате неумеренного употребления этого термина появляется желание заменить точные обоснования утверждений при решении задач словесным описанием процесса типа «видно (очевидно, ясно), что последовательность стремится (к соответствующему числу)». Явный запрет использования слов «видно» и т. п. иногда побуждает студентов к словотворчеству, появляются фразы типа «и так понятно» и т. п.

2.3. Предел последовательности. Технологии. Обсудим, как доказывать с помощью определения тот факт, что $a = \lim x_n$, и выработаем признак конца доказательства. Поскольку конструкция предела последовательности похожа на конструкцию неограниченности или точных границ, ясно, что и обсуждение будет аналогичным рассмотрению свойства неограниченности или точных границ.

Поскольку здесь есть внешнее, от нас не зависящее требование $\forall \varepsilon > 0$, мы должны выработать **правило поиска** требуемого далее значения $n_0 \in \mathbb{N}$ в зависимости от какого-то нам неизвестного значения ε . Рассуждение, посвященное подбору n_0 , надо начинать устойчивым словосочетанием «пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$ ». Этим мы подчеркиваем, что

готовы к выработке правила. Затем надо пойти в конец определения предела и поставить вопрос «что от нас ожидают?». А от нас ожидают, что мы для произвольного $n \geq n_0$ гарантируем оценку $|x_n - a| < \varepsilon$, где n_0 предстоит указать.

Для выбора номера n_0 , начиная с которого будет выполнена требуемая оценка, поставим, например, такую цель: *ограничить сверху разность $|x_n - a|$ чем-то более простым, но все еще малым*. Иначе говоря, попробуем подобрать такую последовательность a_n , что $|x_n - a| \leq a_n$ и есть шанс подобрать по заданному $\varepsilon > 0$ номер n_0 для последовательности a_n так, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$, т. е., по существу, решить неравенство $a_n < \varepsilon$. Если видно, как это сделать, то найденный номер n_0 подойдет и для разности $|x_n - a|$ — она ведь не больше чем a_n и тем более будет меньше чем ε . Если еще недостаточно ясно, как подобрать номер для последовательности a_n , то, в свою очередь, можно применительно к ней поставить указанную выше цель, т. е. попытаться ограничить ее другой последовательностью, более простой, но все еще малой. И так продолжать процесс до появления последовательности, для которой требуемый номер найти легко. Как только удастся выработать правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$, доказательство закончится. Можно заметить, что отличие от неограниченности или точных границ в том, что там достаточно найти один элемент, а здесь надо обеспечить выполнение неравенства для всех членов последовательности, начиная с некоторого.

Можно рассуждать несколько иначе. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Обратимся к тому, что от нас потребуется. Мы должны обеспечить выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех достаточно далеких номеров n . Поставим вопрос: «откуда можно получить выполнение такого неравенства?». Иначе говоря, «из какого соотношения это неравенство вытекает?». Если взять последовательность a_n такую, что $|x_n - a| \leq a_n$, и найти номер n_0 такой, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$, то для этих же номеров n будет выполнено и требуемое неравенство. Если для последовательности a_n выбор номера затруднен, то процесс можно продолжить и вновь обратиться к вопросу «откуда можно получить выполнение такого неравенства?». Ответ на него может привести к другой последовательности, и так следует продолжать процесс до тех пор, пока не найдется последовательность, для которой выбор номера тривиален.

Эти рассуждения относятся, скорее, к доказательству равенства $a = \lim x_n$ для конкретной последовательности x_n . Отчасти их можно применять и тогда, когда речь идет о доказательстве утверждений с участием

предела. Однако если для конкретной последовательности выбор номера обеспечивается ограничением сверху какими-то также конкретными последовательностями, то в утверждениях выбор требуемого номера, как правило, обеспечивается ограничениями сверху, исходящими из предельных свойств, данных в условии.

Продemonстрируем изложенное на двух простейших примерах.

ПРИМЕР 2. Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} = 0. \quad (*)$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Пойдем в конец определения предела последовательности и посмотрим, что от нас будут ожидать. От нас потребуется обеспечить выполнение неравенства

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| < \varepsilon$$

для всех далеких номеров. Попробуем ограничить левую часть последнего неравенства сверху чем-то более простым, но все еще малым. Как можно ограничить положительную дробь сверху? Либо увеличив числитель, либо уменьшив знаменатель. Заметив, что $|\sin n^2| \leq 1$, имеем

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^4 + 1}.$$

Легко ли подобрать требуемый номер, исходя из новой последовательности, т. е. насколько легко выразить n через ε из неравенства

$$\frac{n}{n^4 + 1} < \varepsilon?$$

По-видимому, не столь легко, сколь хотелось бы. Поэтому попробуем ограничить выражение $\frac{n}{n^4 + 1}$ сверху чем-то более простым, но все еще малым. Уменьшив знаменатель, мы увеличим дробь, поэтому

$$\frac{n}{n^4 + 1} \leq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$

Легко ли выразить n через ε из неравенства $\frac{1}{n^3} < \varepsilon$? Легко. Можно выразить, а можно еще облегчить выражение, если заметить, что $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n}$,

а из неравенства $\frac{1}{n} < \varepsilon$ выразить n через ε совсем легко. Последнее неравенство равносильно тому, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$, и в качестве требуемого номера n_0 можно взять любое натуральное число, большее чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Например, можно взять $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, где взятие целой части (символизируют квадратные скобки) «обнатурализует» дробь $\frac{1}{\varepsilon}$, при этом, возможно, немного уменьшая ее, а добавление единицы делает результат бóльшим, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Если $n_0 \in \mathbb{N}$ и $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, то для любого $n \geq n_0$ тем более $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а тогда, пользуясь логикой предыдущих рассуждений, можно гарантировать, что для таких номеров также

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| < \varepsilon.$$

Правило выбора требуемого номера n_0 по заданному ε сформировано, значит, соотношение (*) доказано.

ПРИМЕР 3. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

Начинаем с фразы «пусть дано $\varepsilon > 0$ ». Записываем определение предела последовательности и задаем вопрос «что требуется обеспечить для доказательства указанного равенства?». Надо выработать правило поиска натурального числа с определенными свойствами. Что будем проверять в итоге? Выполнение неравенства $\frac{n}{a^n} < \varepsilon$ для всех n , больших некоторого n_0 . Как можно обеспечить выполнение требуемого неравенства? Можно попробовать ограничить наше выражение сверху чем-то более простым и малым. Наш небольшой пока опыт может подсказать, что для сопоставления степенной и показательной функций можно использовать формулу бинома. Для этого представим a в виде $a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$, и запишем изучаемое выражение в виде $\frac{n}{1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \dots}$. Как

и при доказательстве неограниченности последовательности, связанной с нашей последовательностью (см. выше), можно либо увеличить числитель, либо уменьшить знаменатель. Увеличение числителя не столь ясно, сколь уменьшение знаменателя — для последнего достаточно из

всей суммы оставить одно слагаемое. Можно оставить единицу (и такие предложения со стороны студентов на занятиях встречаются). Получим оценку верную, но бесполезную, ибо мажоранту n трудно считать малой. Быстро понимается, что надо оставить такое слагаемое, чтобы в нем был множитель, компенсирующий n , и множитель, обеспечивающий малость. После таких рассуждений легко реализуется выработка требуемого правила.

Решение группы примеров, аналогичных рассмотренному, можно разнообразить, иногда занимаясь поиском ограничения последовательности сверху чем-то более простым, но малым, а можно акцентировать ходы на основе вопроса «откуда это можно получить?», «чем требуемое можно обеспечить?». Разница главным образом в построении цепочки рассуждений, основа остается одна и та же, но здесь полезно разнообразить подходы, ибо формируются основные стереотипы рассуждений для связанных с пределом ситуаций.

Аналогичные ходы можно предлагать и при использовании критерия Коши для доказательства сходимости последовательности. Единственное отличие от пожеланий, относящихся к пределу, в том, что при оценке сверху надо следить за возможностью получения оценки, не зависящей от p (в соответствующей интерпретации определения фундаментальности последовательности).

Несколько слов о нахождении предела последовательности. Здесь для конкретных заданных формулой последовательностей ситуация либо небогата технологическими наблюдениями, либо довольно трудна и предполагает наличие хороших разносторонних навыков. Поэтому можно ограничиться небольшим набором упражнений, возможно, остановившись на изучении монотонных последовательностей или рекуррентно заданных последовательностей, или решать теоретические задачи, связанные с пределом. Мне редко удается на этом материале остановиться подробнее ввиду дефицита времени, недостаточной подготовленности студентов и выставления приоритета другим, более полезным с общеобразовательных позиций, темам. Решая теоретические задачи, можно не заметить момент «отрыва» студентов, т. е. момент, когда они теряют способность к самостоятельному выполнению необходимых шагов, и тогда эффективность освоения курса значительно понижается.

Внутри темы «предел последовательности» желательно приводить доказательства, подчеркивающие существенные детали определений и

утверждений. Нередко доказательства организуются в виде, характерном для научных статей или монографий. Акцент ставится на строгости и лаконичности в ущерб естественности и мотивированности действий. Приведу два доказательства, в известной мере как «крайние точки» возможных вариаций на тему рассматриваемого утверждения. А именно, сопоставим два доказательства утверждения о том, что предел произведения двух сходящихся последовательностей x_n и y_n равен произведению их пределов. Пусть $a = \lim x_n$, $b = \lim y_n$. Требуется доказать, что $\lim x_n y_n = ab$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность $|x_n y_n - ab|$ с целью выработать такое правило выбора номера n_0 , зависящего, разумеется, от ε , что для всех следующих за ним номеров n будет $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$.

Ясно, что без использования условия нам не обойтись. Что дано в условии? Распишем по определению данные в условии предельные соотношения:

$$(\forall \varepsilon_1 > 0 \exists n_1 \forall n \geq n_1) \quad |x_n - a| < \varepsilon_1, \quad (1)$$

$$(\forall \varepsilon_2 > 0 \exists n_2 \forall n \geq n_2) \quad |y_n - b| < \varepsilon_2. \quad (2)$$

Обратим внимание на то, что утверждения (1) и (2) даны по условию, поэтому величины ε_1 и ε_2 мы можем выбирать по нашему усмотрению и использовать гарантируемые числа n_1, n_2 в наших целях.

Для использования утверждений (1), (2) надо оценить сверху разность $|x_n y_n - ab|$ так, чтобы участвовали разности $|x_n - a|$, $|y_n - b|$. Затем, беря ε_1 и ε_2 в зависимости от данного $\varepsilon > 0$, с учетом проводимых оценок получим сначала номера n_1 и n_2 , а затем на их основе обеспечим требуемый номер n_0 для разности $|x_n y_n - ab|$.

Воспользуемся мощным методом доказательства, заключающимся в прибавлении нуля. Это безопасная операция, так как она ничего не изменяет. Конечно, нуль прибавлять будем не просто так, а в виде добавления к разности $x_n y_n - ab$ какого-то выражения и одновременного его вычитания. Успех применения метода зависит от подбора добавляемого и вычитаемого выражения. Нам хочется связать рассматриваемую разность с теми разностями, о которых говорится в условии, т. е. с $x_n - a$ и $y_n - b$. Поэтому неудивительно, что добавим к разности $x_n y_n - ab$ и отнимем от нее, например, выражение ay_n (или bx_n). Производя нехитрые

действия и пользуясь неравенством треугольника, получим

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\ &\leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \\ &= |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b|. \end{aligned} \quad (3)$$

Итак, мы ограничились нашу разность сверху чем-то более связанным с условием, чем сама разность. Займемся правой частью неравенства. Чтобы сумму сделать меньше чем ε , достаточно сделать каждое из слагаемых, например, меньшим чем $\varepsilon/2$.

Первое слагаемое представляет собой произведение $|x_n - a| |y_n|$, из множителей которого первый можно сделать сколь угодно малым. Проведем процедуру, показывающую, как учесть наличие второго множителя. Так как $\lim y_n = b$, имеет место высказывание (2), взяв в котором в качестве ε_2 , например, число 1 (мы можем это сделать, ибо (2) нам дано по условию), получим существование такого номера n' , что $|y_n - b| < 1$ для любого $n \geq n'$, откуда, вновь используя прибавление нуля, получаем, что

$$|y_n| = |y_n - b + b| \leq |y_n - b| + |b| < 1 + |b|$$

для любого $n \geq n'$.

Мы подготовились к выработке правила выбора номера, начиная с которого первое слагаемое будет меньше чем $\varepsilon/2$. Поскольку высказывание (1) дано по условию, мы вправе выбрать в нем в качестве ε_1 любое положительное число. С учетом необходимости компенсации $|y_n|$ возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$. Тогда согласно (1) существует номер n_1 такой, что $n_1 \geq n'$ и для любого $n \geq n_1$

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}. \quad (4)$$

Перейдем ко второму слагаемому. С ним дело обстоит проще, чем с первым, так как в нем множитель при модуле разности постоянен. Если $a = 0$, то второе слагаемое равно нулю и заведомо меньше чем $\varepsilon/2$ при любом n . Пусть $a \neq 0$. Высказывание (2), в котором в качестве ε_2 возьмем величину $\frac{\varepsilon}{2|a|}$, гарантирует наличие номера n_2 такого, что для любого $n \geq n_2$ будет

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}. \quad (5)$$

Если в качестве номера n_0 взять наибольший из номеров n_1, n_2 , т. е. положить $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то для $n \geq n_0$ выполнены одновременно соотношения (4) и (5). Следовательно, для любого $n \geq n_0$ (считая $a \neq 0$, для $a = 0$ ситуация только упрощается) имеем

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &\leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \\ &= |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b| \\ &\leq |y_n| \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$ выработано, значит, утверждение доказано.

Теперь приведем копию доказательства из известного учебного пособия В. А. Зорича (значения пределов в доказательстве обозначаются через A, B).

б) Мы знаем, что

$$|(A \cdot B) - (x_n y_n)| \leq |x_n| \Delta(y_n) + |y_n| \Delta(x_n) + \Delta(x_n) \cdot \Delta(y_n).$$

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем числа N' и N'' такие, что

$$\begin{aligned} \forall n > N' \quad &\left(\Delta(x_n) < \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3(|B|+1)} \right\} \right), \\ \forall n > N'' \quad &\left(\Delta(y_n) < \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3(|A|+1)} \right\} \right). \end{aligned}$$

Тогда при $n > N = \max\{N', N''\}$ будем иметь

$$\begin{aligned} |x_n| &< |A| + \Delta(x_n) < |A| + 1, \\ |y_n| &< |B| + \Delta(y_n) < |B| + 1, \\ \Delta(x_n) \cdot \Delta(y_n) &< \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3} \right\} \cdot \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3} \right\} < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $n > N$

$$\begin{aligned} |x_n| \Delta(y_n) &< (|A| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{3(|B|+1)} = \frac{\varepsilon}{3}, \\ |y_n| \Delta(x_n) &< (|B| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{3(|A|+1)} = \frac{\varepsilon}{3}, \\ \Delta(x_n) \cdot \Delta(y_n) &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

поэтому $|AB - x_n y_n| < \varepsilon$ при $n > N$.

Это доказательство предназначено для гарантии справедливости соответствующего факта и тем самым возможности его использования в дальнейшем. Однако образовательные навыки у обычных студентов на его основе сформировать довольно трудно. Не указаны цели действий, мотивировка выбора тех или иных значений, доказательство выглядит весьма искусственно и громоздко.

§ 2.3. Предел функции

После подробного обсуждения предела последовательности структура и содержание определения предела функции особых хлопот не вызывают. Из образовательных соображений в качестве основного можно взять определение предела через окрестности, чтобы приучить студентов наполнять эту форму разным содержанием в зависимости от обстановки. Графическая поддержка определения и его обсуждение в самых разных ситуациях позволяет добиться безошибочного осмысленного воспроизведения определения предела во всех встречающихся ситуациях. В конечном итоге студент должен безупречно за короткое время воспроизвести определение предела в терминах $\varepsilon - \delta$ в разных конкретных случаях: в конечной точке, в бесконечной, конечный предел, бесконечный, односторонние и т. п.

Затем можно заняться нахождением предела функции с использованием замечательных пределов. Разумеется, сначала излагается теоретический материал, а именно теоремы о связи предела с алгебраическими операциями, а также теорема о пределе композиции. Однако после этого нередко значение теории не просматривается. Для акцентирования внимания на теории и на необходимости воспринимать утверждения во всей их полноте, т. е. не только результат, но также и условия, можно организовывать процедуру нахождения предела начиная с вопросов, затрагивающих необходимость обращения к теории. В частности, полезно обратить внимание на естественный со стороны студентов вопрос: «в каких случаях мы должны использовать замечательные пределы и как ими можно воспользоваться?».

3.1. Нахождение предела функции в точке с использованием замечательных пределов. Технологии. Приступая к нахождению предела конкретной функции, в первую очередь надо поставить вопрос «как устроена функция?». Если она получается из других функций как результат арифметических операций, т. е., например, это сумма, или произведение, или частное конечного числа функций, то надо обратиться к теоремам о связи предела и арифметических операций и проанализировать, выполнены ли их условия. Если это сложная функция, то надо посмотреть, выполнены ли условия теоремы о пределе композиции.

Если условия теорем выполнены, то надо воспользоваться их результатами и получить значение предела. Однако не всегда условия этих теорем выполнены. Так бывает, например, когда рассматривается предел отношения, но пределы знаменателя и числителя равны нулю или бесконечны. В таких случаях говорят, что *имеет место неопределенность соответствующего вида*, например, вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, и при нахождении предела такую неопределенность надо «раскрыть», т. е. провести такие преобразования, которые привели бы к выполнению условий соответствующих теорем либо к использованию таких неопределенностей, для которых значение предела известно (так называемых замечательных пределов).

Кроме указанных встречаются также неопределенности вида 0^0 , $0 \cdot \infty$, 1^∞ — это значит, что рассматриваются соответственно пределы

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)^{g(x)} \quad (f(x) > 0), \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot h(x), \quad \lim_{x \rightarrow p} \varphi(x)^{h(x)},$$

где

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow p} h(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow p} \varphi(x) = 1.$$

Для раскрытия первых двух полезно иметь в виду соотношения

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}, \quad f(x)h(x) = \frac{f(x)}{1/h(x)} = \frac{h(x)}{1/f(x)}.$$

В случае неопределенности вида 1^∞ можно обратиться к соответствующему замечательному пределу либо использовать равенство $a^b = e^{b \ln a}$.

Когда говорят о неопределенности какого-то вида, например вида 1^∞ или $\frac{0}{0}$, надо обратить внимание на то, что ее не следует понимать буквально, как будто мы единицу возводим в бесконечную степень или нуль

делим на нуль! Это всего лишь символическое (вводимое для удобства) обозначение того факта, что рассматривается предел соответствующего вида.

При нахождении пределов можно использовать следующее легко устанавливаемое равенство:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow p} g(x) \ln f(x)},$$

если $\lim_{x \rightarrow p} g(x) \ln f(x)$ существует (хотя бы бесконечный). В частности, если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$ и $a^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)^{g(x)} = a^b.$$

Это замечание, в частности, полезно вспоминать в тех случаях, когда студенту хочется перейти к пределу в части выражения, обращать внимание на недопустимость такого действия и подчеркивать, что в отвечающих условиям утверждений ситуациях надо сначала находить пределы отдельных фрагментов, а затем компоновать предел всего выражения на основании теории.

Применение теоремы о пределе композиции обычно связано с заменой переменной и происходит следующим образом. Допустим, что надо найти предел функции $h(x)$ при $x \rightarrow a$ и удалось так преобразовать данную функцию, что в ней оказался выделенным какой-то блок, который можно обозначить новой буквой, т. е. удастся представить функцию $h(x)$ в виде композиции $h(x) = g(f(x))$. Если в этой ситуации положим $y = f(x)$ и найдем, что выполнены условия теоремы о пределе композиции, т. е. существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, существует $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = b$, а также выполнены условия теоремы, то результат ее гарантирует существование предела $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$, равного b . Иначе говоря, нахождение предела сложной функции эта теорема позволяет сводить к нахождению пределов функций, ее составляющих.

Для определенности при ссылках приведем набор соотношений, называемых замечательными пределами, в которых отражаются базовые

свойства элементарных функций:

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{1/z} = e, \quad (3.1)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1, \quad (3.2)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{a^z - 1}{z} = \ln a, \quad (3.3)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1, \quad (3.4)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+z)^\mu - 1}{z} = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Кроме выписанных используется равенство, отражающее сравнительный рост показательной и степенной функций:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^\alpha}{a^z} = 0 \quad \text{для любых } a > 1, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

3.2. Технология нахождения пределов с использованием замечательных пределов. Обычно использование замечательных пределов сопряжено с применением теоремы о пределе композиции.

Сначала надо понять, можно ли воспользоваться каким-либо из замечательных пределов. Для этого отметим основные отличительные их особенности.

- (1) Во всех них предел рассматривается в нуле.
- (2) Если переменная присутствует в основании и в показателе степени, то надо обратиться к пределу (3.1).
- (3) Если в рассматриваемом пределе есть тригонометрическая функция, то может понадобиться предел (3.2).
- (4) Если есть степень, в которой основание постоянно, посмотреть на предел (3.3).
- (5) Наличие логарифма говорит об обращении к пределу (3.4).
- (6) Если переменная находится в основании, а в показателе степени константа, то идем к (3.5).

Следующий шаг — анализ необходимых условий использования этих пределов. Первое необходимое условие уже было отмечено — все эти пределы рассматриваются в нуле. Перечислим другие необходимые условия для каждого из пределов (3.1)–(3.5).

(3.1) Как отмечено выше, к этому пределу обращаемся, когда есть степень, в основании и в показателе которой находится переменная, т. е. когда функция, предел которой надо найти, имеет вид

$$\varphi(x)^{\psi(x)}$$

и рассматривается предел, допустим, в некоторой точке a . Первое, чем мы интересуемся:

$$\text{верно ли, что } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1,$$

и если нет, то повода обратиться к пределу (3.1) нет. Допустим, что да. В таком случае выделяем в основании единицу. Обычно это достигается прибавлением нуля в основании, т. е. прибавлением к $\varphi(x)$ единицы и ее вычитанием. При этом прибавленная единица выделяется, а вычтенная группируется с $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = 1 + (\varphi(x) - 1).$$

Теперь уже

$$\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 0,$$

и мы частично подготовились к виду (3.1). Для использования (3.1) не хватает в показателе степени величины, обратной к $\varphi(x) - 1$. Обеспечим ее, разделив показатель степени и умножив его на $\varphi(x) - 1$. При этом выражение, ушедшее в знаменатель, учтем в замечательном пределе, а выражение, поступившее в числитель, рассмотрим вместе с бывшим показателем степени. Запишем формально эту серию преобразований:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)^{\psi(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} (1 + (\varphi(x) - 1))^{\psi(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (1 + (\varphi(x) - 1))^{\frac{1}{\varphi(x) - 1} \cdot (\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} ((1 + (\varphi(x) - 1))^{\frac{1}{\varphi(x) - 1}})^{(\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x)}. \end{aligned}$$

В последнем выражении фрагмент $(1 + (\varphi(x) - 1))^{\frac{1}{\varphi(x) - 1}}$ имеет пределом число e согласно (3.1), поэтому можно сосредоточиться на нахождении предела функции, стоящей в показателе степени, и если он есть, допустим,

$$\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x) = b,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)^{\psi(x)} = e^b.$$

ПРИМЕР 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2}$.

Обращаем внимание на то, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, тем самым имеем дело с неопределенностью вида 1^∞ , которая связана с пределом (3.1). Выделим в основании единицу путем ее прибавления и вычитания. Затем умножим и разделим показатель степени на получившуюся бесконечно малую величину:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}})^{\frac{\cos x - 1}{-x^2}}, \end{aligned}$$

Вопрос свелся к нахождению предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-x^2}$. Найдя, что он равен $1/2$, можно заключить, что искомый предел равен $e^{1/2}$.

(3.2) К пределу этого вида надо обращаться, когда функция устроена так, что в ней есть какие-то тригонометрические функции, зависящие от функции, имеющей пределом 0. Обсудим детали процедуры в случае, когда рассматривается предел вида

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \sin \varphi(x),$$

для которого целесообразно сделать следующее. Первое, чем интересуемся:

$$\text{будет ли } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0,$$

и если нет, то повода использовать предел (3.2) нет. Допустим, что $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$. В таком случае для использования (3.2) не хватает величины $\varphi(x)$ в знаменателе. Обеспечим ее, разделив и умножив все выражение на $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \sin \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \varphi(x) \cdot \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)},$$

после чего можно сосредоточиться на пределе $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \varphi(x)$, и если он существует, то можно воспользоваться пределом (3.2) и теоремой о пределе произведения. Выражения иного вида с участием тригонометрических функций настраиваются аналогично.

(3.3) К пределу этого вида надо обращаться в том случае, если есть степень, в основании которой стоит константа, т. е. рассматривается предел вида

$$\lim_{x \rightarrow a} c^{\varphi(x)} \cdot \psi(x).$$

Первое, чем надо поинтересоваться:

$$\text{верно ли, что } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0,$$

и если нет, то предел (3.3) здесь не используется. Если да, то идем дальше и смотрим, вычитается ли единица от $c^{\varphi(x)}$. Если нет, то стараемся получить ее путем либо вынесения множителя за скобки (что редко), либо вычитанием и прибавлением единицы (что значительно чаще), например так:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} c^{\varphi(x)} \cdot \psi(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c^{\varphi(x)} - 1 + 1) \cdot \psi(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} ((c^{\varphi(x)} - 1) \cdot \psi(x) + \psi(x)). \end{aligned}$$

Нахождение предела $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$ — отдельная задача, допустим, что он есть. Тогда сосредоточимся на пределе

$$\lim_{x \rightarrow a} (c^{\varphi(x)} - 1) \cdot \psi(x).$$

Видим, что для использования (3.3) не хватает знаменателя. Организуем его путем умножения на единицу:

$$\lim_{x \rightarrow a} (c^{\varphi(x)} - 1) \cdot \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c^{\varphi(x)} - 1}{\varphi(x)} \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x),$$

и теперь если есть предел $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \cdot \psi(x)$, то можем воспользоваться пределом (3.3) и теоремой о пределе произведения.

(3.4) К пределу вида (3.4) обращаемся, когда в нашем выражении присутствует натуральный логарифм, т. е. когда ищется предел вида

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \ln \varphi(x).$$

Проверяем необходимое условие применимости (3.4):

$$\text{верно ли, что } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1,$$

и если неверно, то и повода использовать (3.4) нет. Допустим, что верно. Тогда выделяем внутри логарифма единицу путем прибавления нуля:

$$\varphi(x) = 1 + (\varphi(x) - 1)$$

и переходим дальше. Обеспечим знаменатель, умножив и разделив все выражение на $\varphi(x) - 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \ln \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \ln(1 + (\varphi(x) - 1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1 + (\varphi(x) - 1))}{\varphi(x) - 1} \cdot (\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x),\end{aligned}$$

и если есть предел $(\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x)$, то используем теорему о пределе произведения и (3.4).

(3.5) К этой формуле обращаемся в том случае, если у нас есть степень, в показателе которой стоит константа, т. е. рассматривается предел вида

$$\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x))^\alpha \cdot \psi(x).$$

Сначала проверяем:

$$\text{будет ли } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1,$$

и если нет, то повода использовать (3.5) нет. Если да, то начинаем процедуру приведения к виду (3.5): к основанию степени добавляем единицу и вычитаем ее, выделяя добавленную единицу отдельно:

$$\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x))^\alpha \cdot \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} (1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha \cdot \psi(x).$$

Получили фрагмент вида $(1 + z)^\alpha$, где $z \rightarrow 0$. Не хватает вычитаемой из него единицы. Обеспечим:

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow a} (1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha \cdot \psi(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} ((1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1 + 1) \cdot \psi(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (((1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1) \cdot \psi(x) + \psi(x)).\end{aligned}$$

Допустим, что есть конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$. Тогда займемся первым слагаемым. Имеем

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow a} ((1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1) \cdot \psi(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1}{\varphi(x) - 1} \cdot (\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x),\end{aligned}$$

и если существует предел $(\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x)$, то можно воспользоваться теоремой о пределе произведения и соотношением (3.5).

В пп. (3.1)–(3.5) описаны действия, рекомендуемые к выполнению после того, как появилось намерение использовать какой-то из замечательных пределов. Возможно, что в некоторых моментах описанные процедуры показались громоздкими. На практике надо вычленять содержание выполняемых шагов и применять информацию, подходящую для каждого конкретного случая. Во-первых, все будет технологично, а во-вторых, каждое действие будет мотивированным и они приведут к результату.

3.2. Нахождение предела функции в точке с использованием асимптотических равенств. Теория. Второе средство нахождения предела — асимптотические сравнения. Поскольку это исключительно важный материал, я использую асимптотику сразу после нахождения пределов с помощью замечательных пределов. Дело в том, что в момент появления развитой асимптотики, а это происходит при изучении формулы Тейлора, интерес к нахождению пределов угасает и время поджидает. В результате может оказаться так, что устойчивых навыков применения этой техники не нарабатывается. Нетрудно сообщить асимптотические формулы для основных элементарных функций, пообещав их обоснование в дальнейшем, и научить студентов этими формулами пользоваться. Но сначала особый разговор об асимптотических сравнениях.

Разговор о разной скорости возрастания или убывания функции начинается задолго до появления асимптотических сравнений, еще в эпоху построения графиков на основе элементарных средств. Там можно подчеркивать разный характер обращения функции в нуль — график ее входит в нуль горизонтально, наклонно или вертикально. Разный характер этого явления говорит о разной скорости исчезновения значений функции. Можно апеллировать к поведению разных функций на бесконечности — логарифмической, степенной, показательной. Это подводит к определению асимптотического, т. е. в результате предельного перехода, сопоставления функций. Само определение можно давать весьма разными способами, но начинать надо, скорее всего, с того, которое поддерживается интуицией, а именно рассматривать отношение функций. Конечно, можно быстро перейти к самому распространенному и самому используемому виду определения, а именно через представление функции в виде произведения двух функций, и шаг от отношения к произведению очевиден и мотивирован — а вдруг функция где-то вблизи данной точки обращается в нуль, тогда придется делать оговорки, и чтобы от этого избавиться, естественно перейти к произведению.

После устного предисловия по поводу сравнений студентам предлагается изучить расположенный ниже текст. После его прочтения, как правило, возникают вопросы, которые надо обсудить, но во всяком случае студент встречается с непростым, непривычным текстом и предпринимает попытку его понять.

Опишем средства, связанные с асимптотическим сравнением функций, т. е. сравнением их в пределе при стремлении аргумента к какой-то точке. Нам надо договориться о сравнении одной функции с другой. Для этого естественно рассматривать их отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$, однако при этом надо делать оговорки, связанные с возможностью знаменателя обращаться в нуль. Чтобы не иметь таких неудобств, можно для указанного выше отношения ввести свое обозначение и тем самым рассматривать представление одной из сравниваемых функций, например $f(x)$, через другую в виде произведения $f(x) = g(x)\varphi(x)$, где в качестве $\varphi(x)$ может выступать отношение $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ в тех точках, где $g(x) \neq 0$.

Две функции чаще всего асимптотически сравниваются в тех случаях, когда они обе либо бесконечно малые, либо бесконечно большие. Используемые при этом обозначения одинаковы в соответствующих ситуациях, а терминология немного отличается.

Итак, обращаясь к сравнению функций f и g , предположим, что f представлена в виде $f(x) = g(x)\varphi(x)$. Пусть a — предельная точка того множества, на котором эти функции рассматриваются. Если имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, то говорят, что f есть *о-малое относительно g* при x , стремящемся к a , и используют обозначение $f(x) = o(g(x))$. Если при этом $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая более высокого порядка, чем g* , или что *порядок малости функции f выше, чем у g* , или что f *стремится к нулю быстрее, чем g* . Если же $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет медленнее, чем g* , или что g *растет быстрее, чем f* .

Предположим, что в представлении $f(x) = g(x)\varphi(x)$ функция φ обладает следующим свойством: существует такая окрестность точки a , на которой φ ограничена. В этом случае говорят, что f — *О-большое по сравнению с g* при x , стремящемся к a , и используют обозначение $f(x) = O(g(x))$. Если при этом $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая порядка не ниже, чем g* , или что *порядок малости функции*

f не ниже, чем g . Если же $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то говорят, что f растет не быстрее, чем g .

Если одновременно $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$, то говорят, что функции f и g одного порядка (малости или роста) при $x \rightarrow a$, используя при этом обозначение $f \asymp g$.

Если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то говорят, что $g(x)$ — главная часть функции $f(x)$. Полагая $o(g(x)) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, тот факт, что g есть главная часть f , можно записать в виде $f(x) = g(x)(1 + \alpha(x))$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Если при этом в некоторой окрестности точки a функция g отлична от нуля, то последнее соотношение можно записать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow a,$$

или $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Если $g(x)$ — главная часть $f(x)$ при $x \rightarrow a$, то говорят также, что функции f и g эквивалентны при $x \rightarrow a$, и используют обозначение $f(x) \sim g(x)$.

Чаще всего в качестве бесконечно малых или бесконечно больших, с которыми сравнивают данные функции, берут функции вида $(x - a)^\alpha$, $a \in \mathbb{R}$. Если $f(x) = o(x - a)^\alpha$ при $x \rightarrow a$ и $\alpha > 0$, то говорят, что f — величина более высокого порядка (малости), чем α , или что у f порядок малости более высокий, чем α . Если же $f(x) \sim (x - a)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то говорят, что f имеет порядок α (малости или роста, в зависимости от знака α). Аналогичную терминологию можно описать и в том случае, если сравнивают с функцией вида x^α при $x \rightarrow +\infty$.

3.3. Использование асимптотических равенств. Технологии. После изучения теоретической информации должен быть расположен блок, посвященный технологии, т. е. основным средствам применения асимптотических сравнений.

Важно понимать, что символами типа $O(f(x))$, $o(f(x))$, если они не используются в конкретных равенствах, обозначают не одну функцию, а **класс функций, обладающих заложенным в содержании символа свойством**, так что если говорят «возьмем функцию $O(f(x))$ или $o(f(x))$ при $x \rightarrow a$ », то имеют в виду, что рассматривается **некоторая** функция, обладающая указанным свойством, т. е. некоторая функция $h(x)$ такая, что $h(x) = \varphi(x)f(x)$, где $\varphi(x)$ ограничена вблизи a или

$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$. В следующих ниже примерах и задачах мы познакомимся с некоторыми правилами обращения с асимптотическими равенствами.

Асимптотические равенства удобно использовать при нахождении пределов — они позволяют свести процесс нахождения предела к простым преобразованиям многочленов, раскрытию скобок, приведению подобных членов и выделению главной части. Конечно, для этого надо иметь набор конкретных асимптотических равенств. Поскольку все примеры по нахождению пределов связаны с элементарными функциями, ограничимся тем, что основные замечательные пределы перепишем в виде асимптотических равенств, в которых $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = x + o(x), \quad (3.7)$$

$$a^x = 1 + x \ln a + o(x), \quad (3.8)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad (3.9)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x). \quad (3.10)$$

Во всех этих равенствах бесконечно малые $o(x)$ можно конкретизировать, т. е. записать более точные приближения функций многочленами. Такие равенства будут обоснованы позже, однако можно их использовать при нахождении пределов в случае необходимости. Итак, для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства, в которых $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad (3.11)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad (3.12)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad (3.13)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad (3.14)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

В частности, при небольших n

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \quad (3.11^*)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \quad (3.12^*)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad (3.13^*)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad (3.14^*)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + o(x^2), \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.15^*)$$

Учитывая теорему о замене переменной, можно гарантировать, что эти равенства останутся верными, если в них на месте переменной x стоит какая-либо функция $x = \varphi(t)$ такая, что $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = 0$, и ищется предел соответствующего выражения при $t \rightarrow a$.

Нередко у студентов возникает вопрос: до какой степени использовать данные нам разложения? В качестве ответа можно напомнить, что основную проблему при применении теоремы о пределе отношения дает знаменатель, поэтому в первую очередь надо выделять главную часть в знаменателе, после чего в числителе разлагать данные там функции до появления всех членов со степенью главной части знаменателя.

В качестве примеров приведем образец рассуждения на тему обоснования равенств с участием асимптотических сравнений, затем покажем, как происходит нахождение предела с помощью асимптотических равенств.

ПРИМЕР 1. Доказать, что $o(o(f(x))) = o(f(x))$ при $x \rightarrow a$.

Написанное равенство означает, что любая функция, обладающая указанным в левой части равенства свойством, будет бесконечно малой по сравнению с f . Пусть $h(x)$ — какая-либо функция, обладающая тем свойством, что $h(x) = o(o(f(x)))$, и надо показать, что $h(x) = o(f(x))$. Согласно условию существует такая бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция $\theta(x)$, что $h(x) = \theta(x)g(x)$, где $g(x) = o(f(x))$. Последнее означает, что $g(x) = \eta(x)f(x)$, где $\lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0$. Собирая, получим $h(x) = \theta(x)\eta(x)f(x)$, а так как $\lim_{x \rightarrow a} \theta(x)\eta(x) = 0$, по определению $h(x) = o(f(x))$. Требуемое равенство установлено.

ПРИМЕР 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1 + 2x}}{\ln(1 + x) - x}$.

Воспользовавшись равенствами (3.12), (3.15), (3.9), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1 + 2x}}{\ln(1 + x) - x} &= \frac{1 + x \cos x - (1 + 2x)^{1/2}}{\ln(1 + x) - x} \\ &= \frac{1 + x(1 - x^2/2 + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) + o(x)}{x + o(x) - x} \\ &= \frac{1 + x - x^3/2 + o(x^3) - 1 - x + o(x)}{o(x)} = \frac{o(x)}{o(x)}, \end{aligned}$$

и никакой пользы проделанные выкладки не несут, ибо в итоге пришли к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Это означает, что использована недостаточно глубокая информация об асимптотике имеющихся функций. Выделение главной части в знаменателе:

$$\ln(1 + x) - x = x - x^2/2 + o(x^2) - x = -x^2/2 + o(x^2),$$

показывает, что в знаменателе — величина второго порядка, а тогда и в числителе надо использовать асимптотические равенства, обеспечивающие выделение главного члена второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{1 + x \cos x - (1 + 2x)^{1/2}}{\ln(1 + x) - x} &= \frac{1 + x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) - \frac{(1/2) \cdot (-1/2)}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 - x + \frac{4x^2}{8} + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(x^2)/x^2}{-1/2 + o(x^2)/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $x^3/2 = o(x^2)$, $o(x^2) + o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$, $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ и $o(x^3) = o(x^2)$.

При нахождении пределов бывает удобно комбинировать использование замечательных пределов и асимптотических равенств.

ПРИМЕР 3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2}$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} &= \left(\frac{1 - x^2/2 + o(x^2)}{1 - (2x)^2/2 + o(x^2)}\right)^{1/x^2} \\
&= \left(1 + \frac{1 - x^2/2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 - o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)}\right)^{1/x^2} = \left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)}\right)^{1/x^2} \\
&= \left(\left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)}\right)^{\frac{1+o(1)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}}\right)^{\frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1+o(1)} \cdot \frac{1}{x^2}}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{2}$, согласно (3.6) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = e^{3/2}.$$

§ 2.4. Непрерывность и равномерная непрерывность функции

4.1. Непрерывность в точке и на множестве. Обычно определяют непрерывность функции в точках из ее области определения и дают либо прямое определение, либо с использованием предела функции в точке. В каждом из этих подходов есть свои плюсы и минусы. Если определять непрерывность непосредственно, то от точки не надо требовать ничего, кроме ее принадлежности области определения, и этот способ позволяет говорить в том числе о «вырожденной» ситуации непрерывности в изолированных точках. Однако для исследования непрерывности бывает необходимо использовать более технологичное определение через предел в точке. Но последнее предусматривает дополнительное свойство точки, а именно она должна быть предельной точкой области определения. Кроме того, с интуитивной точки зрения вполне можно судить о непрерывности функции в предельной точке области определения, ей не принадлежащей. Например, можно считать функцию $\frac{1}{x}$ разрывной в нуле, и тогда надо иметь определение непрерывности в предельной точке области определения, в эту область не входящей.

Предлагается за основу взять непосредственное определение непрерывности на языке окрестностей или $\varepsilon - \delta$ и договариваться о том, как

понимать непрерывность в предельных точках области определения, ей не принадлежащих. Это представляется достаточно удобным, ибо не требует разных второстепенных оговорок в достаточно естественных ситуациях. Впрочем, всегда, исследуя непрерывность, надо иметь в виду договоренности того источника, из которого взята задача.

Приведем конкретный материал, который можно сообщить в качестве теоретического относительно определения непрерывности функции в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. Рассмотрим функцию f и точку $a \in \mathbb{R}$. Если a принадлежит области определения $D(f)$ функции f , то будем говорить, что функция f *непрерывна в точке a* , если

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f)) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Если к тому же a — предельная точка множества $D(f)$, то непрерывность f в a равносильна тому, что существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и выполнено равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Если же a не является предельной точкой $D(f)$ и тем самым говорить о пределе в этой точке невозможно, то любая функция в такой точке непрерывна. Договоримся также считать функцию f непрерывной в предельной точке множества $D(f)$, не принадлежащей $D(f)$, если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (требовать в этом случае равенства его значению функции в точке затруднительно — точка по предположению не входит в область определения, так что такого значения просто нет).

В случае отсутствия непрерывности функции в данной точке говорят, что она *разрывна* в этой точке.

Далее сообщаются традиционные утверждения о непрерывности функций, полученных из непрерывных функций в результате алгебраических операций и композиции, а также классификация точек разрыва.

Отнестись к непрерывности функции на множестве можно по-разному. Обычно говорят, что функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Однако есть и иная точка зрения, а именно, говорят, что функция *непрерывна на множестве*, если ее сужение на это множество непрерывно в каждой точке данного множества.

Подчеркнем, что во втором определении непрерывности функции на множестве затрагиваются значения только в точках данного множества,

в то время как значения в точках, в него не входящих, никакого влияния на непрерывность на данном множестве не оказывают. Например, характеристическая функция отрезка в первом смысле непрерывности на множестве разрывна на концах отрезка, а во втором непрерывна на всем отрезке. Второй подход может быть интереснее тем, что важные теоремы типа теоремы Лагранжа в таком случае в простейших ситуациях, например, для характеристической функции отрезка, применимы, а при традиционном подходе — нет.

Раздел, посвященный технологиям, можно наполнить, например, следующей информацией.

При исследовании непрерывности функции в данной точке сначала надо определить, что это за точка — входит она в область определения функции или нет и является ли она предельной точкой области определения. Если это точка из области определения, но не предельная точка, то ответ готов — функция в такой точке непрерывна.

Как правило, рассматриваемая точка будет предельной точкой области определения. В таком случае задаем вопрос «как устроена функция?» в расчете на то, что устройство функции позволит воспользоваться соответствующими теоремами. Если конструкция функции вблизи данной точки позволяет использовать какую-то теорему о непрерывности функций, составленных из непрерывных функций, вопрос о непрерывности в таких точках решается положительно. Результат можно оформлять, например, так: в некоторой окрестности данной точки функция представляет собой сумму (произведение, ...) непрерывных функций, следовательно, она непрерывна в данной точке.

Если же задание функции вблизи рассматриваемой точки не позволяет применить какую-то из теорем, то надо изучить существование предела (хотя бы односторонних пределов). Если конечного предела нет, то нет и непрерывности. Если конечный предел есть, то надо посмотреть, определена ли функция в этой точке, и если нет, то, как мы выше договорились, она в ней уже непрерывна (только за счет существования предела). Если определена, то надо сравнить значение предела со значением функции, и если они одинаковы, то функция непрерывна, если нет, то разрывна.

ПРИМЕР 1. Исследуем на непрерывность функцию

$$f(x) = [x] \sin \pi x,$$

где квадратные скобки указывают на целую часть числа, т. е. $[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Функция f определена на всем $\mathbb{R}$. Как устроена функция? Она представляет собой произведение двух функций, из которых $\sin \pi x$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Покажем, что функция $[x]$ непрерывна в каждой точке $a \notin \mathbb{Z}$, и тогда f будет непрерывной на множестве всех нецелых вещественных чисел как произведение непрерывных функций. Действительно, если $a \notin \mathbb{Z}$, то существует такая окрестность $(a - r, a + r)$ точки a , которая не содержит целых чисел, а тогда целая часть $[x]$ во всех точках такой окрестности принимает одно и то же значение, т. е. совпадает с непрерывной (тождественно постоянной) функцией и, значит, сама непрерывна в a .

Пусть $a \in \mathbb{Z}$. В любой достаточно малой (настолько малой, чтобы в ней не было отличных от a целых точек) окрестности точки a слева от a будет $[x] = a - 1$, а справа от a оказывается $[x] = a$. Отсюда

$$\lim_{x \rightarrow a-0} [x] = a - 1, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} [x] = a,$$

и ввиду различия пределов слева и справа заключаем, что предела в этой точке нет, так что $[x]$ разрывна в произвольной целой точке.

Итак, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций приходим к непрерывности нашей функции во всех нецелых точках. Можно ли утверждать, что в каждой целой точке она будет разрывна? Нет, пока нельзя. Нам только известно, что в таких точках не выполняются условия теоремы о непрерывности произведения непрерывных функций, но будет ли при этом произведение разрывным — вопрос пока открытый.

Отметим, что $\lim_{x \rightarrow n} \sin \pi x = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. По теореме о пределе произведения ограниченной функции на бесконечно малую будет $\lim_{x \rightarrow n} [x] \sin \pi x = 0$, так как целая часть вблизи любой конечной точки ограничена. Вместе с тем $[n] \sin \pi n = 0$ для $n \in \mathbb{Z}$. Получили, что предел функции в любой целочисленной точке совпадает с ее значением в такой точке, следовательно, наша функция непрерывна в каждой целочисленной точке. В итоге приходим к тому, что f непрерывна в каждой точке области определения.

4.2. Равномерная непрерывность. Вслед за непрерывностью нередко изучается равномерная непрерывность. Здесь важно акцентировать внимание на том, что о непрерывности можно говорить в точке,

а равномерную непрерывность определяют только на множестве, и здесь надо подчеркивать устойчивое словосочетание «равномерно непрерывна на множестве».

К понятию равномерной непрерывности нас подводит стандартное наблюдение, от каких величин зависит δ , существование которого предусматривается в определении непрерывности. Ясно, что такое δ должно зависеть от ε , от той точки, в которой рассматривается непрерывность, и от функции. Поскольку изучается непрерывность одной, заданной функции, зависимость δ от функции можно пока не афишировать. Отметим явно зависимость δ от точки, записав определение непрерывности функции f в точке a :

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, a) > 0 \forall x) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Вместе с тем может оказаться, что по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать δ так, чтобы оно подходило для всех точек a из некоторого множества X , т. е. было бы пригодным при заданном ε **в равной мере** для всех $a \in X$. Эта ситуация и находит свое отражение в определении равномерной непрерывности функции на заданном множестве X :

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1 \in X \forall x_2 \in X) \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

В технологиях, относящихся к исследованию равномерной непрерывности функции (или ее отсутствия), можно руководствоваться образным восприятием наличия или отсутствия этого свойства. Разумеется, для доказательства равномерной непрерывности у нас в распоряжении есть (на этом этапе информированности) определение и теорема Кантора. При использовании определения можно руководствоваться соображениями, аналогичными рекомендациям, высказанным при обосновании предела последовательности с использованием определения: ориентируясь на заданное $\varepsilon > 0$, надо ограничивать разность $|f(x_1) - f(x_2)|$ сверху чем-то более простым и зависящим от разности $|x_1 - x_2|$ таким образом, чтобы из этой зависимости и соответствующих оценок можно было сформировать правило выбора δ по заданному ε .

Можно учитывать следующее образное восприятие равномерной непрерывности: она означает, что функция на данном множестве не имеет участков с неограниченно увеличивающейся крутизной.

Для доказательства отсутствия равномерной непрерывности на заданном множестве можно использовать отрицание заложенного в определении равномерной непрерывности свойства, при этом полезно учитывать

отмеченное выше восприятие равномерной непрерывности. Ее отсутствие надо обнаруживать там, где функция имеет участки с неограниченно возрастающей скоростью изменения.

ПРИМЕР 2. Покажем, что функция $f(x) = x^2$ равномерно непрерывна на любом промежутке $(-l, l)$, $0 < l < +\infty$, и не будет равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Действительно, по теореме Кантора функция x^2 , будучи непрерывной, равномерно непрерывна на каждом замкнутом ограниченном промежутке, в частности на $[-l, l]$, а тогда она равномерно непрерывна и на $(-l, l)$.

Рассмотрим теперь $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$. Отсутствие равномерной непрерывности связано с увеличением крутизны функции, а это происходит при удалении аргумента. Запишем утверждение, означающее отсутствие равномерной непрерывности x^2 на $\mathbb{R}$:

$$(\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R}) \quad (|x_1 - x_2| < \delta) \wedge (|x_1^2 - x_2^2| \geq \varepsilon).$$

Значение ε будем подбирать в последнюю очередь, когда по произвольному $\delta > 0$ выберем x_1 и x_2 , ориентируясь на необходимость получения неравенства $|x_1^2 - x_2^2| \geq \varepsilon$. Пусть дано $\delta > 0$. Надо подобрать пару точек, отличающихся друг от друга меньше, чем на δ . Пусть $x_1 > 0$ — одна из таких точек, тогда вторую возьмем в виде $x_2 = x_1 + \alpha$, где α — какое-либо положительное число такое, что $\alpha < \delta$ (этим обеспечим неравенство $|x_2 - x_1| < \delta$). Рассмотрим разность

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_1 + \alpha)^2 - x_1^2 = \alpha(2x_1 + \alpha).$$

Зададимся вопросом: как сделать последнее выражение большим какого-то числа, и какое это может быть число? Поскольку мы пока вольны в выборе x_1 , ясно, что разумно взять его таким: $x_1 = 1/\alpha$. Тогда для такого x_1 получим

$$\alpha(2x_1 + \alpha) = \alpha(2/\alpha + \alpha) = 2 + \alpha^2 > 2,$$

откуда видно, что в качестве требуемого ε можно взять $\varepsilon = 2$, и тогда при заданном $\delta > 0$ надо взять любое x_1 такое, что $1/x_1 < \delta$, а к нему взять $x_2 = x_1 + \alpha$, где $\alpha < \delta$. В итоге окажется, что $|x_2 - x_1| < \delta$ и вместе с тем $|x_2^2 - x_1^2| \geq 2$.

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 3.1. Производная

Разговор о производной можно начать с вопроса приближения функции вблизи данной точки сравнительно простыми функциями. Можно заметить, что непрерывность функции в точке есть не что иное как приближение постоянными функциями и качество приближения определяется как сходимостью к нулю разности данной функции и соответствующей постоянной. Естественно поставить вопрос о возможности приближения данной функции линейной функцией, приложенной к точке графика. Вид такой функции достаточно очевиден, и нетрудно заметить (например, чисто зрительно), что если оставить имевшееся для непрерывности качество приближения, то, во-первых, не получим однозначности приближающей функции, а во-вторых, не получим нового по сравнению с непрерывностью свойства. Стало быть, надо улучшить качество приближения, например, потребовав для остатка не просто сходимости к нулю, но более быструю по сравнению со сходимостью к нулю приращения аргумента. Так приходим к выделению главной линейной части приращения функции вблизи данной точки, т. е. к представлению о дифференциале.

Можно начать разговор и с физической или геометрической интерпретаций и быстро прийти к стандартному определению производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента. Скорее всего, лучше озвучивать обе точки зрения, показав их равносильность.

Полезно акцентировать внимание на том, что производная рассматривается для функций, определенных на интервалах.

В части «теория», естественно, излагаются традиционные формулировки, таблица производных, определение односторонних производных.

Далее идут технологии изучения дифференцируемости функций и нахождения производных.

В процессе решения задач полезно подчеркивать сущность производной как скорости изменения функции, приводить примеры функций, у которых изменение может быть малым, а скорость изменения большой, или функций, неограниченных на конечных промежутках, производная которых не стремится к бесконечности и т. п.

Приведу фрагменты текстов, которые предлагаются в «технологии».

При исследовании функции на дифференцируемость и нахождении производной в первую очередь надо выяснить, как устроена функция в некоторой окрестности данной точки, и если ее устройство позволяет воспользоваться сформулированными теоретическими утверждениями, то применить теоремы и получить результат. Если же устройство функции не позволяет использовать теоремы или не выполнены их условия, то при исследовании дифференцируемости надо воспользоваться определением — составлять отношение приращения функции к приращению аргумента и изучать существование предела этого отношения при стремлении к нулю приращения аргумента.

Применение теоремы о нахождении производной функции, представляющей собой результат действия алгебраических операций, заложено в формулах из соответствующих частей формулировки. Некоторые затруднения возникают, если функция представляет собой композицию нескольких функций. Понимая, что большинство студентов уже освоили это правило в школе, тем не менее остановлюсь на нем подробнее и опишу процедуру нахождения производной композиции для тех, кто только начинает осваивать технику нахождения производной (в частности, школьников).

Отметим, что устройство функции определяется последней операцией, которая совершается при нахождении значений функции. Это может быть сумма, произведение, частное функций или применение какой-то известной функции. В интересующем нас случае имеем композицию, в которой в качестве последней операции выступает последняя действующая функция. Например, для функции $\sin^2 x$ последнее действие — возведение в квадрат, для $\sin x^2$ — нахождение синуса, и т. п.

На основе теоремы о производной композиции и соответствующей формулы сконструируем образную процедуру, призванную помочь в освоении правила. Для простоты будем считать, что f и g таковы, что их

производные находятся непосредственно, например, по таблице производных. После того как правило нахождения производной будет хорошо усвоено, от этого предположения можно отказаться — цель научиться использовать процедуру будет достигнута.

Представим себе действие функции f как правило, которое надо применить самым последним при нахождении значения функции h , и запишем это условно как действие правила f на некоторый ящик, в котором находится что-то, пока нам не известное, зависящее от переменной дифференцирования x :

$$h(x) = f(\sqcup).$$

Приступаем к дифференцированию. Сначала находим производную $f'(\sqcup)$ функции f , считая ящик единым целым. Затем открываем ящик и смотрим, что в нем находится. Если оказалась переменная дифференцирования x , то процесс нахождения производной закончен, если новая зависимость, то производную $f'(\sqcup)$ умножаем на производную содержимого ящика, которую находим по тому же принципу, как и производную первой функции. Подчеркнем, что появление в ящике переменной x — это признак завершения процесса нахождения производной.

ПРИМЕР 1. Найдем производную функции $f(x) = \sin^2 x^2$. Последняя операция при нахождении значения этой функции — возведение в квадрат синуса, поэтому функцию схематично можно представить в виде $(\sqcup_1)^2$ и воспользоваться правилом нахождения производной от степенной функции: $((\sqcup_1)^2)' = 2 \cdot \sqcup_1$. Открываем ящик и видим там функцию $\sin x^2$. Последней операцией при нахождении значения этой функции на элементе x является взятие синуса, так что она имеет вид $\sin(\sqcup_2)$. Находим производную от синуса, т. е. $\cos(\sqcup_2)$, умножаем на нее найденное выше значение: $2 \cdot \sqcup_1 \cdot \cos(\sqcup_2)$, и открываем ящик. Там находится выражение x^2 . Здесь последняя операция — возведение в квадрат какой-то величины (находящейся в новом ящике), т. е. $(\sqcup_3)^2$. Находим от нее производную: $((\sqcup_3)^2)' = 2(\sqcup_3)$, умножаем на нее найденное выше значение: $2 \cdot \sqcup_1 \cdot \cos(\sqcup_2) \cdot 2(\sqcup_3)$. Открыв теперь ящик, обнаруживаем там переменную x , следовательно, процесс закончен, и можно собрать результат: $(\sin^2 x^2)' = 2 \sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x$.

ПРИМЕР 2. Исследуем на дифференцируемость и найдем производную функции $f(x) = |\sin^3 x|$.

Как устроена функция $f(x)$? Она является композицией $\lambda \circ \psi \circ \varphi$ функций $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(t) = t^3$ и $\lambda(u) = |u|$. Функции φ и ψ диф-

ференцируемы всюду, а функция λ — всюду, кроме нуля. Поэтому соответствующее утверждение гарантирует дифференцируемость композиции в тех точках x , где $\sin^3 x \neq 0$, и в таких точках будет $f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$. Займемся теми точками, в которых $\sin^3 x = 0$, т. е. точками вида $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$\frac{|\sin^3(k\pi + h)| - |\sin^3 k\pi|}{h} = \frac{|\sin^3 h|}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

следовательно, $f(x)$ дифференцируема и в каждой точке вида $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, при этом $f'(k\pi) = 0$.

Отработав технику нахождения производных и исследования функции на дифференцируемость, полезно поработать с определением и формой записи дифференциала. Можно напомнить, что дифференцируемость f в точке x равносильна возможности выделения главной линейной части у приращения $f(x+h) - f(x)$ функции f в окрестности точки x , т. е. возможности представления

$$f(x+h) - f(x) = K \cdot h + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

или

$$f(x+h) = f(x) + K \cdot h + \alpha(h) \cdot h \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

где $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. В этом асимптотическом равенстве коэффициент K главной линейной части равен производной $f'(x)$, так что дифференцируемость f в точке x равносильна справедливости асимптотического равенства

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Главную часть справа в последнем равенстве, т. е. линейную относительно h функцию $f'(x) \cdot h$, называют *дифференциалом функции f в точке x* и при этом используют обозначение

$$df(x)(h) = f'(x) \cdot h. \quad (1.2)$$

В терминах дифференциала равенство (1.1) принимает вид

$$f(x+h) - f(x) = df(x)(h) + o(h), \quad h \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Так как для тождественной функции $f(x) = x$ будет $f'(x) = x' = 1$, можно записать, что $dx(h) = 1 \cdot h = h$, и если на место h в правой части (1.3) подставить выражение $dx(h)$, то равенство станет таким:

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h). \quad (1.4)$$

Переходя от равенства, выражающего совпадение значений функций слева и справа при каждом h , к равенству в терминах только символов функций, т. е. убирая h слева и справа, получим равенство

$$df(x) = f'(x) dx. \quad (1.5)$$

Именно эту запись и используют для выражения дифференциала функции f в точке x .

Иногда выражение dx можно считать переменной, и это бывает удобно. Обычно такая точка зрения не приводит к недоразумениям.

В блоке технологий здесь достаточно отметить, что для нахождения дифференциала функции надо найти ее производную и сделать запись вида (1.5).

Можно в этом месте сделать задел на будущее, к формуле Тейлора. Возможность выделения главной части функции в виде дифференциала можно использовать для нахождения приближенных значений функции вблизи таких точек, в которых значение производной легко находится — для этого надо в формуле (1.3) ограничиться только главной частью и написать, что $f(x+h) - f(x) \approx df(x)(h) = f'(x) \cdot h$ для малых h . Важно при этом подчеркивать, что поскольку дифференциал определяется на основе асимптотического равенства, невозможно оценить погрешность найденного приближенного значения.

Из особенностей технологий, относящихся к производным высоких порядков, можно разве что отметить следующее обстоятельство. Формулу для нахождения производной высокого порядка от произведения эффективно применять в том случае, если у одного из множителей производные начиная с некоторого невысокого порядка нулевые. Тогда в сумме, выражающей производную произведения двух функций, остается несколько членов.

Завершить раздел, посвященный дифференцируемости функции в точке, можно рассмотрением производной параметрически заданной функции. Здесь важно составить представление о том, что такое параметрически заданная функция, подчеркнуть локальный характер ее задания и возможность изучения изменения заданной параметрически функции на основе зависящих от параметра функций, ее определяющих. Остановимся на этом подробнее.

Можно изложить два взгляда на параметрическое задание функции.

Пусть на промежутке $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ заданы гладкие (т. е. имеющие на I непрерывные производные) функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$ в некоторой точке $t_0 \in I$. Тогда в некоторой окрестности (α, β) точки t_0 функция $x = \varphi(t)$ обратима. Пусть $t = \varphi^{-1}(x)$ — обратная к φ функция, определенная в некоторой окрестности (c, d) точки $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда на (c, d) определена функция

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)). \quad (1.6)$$

Если учесть, что $x = \varphi(t)$, последнее равенство можно записать и так:

$$\psi(t) = f(\varphi(t)) \quad (1.7)$$

для $t \in (\alpha, \beta)$. О функции f говорят, что она *задана параметрически посредством функций φ, ψ* . Обратим внимание на локальный характер параметрически заданной функции, хотя, конечно, множества, на которых она может быть определена, бывают обширными.

К понятию параметрически заданной функции можно подойти иначе и, возможно, естественнее с интуитивной точки зрения. Пусть, как и выше, на промежутке $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ заданы гладкие функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Фиксируем $t_0 \in I$, и пусть множество упорядоченных пар $(\varphi(t), \psi(t))$, попавших в некоторый круг с центром в точке $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, представляет собой график некоторой функции $f(x)$. В таком случае говорят, что *функция f задана параметрически посредством функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$* . Тот факт, что точка является графиком функции, означает, что вторая координата равна значению функции на первой, стало быть, функция f характеризуется тем, что

$$\psi(t) = f(\varphi(t))$$

для t из некоторой окрестности точки t_0 , т. е. при такой точке зрения равенство (1.7) служит основой определения параметрически заданной функции.

К технологиям относятся следующие ниже пожелания по поводу нахождения производных параметрически заданных функций.

При выполнении указанных выше условий параметрически заданная функция дифференцируема и ее производная может быть найдена путем дифференцирования либо равенства (1.6) по x , либо равенства (1.7) по t с применением теоремы о производной композиции, т. е.

$$f'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}, \quad (1.8)$$

если исходить из равенства (1.6), и

$$f'(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad (1.9)$$

если из равенства (1.7). Обычно при нахождении производной параметрически заданной функции идут вторым путем, т. е. дифференцируют по t равенство (1.7) и из полученного результата выражают требуемую производную.

Если определяющие функцию f функции φ, ψ имеют вблизи точки t_0 производные более высокого чем первый порядков, то в некоторой окрестности точки x_0 параметрически заданная функция имеет того же порядка производные, которые могут быть найдены последовательным дифференцированием.

§ 3.2. Свойства дифференцируемых функций

Поизучав дифференцируемость функции в точке, переходим к изучению и применению дифференцируемости функции на множестве (интервале). Здесь традиционно присутствуют следующие темы:

- теоремы о среднем,
- формула Тейлора,
- нахождение пределов по правилу Лопиталя,
- свойства функций и построение графиков.

2.1. Теоремы о среднем. Относительно теорем о среднем можно заметить, что высокой технологичности в их применении трудно достичь, они используются чаще всего в задачах, в которых надо что-то доказать, а там технологичность работает слабо, там больше требуются навыки обращения с понятиями и фактами и интуиция.

Полезно иметь в виду геометрическую интерпретацию теорем Ролля, Лагранжа и Коши. В частности, полезно отметить, что интерпретация теоремы Коши тесно связана с производной параметрически заданной функции.

2.2. Формула Тейлора. Далее в разделе, посвященном свойствам дифференцируемых функций, естественно изучать формулу Тейлора. Теория здесь обычная, акцент надо ставить на различном использовании локальной и глобальных форм остаточного члена в формуле Тейлора.

С остатком в форме Пеано мы уже встречались, когда находили пределы функции в точке с использованием асимптотики, и это здесь можно отметить, немного вспомнить, порешать задачи, связанные с разложением функции по формуле Тейлора вблизи отличной от нуля точки или по формуле Маклорена, и перейти к применению глобальных форм остатка, в основном в форме Лагранжа.

Надо подчеркивать, что локальная форма остатка в формуле Тейлора дает лишь асимптотическую информацию. По ней невозможно ответить, например, на вопрос об оценке абсолютной погрешности остатка при каком-либо фиксированном x или на каком-то отрезке и на другие вопросы нелокального характера.

Глобальные свойства отражены в соответствующих формах остатка в формуле Тейлора. Глобальные формы остатка позволяют ответить, например, на вопрос об оценке остатка на данном отрезке при заданном количестве членов в формуле Тейлора или на вопрос о количестве членов для достижения заданной точности в процессе приближенного вычисления значения функции на данном элементе.

Относительно технологий применения изложенной теории к решению задач можно отметить, например, следующее.

Если в формулировке задачи встречается требование разложить какую-то функцию по целым положительным степеням $x - a$ или по степеням x , то имеется в виду необходимость записать формулу Тейлора, в которой в качестве начальной точки выбрана точка a или соответственно точка 0 .

Обязательно надо привести набор асимптотических разложений конкретных функций, расширенный по сравнению с разделом, где асимптотика использовалась для нахождения предела.

Разложение по формуле Маклорена (или по формуле Тейлора) можно составлять непосредственно по определению, т. е. находить производные соответствующих порядков и записывать полином Тейлора. Однако это слишком трудный с практических позиций путь. Обычно разложение создают на основе известных разложений путем обычных преобразований, получают асимптотическую формулу и отмеченная выше единственность полинома Тейлора гарантирует, что это и есть искомое разложение. Кстати, возможность такого метода получения полинома Тейлора позволяет находить производные в нуле (или в какой-то фиксированной точке), выражая их из коэффициентов при соответствующих степенях.

Использование глобальных форм (обычно формы Лагранжа) для

оценки погрешности реализуется следующим образом. Запишем остаток в выбранной нами форме с начальной точкой a и конечной точкой x . Затем найдем наибольшее значение модуля производной на отрезке с концами a, x , оценим с его помощью величину остатка на заданном отрезке, и это покажет абсолютную погрешность при использовании формулы Тейлора на отрезке с концами a, x ; в частности, можно узнать, насколько значение функции в точке x отличается от значения полинома Тейлора в этой точке.

Если задана погрешность, с которой предполагается приближенно вычислить значение функции в точке x с заданной точностью, то подбирают степень полинома Тейлора, при которой заданная точность может быть обеспечена. Оценку проводят, как указано выше.

ПРИМЕР 1. Разложим функцию $\ln \frac{\sin x}{x}$ по целым положительным степеням x до члена с x^6 .

Воспользуемся известными разложениями логарифма и синуса. При этом глубина разложения определяется условием задачи, а именно необходимостью разложить до члена с x^6 . Это требование будет выполнено, если в разложениях синуса и логарифма будут учтены все возможности появления переменной x до x^7 , ибо находящееся в знаменателе x понизит степень на единицу. Принимая во внимание отмеченное наблюдение, имеем

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sin x}{x} &= \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x} \\ &= \ln \left(1 + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6) \right) \right) \\ &= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{3!} + o(x^2) \right)^3 + o(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} - \frac{x^4}{2(3!)^2} + \frac{x^6}{3! \cdot 5!} - \frac{x^6}{3 \cdot (3!)^3} + o(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{6} - \left(\frac{1}{72} - \frac{1}{120} \right) x^4 - \left(\frac{1}{5040} - \frac{2}{720} + \frac{1}{648} \right) x^6 + o(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Подобрать коэффициенты A, B так, чтобы при

$x \rightarrow 0$ имело место асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5). \quad (*)$$

Воспользуемся разложениями для синуса и косинуса. Равенство (*) запишем так:

$$\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)} - \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} = O(x^5),$$

где возьмем такую глубину разложения, чтобы появлялись степени x вплоть до требуемой, т. е. до пятой. Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6))(x + Bx^3) - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(1 + Ax^2)}{(x + o(x))(x + o(x))} = O(x^5),$$

и воспользуемся определением O -большого, а именно разделим обе части равенства на x^5 :

$$\frac{(B - A - 1/3)x^3 + (A/6 - B/2 + 1/30)x^5 + O(x^7)}{x^7 + o(x^7)} = O(1),$$

Символ $O(1)$ означает, что расположенная в левой части дробь ограничена в окрестности нуля, а это произойдет в том случае, если члены с x^3 и x^5 в числителе отсутствуют, т. е. если

$$B - A - \frac{1}{3} = 0, \quad \frac{A}{6} - \frac{B}{2} + \frac{1}{30} = 0.$$

Решая эту систему, получим $A = -2/5$, $B = -1/15$.

ПРИМЕР 3. Оценим абсолютную погрешность приближенной формулы $\sin x \approx x - x^3/6$ при $0 \leq x \leq 1/2$.

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (считая, что разложение доводится до x^4) имеем

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{\sin^{(5)} \xi}{120} x^5 = \frac{\cos \xi}{120} x^5,$$

где $\xi \in (0, x)$. Поскольку $|\cos \xi| \leq 1$, то

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^5}{120} \leq \sup_{x \in [0, 1/2]} \frac{x^5}{120} = \frac{(1/2)^5}{120} = \frac{1}{3840}.$$

ПРИМЕР 4. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислим $\sqrt[12]{4000}$ и оценим погрешность.

Воспользуемся формулой Тейлора для функции $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + R_1(x)$ с начальной точкой $a = 0$, взяв для простоты всего два члена в формуле Тейлора. Представим $4000 = 2^{12} - 96$. Тогда

$$\sqrt[12]{4000} = (2^{12} - 96)^{1/12} = 2 \left(1 - \frac{96}{2^{12}} \right)^{1/12}.$$

Положим $\mu = 1/12$, $x = -96/2^{12} = -3/128$. Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt[12]{4000} &= 2 \left(1 - \frac{3}{128} \right)^{1/12} = 2 \left(1 + \frac{1}{12} \left(-\frac{3}{2^7} \right) + R_1(x) \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2^9} + R_1(x) \right) = \frac{2^9 - 1}{2^8} + 2R_1(x). \end{aligned}$$

Оценим остаток $R_1(x)$, воспользовавшись формой Лагранжа остаточного члена: найдется такое $\xi \in (-3/2^7, 0)$, что

$$\begin{aligned} 2|R_1(x)| &= 2 \left| \frac{((1+\xi)^{1/12})''}{2!} x^2 \right| = 2 \cdot \frac{1}{12} \frac{11}{12} \frac{(1+\xi)^{-23/12}}{2!} \left(\frac{3}{2^7} \right)^2 \\ &= 2 \cdot \frac{11 \cdot 3^2}{3^2 \cdot 2^{19} (1+\xi)^{23/12}} \leq \frac{11}{2^{18} (1 - 3/128)^{23/12}}. \end{aligned}$$

Такова оценка погрешности. Ограничивая сверху полученную оценку, можно дать оценку более простого вида.

2.3. Правило Лопиталья. Еще одна тема, относящаяся к свойствам дифференцируемых функций, это правило Лопиталья, дающее возможность использования производной при нахождении пределов отношений функций.

Для использования правила Лопиталья надо привести имеющуюся неопределенность к виду, предусмотренному в условии теоремы, и убедиться в выполнении условий теоремы. А именно, надо обращать внимание на наличие неопределенности соответствующего вида и предупреждать о невозможности применения правила в отсутствие этого обстоятельства.

Полезно вспомнить, как приводятся к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ неопределенности вида $0 \cdot \infty$, ∞^0 , 1^∞ , $\infty - \infty$. Пусть $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \infty$, $\varphi(x) \rightarrow 1$,

$h(x) \rightarrow \infty$. Тогда можно использовать следующие соотношения:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}, \quad g(x)^{f(x)} = e^{f(x) \ln g(x)},$$

$$\varphi(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln \varphi(x)}, \quad g(x) - h(x) = g(x) \left(1 - \frac{h(x)}{g(x)}\right).$$

В конкретных примерах можно, разумеется, воспользоваться простейшими преобразованиями.

Можно подчеркнуть, что при использовании правила Лопиталя если не удастся найти предел в результате однократного его применения, для повторного применения не надо применять это правило ко всей получившейся на первом шаге дроби. Надо, используя элементарную информацию, отделить те блоки, которые имеют конечный ненулевой предел, и правило повторять только для части, в которой существенно реализуется неопределенность.

Можно обратить внимание на недопустимость применения «обратного правила Лопиталя», т. е. из существования предела отношения функций не следует делать вывод о существовании предела отношения производных.

После того, как изучены средства нахождения предела, можно поговорить о том, какое из них наиболее технологичное, тем самым на какой из способов надо в первую очередь ориентироваться при нахождении предела. По-видимому, наиболее продуктивным является обращение к асимптотическим равенствам. На второе место можно предложить использование замечательных пределов, и на третье — правило Лопиталя. Это субъективное впечатление, и поясню, на чем оно основано. Асимптотика — средство распространенное не только для нахождения пределов, но и для анализа скорости исчезновения функции, полезное, например, при анализе сходимости рядов и несобственных интегралов. Замечательные пределы в незапутанных ситуациях позволяют учесть особенности вида функции. Наконец, правило Лопиталя, весьма любимое студентами, окончившими продвинутые школы, применяется только в определенного вида ситуациях и нередко сопровождается довольно громоздкими выкладками.

2.4. Исследование функций и построение графиков. Еще один блок связан с применением производной для изучения свойств функции, а именно для исследования монотонности, экстремумов и выпуклости. Утверждения, относящиеся к монотонности, традиционны. Здесь не

вредно еще раз вспомнить (при разговоре о необходимых условиях экстремума) о существовании необходимых условий как средства, не дающего ответа на поставленный вопрос, но ограничивающего область поиска результата.

Можно отметить роль выпуклости в разных вопросах, таких как обоснование неравенств, однако обычно бывает немного времени для того, чтобы останавливаться на такого рода свойствах более подробно.

Блок, относящийся к технологиям, можно составить, например, из следующих пожеланий.

Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения. Нахождение точек экстремума надо начинать с использования необходимых условий. Обычно данная функция дифференцируема на всем интервале, поэтому в дальнейшем, говоря о стационарности точки, будем под этим понимать обращение производной в нуль в такой точке. Первым делом находим производную, приравниваем ее к нулю, решаем полученное уравнение и тем самым находим, среди каких точек может быть точка экстремума. Затем к каждой из найденных точек применяем достаточное условие. Если оно дает информацию, то получаем результат, если не дает, пробуем использовать другое условие, например, достаточное условие с применением производных высших порядков. В крайнем случае можно пытаться установить наличие или отсутствие экстремума, исследуя саму функцию вблизи стационарной точки.

Как известно, всякая непрерывная на замкнутом ограниченном промежутке $[a, b]$ функция f достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Для их нахождения можно найти все стационарные точки функции f на (a, b) и выбрать наибольшее (соответственно наименьшее) значение среди значений функции в этих точках и значений $f(a)$ и $f(b)$ на концах промежутка.

Выпуклость. Обычно выпуклость исследуют при построении графика функции. Однако ее можно использовать для доказательства неравенств. Убедившись в выпуклости какой-либо функции и записав ее определение с какими-то конкретными коэффициентами, можно получать интересные неравенства.

Конечно, выпуклость имеет довольно богатые приложения, особенно как источник неравенств. Однако определенный дефицит времени обычно не позволяет остановиться на этом более подробно.

Асимптоты находят исключительно при построении графика для выяснения вида функции на концах области определения. Для нахождения

асимптоты, если она есть, используют вытекающие из их определения равенства. Находят указанные там пределы, и если они существуют, то соответствующая прямая является асимптотой, если не существуют, асимптот нет.

Построение графиков. Завершается раздел исследованием функции и построением графика. При анализе свойств функций с целью построения графика можно придерживаться, например, следующего порядка:

- 1) найдем область определения,
- 2) исследуем особенности функции (четность, нечетность, периодичность),
- 3) найдем нули и участки знакопостоянства,
- 4) изучим поведение функции на концах области определения и найдем асимптоты, если они есть,
- 5) найдем участки монотонности и точки экстремума, например, с использованием производной или иным способом,
- 6) вычислив вторую производную, найдем участки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

По завершении исследования применим всю информацию для построения графика.

Полезно использовать приобретенные ранее навыки подготовки эскизов графиков для оценки правдоподобности получаемых результатов и минимизации ошибок.

Для построения графика функции, заданной параметрически, т. е., по существу, для изображения на координатной плоскости множества точек (x, y) таких, что $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где φ, ψ — гладкие функции, сначала удобно изобразить отдельно графики функций φ и ψ , выделить те участки переменной t , на которых обе функции монотонны, и на этой основе анализировать поведение функции $y(x)$. Здесь полезно сразу найти первые и вторые производные, показывающие, на каких промежутках переменной t и, как следствие, на каких промежутках переменной x функция $y(x)$ оказывается монотонной и выпуклой. Вообще процесс изображения параметрически заданной функции довольно трудоемкий, хотя и интересный. Впрочем, в последние годы времени на построение графиков параметрически заданных функций не остается.

§ 3.3. Первообразная и неопределенный интеграл

Говоря о первообразной, желательно ставить акцент на том, что все происходит на промежутке, без этого требования первообразная не определяется. Желательно также формулировать утверждения о нахождении первообразной, подробно описывая все сопровождающие их условия. В качестве примера можно привести формулировки следующих утверждений.

Теорема 1 (интегрирование по частям). *Если f, g дифференцируемы на промежутке I и произведение $g(x)f'(x)$ интегрируемо на I , то произведение $f(x)g'(x)$ также интегрируемо на I и имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \quad (3.1)$$

Используя запись $df(x) = f'(x)dx$, формулу интегрирования по частям можно записать в одном из видов

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x), \quad (3.1a)$$

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \quad (3.1b)$$

Теоремы о замене переменной и о подстановке можно сформулировать в разных видах. По-видимому, чаще всего встречается использование этого средства в следующей формулировке.

Теорема 2 (о замене переменной и подстановке). *Пусть $f(x)$ — функция, заданная на промежутке I , и пусть $x = \varphi(t)$ — заданная на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ строго монотонная дифференцируемая функция, отображающая Δ на I и имеющая дифференцируемую обратную. Тогда функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет первообразную на промежутке Δ в том и только в том случае, если $f(x)$ имеет первообразную на I , при этом*

(α) *если $\Phi(t)$ — первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, то $\Phi(\varphi^{-1}(x))$ — первообразная функции f , иначе говоря, если*

$$\Phi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt,$$

то

$$\int f(x) dx = \Phi(\varphi^{-1}(x));$$

(β) если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $F(\varphi(t))$ — первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, иначе говоря, если

$$\int f(x) dx = F(x),$$

то

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)).$$

Отметим, что для утверждения п. (β) условия можно ослабить.

Приведя таблицу первообразных, основанную на таблице производных основных функций, можно перейти к технологиям нахождения первообразной, и здесь, в отличие от нахождения производной, большое поле для творчества. Можно разделить наборы рекомендаций по их направленности на

- (1) общие,
- (2) связанные с заменой или подстановкой,
- (3) связанные с интегрированием по частям,
- (4) относящиеся к подынтегральным функциям специального вида (рациональным функциям, рационально зависящим от тригонометрических и т. д.).

Общие рекомендации. Если подынтегральная функция — это одна из функций, первообразная от которых находится непосредственно (в таком случае говорят о «табличном интеграле»), надо воспользоваться соответствующей формулой из таблицы первообразных.

Если подынтегральная функция не совпадает ни с одной из функций, указанных в таблице первообразных, то целесообразно поставить вопрос «как устроена функция?». Для нахождения первообразной, в отличие от нахождения производной, нет общих правил нахождения для сколь-либо сложно устроенных функций. Есть только теорема о первообразной линейной комбинации, и если подынтегральная функция представляет собой линейную комбинацию функций, нахождение первообразной может быть сведено к нахождению первообразных составляющих функцию слагаемых.

Вопрос об устройстве подынтегральной функции нацеливает на поиск особенностей, присутствие которых приводит к выполнению соответствующих рекомендаций. Тем самым этот вопрос может сопровождаться вопросом «есть ли в подынтегральной функции фрагменты, присутствие которых всегда предполагает выполнение определенных действий?». Назовем такие фрагменты *символосочетаниями* или *фигурами символов* и перечислим наиболее часто встречающиеся, сопровождая символосочетания описанием действий, которые надо выполнить при их обнаружении. Обычно такие действия направлены на выполнение замены или на подстановку и использование соответствующего утверждения.

1. Если в подынтегральной функции есть выражение вида $kx + l$, можно либо выполнить замену, а именно положить $kx + l = t$, подготовить замену, т. е. выразить x через t и dx через dt , и перейти к нахождению первообразной от новой функции, зависящей от t , либо предварительно подготовить фрагмент dx к выполнению такой замены, а именно сначала воспользоваться тем, что $dx = \frac{1}{k}d(kx + l)$, и только потом сделать замену.

2. Допустим, что в подынтегральном выражении есть фрагмент $x dx$. Тогда надо воспользоваться равенством $x dx = \frac{1}{2}dx^2$, и если оставшаяся часть подынтегральной функции зависит от x^2 , целесообразно положить $x^2 = t$.

3. Если встретился фрагмент $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$, можно воспользоваться равенством $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d\sqrt{x}$ и проанализировать целесообразность замены $\sqrt{x} = t$. В этом случае даже если подынтегральная функция зависит не только от выражения $\sqrt{x}$, замена может оказаться полезной. В таком случае ее надо подготовить: старую переменную выразить через новую и выразить dx через dt : $x = t^2$, $dx = 2t dt$, перейти к интегралу от новой переменной, и для нахождения первообразной вернуться к старой переменной.

4. Фрагменты $\sin x dx$, $\cos x dx$ предполагают использование равенств $\sin x dx = -d \cos x$, $\cos x dx = d \sin x$ и анализ целесообразности соответствующей замены.

5. Символосочетание $\sqrt{1 - x^2}$ или $\sqrt{a^2 - x^2}$ часто связано с подстановкой $x = \sin t$ или $x = a \sin t$, где t принадлежит какому-либо из промежутков взаимной однозначности синуса, например $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Обычно в подобных указанной ситуации параметры считаются поло-

жительными. В результате из указанной фигуры символов получается выражение $\cos t$ или $a \cos t$, т. е. исчезает иррациональность.

6. Фрагмент $\sqrt{1+x^2}$ или $\sqrt{a^2+x^2}$ часто связан с подстановкой $x = \operatorname{tg} t$ или $x = a \operatorname{tg} t$. Здесь можно также использовать подстановку $x = \operatorname{sh} t$ или $x = a \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$, с использованием формул для гиперболических функций. Присутствие фрагмента $\sqrt{x^2-1}$ намекает на подстановку $x = \operatorname{ch} t$ и рассмотрением первообразных на участках монотонности функции $\operatorname{ch} t$.

7. Если в подынтегральной функции есть корень, под которым находится многочлен первой степени, т. е. присутствует выражение вида $\sqrt[n]{kx+l}$, или отношение таких многочленов, т. е. имеется выражение вида $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то целесообразно весь корень взять в качестве новой переменной, подготовить замену и перейти к нахождению первообразной от новой функции, зависящей от t .

8. Выражение $\frac{dx}{x^2}$ может использоваться после замечания о том, что $\frac{dx}{x^2} = -d\frac{1}{x}$ и анализа целесообразности соответствующей замены.

По-видимому, это далеко не полный набор символосочетаний, приводящих к соответствующим действиям, он сформирован на основе авторского опыта.

Замена переменных. Опишем общие рекомендации по замене и подстановке. Они осуществляются путем переноса задачи нахождения первообразной с одного промежутка на другой, между которыми есть взаимно однозначное отображение.

(1) Заменой переменных можно воспользоваться в следующей ситуации. Допустим, что исходный интеграл $\int g(x) dx$ удалось представить в виде

$$\int g(x) dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x).$$

В таком случае выражение $\varphi(x)$ можно считать новой переменной, т. е. положить $u = \varphi(x)$, и если первообразная $F(u)$ функции $f(u)$ известна или может быть найдена, т. е. если $\int f(u) du = F(u)$, то можно найти

и первообразную функции $g(x)$:

$$\int g(x) dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)).$$

Другими словами, если исходная подынтегральная функция устроена таким образом, что она, по существу, формируется с использованием некоторого единого выражения, зависящего от x , то, взяв всё это выражение в качестве новой переменной (заменив его единым символом, новой переменной), мы сводим нахождение первообразной исходной функции к нахождению первообразной другой, как правило более простой функции.

Метод подстановки для нахождения интеграла $\int f(x) dx$ применяют обычно так. Из каких-то соображений берут удовлетворяющую условиям теоремы о замене и подстановке функцию $\varphi(t)$ и на место x в исходном интеграле подставляют $x = \varphi(t)$, при этом расписывая $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t) dt$. В результате переходят к нахождению первообразной новой функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т. е. к нахождению интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$. Если его удастся найти и при этом

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t),$$

то интеграл от $f(x)$ получают подстановкой в Φ на место t выражения $\varphi^{-1}(x)$, т. е.

$$\int f(x) dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)).$$

Замена или подстановка в чистом виде встречаются далеко не всегда, иначе говоря, может оказаться выполненной только часть соответствующих пожеланий. В таком случае замену (подстановку) надо подготовить, т. е. всё выразить через новую переменную, после чего заняться нахождением интеграла относительно новой переменной, и в случае успеха вернуться к старой.

Интегрирование по частям применяется в следующей ситуации. Если подынтегральная функция представима (или представлена) в виде произведения двух дифференцируемых функций и мы находим, что дифференцирование одной из них приводит к более простой функции, то можно попробовать воспользоваться интегрированием по частям. В таком случае второй сомножитель надо представить в виде производной от соответствующей функции (т. е. найти первообразную второго сомножителя)

и применить формулу интегрирования по частям. В результате после дифференцирования первой функции может получиться подынтегральная функция более простого вида. При этом чаще всего удобно пользоваться формулой вида (3.1b).

Процесс интегрирования по частям организуется так. Допустим, что в интеграле вида $\int f(x)\varphi(x) dx$ мы нашли, что функция $f(x)$ в результате ее дифференцирования становится в каком-то смысле проще (например, это x^n или $\arctg x$, или $\arcsin x$ и т. п.). Тогда ищем первообразную функции $\varphi(x)$, т. е. представляем $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = g'(x)$. Далее «занося $g(x)$ под d » (жаргон), т. е. делаем запись вида $g'(x) dx = dg(x)$ (может оказаться, что $\varphi(x) = 1$ и тогда $g(x) = x$). Затем выполняем операцию интегрирования по частям:

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x).$$

Наконец, в последнем интеграле делаем подготовку для дальнейшего его нахождения:

$$\int g(x) df(x) = \int g(x)f'(x) dx,$$

и переходим к нахождению последнего интеграла. Эту последовательность действий можно записать так:

$$\begin{aligned} \int f(x)\varphi(x) dx &\stackrel{(1)}{=} \int f(x)g'(x) dx \stackrel{(2)}{=} \int f(x) dg(x) \\ &\stackrel{(3)}{=} f(x)g(x) - \int g(x) df(x) \stackrel{(4)}{=} f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \end{aligned}$$

В последней цепочке равенства (1) и (2) являются подготовкой к интегрированию по частям, равенство (3) — собственно интегрирование по частям, и равенство (4) — подготовка к нахождению интеграла, получившегося в результате применения формулы интегрирования по частям.

4. Рекомендации для частных случаев подробно описаны во многих руководствах по математическому анализу, и здесь на них останавливаться не будем.

Приведем несколько примеров, в которых показано, как происходит распознавание применимости символосочетаний и интегрирования по частям. Не надо полагать, что примеры избыточно тривиальны, полезно

здорово представить себе степень готовности студентов, и заметить, что обучаемым не вредно посмотреть стиль организации решения в простейших ситуациях.

ПРИМЕР 1. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$.

Если искомый интеграл отличается от табличного только постоянными множителями в каких-то частях подынтегрального выражения, то можно воспользоваться простой заменой. Обратим внимание на то, что среди табличных есть интеграл $\int \frac{dx}{1 + x^2}$, в котором единица в знаменателе неизменяема, ее трогать нельзя, а с переменной можно поработать. Добиться единицы в знаменателе нетрудно:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (\frac{b}{a}x)^2},$$

и здесь можно пойти двумя путями. Можно преобразовать переменную под символом « d »:

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (\frac{b}{a}x)^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{d(\frac{b}{a}x)}{1 + (\frac{b}{a}x)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}x,$$

а можно сделать замену: $\frac{b}{a}x = t$, подготовить ее: $x = \frac{a}{b}t$, $dx = \frac{a}{b}dt$, перейти к нахождению первообразной

$$\frac{a}{b} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{a}{b} \operatorname{arctg} t$$

и вернуться к исходной переменной:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}x.$$

ПРИМЕР 2. Найдем при $x > 0$ интеграл $I := \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$.

Видна фигура символов вида $\sqrt{1 + x^2}$, и можно попробовать подстановку $x = \operatorname{sh} t$ или $x = \operatorname{tg} t$. Этот ход приводит к результату, особенно подстановка $x = \operatorname{tg} t$, однако мы обеспечим другую фигуру символов, вынеся x^2 из-под корня и воспользовавшись присущим этому символосочетанию ходом:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + 1/x^2}} = - \int \frac{d(1/x)}{\sqrt{1 + 1/x^2}}$$

(замена $u = 1/x$)

$$= - \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\ln(u + \sqrt{u^2+1}) = -\ln \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

ПРИМЕР 3. Найдем интеграл

$$I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

Здесь просматривается фрагмент $\sqrt{a^2 + x^2}$, при наличии которого рекомендуется выполнить подстановку $x = a \operatorname{sh} t$ или $x = a \operatorname{tg} t$. Выполним подстановку $x = a \operatorname{sh} t$, $dx = a \operatorname{ch} t dt$. Обратимся к нахождению интеграла

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} \cdot a \cdot \operatorname{ch} t dt &= a^2 \int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t dt \\ &= a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \operatorname{ch} 2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\operatorname{arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$ и тем самым

$$t = \operatorname{arsh} \left(\frac{x}{a} \right) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a},$$

вернемся к переменной x :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \operatorname{ch} \left(\operatorname{arsh} \frac{x}{a} \right) \operatorname{sh} \left(\operatorname{arsh} \frac{x}{a} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{a^2} \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Найдем интеграл $\int x e^{-x} dx$. Заметим, что под интегралом стоит произведение двух функций, одна из которых, а именно $f(x) = x$, после дифференцирования становится проще. Это подсказывает нам, что следует попробовать воспользоваться интегрированием по частям. Представим второй сомножитель как производную соответствующей функции: $e^{-x} = (-e^{-x})'$. Проведем предварительную подготовку для использования одного из видов формулы (3.1), т. е. запишем интеграл так:

$$\int x e^{-x} dx = - \int x de^{-x}.$$

Теперь завершим нахождение:

$$\begin{aligned}\int x e^{-x} dx &= - \int x de^{-x} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(1+x).\end{aligned}$$

§ 3.4. Определенный интеграл

Есть несколько разных подходов к изучению определенного интеграла, а именно, определенный интеграл можно понимать как разность значений первообразной на концах промежутка интегрирования, как аддитивную функцию промежутка, плотность которой в точках промежутка совпадает с подынтегральной функцией, как предел сумм Римана, как интеграл по конечно аддитивной мере. Тем не менее независимо от подхода студент должен уметь найти определенный интеграл от заданной функции, и здесь средства, предлагаемые разными подходами, для достаточно широкого класса функций сводятся к одному и тому же. Занимаясь нахождением интегралов, можно ограничиваться рассмотрением непрерывных (а иногда и дифференцируемых) функций, в случае необходимости разбивая промежуток интегрирования на части. При рассмотрении определенного интеграла как объекта, связанного с функцией и множеством, достаточно большое внимание обращается на множество, по которому ведется интегрирование. В то время как при нахождении первообразной мы редко обращали внимание на то, на каких промежутках ищется (и находится) первообразная, здесь так поступать невозможно. Особенно это проявляется при замене переменной или подстановке — согласование промежутков является при этом первоочередной проблемой.

Не останавливаясь на теоретических подробностях, отметим формулировки утверждений, на которые стоит обратить внимание.

Теорема 1 (формула интегрирования по частям). Пусть функции f, g дифференцируемы на отрезке с концами a, b . Тогда если функция $f'(x)g(x)$ интегрируема от a до b , то этим свойством обладает и функция $f(x)g'(x)$ и имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx, \quad (4.1)$$

или, в иной форме записи,

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x). \quad (4.2)$$

В этом утверждении надо обратить внимание на необходимость взятия приращения в части выражения, появляющегося при интегрировании по частям.

Теорема 2 (о подстановке и замене переменной). Пусть f — интегрируемая от a до b функция и φ — дифференцируемая функция, отображающая отрезок с концами α, β на отрезок с концами a, b , причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема от a до b и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (4.3)$$

Если при этом φ имеет дифференцируемую обратную, то из интегрируемости $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ от α до β следуют интегрируемость $f(x)$ от a до b и справедливость (4.3).

Поскольку к настоящему моменту студенты еще не знакомы с несобственным интегралом, приходится привести, например, следующее

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда, пользуясь подстановкой или заменой переменной при нахождении интеграла от a до b , приходится использовать такие функции $\varphi(t)$, которые отображают бесконечный промежуток, например $[\alpha, +\infty)$, на заданный ограниченный, но не замкнутый промежуток $[a, b)$. В таком случае полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x)dx$$

и при замене следует воспользоваться формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Более подробно с интегралами по промежуткам, у которых по крайней мере один из концов не входит в промежуток (в частности, по неограниченным промежуткам), познакомимся позже.

Основу нахождения интеграла, конечно же, составляет формула Ньютона — Лейбница, и здесь полезно обратить внимание на требование задания и непрерывности функции на всем промежутке интегрирования.

Теорема 3 (формула Ньютона — Лейбница). Пусть функция f непрерывна на отрезке с концами a , b , и пусть F — ее первообразная на этом промежутке (которая для непрерывной функции существует). Тогда имеет место формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (4.4)$$

которая с использованием для приращения $F(b) - F(a)$ обозначения $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ может быть записана в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b. \quad (4.5)$$

Материал, который можно отнести к технологиям обращения с определенным интегралом, сравнительно невелик. Ответы на многие вопросы даются путем непосредственного применения соответствующего факта (формулы). Процесс нахождения интеграла, в принципе, ясен — надо искать первообразную и брать ее приращение. Если первообразная ищется без внимания к промежутку интегрирования, то надо обратить особое внимание на промежутки, на которых та или иная функция предлагается в качестве первообразной. Более того, в процессе вычисления определенного интеграла при нахождении первообразной лучше всегда обращать внимание на промежутки, на которых происходит поиск. Особенно это важно при замене переменной — предлагаемая в качестве первообразной функция может ей не оказаться на том множестве, по которому ведется интегрирование, и в таких случаях обычно приходится либо разбивать область интегрирования на части и затем собирать интеграл из интегралов по отдельным промежуткам, либо сразу при подборе первообразной принимать во внимание промежутки интегрирования.

Можно привести пример, в котором показаны особенности замены.

ПРИМЕР. В интеграле $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx$ выполним замену $\sin x = t$.

При выполнении указанной замены мы должны совершить такие действия, чтобы сохранилось равенство $\sin x = t$ на отрезке $[0, 2\pi]$ изменения переменной x . Выразить однозначно x через t при $x \in [0, 2\pi]$ невозможно, поэтому разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на такие части, где синус будет обратимым (строго монотонным), воспользуемся аддитивностью интеграла и выполним замену в интегралах по каждому из участков монотонности синуса. Ясно, что в качестве точек, разбивающих $[0, 2\pi]$ на участки монотонности синуса, можно выбрать $\pi/2$ и $3\pi/2$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} f(x) \cos x \, dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \cos x \, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x) \cos x \, dx.$$

Рассмотрим каждый интеграл по отдельности. На $[0, \pi/2]$ равенство $\sin x = t$ равносильно такому: $x = \arcsin t$, $0 \leq t \leq 1$. Если x меняется от $\pi/2$ до $3\pi/2$, то равенство $\sin x = t$ равносильно равенству $x = \pi - \arcsin t$, где t меняется от 1 до -1 . Наконец, если $x \in [3\pi/2, 2\pi]$, то равенство $\sin x = t$ равносильно такому: $x = 2\pi + \arcsin t$, где t меняется от -1 до 0. Учитывая, что $\cos x \, dx = d \sin x$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx &= \int_0^1 f(\arcsin t) \, dt \\ &\quad + \int_1^{-1} f(\pi - \arcsin t) \, dt + \int_{-1}^0 f(2\pi + \arcsin t) \, dt. \end{aligned}$$

Вопросы, относящиеся к теоремам о среднем, можно сопровождать какими-то наблюдениями, связанными, например, с источником малости интеграла — либо за счет малости функции, либо за счет меры промежутка интегрирования, и т. п. Такие наблюдения общеизвестны, достаточно прозрачны, и на них останавливаться здесь, естественно, не будем.

Говоря о приложениях (физических, геометрических), можно отметить, что они сводятся к нахождению соответствующих интегралов.

§ 3.5. Несобственный интеграл

Понятие несобственного интеграла появляется в тех ситуациях, когда есть потребность распространить предоставляемые интегралом возможности на более широкий класс объектов. Обычно это понятие базируется на определении интеграла по Риману, при иных подходах оно также появляется, но в несколько иных видах. Например, если определенный интеграл задается сразу как приращение первообразной на концах промежутка, то несобственное интегрирование представляет собой возможность предельного перехода в первообразной на конце промежутка. Кстати, при таком подходе труднее воспринимается существо несобственного интеграла. Обсудим особенности изложения этой темы в ситуации, когда несобственный интеграл строится на базе римановского.

В первую очередь необходимо хорошее понимание и усвоение ситуаций, в которых говорят о несобственном интеграле, а именно либо неограниченность функции, либо неограниченность промежутка. Сообщив определение несобственного интеграла в той ситуации, когда есть одна особая точка, совпадающая с концом промежутка, естественно акцентировать внимание на задачах, возникающих в связи с предельным переходом, а именно на существовании предела первообразной в особой точке. Поскольку у нас к этому моменту уже изучен предел функции в достаточной степени подробности, можно отметить, что в принципе можно было бы попытаться применить все имеющиеся средства. Однако в таком случае для анализа существования предела первообразной пришлось бы каждый раз сначала находить первообразную, что не всегда реально. Тем самым появляется новая постановка задачи: есть информация об одном объекте, т. е. о подынтегральной функции, и требуется получить результат о другом объекте, а именно о первообразной. Стало быть, для исследования сходимости несобственного интеграла необходимы соответствующие средства, и в качестве таковых используются признаки сходимости. В результате такого замечания появление и использование признаков становится естественным и мотивированным.

Как известно, признаки разбиваются на две группы: относящиеся к исследованию интегралов от знакопостоянных и от знакопеременных функций. Они основаны на разных принципах и применяются в разных ситуациях. Особо надо подчеркивать то обстоятельство, что предназначенные для изучения абсолютной сходимости признаки основаны, по существу, на скорости убывания функции (можно, но не обязательно

акцентировать внимание на том, что сходимость интеграла может быть и без сходимости к нулю подынтегральной функции, чаще всего она к нулю сходится).

Также надо подчеркнуть, что без наличия набора функций, сходимость (или расходимость) несобственных интегралов от которых нам известна, невозможно использовать признаки сравнения — не с чем будет сравнивать. После выделения такой шкалы при исследовании интеграла от конкретной положительной функции, например, на бесконечности, естественно обратиться к выделению главной части подынтегральной функции, и если она имеет вид $\frac{C}{x^p}$, то сходимость исходного интеграла определяется в зависимости от значения p .

В части технологии можно организовать анализ сходимости например с использованием следующего набора вопросов и рекомендаций.

1. Определяем, есть ли особые точки у подынтегральной функции, и если есть, то сводим изучение сходимости к ситуации одной особой точки, расположенной в конце промежутка интегрирования.

2. Выясняем, сохраняет ли подынтегральная функция свой знак в некоторой окрестности особой точки.

3. Если подынтегральная функция положительна (отрицательна) вблизи особой точки, то будем использовать признаки сравнения, если меняет знак в любой окрестности особой точки, то — признаки Абеля или Дирихле.

4. Для положительной вблизи особой точки подынтегральной функции изучаем ее асимптотику, а именно, например, вблизи точки $+\infty$ стараемся выделить у функции ее главный член вида $\frac{C}{x^\alpha}$ и делать заключение о сходимости на основе значения α . Можно попытаться ограничить функцию сверху или снизу в зависимости от цели и использовать признак сравнения, однако если в подынтегральной функции есть параметр, то нам не удастся сразу, только на основе сравнения, гарантировать сходимость или расходимость интеграла, потребуется дополнительно доказывать его расходимость или соответственно сходимость. Выделение главного члена позволяет сразу выяснить все значения параметра, при которых интеграл сходится.

5. Для знакопеременной вблизи особой точки функции надо прежде всего посмотреть, будет ли интеграл сходиться абсолютно. Если он абсолютно не сходится, то надо использовать признаки Дирихле или Абеля.

Применение одного из этих признаков начинается с представления подынтегральной функции в виде произведения двух функций, причем такого, что одна из функций монотонна (вблизи особой точки), после чего о монотонной части надо установить либо сходимость ее к нулю и пойти на дальнейшую проверку условий признака Дирихле, либо ограниченность и тогда нацелиться на признак Абеля.

Важно учитывать, что признаки Дирихле и Абеля, хоть и не предусматривают ограничений на знак функции вблизи особой точки, обычно недостаточно эффективны при исследовании интегралов от положительных функций. Для знакопеременных функций наиболее эффективно применение признаков к таким произведениям $\varphi(x)g(x)$ (на промежутке $[a, +\infty)$), где функция g имеет «ощутимые» промежутки сохранения знака. Если же длины таких промежутков стремятся к нулю, полезно заменой переменной интегрирования прийти к указанной ситуации.

Наконец, обратим внимание на то, что признаки Дирихле и Абеля дают только достаточные условия сходимости (в то время как некоторые варианты признака сравнения гарантируют равносильность сходимости интегралов).

В качестве примера приведем рассуждения, которые можно использовать при изучении сходимости интеграла.

ПРИМЕР 1. Изучим сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

Здесь две особые точки: 1 и $+\infty$. Фиксируем произвольно $a > 1$. Сначала рассмотрим интеграл $\int_1^a \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow 1} x^p = 1$, а $\ln x \sim x - 1$ при $x \rightarrow 1$, имеем

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(x-1)^q}$$

при $x \rightarrow 1$, значит, сходимость интеграла $\int_1^a \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ равносильна сходимости интеграла $\int_1^a \frac{dx}{(x-1)^q}$, а он сходится при $q < 1$.

Обратимся к интегралу $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Соображения при исследовании

его сходимости таковы. Поскольку на бесконечности логарифм растет медленнее степенной функции, основную роль в сходимости будет играть поведение функции $1/x^p$, так что ожидается сходимость при $p > 1$ независимо от q . Если же $p = 1$, то сходимость будет определяться значением q , а при $p < 1$, скорее всего, будет расходимость снова при любом q .

Проведем подробное обоснование. Пусть $p > 1$. Возьмем какое-либо $\alpha \in (1, p)$ и покажем, что при достаточно далеких x выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^\alpha}.$$

Действительно, последнее неравенство равносильно такому:

$$\frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} < 1,$$

в котором $p - \alpha > 0$. Но, как известно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\gamma} = 0$$

при любом β и любом $\gamma > 0$. В частности,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} = 0,$$

поэтому найдется такое $\Delta > 0$, что

$$\frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} < 1$$

для всех $x > \Delta$. Итак, получили при далеких x оценку

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^\alpha}$$

с некоторым $\alpha > 1$. Поскольку интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, интеграл

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ также сходится (при любом q).

Пусть $p = 1$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \int_a^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^q x} = \int_{\ln a}^{+\infty} \frac{dy}{y^q}.$$

Стало быть, интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x}$ сходится при $q > 1$ и расходится при $q \leq 1$.

Пусть теперь $p < 1$. Возьмем какое-либо $\beta \in (p, 1)$ и докажем, что при далеких x будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^\beta} < \frac{1}{x^p \ln^q x}$$

Действительно, последнее неравенство равносильно такому: $\frac{\ln^{-q} x}{x^{\beta-p}} < 1$, которое выполняется для далеких x при $\beta - p > 0$, или $\beta > p$. Следовательно, если $p < 1$, то, взяв β так, что $p < \beta < 1$, можно ограничить снизу подынтегральную функцию $\frac{1}{x^p \ln^q x}$ функцией $\frac{1}{x^\beta}$, интеграл от которой на бесконечности расходится, тем самым и интеграл от исходной функции также расходится.

Соберем полученные результаты. Исследуемый интеграл сходится в особой точке 1 при $q < 1$ и любом p , а на бесконечности сходится при $p > 1$ и любом q , а также при $p = 1$ и $q > 1$, и расходится при $p < 1$ и любом q . Окончательно, весь интеграл сходится, если $p > 1$, $q < 1$, и расходится, если $p \leq 1$.

ПРИМЕР 2. Исследуем абсолютную и условную сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} x^p \sin x^q dx$, рассматривая $p \in \mathbb{R}$, $q > 0$. Иными словами, ответим на вопрос: при каких значениях p, q он сходится абсолютно, а при каких условно.

Можно было начать с изучения абсолютной сходимости, но здесь оказывается удобнее сначала исследовать обычную сходимость ввиду специфики средства установления отсутствия абсолютной сходимости. Поэтому начнем со сходимости самого интеграла, абсолютную сходимость изучим позже. Поскольку нет знакоопределенности подынтегральной функции, будем ориентироваться на признаки Абеля и Дирихле. Монотонная составляющая в подынтегральной функции очевидна — это функция

x^p . Присмотревшись к множителю $\sin x^q$, можем заметить, что в случае $q \neq 1$ длины участков знакопостоянства этой функции при удалении x изменяются, и чтобы исключить негативное влияние этого эффекта, сделаем замену $x^q = y$, т. е. совершим подстановку $x = y^{1/q}$. Тогда сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла

$\int_1^{+\infty} y^{(p+1)/q-1} \sin y \, dy$. Обозначим $(p+1)/q - 1 = \alpha$ и изучим интеграл $\int_1^{+\infty} y^\alpha \sin y \, dy$. Функция y^α монотонна, а $\sin y$ имеет ограниченную первообразную $-\cos y$, так что последний интеграл сходится, если $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^\alpha = 0$,

что будет при $\alpha < 0$. Итак, при $\frac{p+1}{q} - 1 < 0$, т. е. при $p+1 < q$, интеграл сходится.

Поскольку примененный здесь признак Дирихле не гарантирует расходимости при значениях $\alpha \geq 0$, требуется отдельно показать, что при таких α интеграл расходится. Для этого воспользуемся критерием Коши, согласно которому расходимость нашего интеграла на бесконечности равносильна тому, что

$$(\exists \varepsilon > 0 \forall b \in [1, +\infty) \exists b_1 \in [b, +\infty) \exists b_2 \in [b, +\infty)) \left| \int_{b_1}^{b_2} y^\alpha \sin y \, dy \right| > \varepsilon.$$

Значит, надо суметь при любой удаленности находить такие промежутки $[b_1, b_2]$, интеграл на которых ощутимо большой. Ясно, что такими участками могут оказаться промежутки, на которых синус положителен, т. е. в качестве b_1, b_2 будем брать точки вида $2n\pi, (2n+1)\pi$. Ввиду положительности α получим

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} y^\alpha \sin y \, dy \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin y \, dy = 2,$$

и в качестве требуемого $\varepsilon > 0$ можно взять любое меньшее двух число, например $\varepsilon = 1$. Таким образом, взяв любое $b > 1$, подберем n так, что

$2n\pi > b$, и, взяв $b_1 = 2n\pi, b_2 = (2n+1)\pi$, получим $\int_{b_1}^{b_2} y^\alpha \sin y \, dy > 1$,

следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} y^\alpha \sin y \, dy$ при $\alpha \geq 0$ расходится. Итак, исходный интеграл сходится при $p+1 < q$, при остальных значениях p, q он расходится.

Исследуем абсолютную сходимость, т. е. изучим сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} y^\alpha |\sin y| \, dy$. Поскольку $y^\alpha \geq y^\alpha |\sin y|$, наш интеграл сойдется при $\alpha < -1$, т. е. исходный интеграл сойдется абсолютно при $\frac{p+1}{q} - 1 < -1$, или $\frac{p+1}{q} < 0$. Пусть теперь $-1 \leq \alpha < 0$ (при $\alpha \geq 0$, как установлено выше, интеграл расходится, тем более он абсолютно расходится). Ориентируясь на применение признака сравнения, желательно ограничить снизу функцию $y^\alpha |\sin y|$ функцией вида y^α . Однако этого сделать не удастся (нули синуса мешают), значит, придется для доказательства расходимости придумывать что-то отличное от непосредственного использования признака сравнения. Заметим, что имеет место очевидное неравенство $|\sin y| \geq \sin^2 y$. Воспользовавшись им, получим оценку снизу:

$$y^\alpha |\sin y| \geq y^\alpha \sin^2 y = y^\alpha \frac{1 - \cos 2y}{2} = \frac{1}{2}(y^\alpha - y^\alpha \cos 2y),$$

и займемся изучением сходимости интегралов от каждой из функции в правой части последнего равенства. При рассматриваемых $\alpha \in [-1, 0)$ интеграл $\int_1^{+\infty} y^\alpha \, dy$ расходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} y^\alpha \cos 2y \, dy$ сходится согласно признаку Дирихле. В итоге интеграл

$$\int_1^{+\infty} (y^\alpha - y^\alpha \cos 2y) \, dy$$

расходится как разность расходящегося и сходящегося интегралов. Тем самым расходится и интеграл $\int_1^{+\infty} y^\alpha |\sin y| \, dy$ ввиду отмеченной выше оценки и признака сравнения.

Подведем итог всем нашим исследованиям: интеграл $\int_1^{+\infty} x^p \sin x^q dx$ сходится абсолютно при $\frac{p+1}{q} < 0$, условно при $0 \leq \frac{p+1}{q} \leq 1$ и расходится при $\frac{p+1}{q} > 1$.

§ 3.6. Числовые ряды

Понятие числового ряда, с одной стороны, не предполагает никакой информации, кроме относящейся к пределу последовательности, и по этой причине изучение числовых рядов в последнее время помещается сразу после темы предела последовательности. С другой стороны, это понятие можно отнести к довольно непростым в плане его восприятия и способности к исследованию сходимости, и по этой причине раньше изучение числовых рядов всегда располагалось после несобственных интегралов.

Обычно, говоря о ряде, понимают под этим термином символ типа суммы или развернутую запись суммы бесконечного набора слагаемых. Однако можно подойти к этому понятию, например, так. Для числовой последовательности можно ставить задачу нахождения ее предела, т. е. рассматривать саму последовательность и изучать ее свойства. А можно рассматривать ее же с иной точки зрения, а именно с точки зрения изучения последовательности, составленной из сумм первых ее членов. При рассмотрении последовательности с такой точки зрения будем называть ее *рядом*, подчеркивая точку зрения, с которой эта последовательность рассматривается.

Как и для несобственного интеграла, здесь можно обратить внимание на то обстоятельство, что для изучения сходимости ряда желательно оперировать элементами самой последовательности, т. е. общим членом ряда. Тем самым появляется потребность в утверждениях, в которых условия налагаются на элементы последовательности, а результат относится к совсем другой последовательности, а именно к последовательности частичных сумм.

Полезна геометрическая интерпретация ряда, использующая график последовательности, из которой ряд составляется. При такой интерпре-

тации легко понимается суть базового признака абсолютной сходимости, а именно признака сравнения, а также просматривается причина, по которой ряд может сходиться, но не абсолютно: площадь под ступеньками, отвечающими положительным членам, компенсируется площадью, соответствующей отрицательными. Геометрическая интерпретация показывает естественность необходимого признака сходимости, а также подчеркивает различие между сходимостью несобственного интеграла и ряда: в несобственном интеграле сходимость на бесконечности может реализоваться за счет малости суммарных длин промежутков, где функция принимает ощутимые значения, для рядов такой эффект невозможен.

Важно подчеркивать эффективность разных признаков сходимости, обращая внимание на ожидаемый результат, основанный на том, сравнение со сколь быстро сходящимися рядами лежит в основе используемого признака. Надо подчеркивать, что признаки Даламбера и Коши основаны на сравнении с быстро сходящимся рядом, а именно геометрической прогрессией, поэтому они чувствительны к исследованию сходимости быстро сходящихся рядов. Следующая за этой группа признаков основана на сопоставлении со сравнительно медленно сходящимися рядами, поэтому охватывает значительно больший набор рядов, и т. д. Важно также обратить внимание на то, что почти в каждом из признаков есть зона нечувствительности, и если ряд содержит параметр, то признак (кроме признака Гаусса) может не дать полной информации о значениях параметра, при которых есть сходимость. Изучение асимптотики общего члена в случае ее нахождения всегда дает полную информацию о сходимости ряда, поэтому выделение главной части общего члена предпочтительнее применения иных средств.

В качестве технологии процесса исследования сходимости ряда можно предложить следующее.

1. Смотрим, сходится ли к нулю общий член данного ряда, и если нет, то согласно необходимому признаку сходимости ряд расходится, если да, то продолжаем исследование ряда. Эту операцию разумно доводить до конца в тех случаях, когда не представляет особого труда исследовать общий член ряда на предмет сходимости к нулю. Если это затруднительно, то сразу переходим к следующему шагу.

2. Констатируем, знакопостоянен ли общий член ряда, и если да, то обращаемся к признакам сравнения или основанным на них признакам Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса или изучаем асимптотику общего члена

ряда с целью возможного сравнения с общим членом сходящегося ряда. Сначала можно попробовать применить признаки сходимости, основанные на сравнении с быстро сходящимся рядом, а именно геометрической прогрессией, это признаки Даламбера и Коши. Если они не дают информации о сходимости ряда, далее идет выбор: если общий член ряда не содержит параметра, то можно начать с признака Раабе, если содержит, то обращаемся к признаку Гаусса, но в любом случае имеем в виду выделение главной части общего члена вида $\frac{C}{n^\alpha}$ и заключение о сходимости ряда в зависимости от значения α .

3. Если общий член ряда меняет знак, то сначала смотрим на скорость сходимости к нулю общего члена, и если она достаточно высокая для получения абсолютной сходимости, то доказываем абсолютную сходимость. Если абсолютная сходимость отсутствует либо ее исследование затруднительно, то изучаем возможность применения к данному ряду признаков Дирихле или Абеля. Для этого надо представить общий член ряда в виде произведения двух последовательностей. Далее изучаем, какая из этих последовательностей монотонна. Затем смотрим, сходится ли она к нулю, и если да, то будем проверять условия признака Дирихле, и тогда надо убедиться в ограниченности частичных сумм ряда, составленного из второго сомножителя. Если же монотонная последовательность к нулю не сходится, то проверяем выполнение условий признака Абеля, а именно изучаем, будет ли эта монотонная последовательность ограничена, и если да, то доказываем сходимость ряда, составленного из членов второй последовательности. В случае положительного исхода проверок соответствующий признак дает сходимость ряда.

Если признаки не показывают сходимости, возможно, надо доказывать расходимость ряда, и для этой цели признаки Абеля или Дирихле бесполезны — они содержат только достаточное условие сходимости. Для доказательства расходимости в таком случае нередко используют критерий Коши или какие-то специальные соображения.

Полагая, что читателю известны формулировки всех упомянутых выше признаков, рассмотрим на примерах, как можно выстраивать процесс решения, используя указанные выше рекомендации.

ПРИМЕР 1. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}},$$

воспользовавшись разными признаками и проследив, как эти признаки применяются и срабатывают.

Поскольку здесь неочевидно, сходится ли к нулю общий член ряда, можно отказаться от применения необходимого признака и перейти к применению других признаков.

Обратимся к признаку Даламбера. Имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}n^{n+p}}{(n+1)^{n+1+p}n!e^n} = \frac{en^{n+p}}{(n+1)^{n+p}} = \frac{e}{(1+1/n)^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

так что признак Даламбера информации о сходимости не дает.

Прибегнем к признаку Раабе. Составим

$$\begin{aligned} p_n &= n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} - 1 \right) \\ &= n \left(e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1 \right) \end{aligned}$$

полагаем $x = 1/n$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x} (e^{-1}(1+x)^{1/x}(1+x)^p - 1) = \frac{1}{x} (e^{-1}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}(1+x)^p - 1) \\ &= \frac{1}{x} (e^{-1}e^{\frac{x-x^2/2+o(x^2)}{x}}(1+px+o(x)) - 1) \\ &= \frac{1}{x} (e^{-\frac{x}{2}+o(x)}(1+px+o(x)) - 1) \\ &= \frac{1}{x} \left(\left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) (1+px+o(x)) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(1 + \left(p - \frac{1}{2} \right) x + o(x) - 1 \right) = p - \frac{1}{2} + o(1), \end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p - \frac{1}{2},$$

так что исходный ряд сходится при $p - \frac{1}{2} > 1$, т. е. при $p > \frac{3}{2}$, и расходится при $p < \frac{3}{2}$. Для значения $p = \frac{3}{2}$ признак Раабе информации о сходимости не дает.

Исследуем теперь сходимость этого ряда, используя асимптотику его общего члена. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Имеем

$$\frac{n!e^n}{n^{n+p}} = \frac{(2\pi)^{1/2} n^{1/2} n^n e^n}{e^n n^{n+p}} e^{-\frac{\theta}{12n}} = \sqrt{2\pi} \frac{e^{-\frac{\theta}{12n}}}{n^{p-1/2}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-1/2}},$$

так что исходный ряд, как и ряд с общим членом $\frac{1}{n^{p-1/2}}$, сходится при $p > \frac{3}{2}$ и расходится при $p \leq \frac{3}{2}$.

Мы получили исчерпывающую информацию о тех p , при которых ряд сходится, правда, при этом пришлось воспользоваться асимптотической формулой для $n!$.

Попробуем применить к исследованию сходимости признак Гаусса. Для этого составим отношение $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ и при анализе его асимптотики воспользуемся промежуточными выкладками, проделанными при использовании признака Раабе. Делая, как и выше, замену $x = \frac{1}{n}$, проведем вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} \\ &= e^{-1} e^{x-x^2/2+x^3/3+o(x^3)} \left(1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \left(1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= 1 + \left(p - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}, \end{aligned}$$

где в коэффициент γ_n вошло всё, что собралось при дроби $\frac{1}{n^2}$ в процессе приведения подобных членов. По признаку Гаусса ряд будет сходиться, если $p - \frac{1}{2} > 1$, и расходиться, если $p - \frac{1}{2} \leq 1$.

ПРИМЕР 2. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Заметим, что если $x = k\pi$, то $\sin x = 0$, и наш ряд нулевой, так что сходится, даже абсолютно. Будем рассматривать $x \neq k\pi$.

Если бы общий член ряда сходил к нулю достаточно быстро, можно было бы, воспользовавшись признаком сравнения, доказать абсолютную сходимость и тем самым сходимость данного ряда. Однако здесь общий член ряда сходится к нулю довольно медленно, так что признак сравнения не сработает. Поэтому обратимся к признакам, приспособленным для исследования сходимости знакопеременных рядов.

Сначала выделим монотонную составляющую. Это, конечно, последовательность $\frac{1}{n}$. Отметим, что она сходится к нулю, тем самым ориентируемся на применение признака Дирихле. Согласно этому признаку остается доказать ограниченность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx$. Найдем сумму S_n . Умножив равенство

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

на $2 \sin \frac{x}{2}$ и воспользовавшись формулой произведения синусов, получим

$$\begin{aligned} 2S_n \sin \frac{x}{2} &= 2 \left(\sin x \cdot \sin \frac{x}{2} + \sin 2x \cdot \sin \frac{x}{2} + \cdots + \sin nx \cdot \sin \frac{x}{2} \right) \\ &= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \cdots \\ &\quad \cdots + \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \\ &= \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x = 2 \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Значит, $|S_n| \leq \frac{1}{\sin x/2}$. Итак, суммы S_n ограничены, а следовательно, по

признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится при любом x .

Обратимся к изучению абсолютной сходимости, т. е. рассмотрим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}.$$

Ввиду медленной сходимости к нулю общего члена этого ряда ограничить его сверху общим членом сходящегося ряда не удастся. Поэтому попробуем обосновать гипотезу о его расходимости. Можно воспользоваться критерием Коши, однако проще применить искусственный прием. Ясно, что $|\sin nx| \geq \sin^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$, поэтому

$$\frac{|\sin nx|}{n} \geq \frac{1}{2n}(1 - \cos 2nx) = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ сходится (по признаку Дирихле). Тем самым ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n} \right)$ расходится как разность расходящегося и сходящегося рядов. Общий член исследуемого ряда оказался ограниченным снизу общим членом расходящегося ряда, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ расходится.

Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 4.1. Конечномерные арифметические пространства

Конечномерное арифметическое пространство, состоящее из всевозможных отображений множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в $\mathbb{R}$ и обозначаемое обычно через $\mathbb{R}^n$, сопровождает нас на всем протяжении изучения и использования математики, поэтому исключительно важно хорошее освоение основных задаваемых на нем структур. Для математического анализа кроме структуры векторного пространства важны его структуры как топологического и равномерного (метрического) пространства. Для задания этих структур поступают самыми разнообразными способами — отталкиваются от $\mathbb{R}$ и на этой основе характеризуют предел, непрерывность, дифференцируемость, или в основу кладут понятие абстрактного метрического пространства, или начинают с нормированности, иногда эти способы идут вперемежку. В любом случае надо иметь в виду, что здесь появляется много новых терминов, связанных с характеристикой множеств и их свойствами (внутренность, замыкание, открытые и замкнутые множества и т. д.), компактное изложение которых требует для их усвоения определенного времени.

Содержание упомянутых и других терминов можно описывать по-разному, и довольно безразлично, что кладется в основу, а что выступает как свойство. Однако полезно иметь в виду, что на первых порах эффективнее усваивается то, что будет неоднократно применяться. Поэтому, возможно, даже в ущерб общности и перспективам, предпочтительнее излагать основные понятия на базе чаще всего используемых характеристик. Вместе с тем если курс читается для будущих математиков, то в таком случае в основу желательно класть то, что характеризует данный термин в более общих топологических или равномерных пространствах.

Поскольку описание основных структур конечномерных пространств носит в основном теоретический характер, здесь мало задач, в которых

можно было бы выделить какие-то технологические моменты. В основном даются задачи, посвященные доказательствам свойств, не вошедших в основной курс, и предназначенные для усвоения слушателями набора вводимых понятий. Их решение чаще всего опирается на определения и связано с расшифровкой употребляемых терминов, т. е. с вопросами типа «что это означает?».

Вообще повышенное внимание к этому разделу требует достаточно много учебного времени, очень активного диалога между наставником и учащимся, запоминания большого количества новых терминов, поэтому подробно останавливаться на этой теме можно только при наличии достаточного объема отводимых на эту тему часов и достаточной способности слушателей к самостоятельной работе. Вместе с тем эта тема побуждает студентов к более интенсивной самостоятельной работе по изучению теоретического материала, и эта двойственность разрешается каждый раз индивидуально в зависимости от текущей обстановки.

§ 4.2. Дифференцирование функций многих переменных

Наличие нескольких переменных в аргументе функции обеспечивает качественно иную по сравнению с функцией одной переменной картину. Для функции одной переменной при изучении скорости ее изменения вблизи данной точки можно было сдвигаться лишь в одном направлении — вдоль координатной прямой. Для функции хотя бы двух переменных возможностей гораздо больше. Поэтому здесь вопрос дифференцируемости и вообще изучение характера изменения функции вблизи фиксированной точки решается несколько иначе, хотя, разумеется, с использованием наработок для функции одной переменной в качестве основы.

Когда говорят об изменении функции одной переменной, ее локально сопоставляют с линейным относительно приращений отображением. В случае функций нескольких переменных эта идея — приближения линейной функцией — сохраняется, и на этом пути появляется понятие дифференциала. Однако вряд ли следует именно с этого начинать, ибо дифференциал — объект не самый простой для усвоения, тем более что нередко не он используется в решении задач.

Разговор об изучении локального изменения функции вблизи данной точки можно начать с того, что, расположившись в этой точке, двигаться по прямому, проходящему через эту точку. При таком движении появляются функции уже одной переменной, а для них мы многое знаем. Более того, можно задавать разные скорости движения аргумента по выбранной прямой, и от этого очевидно зависит скорость изменения функции. Получается зримый образ производной по вектору. Однако и это, возможно, не первичный для изучения материал. Можно ограничиться движением лишь вдоль координатных осей и единичным вектором для задания скорости изменения аргумента. В этом случае появляется совсем понятный объект, его желательно в качестве основы и зафиксировать. Так появляются частные производные.

Нахождение частных производных после того, как отработано нахождение производных функций одной переменной, никаких трудностей не вызывает.

Из определения ясно, что частные производные отражают лишь изменение функции вдоль координатных прямых, поэтому не могут дать полной картины вида функции около данной точки, и можно обратиться к изучению функции во всей окрестности данной точки, а не только вдоль координатных прямых. Здесь можно вспомнить о приближении линейным отображением соответствующего качества и дать определение дифференциала как линейного оператора (функционала), локально приближающего функцию так, что разность между приращением функции и значениями дифференциала на приращениях аргумента имеет более высокий порядок малости по сравнению с удаленностью аргумента от данной точки. Само определение можно изложить в достаточно общей ситуации отображения между конечномерными пространствами, однако всю связанную с дифференциалом деятельность лучше на первых порах проводить лишь для функций, более того, ограничиваясь двумя или тремя переменными. Возможность задания линейного оператора через соответствующую ему матрицу (при заданном каноническом базисе) приводит к определению матрицы Якоби.

Сразу отмечается, что дифференцируемость функции, т. е. наличие у нее дифференциала, в данной точке влечет существование всех частных производных (и даже производных по всем направлениям). Однако обратное неверно, и это необходимо подкрепить известными примерами. Стало быть, возникает вопрос: при каких условиях наличие частных производных оказывается достаточным для дифференцируемости? Ответ на

этот вопрос дает известная теорема о достаточном условии дифференцируемости. Если условия этой теоремы не выполнены, остается вопрос исследования дифференцируемости функции в данной точке. Он почему-то вызывает трудности, возможно, по той причине, что ответ на него включает в себя несколько (немного) логических ходов. Остановимся на нем чуть подробнее, выделив отдельные составляющие процесса исследования дифференцируемости функции в точке.

Ограничимся случаем отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, т. е. случаем функции $f(x, y)$ двух переменных. В этом случае соответствующая дифференциалу матрица представляет собой двумерный вектор, составленный из частных производных. Таким образом, условие, определяющее дифференцируемость функции $f(x, y)$, выглядит так: дифференцируемость f в точке (x, y) означает существование такого вектора $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, что

$$f(x + k, y + l) = f(x, y) + ak + bl + \alpha(k, l) \cdot \sqrt{k^2 + l^2}, \quad (2.1)$$

где $\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ l \rightarrow 0}} \alpha(k, l) = 0$. В этом соотношении использована евклидова норма,

но ее можно заменить любой другой нормой ввиду эквивалентности всех норм в конечномерном арифметическом пространстве.

Начинать исследование дифференцируемости в данной точке надо с проверки выполнения в некоторой ее окрестности условий теоремы о достаточном условии дифференцируемости. Если есть все частные производные не только в данной точке, но и в точках некоторой ее окрестности, выполнение условий теоремы гарантирует дифференцируемость. Если же что-то нарушено, для получения результата остается определение

Поскольку для дифференцируемости необходимо существование частных производных, отсутствие в данной точке какой-либо из частных производных сразу приводит к недифференцируемости функции в такой точке. Если же частные производные по обоим переменным есть, то никакие другие числа, кроме этих частных производных, не подойдут на роль компонент вектора (a, b) для анализа равенства (2.1), т. е. с необходимостью $a = f'_x(x, y)$, $b = f'_y(x, y)$. Остается составить равенство типа (2.1), выразить в нем

$$\alpha(k, l) = \frac{f(x + k, y + l) - f(x, y) - f'_x(x, y)k - f'_y(x, y)l}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

и установить, сходится ли $\alpha(k, l)$ к нулю при $k \rightarrow 0$, $l \rightarrow 0$. Если да, то f дифференцируема в точке (x, y) , если нет, то недифференцируема.

Проще достигается отрицательный результат, т. е. отсутствие дифференцируемости, ибо для этого достаточно убедиться в отличии от нуля или даже отсутствии соответствующего предела, а это получается рассмотрением процесса вдоль каких-то кривых, проходящих через данную точку. Позитивный результат связан с доказательством наличия предела, что для функции двух переменных бывает неэлементарно.

Покажем, как работают указанные соображения на простеньком примере.

ПРИМЕР. Исследуем на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

В любой окрестности точки $(0, 0)$ частные производные этой функции есть не во всех точках, а именно

$$f'_x = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}, \quad x \neq 0, \quad f'_y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}, \quad y \neq 0.$$

Стало быть, достаточным условием дифференцируемости воспользоваться не удастся. Обратимся к определению. Имеем

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

аналогично $f'_y(0, 0) = 0$. Дифференцируемость f в $(0, 0)$ равносильна выполнению равенства

$$f(k, l) = f'_x(0, 0)k + f'_y(0, 0)l + \alpha(k, l)\sqrt{k^2 + l^2} = \alpha(k, l)\sqrt{k^2 + l^2},$$

где $\lim_{(k, l) \rightarrow (0, 0)} \alpha(k, l) = 0$, т. е. в нашем случае равенства

$$\sqrt[3]{kl} = \alpha(k, l)\sqrt{k^2 + l^2}.$$

Остается выяснить, будет ли

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ l \rightarrow 0}} \alpha(k, l) = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ l \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{kl}}{\sqrt{k^2 + l^2}} = 0.$$

Рассмотрев функцию $\frac{\sqrt[3]{kl}}{\sqrt{k^2 + l^2}}$, например, вдоль направления $k = l$, находим, что предел вдоль этого направления отличен от нуля, стало быть, $\sqrt[3]{xy}$ недифференцируема в точке $(0, 0)$.

Одним из технически важных навыков является нахождение производной композиции, так называемое цепное правило. Соответствующие формулы имеют довольно громоздкий вид, поэтому для отработки этого правила приходится использовать какие-то словосочетания, руководствуясь которыми можно научиться безошибочно находить производные сложной функции. Изложим возможное сопровождение в ситуации композиции $f \circ g$, где $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ действует из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, а $f(u, v)$ — из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$. Кстати, в последнем контексте буквами u, v обозначены разные объекты: с одной стороны, это символы переменных (для функции f), а с другой — обозначения функций (для g). Так поступают довольно часто и в конце концов привыкают понимать, в каком месте о каком статусе буквы идет речь.

Выпишем подробно формулы для нахождения частных производных в этом случае: для функции $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ имеем

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Процесс нахождения производной, выраженный в последнем равенстве, можно сопровождать, например, такой речевкой: «производная h по x равна производной f по первому (аргументу) на первый по x плюс производная по второму на второй по x ». Здесь очевидны умолчания, использованные для краткости и динамичности словосочетания.

При нахождении производных первого порядка от композиции функций, если не требуется находить производные второго порядка, чаще всего не выписывают точки, в которых эти производные находятся (в написанном выше равенстве все аргументы прописаны). Однако если требуется найти производные второго или более высоких порядков, то лучше писать точки, в которых берутся соответствующие производные, для того чтобы учитывать имеющиеся зависимости и не ошибаться, забывая учесть те или иные переменные. Конечно, при нахождении производных последнего из требуемых порядков аргументы можно не писать.

Кстати, как это ни странно, бывают проблемы с выяснением, от скольких переменных зависит та или иная функция. Например, при задании функции типа $f(x+y, x+z)$ от скольких переменных зависит функция f ? Далеко не всегда сразу появляется верный ответ. В таком случае можно число переменных определять по числу запятых, которыми они разделяются: нет запятых — одна переменная, одна запятая — две переменные, и т. д.

Дифференциал был определен как линейный оператор. Однако кроме как представления в виде матрицы Якоби никаких иных средств его выражения предъявлено не было. Теперь можно заняться выработкой удобной формы представления дифференциала для отображений, действующих в $\mathbb{R}$, т. е. для функций многих переменных. Отмеченные ниже соображения можно изложить в случае произвольной размерности, а можно ограничиться двумерной или трехмерной ситуацией. Поскольку аналогичные изложенным ниже соображения были использованы для функции одной переменной, здесь этот материал особых трудностей не вызывает.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in D(f)$ функция. Возьмем вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$, выражающий приращение аргумента в точке x , и запишем действие дифференциала на вектор v :

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i. \quad (2.2)$$

Пусть $\pi_i : x \rightarrow x_i$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, — проектор на i -ю координату. Тогда дифференциал $d\pi_i(x)(v)$, который, естественно, обозначают через $dx_i(v)$, очевидно, находится так: $dx_i(v) = v_i$. Заменяя в (2.2) компоненты v_i выражениями $dx_i(v)$, приходим к записи

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i(v), \quad (2.3)$$

или, опуская для краткости указание аргумента v , получаем такую (функциональную) форму выражения дифференциала:

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \quad (2.4)$$

которую обычно и используют для записи дифференциала. Если опустить еще и указание точки x , в которой рассматривается дифференциал, то получается совсем коротко:

$$df = \sum_{i=1}^n f'_{x_i} dx_i. \quad (2.5)$$

Тем самым для нахождения дифференциала достаточно найти частные производные и сделать запись вида (2.5).

Нередко символы dx_i трактуют не как функционалы, а как переменные, символизирующие «бесконечно малые приращения». Ничего особенного и тем более страшного в этом нет, а удобства в некоторых случаях очевидные.

От дифференциала можно перейти к производным по вектору и по направлению. Интуитивная поддержка отмечалась выше, она достаточно естественна, и остается только дать соответствующее определение производной по вектору и подчеркнуть, что если вектор единичный, то производную по нему называют производной по направлению (вектора).

Процедура нахождения производной по вектору дифференцируемой функции обычно особых трудностей не вызывает: достаточно найти градиент и взять скалярное произведение его на вектор, по которому берется производная.

Здесь полезно обратить внимание на то, что направление на плоскости или в пространстве может быть задано его направляющими косинусами, т. е. координаты единичного вектора суть косинусы углов между этим вектором и осями координат.

Здесь же полезно отметить направление, по которому производная принимает наибольшее значение среди производных по всем направлениям, т. е. направление градиента. Кроме того, в дальнейшем потребуются информация о том, что градиент ортогонален линии или соответственно поверхности уровня, проходящей через данную точку.

После разбирательства с дифференциалом первого порядка плавно переходим к дифференциалам более высоких порядков. Как бы ни определялись дифференциалы высоких порядков, используются они в виде однородных полиномов соответствующего порядка. В качестве их переменных можно считать «бесконечно малые» символы dx_i (в трехмерном случае dx, dy, dz).

Наличие дифференциалов высоких порядков позволяет обратиться к формуле Тейлора для функции нескольких переменных. Идея ее получения весьма проста: надо фиксировать точку, взять переменную точку, параметризовать отрезок с началом в фиксированной и концом в переменной точках с помощью отрезка $[0, 1]$ и записать формулу Тейлора для соответствующей функции одной переменной на отрезке $[0, 1]$ с остатком в какой-либо глобальной форме (очень удобен остаток в форме Лагранжа или в интегральной). Получаемое выражение и есть формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Важно привести запись формул Тейлора для функций двух и трех переменных до второго и, возможно, третьего порядка. Это чаще всего используемая информация. При записи этих формул надо акцентировать внимание на группах слагаемых, относящихся к разным степеням переменных и тем самым к соответствующим дифференциалам. Приведем форму записи самой «рабочей» ситуации, а именно случай функции $f(x, y)$ двух переменных, разложение до третьего порядка по степеням $x - x_0, y - y_0$:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + (f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)) \\ & + \frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) \\ & + \frac{1}{6}(f'''_{xxx}(x_0, y_0)(x - x_0)^3 + 3f'''_{xxy}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0) \\ & + 3f'''_{xyy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 + f'''_{yyy}(x_0, y_0)(y - y_0)^3) \\ & + o(\sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^3}), \quad x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0, \end{aligned}$$

где $o(\sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^3}) = \alpha(x, y) \cdot (\sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^3})$ с $\alpha(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$. Полезно выписать эту формулу или какой-то ее аналог в том случае, когда разложение ведется в начале координат.

Неплохо запоминается один из самых лаконичных видов записи формулы Тейлора с использованием дифференциалов, впрочем, предполагающий раскрытие содержания используемых символов, а именно значений дифференциалов на приращениях.

Для разложений конкретных функций вместе с предполагаемым формулой Тейлора взятием производных можно использовать известные разложения для функций одной переменной и банальные алгебраические манипуляции типа раскрытия скобок и т. п. Ввиду единственности полинома Тейлора получаемое разложение будет давать формулу Тейлора.

§ 4.3. Теоремы о неявном отображении и об обратном отображении

Тема о неявных и обратных отображениях относится к разряду нелегко воспринимаемых студентами, и здесь важно сформировать адекватное

восприятие теоретического материала и отработать механизмы его применения для решения несложных задач. Формулировку теоремы о неявном отображении непременно надо сопровождать геометрическими иллюстрациями для простейшего случая плоскости. Важно обратить внимание на локальность всех условий и получаемого результата.

Начать разговор о неявном отображении можно с изображения множества на плоскости и постановки вопроса: является ли оно графиком некоторой функции? Обычно рисуется какая-то кривая типа овала и обнаруживается, что графиком функции она не будет. Однако далее, представляя себе путешествие по этой кривой, нетрудно заметить, что можно судить о ее свойствах, характерных для гладких функций, таких как скорость, максимум и т. п. Легко понять, что движение по части кривой не затрагивает информации о тех ее частях, которые расположены вертикально относительно рассматриваемой, но довольно далеко. Тем самым появляется идея изучения данного множества вблизи некоторой его точки, т. е. идея локальности. Здесь можно отметить, что в различных случаях локально множество вполне может оказаться графиком некоторой функции, а значит, допускает изучение присущих ей свойств.

Продолжить разговор можно соображениями о том, что для изучения характеристик типа скорости желательно, чтобы рассматриваемое множество имело аналитическое задание. Так приходим к рассмотрению множества уровня $F(x, y) = C$ функции двух переменных, и в общем случае — двух групп переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$. При этом надо обратить внимание на согласование размерностей: размерность образа отображения F должна совпадать с размерностью того пространства, в которое должна действовать определяемая отображением F неявная функция. Это важное обстоятельство для уточнения ситуаций, встречающихся в формулировках задач.

Саму формулировку теоремы о неявном отображении можно предложить, например, в следующем виде.

Теорема (о неявном отображении). Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^{m+n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, и F — действующее в $\mathbb{R}^n$ отображение класса $C^1(G, \mathbb{R}^n)$, т. е. имеющее непрерывные частные производные первого порядка в точках из G . Пусть точка

$$(x_0, y_0) \in G, \quad x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0), \quad y_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0),$$

такова, что $F(x_0, y_0) = 0$. Предположим, что F невырожденное в точке

(x_0, y_0) , при этом якобиан $\det \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(x_0, y_0)$ отличен от нуля. Тогда существуют такие открытые окрестности U точки x_0 и V точки y_0 , что $U \times V \subset G$ и для любого $x \in U$ существует единственное $y \in V$, обладающее свойством $F(x, y) = 0$. Тем самым, сопоставляя каждому $x \in U$ соответствующее ему $y \in V$, получаем отображение $y = \varphi(x)$, о котором говорят, что оно вблизи точки (x_0, y_0) неявно задается отображением F . При этом $\varphi \in C^1(U, V)$, а если $F \in C^r(G, \mathbb{R}^n)$, то $\varphi \in C^r(U, V)$.

В технологии использования теоремы при решении задач надо обратить внимание на то, что в формулировке уже выделено разбиение всего набора аргументов на две группы и ясно, какая из них окажется аргументами, а какая значениями получаемой неявной функции. В задачах это происходит не всегда, и бывает так, что приходится самим, исходя из каких-то деталей формулировки, решать, что считается аргументами, а что — значениями неявного отображения. Этому помогает условие о том, что отображение должно действовать в те переменные, по которым предполагается отличие от нуля якобиана. Тогда теорема гарантирует локально заданное неявное отображение.

Второй момент связан с вычислением производных неявно заданной функции. Для этого надо обратить внимание на то, что неявно заданная посредством равенства $F(x, y) = 0$ функция φ характеризуется тождеством

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

вблизи соответствующих точек. Производные функции φ находятся в результате дифференцирования этого равенства по координатам точки x и выражения из получаемых равенств требуемых производных. При выражении производных отображения φ в знаменателе оказывается тот самый якобиан, отличие от нуля которого предусмотрено в условии теоремы.

Обычно в задачах определяющее неявную функцию уравнение вида $F(x, y) = 0$ задается в виде системы уравнений. Полезно отметить, что именно число уравнений показывает, в какую размерность действует отображение F и тем самым в какую размерность будет действовать неявно задаваемое отображение.

Вместе с теоремой о неявном отображении обычно изучается теорема об обратном отображении. Видимо, лучше их изучать именно в этом порядке: сначала о неявном, а затем об обратном, поскольку теорема о неявном отображении встречается в большем разнообразии формулиро-

вок и ситуаций, чем теорема об обратном. Сформулировать эту теорему можно, например, в следующем виде.

Теорема (об обратном отображении). Пусть f — гладкое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, x — внутренняя точка области определения $D(f)$. Тогда если f регулярно в x , т. е. $\det \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) \neq 0$, то существуют такие окрестности V точки x и W точки $f(x)$, что f — диффеоморфизм V на W , т. е. гладкое взаимно однозначное отображение множества V на W , обратное к которому гладкое.

Такая формулировка нередко используется в дальнейшем, однако можно отметить и формулировку, в которой теорема об обратном отображении выступает как следствие теоремы о неявном отображении, примененной к функции $F(x, y) = x - f(y)$ и ее нулевому множеству уровня $x - f(y) = 0$.

Здесь надо систематически обращать внимание на совпадение размерностей области определения и множества значений (в противном случае невозможно говорить о якобиане).

С технологической позиции для нахождения производных обратного отображения естественно записывать тождества, характеризующие взаимно обратные отображения, и их дифференцировать. В результате появляются все требуемые производные.

Более продвинутые теоремы из этой серии — о выпрямлении, о ранге и т. п., важные для изучения многообразий и др., носят выраженный теоретический характер и в рамках общего курса анализа обычно на практических занятиях не отрабатываются.

Покажем подготовку к вычислительной работе на простейшем примере.

ПРИМЕР. Найдем производную u' функции $u = u(x)$, определяемой системой равенств

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0.$$

В условии указано, что в итоге должна быть функция одной переменной x . Поскольку в первом равенстве кроме x присутствуют также переменные y и z , от них надо избавиться. Для этого можно отметить, что последние два равенства выражают обращение в нуль отображения F из $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, где $F(x, y, z) = (g(x, y, z), h(x, y, z))$. Среди аргументов этого отображения в качестве аргумента получаемой в итоге

функции должен остаться x , тем самым роли среди x, y, z распределяются так: x — независимая переменная, y, z — зависимые переменные. Согласно теореме о неявном отображении этими равенствами определяется отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ с некоторыми координатными функциями $y(x), z(x)$. Их производные находятся из системы

$$g(x, y(x), z(x)) = 0, \quad h(x, y(x), z(x)) = 0$$

в результате ее дифференцирования. Производная u' находится из равенства $u(x) = f(x, y(x), z(x))$, а именно $u' = f'_x + f'_y y' + f'_z z'$, где y', z' были найдены выше.

§ 4.4. Экстремум

С экстремумом студенты уже неоднократно встречались для случая функции одной переменной, поэтому его восприятие особых трудностей не вызывает. Как и раньше, внимание обращается на локальность, на строгость или нестрогость и на двухшаговость его исследования, а именно на первичное применение необходимых условий, вслед за которыми проверяются достаточные. Важно обратить внимание на то, что функция, изучаемая на предмет экстремума, должна быть задана на открытом множестве.

Разговор об экстремуме можно сопроводить иллюстрациями простейших поверхностей второго порядка, на которых хорошо просматриваются все возможные случаи: строгий экстремум, нестрогий экстремум, его отсутствие.

Формулировки утверждений о необходимом условии экстремума и о достаточном ничего особенного собой не представляют, рядовые естественные теоремы. В принципе, можно обратить внимание на то, что в теореме о необходимых условиях строгости экстремума не требуется, но и выполнение необходимых условий, как очевидно из седловой поверхности, экстремума не гарантирует. Однако выполнение достаточных условий гарантирует строгий экстремум или отсутствие экстремума.

Исследование знакоопределенности второго дифференциала как квадратичной формы обычно выполняется с помощью критерия Сильвестра, хотя для функций двух переменных можно применять средства, основанные на квадратичной функции.

Если второй дифференциал представляет собой полуопределенную квадратичную функцию, то для изучения наличия хотя бы нестрогого экстремума приходится прибегать к изучению индивидуальных особенностей функции, смотреть ее изменение вдоль каких-то направлений или даже вдоль каких-то проходящих через изучаемую точку кривых. Это может вылиться в довольно сложную задачу. Полезно использовать разложение по формуле Тейлора в окрестности стационарной точки.

Задачи поиска экстремума неявно заданной функции основаны на той же теоретической базе, что и задачи нахождения функции, заданной явно. Различие в основном в том, что здесь свои особенности выполнения необходимых условий, в них может оказывать влияние значение функции, и на это можно обратить определенное внимание.

Кроме экстремума функции, затрагивающего все значения вблизи изучаемой точки из области определения, можно исследовать экстремум для сужения функции на какие-то части области определения. К такой постановке легко прийти интуитивно, представив себе седловую поверхность, для которой экстремумов нет ни в одной точке. Однако если пойти по прямой или по охватывающей начало координат окружности в области определения и не обращать никакого внимания на точки, расположенные за пределами таких линий, то обнаружится, что мы иногда достигаем вершин, а иногда попадаем во впадины. Тем самым появляется постановка вопроса об изучении экстремума функции, заданной на многообразии. Можно отметить, что эта тема естественна после изучения соответствующего теоретического материала, т. е. в части, связанной с многообразиями. Если к этому относиться ответственно, то можно изучение условного экстремума перенести на более позднее время, если же принять точку зрения сугубо практическую, т. е. смотреть на этот раздел с позиций формирования навыков решения базовых задач, то можно, не акцентируя внимания на доказательной части, изложить требуемый теоретический материал, затем технологическую составляющую, и отработать исследование функций на условный экстремум сразу вслед за безусловным.

В теоретической части по поводу условного экстремума надо обратить внимание на определение, т. е. акцентировать внимание на том, что здесь аргументы берутся не из целой окрестности, а лишь из ее части, содержащейся в некотором заданном множестве. Далее надо обратить

внимание на способ задания множества, относительно которого изучается экстремум: это должно быть каким-либо образом заданное многообразие. Обычно в задачах рассматривается неявно заданное многообразие соответствующей размерности, т. е. множество, заданное равенством или системой равенств с условиями гладкости и невырожденности.

В части технологии поиска условного экстремума можно для функций двух переменных отметить возможность выражения из условия связи (оно в этом случае может быть лишь одно) одной переменной через другую, т. е. перехода к явному заданию многообразия, либо параметризации многообразия и перевода задачи в тему поиска экстремума функции одной переменной.

Однако чаще всего можно сразу обращаться к методу Лагранжа. Конечно, составление соответствующей системы уравнений труда не представляет, это достаточно ясно. Трудности возникают при решении системы уравнений, отвечающих необходимым условиям экстремума. Но после того, как найдены стационарные точки, надо обратиться к достаточному условию относительного экстремума, и здесь при недостаточном акцентировании появляются проблемы: не всегда цепочка условий теоремы прослеживается до конца в плане ее конкретного применения. Часто упускают из вида изучение квадратичной формы второго дифференциала на касательном пространстве к многообразию. Разумеется, помогает внятная формулировка теоремы о достаточных условиях, а также рассмотрение нескольких примеров ее применения.

Отдельной строкой прописываются задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений квалифицированной функции на замкнутом ограниченном множестве. Здесь дело упрощается тем, что, рассматривая отдельно внутренность и границу множества, можно ограничиться нахождением стационарных точек для соответствующего типа экстремума (внутри — для общего, на границе или ее частях — для условного).

Покажем на двух примерах, как можно организовывать процесс решения задачи нахождения условного экстремума, полагая, что теоремы о его необходимых и достаточных условиях известны.

ПРИМЕР 1. Изучим экстремум функции $z = xy$ при условии $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, т. е. на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Можно заметить, что в данной задаче проще всего достичь результат, используя параметризацию окружности, однако в образовательных целях

лучше прежде решить ее, применив метод Лагранжа, с тем, чтобы на простых ситуациях студенты запоминали всю последовательность необходимых для достижения результата действий. В более сложных примерах нередко большее внимание обращается на технические трудности решения систем уравнений.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Из системы

$$L'_x = y + 2\lambda x = 0, \quad L'_y = x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

находим $\lambda = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а также $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Изучим подробно задачу для одного из найденных значений λ и одной из точек, удовлетворяющих при выбранном λ необходимым условиям, другие случаи разбираются аналогично. Пусть $\lambda = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Найдем

$$L''_{xy} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1, \quad L''_{xx} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = L''_{yy} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\lambda = 1.$$

Таким образом,

$$d^2L \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (dx, dy) = dx^2 + 2dxdy + dy^2 = (dx + dy)^2.$$

Эта квадратичная форма полуопределенная на $\mathbb{R}^2$ — она принимает неотрицательные значения и обращается в нуль на прямой $dx = -dy$. Если бы мы получили форму, знакоопределенную на всем $\mathbb{R}^2$, то далее ничего делать не надо было — она была бы знакоопределенной и на требуемом подпространстве, откуда можно было сделать заключение о наличии условного экстремума. Но ситуация не такая, и нам придется заниматься сужением второго дифференциала на подпространство, ортогональное градиенту $\nabla h(x, y) = (2x, 2y)$ функции $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ в точке $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Такое подпространство представляет собой прямую

$$\{(dx, dy) : dx \cdot \sqrt{2} - dy \cdot \sqrt{2} = 0\}.$$

Выражая, например, dy через dx и подставляя полученное выражение в $d^2L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, получаем $d^2L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{dy=dx} = (2dx)^2$, и поскольку полученная квадратичная форма (уже от одной переменной) определена положительно, в точке $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ достигается минимум функции $z = xy$ относительно множества $x^2 + y^2 = 1$.

ПРИМЕР 2. Изучим экстремум функции $f(x, y, z) = xyz$ на множестве $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $h_2(x, y, z) = x + y + z = 0$. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z).$$

Найдем первые производные:

$$L'_x = yz + 2\lambda x + \mu, \quad L'_y = xz + 2\lambda y + \mu, \quad L'_z = xy + 2\lambda z + \mu.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{aligned} yz + 2\lambda x + \mu &= 0, & xz + 2\lambda y + \mu &= 0, & xy + 2\lambda z + \mu &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1, & x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Сложим первые три уравнения, результат умножим на 2, прибавим к нему четвертое уравнение и учтем пятое. В итоге получим $\mu = 1/6$. Теперь вычтем из первого уравнения второе, из второго третье и из третьего первое. Приходим к системе

$$\begin{aligned} (y - x)(z - 2\lambda) &= 0, & (z - y)(x - 2\lambda) &= 0, & (x - z)(y - 2\lambda) &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1, & x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Если в первом уравнении $y = x$, то во втором и третьем первые множители в нуль не обращаются, так что $x = y = 2\lambda$. Подставив эту информацию в последние два уравнения, найдем

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \mp \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Аналогично, полагая во втором уравнении $y = z$ и в третьем $x = z$, можно получить еще четыре корня.

Изучим подробно точку M с координатами

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

с соответствующими ей $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, $\mu = \frac{1}{6}$, оставив читателю изучение остальных пяти. Найдем

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = z, \quad L''_{xz} = y, \quad L''_{yz} = x.$$

Тогда

$$d^2L(M)(dx, dy, dz) = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\sqrt{\frac{2}{3}}dxdy + \frac{2}{\sqrt{6}}dydz + \frac{2}{\sqrt{6}}dzdx.$$

Образует подпространство, ортогональное градиентам функций связи

$$\nabla h_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

и

$$\begin{aligned} \nabla h_1(x, y, z) &= (2x, 2y, 2z)|_{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})} \\ &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{6}}(1, 1, -2). \end{aligned}$$

Это будет одномерное подпространство, состоящее из таких (dx, dy, dz) , что

$$dx + dy - 2dz = 0, \quad dx + dy + dz = 0.$$

Выразим dy, dz через dx : $dy = -dx$, $dz = 0$. Квадратичная форма $d^2L(M)(dx, dy, dz)$ на полученном подпространстве примет вид

$$d^2L(M)(dx, dy, dz) = \frac{2}{\sqrt{6}}dx^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}dx^2 = \sqrt{6}dx^2,$$

так что будет определено положительно. Таким образом, в точке M функция f на рассматриваемом множестве достигает относительного минимума $f(M) = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

§ 4.5. Криволинейные координаты.

Замена переменных в дифференциальных выражениях

Замена переменных в дифференциальных выражениях (или уравнениях) весьма важная тема, ибо эта операция постоянно встречается во всех вопросах, связанных с дифференциальными уравнениями. В учебной литературе довольно подробно описаны технические манипуляции, сопровождающие замену. Однако далеко не всегда можно встретить описание того, что лежит в основе замены. Вместе с тем понимание связанных с заменой базовых положений оказывает существенное положительное влияние на усвоение этой темы и формирует способность отчетливого разбора появляющихся в связи с заменой ситуаций.

Замену сопровождают сравнительно устойчивые словосочетания «перейдем к новым координатам», «перейдем к новым переменным» или «запишем в криволинейных координатах». По-видимому, полезно для начала составить разговор о том, как можно воспринимать эти фразы. Для этого можно использовать, например, следующий текст.

5.1. Криволинейные координаты. Математическое описание какого-либо процесса нередко сопровождается выделением набора его числовых характеристик и заданием некоторых числовых величин, характеризующих процесс. Иначе говоря, такое описание приводит к фиксации конечномерного арифметического пространства и заданию (числовой) функции на некоторой его открытой области. Пусть переменные этого пространства обозначены через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а функция — через $f(x)$. Как правило, в описании процесса большую роль играет не только сама функция, но и скорость ее изменения по тем или иным координатным направлениям, т. е. частные производные функции. Не всегда координатные направления в рамках выбранных переменных x обеспечивают сравнительно простые свойства скорости изменения функции, т. е. не всегда приводят к несложным соотношениям (как правило уравнениям) относительно частных производных, и можно попробовать посмотреть, как изменяется функция вдоль других линий.

Для формирования подходящего математического аппарата заметим, что положение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ точки x можно описать так. Фиксируем какую-то одну из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, а остальные оставим меняющимися. Множество таких точек образует некоторую координатную (гипер)плоскость в $\mathbb{R}^n$. Тогда наша точка x может быть охарактеризована как точка, находящаяся на пересечении всех этих плоскостей.

Предположим, что мы хотим использовать другой набор чисел $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ для описания положения той же самой точки. Естественно, что он должен быть связан с исходным набором $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ некоторой зависимостью. Иначе говоря, предположим, что на открытой области Ω изменения переменной u задано взаимно однозначное отображение Φ такое, что $x = \Phi(u)$. Расположение точки x на пересечении плоскостей $x_k = \text{const}$ можно в терминах u описать как расположение этой точки на пересечении поверхностей $\{x : x = \Phi(u), u_k = \text{const}\}$, т. е. на этот раз на пересечении множеств, не являющихся плоскими (с точки зрения переменных x). Исходя из такой возможности, набор чисел $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ называют *криволинейными координатами точки* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, говоря при этом о самих $x_1, x_2, \dots, x_n$ как о *исходных*, или *канонических координатах*.

5.2. Переход к новым переменным. Допустим, что рассматриваемый процесс был описан каким-то уравнением, в котором участвовали функция $y = f(x)$, а также ее производные до порядка k , т. е. уравнением $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$, где F — некоторая достаточно гладкая функция, а $y', y'', \dots, y^{(k)}$ — частные производные функции y по каким-то наборам переменных. Ставится задача перенести всю связанную с данной функцией информацию в новые переменные. Здесь можно рассмотреть две ситуации.

(1) Преобразование затрагивает только независимые переменные и не касается значений функции.

(2) Преобразование действует не только на аргументы, но и на значения функции.

В принципе, всё можно обработать, используя относящиеся ко второму случаю соображения, однако первый случай допускает более простую процедуру выполнения замены.

Приведем рекомендации по выполнению замены в каждом из случаев (1), (2).

(1) Образно ситуацию, в которой затрагиваются только аргументы, можно описывать, например, так. Представим себе, что для функции, например, двух переменных ее область рассмотрения выполнена из деформируемого материала (типа резины) и над каждой точкой этой области расположен жесткий стержень, олицетворяющий значение функции. Выполнение преобразования аргументов можно мыслить как деформацию области соответствующего качества, а сохранение значений функции —

как перенос вместе с каждой точкой расположенного над ней стержня. Получается снова какая-то функция, которую естественно считать результатом перехода к новым переменным (пересадки старой функции в новые переменные).

Пусть мы вводим новые (независимые) переменные u , связанные со старыми (независимыми) переменными x зависимостью $x = \Phi(u)$ или зависимостью $u = \Psi(x)$. Естественно ставится задача: используя формулу перехода между переменными, узнать, в какое уравнение относительно новых переменных преобразуется имевшееся уравнение? Поскольку при указанных обстоятельствах значения функции не затрагиваются, для ее обозначения можно использовать ту же букву, которая использовалась для заданной функции (что нередко и делают), однако лучше этой традиции по крайней мере на первых порах не следовать для большей внятности выполняемых манипуляций и во избежание недоразумений.

Предположим, что выбрана связывающая точки x и u зависимость $x = \Phi(u)$, $u \in \Omega$, где Ω — открытая область изменения переменной u , или $u = \Psi(x)$, $x \in Q$, где Q — открытая область изменения переменной x . Точки, переходящие друг в друга при заданной зависимости и обратной к ней, будем называть *соответственными*. Пусть задана функция $y = f(x)$. Перенесем эту функцию в область изменения переменной u , полагая, что значения вновь определяемой функции $w = g(u)$ и старой функции $y = f(x)$ в соответственных точках совпадают, т. е. что выполнено равенство

$$g(u) = f(x) \quad (5.1)$$

для взаимосвязанных точек x , u , которое в зависимости от заданной замены превращается либо в равенство

$$g(u) = f(\Phi(u)), \quad u \in \Omega, \quad (5.2)$$

если задана зависимость $x = \Phi(u)$ между координатами x , u , либо в равенство

$$g(\Psi(x)) = f(x), \quad x \in Q, \quad (5.3)$$

при заданной зависимости $u = \Psi(x)$. Этой договоренностью мы фиксируем некоторое тождество на открытом множестве соответствующего пространства, позволяющее не только пересадить функцию с одних переменных в другие, но при достаточной гладкости и невырожденности участвующих в рассмотрении функций и отображений (что всегда предполагается без дополнительных оговорок) выразить производные одной

из функций через производные и значения другой из них. Для такого выражения достаточно продифференцировать определяющее замену тождество, из получаемых при этом равенств выразить производные старой функции и подставить их выражения в соотношение (как правило, это уравнение), характеризующее старую функцию.

В примерах при $n = 2$ или $n = 3$ вместо обозначения x_1, x_2 или x_1, x_2, x_3 для координат точки будут использоваться привычные буквы x, y или соответственно x, y, z . Для криволинейных координат чаще всего используются буквы u, v, w или иногда греческие ξ, η, ζ .

ПРИМЕР 1. Преобразуем уравнение $x^2 y'' + xy' + y = 0$, вводя новую переменную t , связанную с переменной x равенством $x = e^t$.

Обозначим новую функцию, получаемую переносом функции $y(x)$ в область переменной t , через w и запишем равенство, выражающее совпадение старой и новой функций в соответственных точках. Согласно нашей договоренности должно быть $y(x) = w(t)$ для таких x и t , что $x = e^t$. Подставляя в выписанное выше равенство на место x его выражение через t , приходим к тождеству, определяющему новую функцию:

$$y(e^t) = w(t). \quad (5.4)$$

Продифференцируем его по t :

$$y'(e^t)e^t = w'(t). \quad (5.5)$$

Точки, в которых взяты производные, указаны для того, чтобы на следующем шаге при дифференцировании учесть все зависимости от t . Поскольку третьей производной брать в этом примере не требуется, в записи второй производной указание аргументов всюду опустим (для краткости). Дифференцируя равенство (5.5), имеем

$$y''e^{2t} + y'e^t = w''. \quad (5.6)$$

Выразим из равенств (5.5), (5.6) y', y'' :

$$y' = w'e^{-t}, \quad y'' = (w'' - y'e^t)e^{-2t} = (w'' - w')e^{-2t}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, приходим к соответствующему ему уравнению относительно новой переменной и новой функции:

$$e^{2t}(w'' - w')e^{-2t} + e^t w'e^{-t} + w = 0,$$

или $w'' + w = 0$.

ПРИМЕР 2. Преобразуем уравнение $yz'_x - xz'_y = 0$, вводя новые переменные ξ, η , связанные с переменными x, y равенствами $\xi = x, \eta = x^2 + y^2$.

Запишем определяющее новую функцию $w = w(\xi, \eta)$ равенство, отразив в нем тот факт, что в точках $\xi = x, \eta = x^2 + y^2$ значения новой и старой функций совпадают:

$$w(x, x^2 + y^2) = z(x, y),$$

и для решения задачи достаточно продифференцировать это равенство по x и по y .

ПРИМЕР 3. Преобразуем уравнение $xz'_x + \sqrt{1+y^2}z'_y = xy$, переходя к новым переменным $u = \ln x, v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$. Новая функция $w(u, v)$ будет связана со старой $z(x, y)$ выполнением равенства в соответствующих точках:

$$w(\ln x, \ln(y + \sqrt{1+y^2})) = z(x, y),$$

и для решение задачи достаточно продифференцировать записанное равенство.

(2) Выше была рассмотрена такая замена переменных, при которой происходит замена независимых переменных, а значения функции в соответственных точках сохраняются. Теперь рассмотрим ситуацию, в которой может меняться всё — как независимые переменные, так и значения функции. Наша ближайшая задача — получить равенство, определяющее связь между старой и новой функциями и тем самым задающее новую функцию. Для этого обратимся к такой замене с точки зрения преобразования графиков функций.

Образно ситуацию этого случая удобно интерпретировать с помощью преобразования графика функции двух переменных. Представим себе, что для функции двух переменных поверхность в пространстве, являющаяся ее графиком, находится в открытой области пространства, заполненной деформируемым материалом (типа пластилина). Преобразование, затрагивающее значения функции, должно действовать на весь связанный с функцией комплекс, т. е. на ее график, позволяя вместе с точками из области определения изменять значения функции. Тем самым в этом случае должно быть задано отображение из пространства также в пространство. В результате деформации, соответствующей заданному

преобразованию, график превращается в некоторую поверхность, и может оказаться графиком какой-то функции. Ее естественно считать новой функцией, полученной в результате выполнения замены. Студентам можно предложить более формальный текст, повторяющий изложенные соображения.

Как известно, график отображения $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, где X , Y — какие-то множества, это множество таких упорядоченных пар $(x, y) \in X \times Y$, для которых $y = f(x)$. Пусть задана функция $f(x)$ на некотором открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащем график функции f , задано достаточно гладкое невырожденное отображение Φ , взаимно однозначно отображающее это множество на множество $Q \in \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через Ψ обратное к Φ отображение. Точки, переходящие друг в друга при этих отображениях, будем называть *соответственными*. Ввиду гладкости и невырожденности Φ образ $\Phi[\text{gr}(f)]$ графика $\text{gr}(f)$ функции f будет (по крайней мере локально) графиком некоторой функции, действующей из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Исходя из этого, определим новую функцию w , считая, что *график функции f взаимно однозначно отображается на график функции w* . Не уменьшая общности, будем считать, что новая функция w действует из первых n переменных в последнюю.

Займемся составлением равенства, отражающего указанную выше договоренность и позволяющего выразить производные старой функции через производные новой. Обозначим точки старого $(n+1)$ -мерного пространства через $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, а нового — через $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$. Обозначим через $\Phi_1, \dots, \Phi_{n+1}$ координатные функции отображения Φ , а через $\Psi_1, \dots, \Psi_{n+1}$ — отображения Ψ . Допустим, что задано отображение Φ , действующее из старых переменных в новые. Пусть $(x, f(x))$ — точка графика f . Ее образом является точка

$$(\Phi_1(x, f(x)), \dots, \Phi_n(x, f(x)), \Phi_{n+1}(x, f(x))).$$

Согласно определению графика и нашей договоренности *последняя координата $\Phi_{n+1}(x, f(x))$ должна быть значением (новой) функции w на первых n координатах*, т. е.

$$\Phi_{n+1}(x, f(x)) = w(\Phi_1(x, f(x)), \dots, \Phi_n(x, f(x))). \quad (5.7)$$

Если же задано отображение Ψ , действующее из новых переменных в старые и $(u, w(u))$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, — точка графика новой функции, то

образом ее при отображении Ψ будет точка

$$(\Psi_1(u, w(u)), \dots, \Psi_n(u, w(u)), \Psi_{n+1}(u, w(u))).$$

Согласно определению графика и нашей договоренности *последняя координата* $\Psi_{n+1}(u, w(u))$ *должна быть значением (старой) функции f на первых n координатах*, т. е.

$$\Psi_{n+1}(u, w(u)) = f(\Psi_1(u, w(u)), \dots, \Psi_n(u, w(u))). \quad (5.8)$$

Требуемые производные f'_{x_k} , $k = 1, \dots, n$, и т. д. могут быть найдены из равенств, получаемых в результате дифференцирования определяющего новую функцию равенства.

ПРИМЕР 4. Преобразуем уравнение $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, если $x = u + t$, $y = u - t$ и $u = u(t)$. Здесь задано отображение $(t, u) \mapsto (x, y)$, действующее из новых переменных в старые, так что новая функция $u = u(t)$ будет характеризоваться следующим обстоятельством: если взять точку $(t, u(t))$ графика новой функции, то ее образ, т. е. точка $(u(t) + t, u(t) - t)$, будет точкой графика функции $y = y(x)$, а это значит, что последняя координата $u(t) - t$ равна значению функции y на первой координате $u(t) + t$:

$$u(t) - t = y(u(t) + t).$$

Для получения результата достаточно дважды продифференцировать записанное равенство по переменной t .

ПРИМЕР 5. Преобразуем уравнение $az'_x + bz'_y = 1$, вводя новые переменные ξ, η , связанные со старыми равенствами $\xi = x$, $\eta = y - bz$.

Заметим, что замена определена только двумя равенствами, хотя в них участвуют не только переменные x, y , но и третья переменная z . В таких формулировках будем дополнять данное преобразование до отображения из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, считая, что *последняя координата остается неизменной*, т. е. происходит отображение $(x, y, z) \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = x$, $\eta = y - bz$, $\zeta = z$.

Обозначим новую функцию через w и выпишем равенство, ее определяющее. Точка графика $(x, y, z(x, y))$ функции z перейдет при нашем преобразовании в точку $(x, y - bz(x, y), z(x, y))$, и согласно договоренности эта точка должна быть точкой графика функции w , что означает выполнение равенства

$$z(x, y) = w(x, y - bz(x, y)).$$

Результат достигается после дифференцирования полученного равенства по x и по y .

ПРИМЕР 6. Преобразуем уравнение $(x - z)z'_x + yz'_y = 0$, взяв x в качестве функции, а y, z — в качестве независимых переменных.

Такая формулировка означает, что надо перейти в уравнении к новым переменным u, v и функции $w(u, v)$, связанным со старыми соотношением $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, где $u = y$, $v = z$, $w = x$, т. е. тот факт, что x следует считать функцией, означает требование расположить x на последнем месте, оставив на первых двух переменные y и z .

Запишем соотношение для преобразования точек графика:

$$(x, y, z(x, y)) \mapsto (y, z(x, y), x).$$

Тем самым определяющее функцию w равенство таково:

$$x = w(y, z(x, y)),$$

и для решения задачи достаточно продифференцировать записанное равенство по x и по y .

ПРИМЕР 7. Преобразуем уравнение $yz''_{yy} + 2z'_y = \frac{2}{x}$, принимая u, v за новые переменные, а $w(u, v)$ — за новую функцию, где переменные (x, y, z) и (u, v, w) связаны соотношениями $u = \frac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$.

Точка графика $(x, y, z(x, y))$ функции z перейдет в точку

$$\left(\frac{x}{y}, x, xz(x, y) - y\right),$$

так что определяющее функцию w равенство таково:

$$xz(x, y) - y = w\left(\frac{x}{y}, x\right).$$

Результат получается путем дифференцирования выписанного равенства дважды по y .

Глава 5. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 5.1. Равномерная сходимость последовательностей и рядов

Тема последовательностей, рядов и интегралов, зависящих от параметра, обычно связывается с равномерной сходимостью этих объектов как функций от параметра, и в таком плане она традиционно расположена в курсе между разделами о дифференцировании и об интегрировании функций нескольких переменных, хотя ее определенная изолированность и слабая зависимость от других разделов позволяет располагать ее и в других местах курса. Иногда ее помещают перед многомерным анализом вообще, иногда после изучения интеграла Лебега. В последнем случае почти утрачивается необходимость в равномерной сходимости и тема излагается на основе предельного перехода в интеграле Лебега. Здесь будет изложен опыт изучения этой темы в традиционном варианте.

Разговор о равномерной сходимости естественно начинается с рассмотрения функциональных последовательностей и выяснения влияния переменной, от которой зависят функции последовательности, на сходимость, а именно на составляющие определение объекты. Зависимость требуемого номера не только от заданного ε , но и от аргумента функции, достаточно очевидна и прослеживается на простейших естественных примерах. Выделение ситуации, при которой требуемый номер может быть выбран «в равной мере» подходящим для всех аргументов из области рассмотрения, т. е. равномерно подходящим, приводит к понятию равномерной сходимости. Поскольку студенты уже встречались с ситуацией равномерности, особых проблем с восприятием не замечается.

После сообщения определения, например в вытекающем из отмеченных соображений виде: говорят, что последовательность функций f_n *сходится равномерно на множестве* X к функции f , если

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in X) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

естественно встает вопрос о том, как устанавливать факт равномерной сходимости функциональной последовательности. Это удобно и эффективно делать в рамках формулировки равномерной сходимости с использованием равномерной нормы.

Изучение вопроса о равномерной сходимости последовательности функций f_n на множестве X можно проводить в три этапа.

1. Находим поточечный предел последовательности $f_n(x)$ (обозначим его через $f(x)$).
2. Находим равномерную норму разности

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

3. Изучаем сходимость этой нормы разности к нулю. Если окажется, что $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, то $f_n \Rightarrow f$, а если $\|f_n - f\| \not\rightarrow 0$, то $f_n \not\Rightarrow f$.

При этом полезно отметить, что если для функциональной последовательности $f_n(x)$ удастся подобрать такую числовую последовательность $a_n \geq 0$, что $|f_n(x)| \leq a_n$ для всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, да к тому же $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то последовательность f_n сходится к нулю равномерно на множестве X . Иначе говоря, надо помнить о мажорантном признаке обоснования равномерной сходимости.

Из теоретической информации, как всегда, сообщается критерий Коши равномерной сходимости, относительно которого можно подчеркнуть, что с точки зрения применения к решению задач он пригождается для обоснования отсутствия равномерной сходимости функциональных рядов.

В плане применения равномерной сходимости излагаются традиционные утверждения о перестановке предельных переходов, о непрерывности, дифференцировании и интегрировании предела сходящейся функциональной последовательности.

Поскольку с практической точки зрения все отмеченные понятия и свойства зачастую применяются к функциональным рядам, можно быстро перейти именно к этому объекту, отметив, что терминология и результаты о поточечной и равномерной сходимостях функциональных последовательностей стандартным образом переносятся на функциональные ряды. Вместе с тем полезно побудить студентов дать переформулировки всех рассмотренных для последовательностей понятий и утверждений в терминах рядов либо это сделать самому преподавателю.

Для ряда как специфически рассматриваемой последовательности появляются свои дополнительные термины и утверждения. Естественно возникают термины «область сходимости функционального ряда», «абсолютная и условная сходимости функционального ряда», и исследование области сходимости функционального ряда заключается в ответе на вопрос: при каких значениях переменной соответствующий числовой ряд сходится? Тем самым нахождение области сходимости функционального ряда основано на исследовании сходимости при каждом фиксированном x соответствующего числового ряда.

Здесь полезно ненадолго остановиться на нахождении области сходимости с целью восстановить и развить навыки, полученные при исследовании сходимости числовых рядов.

Как и для числовых рядов, исследовать равномерную сходимость функционального ряда путем изучения равномерной сходимости последовательности его частичных сумм трудно ввиду того, что для нее обычно трудно вывести подходящую краткую форму записи, поэтому для исследования равномерной сходимости функциональных рядов используют соответствующие признаки.

Сначала можно ограничиться рассмотрением рядов с положительными членами. Здесь для обоснования равномерной сходимости требуется мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости, и его надо сформулировать в двух видах — с помощью ряда из равномерных норм и с помощью какого-либо мажорирующего сходящегося числового ряда. Ясно, что использование ряда из норм довольно технологично, ибо ясна процедура нахождения равномерных норм. Однако этим ограничиваться не стоит, ибо хоть процедура нахождения норм и есть, иногда возникают трудности с ее выполнением.

Изучение равномерной сходимости функциональных рядов, общий член которых меняет знак, лучше начинать с рассмотрения абсолютной равномерной сходимости, т. е. фактически со сходимости ряда с положительными членами. Если таковой нет или ее изучение по каким-то причинам затруднительно, то можно перейти к специфическим для такой ситуации признакам Дирихле и Абеля.

Доказательство отсутствия равномерной сходимости для функциональных рядов обычно связано с критерием Коши и представляет собой одну из непростых процедур, так как приходится использовать утверждение с пятью кванторами.

Применение предлагаемой техники исследования можно показать, допустим, на классическом примере.

ПРИМЕР. Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ на отрезках $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, где $0 < \alpha < \pi$, и $[0, 2\pi]$.

Заметим, что общий член ряда сходится к нулю довольно медленно, так что попытка ограничить его модуль сверху и воспользоваться признаком Вейерштрасса ничего не дает.

Обратимся к признаку Дирихле. Ясно, что последовательность функций $f_n(x) = \frac{1}{n}$ монотонна и сходится к нулю равномерно (на любом множестве). Рассмотрим сумму $\sum_{k=1}^n \sin kx$. Если мы установим ее равномерную ограниченность, то докажем равномерную сходимость данного ряда. Напомним, что

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Если $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$, где $0 < \alpha < \pi$, то $\sin \frac{x}{2} > \sin \frac{\alpha}{2} > 0$, поэтому $|S_n| \leq \frac{1}{\sin \alpha/2}$. Итак, суммы S_n равномерно ограничены на $[\alpha, 2\pi - \alpha]$,

следовательно, по признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно на этом промежутке.

На промежутке $[0, 2\pi]$ уже нет равномерной ограниченности сумм S_n , поэтому воспользоваться признаком Дирихле невозможно, но и гарантировать на его основе отсутствие равномерной сходимости тоже нельзя — признак Дирихле дает лишь достаточное условие сходимости. Для доказательства отсутствия равномерной сходимости на $[0, 2\pi]$ воспользуемся критерием Коши. А именно, попробуем установить, что

$$(\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists n_1 \geq n \exists p \geq 0 \exists x \in [0, 2\pi]) \quad \left| \sum_{k=n_1}^{n_1+p} \frac{\sin kx}{k} \right| \geq \varepsilon.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а значит, взяв, например, $\varepsilon = 1/2$ и для любого

$n \in \mathbb{N}$ положив, например, $n_1 = n$ и $p = n$, имеем $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$. Возьмем теперь x настолько малым, что $\sin kx \geq 1/2$ при k от n до $2n$ (например, можно взять $x = \pi/6n$). Тогда

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx}{k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4}.$$

Таким образом, взяв $\varepsilon = 1/4$, для любого $n \in \mathbb{N}$ можем подобрать такие $n_1 \geq n$, $p \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$, что $\left| \sum_{k=n_1}^{n_1+p} \frac{\sin kx}{k} \right| \geq \varepsilon$, значит, равномерной сходимости ряда на $[0, 2\pi]$ нет.

§ 5.2. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. Степенные ряды

2.1. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов используется при ответе на следующий вопрос. Допустим, что каждая из функций, составляющих последовательность или ряд, обладает каким-то свойством, связанным с предельным переходом, например имеет в какой-то точке предел, или непрерывна, или дифференцируема. Будет ли это свойство наследоваться предельной функцией, и если да, то как найти ее предел, производную или интеграл?

Для ответа на поставленные вопросы есть соответствующие утверждения. Их можно формулировать в разных стилях: глобальном (предполагать равномерную сходимость на всем множестве) или локальном (предполагать равномерную сходимость в некоторой окрестности рассматриваемой точки). Для разных свойств естественны разные стили. Например, для почленного интегрирования ряда естествен глобальный стиль, для исследования непрерывности или дифференцируемости удобнее локальный стиль, ибо эти свойства сами по себе локальны, т. е. выполнение их на множестве означает выполнение в каждой точке рассматриваемого множества. В принципе, можно снабдить слушателей всеми вариациями, если есть уверенность в том, что они все эти вариации усвоят.

Можно все утверждения сформулировать сразу для рядов, а можно сначала для функциональных последовательностей и затем, возможно, силами студентов, переформулировать для рядов.

Типичное первоначальное заблуждение студентов состоит в том, что они начинают проверять условия утверждений на всем множестве, на котором требуется установить непрерывность или дифференцируемость. Нередко равномерной сходимости на всем множестве нет, и в этой ситуации приходится настойчиво насаждать привычку к локальности рассуждения. Как ни странно, она формируется с определенными трудностями, хотя, казалось бы, в локальности нет ничего особенного. И тем не менее традиционное «возьмем произвольную точку из рассматриваемого множества, выберем такую ее окрестность, в которой можно ожидать соответствующей равномерной сходимости, и будем таковую доказывать» доводится до автоматизма с определенными трудностями.

После того, как использование локальности применения требуемых свойств усвоено, остается только обратиться к средствам обоснования равномерной сходимости и их применить.

2.2. Степенные ряды. Этот объект возникает здесь как частный случай функционального ряда. С самого начала надо договориться о том, как сводить исследование степенного ряда общего вида к исследованию ряда с нулевой начальной точкой. Здесь акцент ставится на том, что область сходимости это всегда промежуток (круг), и ставится задача нахождения радиуса сходимости и промежутка сходимости. Элементарные теоретические сведения позволяют свести эту задачу к нахождению предела и исследованию сходимости числового ряда (для изучения сходимости на концах промежутка сходимости).

Следующий шаг — представление функций в виде ряда Тейлора или, чаще всего, Маклорена. Полезно напомнить формулы разложения в ряд основных элементарных и часто встречающихся функций. Поскольку с формулой Тейлора студенты ранее встречались, здесь, естественно, происходит повторение и закрепление сформировавшихся ранее навыков разложения с использованием известных разложений.

Для представления функции в виде ряда Тейлора активно используются возможности его почленного дифференцирования и интегрирования в круге сходимости. При этом интегрирование всегда сопровождается либо взятием первообразной в виде определенного интеграла с переменным пределом интегрирования, либо нахождением константы, добавляемой при использовании первообразной.

§ 5.3. Интегралы, зависящие от параметра

В тех случаях, когда подынтегральная функция зависит не только от переменной интегрирования, но еще от каких-то переменных, в результате интегрирования появляются функции, зависящие от переменных подынтегральной функции, по которым не было интегрирования. О таких функциях говорят как об интегралах, зависящих от параметра. Поскольку есть несколько конструкций интеграла, различающихся не только своим содержанием, но и свойствами интеграла, в частности, свойствами предельных переходов под знаком интеграла, естественно различаются и условия, при которых возможны внесение под знак интеграла предельного перехода, дифференцирования и интегрирования.

Традиционно изучение интегралов, зависящих от параметра, реализуется в такой последовательности: сначала для интеграла Римана, затем для основанного на базе интеграла Римана несобственного интеграла, затем для интеграла Лебега, и если не было несобственного на базе интеграла Римана, то для несобственного интеграла на базе интеграла Лебега. Возможны вариации в этой последовательности. Например, можно вообще не рассматривать зависимость от параметра в интеграле Римана, а сразу пройти такой материал для интеграла Лебега. При таком подходе очевидна экономия времени, ибо для интеграла Лебега значительно проще те свойства, которые необходимо проверять для обоснования законности выполняемых действий, ибо они основаны на мощной теореме Лебега о мажорированном предельном переходе. Однако в таком плане изучение интеграла как функции от параметра откладывается, ибо интеграл Лебега обычно излагается не ранее чем в середине второго курса. Если такое расположение не вызывает противоречий, например, с потребностями других предметов, его можно реализовать. Есть еще одно соображение в пользу более раннего изучения этой темы, а именно образовательное. Интеграл от параметра обычно сопровождается обилием довольно кропотливых технического типа задач, там приходится прибегать к состоящим из нескольких шагов рассуждениям, и это способствует постепенному развитию математических навыков. Стремление к экономии времени и более интенсивному прохождению курса нацелено на научную сторону предмета и может быть успешным при достаточно сильной предварительной подготовленности студентов.

Опишем особенности изучения интегралов, зависящих от параметра, при классическом распределении материала: сначала для интеграла Римана, затем для несобственного, совсем не касаясь интеграла Лебега.

3.1. Интеграл Римана, зависящий от параметра. Предположения, при которых рассматривается интеграл как функция от параметра, и теоретический материал излагаются в естественных обстоятельствах, а именно рассматривается функция двух числовых аргументов, обладающая необходимыми для рассмотрения интеграла условиями по переменной интегрирования и требуемыми для соответствующего утверждения свойствами по параметру. Теоретическая часть включает в себя джентльменский набор: предельный переход на базе равномерной сходимости, непрерывность интеграла по параметру (проще всего для функций, заданных на произведении отрезков), дифференцирование (возможно, с формулировкой в локальном стиле) и интегрирование.

В предлагаемых задачах обычно требуется проверка выполнения условий фактов, на которые приходится опираться для получения результата, и это поддерживает навык трепетного отношения к условиям утверждений, к тому, при каких обстоятельствах они гарантируют результат. Кроме того, здесь закрепляются навыки нахождения интегралов от конкретных функций.

3.2. Несобственный интеграл, зависящий от параметра. При рассмотрении несобственного интеграла, зависящего от параметра, для справедливости утверждений, аналогичных утверждениям для случая интеграла Римана, требуется дополнительно равномерная относительно параметра сходимость несобственного интеграла. Это понятие есть не что иное как обычная равномерная относительно параметра сходимость интеграла как функции верхнего предела. Однако, как и в ситуации с рядами или несобственными интегралами, для обоснования равномерной сходимости служат соответствующие признаки, ибо здесь так же, как для несобственных интегралов, информация проверяется относительно одного объекта, а заключение относится к другому.

При наличии традиционного набора теоретических фактов: признак Вейерштрасса для положительных функций (для абсолютной сходимости), критерий Коши, признаки Дирихле и Абеля, технология исследования аналогична применяемой при изучении обычной сходимости несобственных интегралов. Сначала интересуемся, положительна ли подынтегральная функция, и если да, то пытаемся применить признак Вейерштрасса. Если это не удастся, возможно, приходится доказывать отсутствие равномерной сходимости, а это уже критерий Коши. Если функция знакопеременна, изучаем абсолютную сходимость интеграла от нее,

и если таковой нет, то переходим к применению признаков Дирихле или Абеля. Как и раньше, стараемся прийти к ситуации, когда смена знака у подынтегральной функции происходит на ощутимых промежутках, что обычно достигается заменой переменной. Поскольку все утверждения здесь, кроме критерия Коши, суть признаки, т. е. достаточные условия, для обоснования отсутствия равномерной сходимости приходится обращаться к критерию Коши. Иногда его применение связано с техническими трудностями и какими-то образными соображениями по поводу подынтегральной функции. Приведем небольшой пример для иллюстрации применения разнообразных средств.

ПРИМЕР. Исследуем равномерную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \cos x^\alpha dx$$

на множествах $E_1 = (1, +\infty)$ и $E_2 = [\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 > 1$.

Прежде всего заметим, что подынтегральная функция знакопеременная, поэтому признак Вейерштрасса здесь неприменим. Будем ориентироваться на признак Абеля или признак Дирихле. Сначала сделаем замену переменной с тем, чтобы аргумент у косинуса стал переменной интегрирования, а именно положим $x^\alpha = z$, $x = z^{1/\alpha}$, $dx = \frac{1}{\alpha} z^{1/\alpha-1} dz$, переменная z будет изменяться в промежутке $[0, +\infty)$. Для краткости положим $1/\alpha - 1 = \beta$, при этом множествам E_1, E_2 изменения параметра α соответствуют множества $F_1 = (-1, 0)$, $(-1, \beta_0]$, где $\beta_0 = 1/\alpha_0 - 1 < 0$. Исходный интеграл станет таким:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} z^{1/\alpha-1} \cos z dz = (\beta + 1) \int_0^{+\infty} z^\beta \cos z dz.$$

Подынтегральная функция представлена в виде произведения двух функций, из которых $f(z) = z^\beta$ монотонна и при $\beta < 0$ имеет пределом 0 при $z \rightarrow +\infty$. Вместе с тем равномерной сходимости ее к нулю на множестве E_1 не будет. Это говорит о том, что нам не доведется воспользоваться признаком Дирихле, ибо не выполнены его условия, однако гарантировать отсутствие равномерной сходимости пока нельзя, и мы продолжим исследование. Заметим, что даже при больших z возможность сколь угодно близкого приближения к нулю величины β приводит

к тому, что величина z^β может оказаться не малой, и есть шанс, воспользовавшись критерием Коши, доказать отсутствие равномерной сходимости интеграла на E_1 . Попробуем оценить снизу интеграл $\int_{b_1}^{b_2} z^\beta \cos z \, dz$,

выбирая такие удаленные промежутки $[b_1, b_2]$, на которых косинус положителен. Ориентируясь на произвольное $b > 0$, возьмем (и фиксируем) $b_1, b_2 > b$ вида $b_1 = -\pi/4 + 2\pi n$, $b_2 = \pi/4 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. На каждом промежутке $[b_1, b_2]$ будет $\cos z \geq 1/\sqrt{2}$. Поскольку функция z^β , $z > 0$, при $\beta < 0$ убывает, ее значения на этом промежутке оцениваются снизу значением в правом конце промежутка: $z^\beta \geq (\pi/4 + 2\pi n)^\beta$. Следовательно, весь интеграл можно оценить так:

$$\int_{b_1}^{b_2} z^\beta \cos z \, dz \geq (\pi/4 + 2\pi n)^\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $(\pi/4 + 2\pi n)^\beta \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 1$, найдется такое $\beta < 0$, что $(\pi/4 + 2\pi n)^\beta > 1/2$. Собирая все оценки, можно утверждать, что

$$\int_{b_1}^{b_2} z^\beta \cos z \, dz \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Взяв в качестве требуемого $\varepsilon > 0$ в отрицании критерия Коши число, стоящее в правой части последней оценки, придем к выводу об отсутствии равномерной сходимости интеграла на множестве E_1 .

На множестве E_2 невозможно сколь угодно близко подойти к единице, поэтому $\lim_{z \rightarrow +\infty} z^\beta = 0$ равномерно относительно $\beta \in (-1, \beta_0]$, а первообразная от функции $\cos z$ очевидно ограничена. Тем самым выполнены все условия признака Дирихле и интеграл сходится на множестве E_2 равномерно.

После равномерной сходимости плавно переходим к изучению свойств несобственного интеграла как функции от параметра. Требуемые утверждения аналогичны соответствующим фактам для собственного интеграла с той лишь разницей, что здесь в соответствующих местах предполагается равномерная сходимость какого-то из интегралов (либо самого, либо интеграла от производной подынтегральной функции по параметру).

Довольно часто для доказательства возможности применения какого-то утверждения для точек из заданного множества не требуется доказывать равномерную сходимость интеграла относительно всего этого множества, ибо предельный переход, непрерывность и дифференцируемость — свойства локальные, их наличие на каком-то множестве означает, что они есть в каждой точке рассматриваемого множества, а тогда для применения соответствующего результата достаточно доказывать равномерную сходимость для точек из некоторой окрестности произвольной точки.

При нахождении несобственного интеграла путем дифференцирования его по параметру и последующего нахождения первообразной или решения дифференциального уравнения возникают трудности, связанные с нахождением константы при первообразной. Обычно при выборе значения параметра для нахождения константы руководствуются соображениями возможности нахождения несобственного интеграла от функции при выбираемом значении параметра. Иногда проявляются соображения, связанные со свойствами получаемого результата и подынтегральной функции типа ограниченности.

Если подынтегральная функция содержит два параметра, то разумно путем преобразований и замены параметра прийти к ситуации одного параметра. Если оставить два параметра, то добавляемая при нахождении первообразной по одному из параметров константа зависит, вообще говоря, от другого, и чтобы справиться с ситуацией требуются дополнительные соображения.

Глава 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Наличие нескольких переменных позволяет рассматривать интегрирование как по областям пространства, так и по многообразиям (кривым, поверхностям). В первом случае всегда интегрируется функция, во втором — либо функция, либо векторное поле или дифференциальная форма. Основу во всяком случае составляет интегрирование функции по области пространства. Этот случай в первую очередь всегда и рассматривается.

§ 6.1. Кратные интегралы

Интеграл от функции нескольких переменных, как и одномерный, можно определить несколькими путями. В последнее время чаще всего интеграл определяется как интеграл Лебега. С теоретической точки зрения это очень квалифицированный объект с хорошими свойствами. Однако для нахождения интеграла от конкретной функции обычно интересуются не тем, как интеграл определен, а тем, какими он свойствами обладает. С этой точки зрения для нахождения интеграла в высокой степени безразлично, что было положено в основу определения интеграла как такового, ибо обычно подынтегральная функция непрерывна (хотя бы кусочно), а тогда требуемые для нахождения интеграла свойства присутствуют при любой конструкции.

Начинается изучение кратных интегралов, естественно, с двойных интегралов. Рассматриваются непрерывные функции, заданные на замкнутой области в $\mathbb{R}^2$. Если функция кусочно непрерывна, вычисление интеграла можно свести к случаю непрерывной функции. Основу нахождения двойного интеграла составляет процедура сведения к повторному интегрированию. Она зачастую воспринимается с трудом и требует особого внимания. Дело в том, что при недостаточных навыках сведения

двойного интеграла к повторному при обращении с тройными интегралами трудности могут оказаться непреодолимыми. Остановимся на этом немного подробнее.

Пусть Ω_1 — проекция области интегрирования Ω на ось абсцисс, а Ω_2 — на ось ординат, т. е.

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R}) (x, y) \in \Omega\}, \quad \Omega_2 = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R}) (x, y) \in \Omega\}.$$

Для простоты предположим, что обе проекции суть замкнутые промежутки или, на худой конец, объединения некоторого набора замкнутых промежутков. Фиксируем $x \in \Omega_1$, и пусть Ω_x — сечение Ω на уровне x , т. е. множество всех таких y , что $(x, y) \in \Omega$. Предположим, что Ω_x достаточно хорошее. Рассматривая при фиксированном x интеграл от $f(x, y)$ только как функции переменной y по множеству Ω_x , получим функцию

$$\Phi(x) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dy.$$

Ее интегрирование по множеству Ω_1 приведет нас к интегралу

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y) dy \right) dx,$$

который называют *повторным* и обычно обозначают так:

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_x} f(x, y) dy.$$

Аналогично можно определить и другой повторный интеграл

$$\int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_y} f(x, y) dx.$$

Согласно теории для достаточно хороших области и функции f есть как двойной интеграл, так и оба повторных и они равны между собой:

$$\int_{\Omega} f(x, y) dxdy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_x} f(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_y} f(x, y) dx.$$

Равенство двойного и повторных интегралов позволяет нахождение двойного интеграла свести к нахождению однократных. Надо найти проекцию Ω на какую-либо из координатных осей, например, на ось абсцисс, затем при каждом x из этой проекции найти интеграл от f как функции от y по сечению Ω_x (одномерный интеграл), и затем еще раз найти одномерный интеграл, но теперь уже от получившейся функции от x по проекции Ω_1 . Главная проблема — в нахождении этих проекций.

Обратимся к совсем конкретной ситуации. Предположим, что Ω — это криволинейная трапеция, т. е. область, координаты точек которой удовлетворяют условиям

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, φ, ψ — непрерывные функции, заданные на $[a, b]$. Тогда проекция Ω на ось абсцисс — это промежуток $[a, b]$. Для нахождения проекции на ось ординат при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ можно ситуацию представлять себе так. Допустим, что при данном x мы двигаемся снизу вверх и в какой-то момент войдем в область, этим моментом будет значение $\varphi(x)$ нижней функции. Затем какое-то время будем находиться в области и выйдем из нее в момент $\psi(x)$. Стало быть, при данном x в области будем находиться, когда y удовлетворяет неравенствам $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. При такой области Ω получается формула

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Образ, связанный с движением и сопровождаемый словами «момент входа» и «момент выхода», позволяет достаточно быстро усвоить расстановку пределов интегрирования.

Если на протяжении всего отрезка $[a, b]$ либо вход в область, либо выход из нее не может осуществиться на одной функции, то это повод для разбиения области на части, на каждой из которых функции для входа и выхода не меняются, а это упомянутая выше ситуация.

Аналогично происходит переход к повторному интегрированию в случае, если область Ω представляет собой криволинейную трапецию

$$c \leq y \leq d, \quad \alpha(y) \leq x \leq \beta(y).$$

Для тройного интеграла возможностей перехода к повторным больше, чем для двойного. Можно спроектировать область интегрирования

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ на одномерное координатное подпространство, а можно на двумерное. В зависимости от ситуации первым шагом можно находить двойной интеграл или одномерный. Если область проектируется на одномерное подпространство, то для каждой фиксированной точки из такой проекции ищется свой двойной интеграл, тем самым в этом случае появляется необходимость нахождения семейства двойных интегралов, что может вызывать трудности. Если же область интегрирования проектируется на двумерное координатное подпространство, то в первую очередь ищется одномерный интеграл, тем самым в таком случае сначала появляется семейство одномерных интегралов, и с ним обращаться легче, чем с семейством двойных интегралов. Затем находится один двойной интеграл. Поясним изложенное подробнее.

Пусть даны достаточно хорошая функция f , заданная на области интегрирования $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $\Omega_0 = \{(x, y) : (\exists z) (x, y, z) \in \Omega\}$ — проекция Ω на плоскость xOy . Фиксируем $(x, y) \in \Omega_0$, и пусть $\Omega_{(x, y)} = \{z : (x, y, z) \in \Omega\}$. Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_{(x, y)}} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Обычно интеграл в правой части записывают так:

$$\iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\Omega_{(x, y)}} f(x, y, z) dz.$$

Если при этом для каждой пары $(x, y) \in \Omega_0$ множество $\Omega_{(x, y)}$ — это отрезок $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$, то

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

В результате первого интегрирования (по z) получаем двойной интеграл.

Ясно, что аналогичные соотношения получаются при фиксации сначала какой-либо другой координатной плоскости — yOz или zOx .

Обсудим другой способ разбиения. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y, z \in \mathbb{R}) (x, y, z) \in \Omega\}$ — проекция области Ω на ось Ox . При каждом $x \in \Omega_1$

пусть $\Omega_x = \{(y, z) : (x, y, z) \in \Omega\}$ — сечение области Ω при данном x . Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Здесь внутренний интеграл двойной, с которым мы умеем разбираться, внешний — обычный одномерный интеграл. В частности, если Ω_1 — это отрезок $\Omega_1 = [a, b]$, а при фиксированном $x \in [a, b]$ множество Ω_x — это криволинейная трапеция, ограниченная функциями $z = \lambda(x, y)$, $z = \mu(x, y)$, где $c(x) \leq y \leq d(x)$, то в обычных обозначениях

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{\lambda(x, y)}^{\mu(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Как и выше, подобные формулы получатся при первоначальном обращении к какой-либо из других координатных осей.

При нахождении интеграла из указанных двух возможностей предпочтительна первая, при которой фиксируется двумерная точка и ищутся однократные интегралы, ибо в таком случае достаточно хорошо видны промежутки интегрирования. Разбираться с зависящим от параметра семейством двумерных областей обычно заметно сложнее.

Проиллюстрируем сказанное на простом примере.

ПРИМЕР 1. Запишем интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ в виде повтор-

ного, где Ω — область, ограниченная поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

Поверхности $x = 1$ и $y = x$ — это параллельные оси Oz плоскости, проходящие через соответствующие прямые плоскости xOy . Поверхность $z = xy$ — это седло, проходящее через оси координат Ox , Oy . Поскольку поверхность $x = 1$ должна участвовать в формировании области, у поверхности $z = xy$ надо брать ту часть, где $x > 0$. Равенства $z = xy$ и $z = 0$ говорят о том, что ограничивающими поверхностями будут также $x = 0$ и $y = 0$. Исходя из этих наблюдений, находим, что проекцией области Ω на плоскость xOy будет треугольник Δ : $0 \leq x \leq 1$, $y \leq x$. Для каждой точки $(x, y) \in \Delta$ точка (x, y, z) будет в Ω при $0 \leq z \leq xy$. Тем самым,

сразу расставляя пределы интегрирования по Δ , получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\Delta} dx dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Поступим теперь иначе. Заметим, что условия $0 \leq x \leq 1$, $y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$ приводят к ограничению $0 \leq z \leq 1$ на z . Фиксировав $z \in [0, 1]$, получаем при каждом таком z область в плоскости xOy , ограниченную кривыми $xy = z$, $y = x$, $x = 1$ (рис. 1).

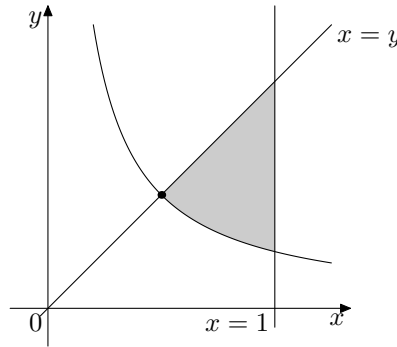


Рис. 1

Этими линиями ограничивается выделенная на рис. 1 область. Найдём точку пересечения кривых $y = x$ и $xy = z$: $z = x^2$, $x = \sqrt{z}$. Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_{z/x}^x f(x, y, z) dy.$$

Многочисленные приложения двойных и тройных интегралов сводятся к применению соответствующих формул и отдельных проблем обычно не составляют.

Задач на нахождение многократных интегралов немного, и здесь интерес представляет нахождение объема n -мерного шара. Любопытно найти соответствующий интеграл разными способами: непосредственно расставляя пределы интегрирования, переходя к сферическим координатам,

выводя рекуррентную формулу, пользуясь принципом Кавальери и сводя задачу к нахождению простого однократного интеграла.

§ 6.2. Интегрирование по кривым и поверхностям (обзор)

Интегрирование по кривым и поверхностям составляет обширный раздел курса математического анализа. Его изучение можно организовать несколькими путями. Дело в том, что здесь можно интегрировать разные объекты и подходить к интегрированию с разных позиций.

Можно к интегрированию подойти с точки зрения многообразий и дифференциальных форм. Это универсальная позиция, которая в конкретных обстоятельствах приводит ко всем классическим ситуациям. Она удобна и принимаема в тех случаях, когда предполагается глубокое теоретическое овладение анализом и контингент слушателей позволяет подходить с этой точки зрения.

Однако чаще всего при изложении этой темы последовательно появляются криволинейные и поверхностные интегралы первого рода, т. е. интегралы от функций, затем интегралы второго рода, т. е. интегралы от векторных полей, и завершают тему основные формулы анализа — Грина, Стокса, Гаусса — Остроградского.

Можно занять промежуточную позицию и вместе с интегрированием векторных полей излагать интегрирование дифференциальных форм невысокого порядка, а именно порядков от первого до третьего. При такой позиции формируются достаточно хорошие навыки работы с интегралами от функций и векторных полей и основными формулами, необходимые в других математических курсах. Вместе с тем студенты знакомятся с языком дифференциальных форм и имеют возможность выбирать средства для решения задачи — либо идущие от векторных полей, либо связанные с дифференциальными формами.

Как отмечено, содержание и последовательность изложения материала зависят от нескольких факторов. В любом случае студенты должны быть знакомы с основными формулами анализа. Находясь на указанной выше промежуточной позиции, можно раскрывать тему, например, в таком порядке.

Начать можно с физических вопросов о нахождении работы векторного поля и потока поля через поверхность. Студенты вполне информированы

рованы о том, как это делается, и, начиная с работы вдоль кривой, можно обратить внимание на возможность локально выразить ее через функцию (проекцию на касательный вектор) и на возможность найти то же самое через проекции на оси координат. Стало быть, появляется потребность в интегрировании вдоль кривой функции и векторного поля. Можно заметить, что здесь к обычным свойствам интеграла неизбежно добавится что-то, связанное с направлением движения по кривой. Полезно отметить свойства выражения для работы с использованием векторного поля: это функция, зависящая от двух (групп) переменных, и по каждой из переменных ее свойства разные. Одна переменная заведует перемещением от точки к точке, другая при фиксированной точке характеризует свойства работы как линейной функции. Здесь вектор, вдоль которого осуществляется работа, один, и зависимость от него линейная. В этот момент появляется термин «дифференциальная форма первого порядка» и наблюдается ее взаимосвязь с векторным полем: каждое векторное поле порождает дифференциальную форму этого поля и, наоборот, каждая дифференциальная форма порождается некоторым векторным полем. Возникает «двуязычие» — об одном и том же можно говорить на языке полей и на языке форм.

В рамках вопроса о нахождении работы вдоль кривой появляется потребность в понятии интеграла вдоль кривой от функции и от векторного поля или дифференциальной формы. Для решения задач обычно несуществен подход к определению интеграла, важны его свойства, особенно пересадка в пространство параметров (замена переменных). Поэтому на занятиях определение может быть дано описательно.

Трудности при вычислении криволинейных интегралов могут появиться при параметризации кривой и последующем вычислении одномерного интеграла.

Поработав с интегралами вдоль кривой, можно перейти к интегралам по поверхностям. Здесь уместно обратить внимание на модель потока через поверхность и на способы его нахождения: через объем параллелепипеда как произведение площади основания на высоту (проекцию вектора потока на вектор нормали к поверхности) и через протекание сквозь грани (смешанное произведение). Два средства побуждают к определению двух типов интегралов — от функции и от векторного поля. Вспоминая свойства смешанного произведения или зависимость объема от векторов, лежащих в его основании, приходим к абстрактной функции двух групп переменных, одна из которых соответствует точке пространства,

а другая состоит из векторов плоскости, в которой расположено основание параллелепипеда (касательной плоскости). Эти свойства приводят к понятию (дифференциальной) формы второго порядка. На этой стадии можно понятие дифференциальной формы обобщить и поговорить о формах произвольного порядка. Более того, здесь естественно сформировать практически весь набор базовых понятий, связанных с формами — замена переменных (пересадка в пространство параметров), дифференцирование и интегрирование. Для форм второго порядка отмечается их связь с векторными полями, а для форм третьего — с функциями. На этом необходимые для интегрирования по кривым и поверхностям понятия заканчиваются.

Параллельный разговор на языке полей и на языке форм приводит к тому, что студенты начинают выбирать, какими из этих средств пользоваться для решения задач. Для векторных полей фиксируются формулы, получающиеся при переносе в пространство параметров, для форм прозрачны процедуры действий. Смешанная стратегия приводит к тому, что студенты одинаково естественно воспринимают как векторные поля, так и дифференциальные формы.

Систематическое применение связанных с формами терминов лучше формализует отдельные этапы решения задачи, такие как выбор ориентации, согласование параметризации с ориентацией, переход к интегралу в пространстве параметров. Это полезно и с той точки зрения, что поддерживается теоретическая составляющая этого раздела, если она излагается в терминах дифференциальных форм и многообразий.

Основные формулы анализа, возможно, лучше изучать на базе общей теоремы Стокса. Ее проявления появляются постепенно в виде теорем Грина, Стокса, Гаусса — Остроградского, и трудности в их применении могут быть только в выборе параметризации и нахождении соответствующего интеграла.

Завершать этот раздел желательно задачами, связанными с физическими интерпретациями. Обладая достаточным объемом информации, можно выбирать средства решения, анализируя преимущества и недостатки того или иного шага для решения задачи.

В завершение можно отметить, что этот раздел математического анализа достаточно объемный, на его изучение отводится довольно большое время. При этом он достаточно детально изложен в литературе, поэтому здесь дан только краткий обзор без повторения известных деталей и примеров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преподавание с точки зрения содержания и формы — это космос. Его разнообразие безгранично, формы выражения многообразны. И при всем этом надо достигать результат — обеспечивать следующее за нами поколение общекультурными и профессиональными навыками. Я надеюсь, что расположенный выше текст хоть в какой-то мере способствует достижению указанной цели — с одной стороны, показывает, как можно формировать предметные, т. е. в пределах математического анализа, навыки, а с другой, подчеркивает, какие общие принципы могут быть использованы в работы с любой информацией.

Разумеется, невозможно в одном небольшом тексте отразить все оттенки, сопровождающие общение со студентами на тему математического анализа (да и на любую другую тему). Надеюсь, что читатель найдет в этом тексте что-то интересное, знакомое, полезное, и тогда подготовка этого текста хоть чем-то оправданна.

С благодарностью всем, ознакомившимся с изложенными рассуждениями,

В. Дятлов,
14.01.2018

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Образовательные материалы и организация процесса обучения	7
§ 1.1. Трехчастная структура учебных материалов	7
§ 1.2. Акцентирование	10
§ 1.3. Об организации процесса обучения и контроля	13
Глава 2. Введение в анализ. Предел, непрерывность	18
§ 2.1. Начало курса. Восприятие кванторов. Повторение свойств функций	18
§ 2.2. Точные границы и предел последовательности	33
§ 2.3. Предел функции	46
§ 2.4. Непрерывность и равномерная непрерывность функции	60
Глава 3. Дифференцирование и интегрирование функций одной переменной. Числовые ряды	66
§ 3.1. Производная	66
§ 3.2. Свойства дифференцируемых функций	73
§ 3.3. Первообразная и неопределенный интеграл	80
§ 3.4. Определенный интеграл	88
§ 3.5. Несобственный интеграл	92
§ 3.6. Числовые ряды	99
Глава 4. Дифференцирование функций многих переменных	106
§ 4.1. Конечномерные арифметические пространства	106
§ 4.2. Дифференцирование функций многих переменных	107

§ 4.3. Теоремы о неявном отображении и об обратном отображении	114
§ 4.4. Экстремум	118
§ 4.5. Криволинейные координаты. Замена переменных в дифференциальных выражениях	124
Глава 5. Ряды и интегралы, зависящие от параметра ...	132
§ 5.1. Равномерная сходимость последовательностей и рядов	132
§ 5.2. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. Степенные ряды	136
§ 5.3. Интегралы, зависящие от параметра	138
Глава 6. Интегрирование функций многих переменных	143
§ 6.1. Кратные интегралы	143
§ 6.2. Интегрирование по кривым и поверхностям (обзор)	149
Заключение	152

Дятлов Владимир Николаевич

**РАССУЖДЕНИЯ О ПРЕПОДАВАНИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Подписано в печать 15.01.2018.

Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$.

Усл. п. л. 9,5. Уч.-изд. л. 9,5.

Тираж 100 экз. Заказ № 12.

Издательство:

Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

www.smath.ru

Отпечатано в ООО «Омега Принт»

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Ак. М. А. Лаврентьева, 6

ISBN 978-5-904695-39-2



9 785904 695392