

Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН
Республиканский институт повышения квалификации работников образования РСО-А

К. Б. Скодтаев

СБОРНИК ЗАДАЧ
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИХ ШКОЛЬНЫХ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД
1989–2006

Владикавказ
2007

ББК 22.1я721

С 44

Научный редактор

кандидат физико-математических наук К. Т. Тибилов

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор В. Г. Созанов

кандидат физико-математических наук Т. Л. Чшиева

С 44 **Скодтаев К. Б.**

Сборник задач Северо-Осетинских школьных математических олимпиад 1989-2006 / Ин-т прикладной математики информатики ВНИЦ РАН.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2007.—144 с.

ISBN 978-5-93000-047-4

Основу сборника составляет первая часть, где рассматриваются задачи районных олимпиад (II тура) с решениями и указаниями, которые предлагались школьникам РСО-Алания в 1989-2006 гг. Во второй части приведены задания с ответами республиканских олимпиад (III тура) 1999-2006 гг.

Книга адресована и будет полезна учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению математики (особенно при подготовке к различным олимпиадам), учителям для дополнительной работы и любителям математического досуга.

ISBN 978-5-93000-047-4

© Институт прикладной математики
и информатики ВНИЦ РАН, 2007

© Республиканский институт
повышения квалификации работников
образования РСО-А, 2007

© Скودтаев К. Б., 2007

Предисловие

Очень важно, чтобы профессию математика выбирали те молодые люди, которые могут работать в этой области наиболее продуктивно.

Одним из путей привлечения одаренной молодежи к математике являются математические олимпиады.

Академик А. Н. Колмогоров

Трудно назвать такую отрасль человеческой деятельности, где можно обойтись без математики. Она нужна и инженеру, и врачу, и художнику; с ее помощью создаются самолеты и космические ракеты, системы связи, рассчитываются мосты и своды зданий, орбиты спутников и многое другое. Так, например, более полутора столетий назад двум великим ученым, французу Леверье и англичанину Адамсу (независимо друг от друга), математика подсказала, что небольшие «неправильности» в движении планеты Уран можно объяснить тем, что за нею, дальше от Солнца, движется какая-то неизвестная планета. Они вычислили, на каком участке неба нужно ее искать, и, когда в 1846 году немецкий астроном Галле направил телескоп в это место, была обнаружена новая планета, названная Нептуном.

По меткому выражению философа Джорджа Сантаяны, «подобно тому, как все искусства тяготеют к музыке, все науки стремятся к математике».

Как известно, основным средством развития математического мышления являются задачи, особенно нестандартные. Поиск и нахождение их решений, как и нестандартных решений традиционных задач, по словам академика Бориса Владимировича Гнеденко, «составляют важные слагаемые на пути развития способностей и духа творческого горения». Богатым источником таких задач являются различные математические олимпиады. Они способствуют выявлению одаренных, творчески мыслящих школьников, обогащению их знаний, развитию умений и навыков работы в напряженных соревновательных условиях.

Будущего математика, как и спортсмена, надо воспитывать с детства, и чем раньше, тем лучше. С далеких времен ведут свою историю математические турниры, но начало регулярным соревнованиям школьников по математике было положено в Венгрии в 1894 году; с того же года в России стал выходить журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики», где читателям предлагались математические задачи «на конкурс». Можно сказать, что это были заочные олимпиады.

В 1934 году член-корреспондент АН СССР Борис Николаевич Делоне пригласил ленинградских школьников на математическую олимпиаду — соревнование в решении нестандартно сформулированных задач повышенной трудности. Участников, показавших лучшие результаты, пригласили учиться в университете. На следующий год инициативу Делоне поддержали математики Москвы, а затем и других городов. Тесное и плодотворное сотрудничество ученых со школой способствовало тому, что вскоре советская математическая система образования стала одной из лучших в мире, а олимпиады стали совместными праздниками для математиков разных рангов: от учащихся до профессоров.

Первая международная олимпиада состоялась в Румынии в 1959 году, а в нашей стране математические олимпиады проводятся с 1961 г.

История математических олимпиад в Северной Осетии началась в 50–60-е годы XX века благодаря подвижнической деятельности выдающихся энтузиастов республиканской школы математики Е. А. Бугулова и Б. А. Толасова, книга которых «Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам», изданная в 1962 году, стала бесценным подарком для всех любителей математики. Вместе с ними огромную работу проводили их более молодые коллеги. Особой формой благодарности всем им будет продолжение и развитие традиций воспитания будущих математиков.

В настоящее время олимпиады проводятся ежегодно в пять туров: школьный, районный, региональный, зональный и всероссийский. Так как уровень сложности заданий от тура к туру значительно возрастает, то и подготовка к ним должна быть соответствующей.

Для успешного проведения олимпиады необходимо выполнение следующих условий:

- системная внеклассная (факультативная, кружковая) работа;

- четкая организация мероприятий;
- наличие содержательных и интересных математических задач.

При подборе олимпиадных заданий целесообразно придерживаться следующего принципа: из пяти заданий одно-два должны быть доступны большинству участников; два-три задания повышенной трудности, с которыми могут справиться не все участники; одно-два задания сложные, для их решения требуется особая математическая смекалка и подготовка.

Основой данной книги является первая часть, которая составлена из задач, предлагавшихся школьникам 9–11 классов на районных олимпиадах Северной Осетии с 1989 по 2006 годы. При их подборе и составлении вместе с источниками, указанными в конце книги, были использованы различные пособия, журналы и другие периодические издания, материалы вступительных экзаменов, централизованного тестирования, ЕГЭ, «Кенгуру», математических конкурсов и олимпиад. К большинству задач даны решения, к остальным — указания и ответы. Не везде приводятся подробные пояснения, так как «олимпиадцам» будет интереснее и полезнее самим выполнять эту работу. Указанные способы решения задач не являются единственными, и это обстоятельство должно стимулировать школьников к поиску своих методов решения.

Во вторую часть книги вошли задания республиканских математических олимпиад 1999–2006 годов для 8–11 классов, подготовленные Методическим Советом Российской математической олимпиады школьников (с 2005 г. — Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников). После каждой задачи в скобках указана фамилия ее автора. Ко всем заданиям даны только ответы, так как с учетом доступности любой информации и соответствующей литературы, отсутствие решений можно восполнить самостоятельно. Цель включения этих заданий в книгу — предоставление возможности сравнить их уровень с уровнем районного тура и подготовиться к следующим этапам математических олимпиад.

Принцип распределения задач по классам является в какой-то мере условным: одиннадцатикласснику будут интересны и полезны задания 8–10 классов, и наоборот. Не рекомендуется заглядывать в ответы и решения до того, как будут приложены достаточно продолжительные и активные усилия к самостоятельному отысканию

способа решения. Как показывает опыт, одна задача, решенная самостоятельно, хотя и с большим трудом, приносит большую пользу, чем несколько задач того же типа, решенных несамостоятельно. Это правило, требующее большого упорства и выдержки, является самым главным для того, чтобы научиться решать задачи. Если удалось найти решение задачи самостоятельно, то желательно сравнить его с приведенным в книге. Полезна также работа с такими заданиями, на безуспешное решение которых было потрачено много времени и труда, и только после чего можно использовать соответствующие указания и ответы.

Разумеется, подняться на высшие ступени математического «олимпийского пьедестала» удастся лишь немногим. Далеко не все математики — в прошлом участники и победители олимпиад. Частичная неудача на олимпиаде вовсе не свидетельствует об отсутствии математических способностей. Нужно уметь анализировать свои ошибки и причины временного неуспеха и, учитывая их, более плодотворно готовиться к следующим соревнованиям — для этого есть широкие возможности.

Книга адресована учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению математики, и учителям для дополнительной работы с ними, а также любителям математического досуга.

Выражаю глубокую признательность за советы при подготовке материалов канд. пед. наук, доценту Гуриеву М. А., доктору техн. наук, профессору Созанову В. Г., канд. физ.-мат. наук, доцентам Тибиллову К. Т. и Чшиевой Т. Л., канд. физ.-мат. наук Басаевой Е. К., учителю математики высшей категории Абатуровой В. С. за огромную работу при подготовке первой части сборника к изданию. Особую благодарность выражаю доктору физ.-мат. наук, профессору Кусраеву А. Г., благодаря помощи которого данная книга вышла в свет.

Часть I

Районные олимпиады
по математике
1989-2006 гг.

Задания

1989 г.

9 класс

1. Сколько существует четырехзначных натуральных чисел, у которых сумма двух первых цифр равна сумме последних двух цифр?

2. Доказать, что $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при любых нечетных значениях $n \in \mathbb{N}$.

3. Доказать, что во всяком треугольнике со сторонами a , b , c и медианами m_a , m_b , m_c

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

4. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{1}{y} = 3, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -3, \end{cases} \text{ где } a \text{ — параметр.}$$

5. Имеются 4 пакета и весы с двумя чашками без гирь. С помощью пяти взвешиваний расположить пакеты по массе.

10 класс

1. Найти натуральные решения уравнения $x^2 - y^2 = 1989$.

2. Доказать, что при любом натуральном n

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2 + 3n}\right) < 3.$$

3. На двух смежных сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABE и BCF . Доказать, что $\triangle DEF$ — равносторонний.

4. Доказать тождество

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

5. 3 солдата и 3 разбойника должны переправиться через реку. Они нашли лодку, но в ней вмещается только 2 человека. Нельзя оставлять на одном берегу больше разбойников, чем солдат. Как же всем шестерым переправиться через реку?

11 класс

1. Решить уравнение

$$1 + 1989 + 1989^2 + \dots + 1989^x = (1 + 1989)(1 + 1989^2) \times \\ \times (1 + 1989^4)(1 + 1989^8)(1 + 1989^{16})(1 + 1989^{32}).$$

2. Доказать, что при любом натуральном n выполняется равенство

$$1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

3. Ленту длиной 25 м и толщиной 0,1 мм намотали плотно на картонную трубку — получился валик диаметром 1 дм. Каков диаметр трубки?

4. Вычислить приближенно с помощью производных значение выражения

$$\frac{2}{1,002^3}.$$

5. См. задание 5 за 10 класс.

1990 г.

9 класс

1. Сравнить числа

$$\frac{1990^{1989} + 1}{1990^{1990} + 1} \quad \text{и} \quad \frac{1990^{1990} + 1}{1990^{1991} + 1}.$$

2. Имеет ли уравнение $42x - 99y = 1990$ целые решения?

3. Найти такие цифры x и y , чтобы выполнялось равенство $\overline{xxx} - \overline{yy} = x(\overline{xx})^2$.

4. Два всадника выезжают одновременно из A и B навстречу друг другу. После встречи первый прибывает в B через 27 мин, а второй в A через 12 мин. За какое время проехал каждый всадник путь AB ?

5. Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислить сумму квадратов расстояний от вершин квадрата до этой прямой.

10 класс

1. См. задание 3 за 9 класс.

2. Два всадника выезжают одновременно из A и B навстречу друг другу. После встречи первый прибывает в B через 50 мин, а второй в A через 32 мин. За какое время проехал каждый всадник путь AB ?

3. Построить график уравнения $|y| = ||x - 2| - 3|$.

4. Доказать, что 1 января 1990 г. в кинотеатре «Октябрь» присутствовало на первом сеансе хотя бы два зрителя, имеющих среди остальных одинаковое число знакомых.

5. В треугольнике ABC угол A в два раза меньше угла B . Доказать, что $AC^2 - BC^2 = AB \cdot BC$.

11 класс

1. Построить график функции $f(f(f(x)))$, если

$$f(x) = \begin{cases} 5 + x, & x < 0, \\ 5 - x, & x \geq 0. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $x - 2 \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{x} = 0$.

3. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые гипотенуза делится точкой касания вписанной окружности.

4. Найти сумму

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz},$$

если известно, что $xyz = 1$.

5. Имеется 10 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 10 листов. Затем некоторые из листов снова разрезали на 10 частей и т. д. Подсчитав общее число листов, получили 1991. Правильно ли произведен подсчет?

1991 г.

9 класс

1. Три товарища купили футбольный мяч за 6 руб. Сумма, внесенная каждым, не превосходит половины суммы, вложенной остальными. Сколько денег внес каждый? Сколько решений имеет задача?
2. В бидоне содержится 14 л молока. Пользуясь банками емкостью 5 л и 9 л, отлить из бидона 3 л молока.
3. Можно ли разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника?
4. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.
5. Решить в целых числах уравнение $x^2 + 5y^2 - 6xy = 9$.

10 класс

1. Можно ли в вершинах правильного восьмиугольника расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 таким образом, чтобы суммы чисел, расположенных в любых трех соседних вершинах, были: а) больше 11; б) больше 13?
2. Решить неравенство $\sqrt{x^{1991} + 1} \leq -(x + 1)$.
3. Можно ли шахматную доску 4×5 обойти шахматным конем, побывав на каждом поле ровно один раз?
4. Указать все точки на земном шаре такие, что, проехав из каждой такой точки 100 км на север, затем 100 км на запад и, наконец, 100 км на юг, мы снова возвращаемся в ту же точку.
5. Доказать, что в треугольнике биссектриса любого угла совпадает с биссектрисой угла, образованного выходящими из той же вершины высотой и диаметром описанной окружности.

11 класс

1. Решить неравенство $\sqrt{-\sin \pi x} \leq x(1-x)$.
2. Разрежьте правильный шестиугольник на восемь равных частей.
3. Доказать, что при любом натуральном n справедливо равенство

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ знаков корня}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

4. Доказать, что из любого 1991 целого числа, каждое из которых не делится на 1991, всегда можно выбрать два числа, разность которых делится на 1991.
5. См. задание 4 за 10 класс.

1992 г.

9 класс

1. Велосипедист ехал из города A в город B со скоростью 23 км/ч, а возвращался обратно со скоростью 17 км/ч. Какова была средняя скорость велосипедиста?
2. Дан квадрат $ABCD$. На стороне AB и на диагонали AC взяты соответственно точки E и H так, что $AE : EB = 3 : 2$, $AH : HC = 4 : 1$. Найти $\angle EHD$.
3. Пусть x и y такие целые числа, что произведение $(16x + 13y)(17x + 9y)$ делится на 11. Доказать, что это произведение делится также на 121.
4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0, \\ y^2 + x^2y + 2x = 0. \end{cases}$$

5. Можно ли соединить 5 телефонов между собой так, чтобы каждый был соединен только с тремя другими телефонами? А 777 телефонов?

10 класс

1. Около дома посажены липы и березы, причем общее их количество более 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берез увеличить на 18, то берез станет больше, чем лип. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количество лип, то лип все равно будет больше, чем берез. Сколько лип и сколько берез было посажено?

2. Пусть m и n — натуральные числа такие, что сумма $3m + 7n$ кратна 19. Доказать, что сумма $(43m + 75n)$ кратна 19.

3. Доказать, что если a, b, c — стороны треугольника, то при любом действительном значении x

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 > 0.$$

4. Доказать, что если a, b, c — положительные числа и $a + b + c = 1$, то $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$.

5. Доказать, что если две последние цифры целого числа нечетные, то это число не может быть точным квадратом.

11 класс

1. На фабрике несколько одинаковых поточных линий вместе выпускали в день 15 000 банок консервов. После реконструкции все поточные линии заменили на более производительные, но такие же одинаковые, а их количество увеличилось на 5. Фабрика стала выпускать 33 792 банки в день. Сколько поточных линий было первоначально?

2. Решить уравнение $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt{x-2} = 1$.

3. Построить график функции

$$y = \sqrt{x^2 + 1 - 2x} - \sqrt{x^2 + 9 + 6x} - \sqrt{16 + x^2 - 8x}.$$

4. Отрезок длины a своими концами скользит по сторонам прямого угла xOy . Найти геометрическое место середин отрезков.

5. Найти сумму

$$S = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{2 \cdot 3 + 1}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2 \cdot 1991 + 1}{1991^2 \cdot 1992^2}.$$

9 класс

1. Закончилась Великая Отечественная война. Как-то повстречались два товарища. Разговорились.

— Давненько мы с тобой не виделись. Сколько же лет теперь твоему сыну?

— Сын родился в том самом году, который был точным квадратом моего возраста в год его рождения. А сейчас ему столько лет, сколько составляет сумма цифр года моего рождения,— ответил второй.

Сколько же лет отцу-математику?

2. Квадрат размером 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел, стоящих в каждой строке, отрицательно. Доказать, что в некотором столбце произведение также отрицательно.

3. Доказать, что если $a + b = ab$, то $(a^3 + b^3 - a^3b^3)^3 + 27a^6b^6 = 0$.

4. Существует ли треугольник, длины высот которого равны 19 см, 93 см, 94 см?

5. Составить квадратное уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения $x^2 + 55x - 45 = 0$.

10 класс

1. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый. При этом было 44 попадания, остальные — промахи. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на каждый промах приходилось в два раза больше попаданий, чем у второго?

2. В таблице 4×4 расставить 16 чисел так, чтобы сумма чисел по любой вертикали, горизонтали и диагонали равнялась нулю (квадрат имеет 14 диагоналей, включая малые, состоящие из трех, двух и одной клеток).

3. Является ли число $1 + 1993^{3^{1994}}$ простым?

4. Доказать, что отношение медиан прямоугольного треугольника, проведенных к его катетам, всегда меньше 2.

5. С помощью циркуля и линейки построить отрезок $x = \sqrt{93}$.

11 класс

1. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, который сначала двигался с ускорением 4 км/ч^2 , а после того, как его скорость возросла от 0 до v , продолжал двигаться со скоростью v . Расстояние между пунктами A и B равно 32 км. На первую половину пути велосипедист затратил в полтора раза больше времени, чем на вторую. Определить скорость велосипедиста v .

2. Найти все возможные прямоугольники с целочисленными сторонами, периметр каждого из которых численно равен его площади.

3. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} |x + y| \geq y, \\ x - y \leq 0. \end{cases}$$

4. Найти радиус окружности, касающейся трех попарно касающихся окружностей радиусов 1, 2, 3, находящейся между этими окружностями (можно использовать метод координат).

5. Найти сумму бесконечной числовой последовательности

$$30, \frac{60}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}, 30(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2, \frac{60(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}, \dots$$

1994 г.

9 класс

1. Существует ли обыкновенная дробь со знаменателем 20, принадлежащая промежутку $(\frac{4}{13}; \frac{5}{13})$?

2. Доказать, что в любом треугольнике найдется не более одной стороны, которая меньше опущенной на нее высоты.

3. Найти двузначное число, равное сумме квадрата числа его единиц и числа десятков.

4. У человека на голове меньше 300 000 волос. Доказать, что во Владикавказе живут хотя бы два человека, у которых число волос одинаково.

5. Сколько раз в сутки стрелки часов образуют между собой прямые углы?

10 класс

1. У человека на голове меньше 300 000 волос. Доказать, что в РСО-А живут хотя бы 3 человека с одинаковым числом волос.
2. Доказать, что при $n > 2$ в любом прямоугольном треугольнике n -я степень гипотенузы больше суммы n -х степеней катетов.
3. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел нельзя представить в виде квадрата натурального числа.
4. Катер проходит расстояние между пристанями A и B по течению за 8 ч, а против течения — за 10 ч. Сколько часов понадобится, чтобы проплыть от A до B на плоту?
5. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = \frac{10x}{3} - \frac{40}{x}.$$

11 класс

1. Доказать, что если при всех натуральных a, b, c, n можно построить треугольники со сторонами a^n, b^n, c^n , то построенные треугольники будут равнобедренными.
2. На горизонтальной плоскости из трех точек, отстоящих от основания радиоантенны на расстояниях 100 м, 200 м, 300 м, измерены углы, под которыми видна антенна. Сумма этих углов равна 90° . Найти высоту антенны.
3. В начале олимпиады между 12 и 13 часами школьник посмотрел на часы. Закончив работу между 17 и 18 часами, он заметил, что стрелки поменялись местами. Найти время окончания работы.
4. Решить уравнение $9^x - 6^x = 4^{x+\frac{1}{2}}$.
5. Расшифровать ребус: И^Н = ДИЯ, ЯП^О = НИЯ.

1995 г.

9 класс

1. Длины двух сторон треугольника равны 2 см и 1995 см. Какова длина третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом, кратным 4?

2 Скодтаев К. Б.

2. Мотоциклист проехал путь от Владикавказа до Беслана и обратно. В Беслан он ехал со скоростью 40 км/ч. Обратно же 21/25 пути он проехал со скоростью 36 км/ч, поэтому на путь во Владикавказ было затрачено на 3,5 мин больше, чем на путь в Беслан. Каково расстояние между Владикавказом и Бесланом?

3. Какое из двух чисел больше: 15^{21} или 9^{28} ?

4. Доказать, что для любых целых a и b число $ab(a+b)$ — четное.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = \frac{2}{3}(x+y), \\ yz = \frac{6}{5}(y+z), \\ zx = \frac{3}{4}(z+x). \end{cases}$$

10 класс

1. Найти четыре целых числа, из которых первые три составляют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую прогрессию. Известно, что сумма двух крайних чисел равна 37, а сумма двух средних равна 36.

2. Известно, что $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Найти $a^4+b^4+c^4$.

3. Доказать, что сумма $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ равна целому числу при любом целом n .

4. Доказать равенство $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

5. Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний каждой точки основания от боковых сторон есть величина постоянная.

11 класс

1. Найти два положительных числа, кратных четырем, разность кубов которых равна четырехзначному числу, кратному 91.

2. Найти наименьшее из положительных и наибольшее из отрицательных значений функции $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

3. Решить уравнение $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

4. Из четырех двоек составить наибольшее число без использования знаков арифметических действий.

5. В какой точке надо провести касательную к графику функции $y = \frac{2}{3}\sqrt{18-x^2}$, $0 < x < 3\sqrt{2}$, чтобы она образовывала с координатными осями треугольник наименьшей площади?

9 класс

1. Доказать, что любой треугольник с периметром, равным 2, можно целиком покрыть кругом с радиусом $\frac{1}{2}$.

2. В круге радиуса R проведены две пересекающиеся перпендикулярные между собой хорды. Найти сумму квадратов длин хорд, если расстояние от центра круга до их точки пересечения равно d .

3. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

4. Решить уравнение $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$.

5. На берегу реки отгорожено забором место с трех сторон в форме прямоугольника; длина всего забора 100 м. Каких размеров должен быть участок, чтобы его площадь была наибольшей?

10 класс

1. Из двух натуральных чисел второе больше квадрата первого. Сумма квадрата разности первого числа и трех, и квадрата разности второго и четырех, меньше четырех. Найти эти числа.

2. Доказать для треугольника со сторонами a , b , c и полупериметром p неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4p.$$

3. Построить график функции $y = x|x|$.

4. Доказать, что $n^5 - n$ кратно 30.

5. Из вершины A квадрата $ABCD$ со стороной a проведены отрезки AM и AN к сторонам BC и DC так, что $BM : MC = 1 : 2$, $DN : NC = 2 : 3$. Эти отрезки пересекаются с диагональю BD в точках R и P . Найти площадь пятиугольника $CMRPN$.

11 класс

1. Доказать равенство

$$\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}.$$

2. Доказать неравенство при любом a

$$\sqrt{\frac{x+3}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} < \frac{a^4+1}{a^2}.$$

3. Доказать неравенство $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 = 30, \\ x^2y + xy + x + y + xy^2 = 11. \end{cases}$$

5. Прибывших на парад солдат планировали построить так, чтобы в каждом ряду стояло 24 человека. Но в действительности не каждый прибывший смог участвовать в параде, и их перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше, а число человек в ряду — на 26 больше нового числа рядов. Если бы все солдаты участвовали в параде, то их можно было бы построить так, чтобы число рядов было равно числу человек в ряду. Сколько солдат прибыло на парад?

1997 г.

9 класс

1. Двое рабочих выполнили вместе работу за 12 часов. Если бы сначала первый сделал половину этой работы, а затем другой — остальную ее часть, то они управились бы вместе за 25 часов. За какое время каждый в отдельности мог бы закончить эту работу?

2. Расшифровать следующее умножение (буквам a, b, c соответствуют различные цифры)

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{ccc} a & b & c \\ b & a & c \end{array} \\ \hline * * * * \\ * * a \\ \hline * * * b \\ \hline * * * * * \end{array}$$

3. Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13; сумма квадратов средних цифр

равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, что искомое, но в обратном порядке.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1, \\ y + |x-1| = 3. \end{cases}$$

5. Определить площадь треугольника по основанию a и по двум прилежащим к нему углам B и C , если $\angle B = 45^\circ$ и $\angle C = 30^\circ$.

10 класс

1. В 500 ящиках лежат яблоки. Известно, что ящик может вместить 240 яблок. Доказать, что, по крайней мере, в 3 ящиках содержится одинаковое число яблок.

2. Восстановить делимое по следующим следам произведенного деления

$$**234* : 72 = *0***.$$

3. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

4. Найти сумму всех коэффициентов и сумму коэффициентов при нечетных степенях для многочлена

$$P(x) = (x^3 - x + 1)^{27}(x^2 + x - 1)^{49}$$

(после раскрытия скобок и приведения подобных членов).

5. Определить площадь круга, если разность между площадью правильного вписанного в него восьмиугольника и площадью правильного вписанного шестиугольника равна 1 м^2 .

11 класс

1. Из 80 золотых монет одна фальшивая (более легкая). Как найти фальшивую монету с помощью четырех взвешиваний на весах с двумя чашками без гирь?

2. Доказать, что при любом натуральном n число $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ делится на 11.

3. Решить уравнение $x^4 + 5x - 6 = 0$.
4. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе $y = \frac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.
5. Из медиан данного треугольника с площадью S построен новый треугольник. Найти площадь этого треугольника.

1998 г.

9 класс

1. Как поделить между школой и детсадом 10 кроликов так, чтобы сумма, составленная из суммы квадратов этих частей и частного от деления «школьной» части на «детсадовскую», была 72?
2. Аристарх перемножил все натуральные числа от 1 до числа, соответствующего своему возрасту включительно. Получилось число 87 178 291 200. Сколько лет Аристарху?
3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ x^2 + xy + y^2 = 19. \end{cases}$$

4. Изобразить на плоскости фигуру, заданную неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16, \\ y - x \geq 1. \end{cases}$$

5. Найти обыкновенную дробь с наименьшим положительным знаменателем, большую $\frac{99}{38}$ и меньшую $\frac{98}{37}$.

10 класс

1. Корень квадратный из половины пчелиного роя полетел к кусту жасмина. Восемь девятых роя остались дома. Одна пчела полетела за трутнем. Сколько всего пчел?
2. Решить уравнение $|2x^2 + 5x| = |x - 2|$.
3. Решить уравнение $\sqrt{(6 + \sqrt{35})^x} + \sqrt{(6 - \sqrt{35})^x} = 2$.

4. Доказать, что если в круге две хорды пересекаются под прямым углом, то сумма квадратов четырех отрезков хорд равна квадрату диаметра.

5. См. задание 2 за 11 класс 1989 г.

11 класс

1. Решить уравнение $5x^2 - 3\sqrt{5x^2 + 3x - 7} = 5 - 3x$.

2. Решить уравнение $\sin^2 x \sin 2x + \cos^2 x \cos 2x = \frac{1}{2}$.

3. Вдоль дороги из города A в город B стоят километровые столбы. На каждом столбе с одной стороны написано расстояние до города A , а с другой стороны — до города B . Утром турист проходил мимо столба, на котором одно число в два раза больше другого. Пройдя еще 10 км, турист увидел столб, на котором числа отличались ровно в три раза. Каково расстояние от A до B ? Указать все возможные варианты.

4. Доказать, что число $1995^m + 1996^n + 2001^k$ ни при каких натуральных m, n, k не может быть квадратом натурального числа.

5. На координатной плоскости изобразить множество точек $M(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2}.$$

1999 г.

9 класс

1. Лошадь съедает воз сена за месяц, коза — за 2 месяца, овца — за 3 месяца. За какое время они вместе съедят воз сена?

2. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведена высота к гипотенузе. Периметры двух образовавшихся треугольников равны P_1 и P_2 . Каков периметр исходного треугольника?

3. Доказать, что если четное число есть сумма двух квадратов, то и половина его есть сумма двух квадратов.

4. Число x таково, что 15% от него и 33% от него — целые положительные числа. Какое наименьшее число x (не обязательно целое) обладает таким свойством?

5. На сколько частей можно разбить плоскость четырьмя прямыми? Рассмотреть все возможные случаи.

10 класс

1. Гонорар за книгу был распределен между тремя соавторами в отношении 8:6:5. Если бы этот же гонорар был распределен в отношении 7:5:4, то один из соавторов получил бы на 25 руб больше, чем получил на самом деле. Чему равна сумма гонорара?

2. Найти сумму корней уравнения

$$\sqrt{x(x-1)} + x\sqrt{2-x^2} - x = \sqrt{x} - x.$$

3. Доказать, что уравнение $x^{1999} - 1997 \cdot x^{1995} + 1993 = 0$ не имеет целых решений.

4. При каких значениях параметра a сумма целых корней уравнения $|x+3| + |x-2| = a$ равна -3 ?

5. Доказать, что для любых действительных чисел x, y, z многочлен $8x^2 + y^2 + 11z^2 + 4xy - 12xz - 5yz$ принимает неотрицательные значения.

11 класс

1. Найти x :

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = x.$$

2. В равнобедренном треугольнике радиус описанной окружности 25 см, а радиус вписанной окружности 12 см. Найти стороны треугольника.

3. Решить уравнение в натуральных числах

$$1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2.$$

4. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = x+a$ имеет единственное решение?

5. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$\left|y - \frac{1}{2}x^2\right| + \left|y + \frac{1}{2}x^2\right| < 2 + x.$$

9 класс

1. Сколькими нулями оканчивается число $2000!$?
2. Разложить на множители многочлен $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.
3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3}, \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{5}, \\ \frac{zx}{z+x} = \frac{24}{7}. \end{cases}$$

4. Имеется металлический лом двух сплавов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сплавов, чтобы получить 840 г сплава с содержанием никеля 30%?

5. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , $AM = 8$ см, $MC = 2$ см, площади треугольников AMD и BMC равны соответственно 16 см^2 и 6 см^2 . Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

10 класс

1. Сколько существует пятизначных чисел, оканчивающихся цифрой 6, которые делятся на 3?
2. На шахматной доске 8×8 произвольно проведена прямая. Чему равно наибольшее число клеток, которые она может пересечь?
3. Составить квадратное уравнение, корнем которого является число $\operatorname{ctg} 22,5^\circ$ (коэффициенты уравнения — целые числа).
4. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно 8 решений.

5. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найти длины сторон треугольника.

11 класс

1. С отвесной скалы высотой 25,0 м одна за другой упали 2 капли воды. Вторая капля начала падать, когда первая успела пройти 1,6 дм. На каком расстоянии друг от друга будут находиться капли в тот момент, когда первая капля достигнет подножия скалы?

2. В выпуклом четырехугольнике a , b , c , d — стороны, а S — площадь. Доказать, что $S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

3. На координатной плоскости рассматриваются всевозможные треугольники ABC , в каждом из которых $\angle ACB = 90^\circ$, вершина A имеет координаты $(2; 0)$, вершина C лежит на отрезке $[0; 2]$ оси Ox , а вершина B лежит на параболе $y = 2x - x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B , чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

4. Графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно прямой $y = -x$. Найти $g(x)$, если $f(x) = 3^{x-2}$.

5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение квадратного трехчлена $-x^2 + 2ax - (a^2 - 2a + 3)$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ равно -2 .

2001 г.

9 класс

1. Если первый тракторист вспахивает поле на 3 ч быстрее второго, а вместе они вспахивают то же поле за $3\frac{1}{13}$ ч, то за какое время первый тракторист один выполняет эту работу?

2. Старик, имевший трех сыновей, распорядился, чтобы они после его смерти поделили принадлежащее ему стадо верблюдов так, чтобы старший взял половину всех верблюдов, средний — треть и младший — девятую часть всех верблюдов. Старик умер и оставил 17 верблюдов. Сыновья начали дележ, но оказалось, что число 17 не делится ни на два, ни на 3, ни на 9. В недоумении, как им быть, братья обратились к мудрецу. Тот приехал к ним и разделил по завещанию. Как он это сделал?

3. Шестидесятизначное число написано с помощью 30 нулей и 30 единиц. Доказать, что оно не может быть квадратом натурального числа.

4. Сумма обратных величин трех целых положительных чисел равна 1. Каковы эти числа? Найти все решения.

5. Найти решение уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ в простых числах и доказать, что оно единственное.

10 класс

1. Трое крестьян Иван, Петр и Алексей пришли на рынок с женами: Марией, Екатериной и Анной. Кто на ком женат, нам не известно. Требуется узнать это на основании следующих данных: каждый из этих шести человек заплатил за каждый купленный предмет столько копеек, сколько предметов он купил. Каждый мужчина потратил на 48 копеек больше своей жены. Кроме того, Иван купил на девять предметов больше Екатерины, а Петр — на 7 предметов больше Марии.

2. Имеется кусок бумаги неправильной формы. Как, пользуясь только перочинным ножом, вырезать из него прямоугольник?

3. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y - \sin^2 x = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 + x = y^2 - y, \\ y^4 - 2y^3 + y = x^2 - x. \end{cases}$$

5. Доказать, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты также образуют геометрическую прогрессию.

11 класс

1. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $x^2 + y^2 \leq 4|x| + 10|y|$.

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$5^x + 5^{-x} = 6 + a(3|x| - 7 \cos x)$$

имеет нечетное число корней?

3. Известно, что $\cos 157^\circ = a$, где a задано. Выразить $\operatorname{tg} 1^\circ$ через a .

4. Существует ли функция $f(x)$, определенная и непрерывная на множестве действительных чисел, и такая, что $f(f(x)) = 1 + 2x$?

5. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию? Если да, то найти величины углов этого треугольника.

2002 г.

9 класс

1. В лавке можно было обменять 1 шило на 1 мыло, или 3 мыла на 1 шило, или 1 мыло на 4 шила (но не наоборот). После нескольких обменов у покупателя оказалось столько же мыла и шила, сколько и вначале. Доказать, что число сделанных обменов делится на 16.

2. Найти двухзначные числа, которые при делении на цифру единиц его десятичной записи дают в частном 5, а в остатке 4.

3. Доказать, что биссектрисы внешних углов прямоугольника, пересекаясь, образуют квадрат.

4. Разложить на множители многочлен $a^3(a^2 - 7)^2 - 36a$.

5. Восстановить математическую запись примера

$$\begin{array}{r} \text{о з о р н и к} \\ \text{з о р н и к} \\ \text{о р н и к} \\ + \quad \text{р н и к} \\ \quad \text{н и к} \\ \quad \text{и к} \\ \hline \text{5 5 5 3 3 2 1} \end{array},$$

где разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым буквам — одинаковые цифры.

10 класс

1. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2, \\ \frac{xyz}{y+z} = 3, \\ \frac{xyz}{z+x} = 4. \end{cases}$$

2. Описывая, что произошло с ним на торгах, Смит сказал, что за полчаса он спустил половину своих денег и у него осталось столько же центов, сколько было первоначально долларов, и ровно вдвое меньше долларов, чем было первоначально центов. Сколько центов потратил Смит на торгах?

3. Найти сумму всех действительных корней уравнения

$$\sqrt{\pi^2 - x^2} (2 + 7 \cos x - 7 \sin x - 4 \sin 2x) = 0.$$

4. В каком отношении делит площадь трапеции отрезок длины 7, соединяющий боковые стороны трапеции и параллельный ее основаниям, равным 3 и 9?

5. Доказать, что уравнение $x^2 - 2xy = 2002$ не имеет решения в целых числах.

11 класс

1. Решить неравенства $\sin x \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{ctg} x \leq \cos x$.

2. При каких значениях параметров a и b система уравнений

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

3. Найти $\log_{\frac{9}{x^5}}(81 \sqrt[3]{y})$, если $a = \log_y x$, $b = \log_3 y$.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AA_1 = 8$, $A_1 B_1 = 5$ и $A_1 D_1 = 6$ найти $\cos \angle BA_1 D$.

5. Доказать, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 0,99.$$

9 класс

1. В данном примере надо восстановить цифры, обозначенные звездочками и описать все рассуждения

$$\begin{array}{r}
 * 8 * \\
 \times 4 * 2 \\
 \hline
 7 * * \\
 3 * * \\
 * * * * \\
 \hline
 * * * * * 0 .
 \end{array}$$

2. Некто родился в девятнадцатом веке. В 1991 г. сумма цифр числа, выражающего год его рождения, равнялась сумме цифр числа, выражающего количество прожитых лет. Определить, в каком году родился этот человек.

3. Из стакана кофе в стакан молока перелили одну ложку кофе и размешали. Затем перелили обратно одну ложку смеси. Чего больше: кофе в молоке или молока в кофе?

4. «Полторы» курицы за полтора дня снесли «полтора» яйца. Сколько яиц снесут 6 куриц за 6 дней?

5. Определить сумму внутренних острых углов (при вершинах) произвольной пятиконечной звезды.

10 класс

1. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более, чем в 3 раза, превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее, чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x + y = 7, \\ yz + y + z = -3, \\ xz + x + z = -5. \end{cases}$$

3. Вычислить без таблиц $\operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ$.

4. Стороны треугольника равны 4 см, 5 см, 6 см. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

5. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

11 класс

1. Найти сумму чисел

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + 10}.$$

2. Найти функцию $y(x)$, если

$$2y(x) - 3y\left(\frac{1}{x}\right) = 5x + 7.$$

3. Зная, что $\lg 15 = a$, $\log_{20} 50 = b$, найти $\log_3 40$.

4. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, увеличенное на единицу, равно квадрату целого числа.

5. Найти наименьшее натуральное число a , при котором уравнение $x + \frac{250}{\sqrt{x}} = a$ имеет, по крайней мере, один действительный корень.

2004 г.

9 класс

1. В примере на сложение $\square + \square + \bigcirc\bigcirc = \triangle \triangle \triangle$ различные фигурки заменяют различные цифры. Какую цифру заменяет квадратик?

2. Число $111\dots 111$ (2004 единицы) разделить на 3. Сколько нулей получилось в записи частного?

3. Какое наибольшее число минут может составлять интервал, с которым в течение дня постоянно ходят автобусы одного маршрута, если по расписанию какой-то из них приходит на конечную остановку через 108 мин после прихода самого первого автобуса, еще какой-то — через 162 мин, а еще какой-то — через 252 мин?

4. Числа a, b, c удовлетворяют условиям $0 > a > b > c$. Какие из следующих неравенств при данных условиях обязательно выполняются: 1) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 2) $a - c > b$; 3) $a - c > b - c$; 4) $ac < bc$; 5) $a^2 < bc$; 6) $|2c| \neq |a + b|$?

5. Накладные расходы составляют 30% общих расходов фирмы. Если накладные расходы увеличить в 6 раз, то сколько процентов они будут составлять от общих расходов?

10 класс

1. Вычислить значение выражения $a^2 + 2b^2 + ab + b - 2004$, если a и b — корни уравнения $x^2 + x - 2004 = 0$.

2. Найти площадь фигуры, координаты всех точек которой удовлетворяют условию $|x + 5| + |y - 3| \leq 12$.

3. В треугольнике ABC (с тупым углом B) проведены высоты AD и BE . Найти углы треугольника DEC , если известно, что $\angle BAD = 15^\circ$, $\angle ABE = 20^\circ$.

4. Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3 , если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 21$.

5. В начале первой недели в пруд запустили 6 инфузорий. В конце каждой недели каждая инфузория делится на 4 части, после чего карась съедает 9 инфузорий. Найти остаток от деления на 5 натурального числа, которому будет равно число инфузорий в начале 31 недели.

11 класс

1. Вычислить

$$\left(\frac{1+2}{3} + \frac{4+5}{6} + \dots + \frac{2002+2003}{2004} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{668} \right).$$

2. В прямом круговом конусе сумма высоты и радиуса основания равна 5. Какие значения может принимать радиус шара, описанного вокруг конуса?

3. Решить уравнение

$$1 + \sin^2(x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + 3) = \log_7(7 - \sqrt{x^2 + 2x - 3}).$$

4. Для каждого значения параметра a решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{y-1} = a\sqrt[5]{z+2}, \\ \sqrt[3]{y-1} + \sqrt[5]{z+2} = a\sqrt{x}, \\ \sqrt[5]{z+2} + \sqrt{x} = a\sqrt[3]{y-1}. \end{cases}$$

5. При каких значениях параметра p уравнение

$$2x^8 + 22x^6 - 2\sqrt{p}x^5 + 71x^4 - 22\sqrt{p}x^3 + px^2 + 625 = 0$$

имеет хотя бы один корень?

2005 г.

9 класс

1. Друзья Антон, Борис и Виктор собрались поесть: Антон выложил на стол 10 пирожков, Борис — 11, Виктор — 15. К ним присоединился Григорий, заплатив друзьям за отведенную ему (равную со всеми) долю всех пирожков 36 руб. По сколько рублей должны получить из этой суммы Антон, Борис и Виктор соответственно?

2. Найти произведение корней уравнения

$$x^3 - 8x^2 + 8 + \frac{5}{x-8} = x - \frac{5}{8-x}.$$

3. Деревни Разгуляево и Усмирилово расположены на берегу реки Тихая на расстоянии 10 км друг от друга. Деду Митяю требуется испытать новую моторную лодку. На что ему понадобится больше времени: проплыть от Разгуляево до Усмирилово и обратно или проплыть по озеру 20 км?

4. Гусеница выползла из домика в полдень и ползет по луку, поворачивая через каждый час на 90° направо или налево. За первый час она проползла 1 м, за второй 2 м и т. д. На каком наименьшем расстоянии от домика она могла оказаться в 10 часов вечера?

5. По определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 20!$, чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?

З Скодтаев К. Б.

10 класс

1. Женщина решила похудеть к пляжному сезону. За весну она похудела на 25%, за лето, к сожалению, она прибавила в весе на 20%, осенью снова похудела на 10%, а зимой махнула на себя рукой и прибавила 20%. Похудела или поправилась за год эта несчастная жертва моды?

2. Найти тупой угол треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно некоторой стороны этого треугольника.

3. Сколько существует двузначных чисел, которые при перестановке цифр увеличиваются не менее, чем в три раза?

4. Из деталей двух видов делают 4-местные и 13-местные клетки для животных. На одну 4-местную клетку уходит 4 детали первого вида и 3 — второго, а на одну 13-местную — 13 и 10 деталей соответственно. Найти наибольшее суммарное количество мест, которое можно создать из 135 деталей первого вида и 89 деталей второго вида.

5. Найти сумму всех целочисленных значений параметра R , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2R|x| + 2R|y|, \\ |x| + |y| = 28 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

11 класс

1. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 = y^2 + 2y + 9$.

2. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, делит ее (трапецию) на две трапеции, площади которых относятся как 1:7. Найти длину этого отрезка, если основания трапеции равны 2 и 10.

3. Вычислить без таблиц $\sin 47^\circ + \sin 87^\circ + \sin 127^\circ + \dots + \sin 367^\circ$.

4. Христофор продолжает изучать русский язык. Он выписывает подряд натуральные числа словами до тех пор, пока не напишет первое число, в записи которого участвуют все буквы слова «число». Ежедневно он занимается по 9 часов, по воскресеньям отдыхает. В минуту (в среднем) записывает 20 чисел. Успеет ли он до Нового года дойти до желанного числа, если начал заниматься 15.09.2005 г.?

5. Расстояние от Парижа до Марселя (по шоссе) равно 72 лье. В Париже находится 25000 мушкетеров, а в Марселе — 9000. На каком расстоянии от Парижа следует расположить винокуренный завод для обслуживания мушкетеров, чтобы минимизировать транспортные расходы, если затраты на перевозку P тонн бургундского на расстояние L лье составляют PL^3 бурбонов?

2006 г.

9 класс

1. Какова последняя цифра в записи числа 5^{-2000} в виде десятичной дроби?

2. Две окружности, вписанные в прямой угол, касаются друг друга. Найти отношение радиусов окружностей.

3. За круглым столом сидят 6 человек, каждый из которых — одного из двух типов: «лжец» (т. е. всегда лжет) или «правдивец» (т. е. всегда говорит правду). Каждый из них утверждает: «Мои соседи справа и слева — разного типа». Сколько «правдивцев» сидит за столом?

4. Доказать, что ни при каких натуральных значениях x и y выражение $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ не равно 33.

5. В течение дня по прямой дороге мимо стоявшего на ней наблюдателя проследовал двигавшийся с постоянной скоростью объект. В 10 часов расстояние между наблюдателем и объектом составляло 2 км, в 15 часов — 5 км, а поравнялись они позднее 7 часов. Какое расстояние между ними было в 11 часов?

10 класс

1. Расположить в порядке возрастания следующие числа: $(0,1)^{100}$; $(0,9)^{1000}$; $(1,1)^{10}$; $5^{0,01}$; $2^{0,1}$ и указать самое близкое к 1 число из перечисленных.

2. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D так, что $AD : DB = 1 : 4$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C прямого угла на гипотенузу, если известно, что длина катета BC равна 10.

3. На вспашку поля трактористу было отведено 3 ч. Приступив к работе вовремя, он вспахал треть поля с производительностью, на 25% больше положенной, а затем, уменьшив свою последнюю производительность на 25%, закончил работу раньше времени. На сколько минут раньше тракторист закончил работу?

4. За круглым столом сидят 7 человек, каждый из которых — одного из двух типов: «лжец» (т. е. всегда лжет) или «правдивец» (т. е. всегда говорит правду). Каждый из них утверждает: «Хотя бы один из моих соседей — лжец». Сколько «лжецов» сидит за столом?

5. Найти значение выражения: $\cos \frac{\pi}{11} \cdot \cos \frac{2\pi}{11} \cdot \cos \frac{3\pi}{11} \cdot \dots \cdot \cos \frac{10\pi}{11}$.

11 класс

1. В выражении $3 * 4 * 6 * 8 * 10 * 12 * 14 * 16$ каждую звездочку можно заменить на «+» или «-». Какие из чисел -80 ; -16 ; 10 ; 15 можно получить таким образом?

2. На вспашку поля трактористу было отведено 8 ч. Приступив к работе раньше времени, он вспахал четверть поля с производительностью, на 20% меньше положенной, а затем, увеличив свою последнюю производительность на 20%, закончил работу вовремя. На сколько минут раньше тракторист приступил к работе?

3. Доказать, что для многочлена $P(x) = (1 - x^2 + x^3)^{2006}$ выполняется равенство: $P(m_{\text{неч.}}) + P(m_{\text{чет.}}) = 2P(m)$, где m — сумма всех коэффициентов $P(x)$, $m_{\text{неч.}}$ — сумма коэффициентов при нечетных степенях, $m_{\text{чет.}}$ — сумма коэффициентов при четных степенях многочлена $P(x)$.

4. Целые числа a, b, c, x, y, z таковы, что $a+b+c=0$, $x+y+z=0$. Доказать, что произведение

$$(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} + \sqrt{c^2+z^2})(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} - \sqrt{c^2+z^2}) \times \\ \times (\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{b^2+y^2} + \sqrt{c^2+z^2})(-\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} + \sqrt{c^2+z^2})$$

является квадратом целого числа.

5. При каких значениях параметра p уравнение

$$x^4 - 6x^3 + (13 - 2p)x^2 + (6p - 10)x + p^2 - 5p = 0$$

имеет ровно три различных действительных корня?

9 класс

1. Пусть сумма двух первых цифр равна k . По условию $1 \leq k \leq 18$, где k — число натуральное. При $k = 1$ получим два числа 1001, 1010. Заметим, что $2 = 2^2 - 2$. При $k = 2$ получим шесть чисел 2020, 2002, 2011, 1120, 1111, 1102. Заметим, что $6 = 3^2 - 3$. При $k = 3$ чисел, удовлетворяющих условию, будет 12. Справедливо равенство $12 = 4^2 - 4$. Эта закономерность прослеживается и для $k = 4, \dots, 9$. Действительно, при $k = 9$, чисел, удовлетворяющих условию задачи, будет 90, при этом $90 = 10^2 - 10$. Однако, начиная с $k = 10$, выполняется другая закономерность. В самом деле, при $k = 10$ искомых чисел будет $81 = 9^2$, при $k = 11$ их станет $64 = 8^2$. Далее, для $k = 12, \dots, 18$ искомых чисел будет $7^2, \dots, 1^2$ соответственно.

Пусть всего существует S искомых чисел, тогда
 $S = (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + \dots + (10^2 - 10) + (9^2 + 8^2 + \dots + 2^2 + 1^2) = 615$.

Ответ: 615.

2. По условию $n = 2k - 1$, где $k \in N$, тогда $n^3 + 3n^2 - n - 3 = 8(k - 1) \cdot k(k + 1)$. Известно, что среди любых трех последовательных натуральных чисел $k - 1$, k и $k + 1$ одно число обязательно четное, одно — кратное 3, тогда их произведение делится на 6. Таким образом, данное число делится на 48.

3. Используя теорему косинусов для треугольника ABC (со сторонами a , b , c и медианами m_a , m_b , m_c) в общепринятых обозначениях, получим следующие соотношения:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}; \quad m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4};$$

Сложив почленно левые и правые части этих равенств, получим требуемое равенство.

4. Сложим оба уравнения системы, получим $\frac{a+1}{x} = 0$. Это равенство возможно только при $a = -1$ и $x \neq 0$. При $a = -1$ оба уравнения

исходной системы можно записать в виде $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -3$. Таким образом, система равносильна одному уравнению с двумя неизвестными. Оно имеет бесконечное множество решений. Пусть $x = t, t \neq 0$ тогда $y = -\frac{t}{3t+1}, t \neq -\frac{1}{3}$.

Ответ: при $a \neq -1$ система не имеет решения; при $a = -1$ система имеет бесконечное множество решений $\left(t; -\frac{t}{3t+1}\right)$, где t — произвольное вещественное число, $t \neq 0, t \neq -\frac{1}{3}$.

5. С помощью трех взвешиваний расположим по массе три пакета (сравнивая каждую пару), потом положим на одну чашу весов оставшийся (4-ый пакет), а на другую — тот из трех, который имеет среднюю массу. Пятым взвешиванием сравним массу 4-го пакета либо с самым тяжелым, либо с самым легким из трех.

10 класс

1. Указание. Воспользовавшись соотношениями: $(x-y)(x+y) = 1 \cdot 1989 = 3 \cdot 663 = 9 \cdot 221 = 13 \cdot 153 = 17 \cdot 117 = 39 \cdot 51 = \dots$ и учитывая, что x и y натуральные числа и $x-y < x+y$, получим искомые решения.

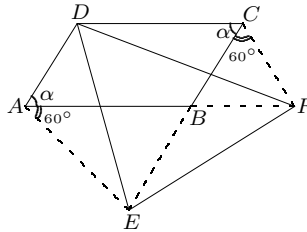
Ответ: (995; 994), (333; 330), (115; 106), (83; 70), (67; 50), (45, 6).

2. Пусть $a_1 = 1 + \frac{1}{2}, a_2 = 1 + \frac{1}{5}, a_3 = 1 + \frac{1}{9}, \dots, a_n = 1 + \frac{2}{n^2+3n}$. Заметим, что $a_n = 1 + \frac{2}{n^2+3n} = \frac{n^2+3n+2}{n(n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$, тогда $S_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} = 3 \cdot \frac{n+1}{n+3}$, но $\frac{n+1}{n+3} < 1$, значит $S_n < 3$ для любых натуральных n .

3. Поскольку $\triangle ABE$ и $\triangle BCF$ равносторонние, а $ABCD$ — параллелограмм, то справедливы следующие соотношения: $CD = AB = AE, CF = CB = AD, \angle DCF = \angle DCB + 60^\circ = \angle DAF + 60^\circ = \angle DAE$. Следовательно, $\triangle CDF = \triangle DAE$, тогда $DE = DF$ (1).

Обозначим $\angle DAF = \alpha$, тогда можно заметить, что $\angle EBF = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 60^\circ - 60^\circ = \alpha + 60^\circ$, т. е. $\angle EBF = \angle DAE$. Поскольку $BE = AE, BF = AD, \angle EBF = \angle DAE$, то $\triangle EBF = \triangle EAD \Rightarrow EF = ED$ (2).

Из соотношений (1) и (2) следует, что $DF = ED = EF$, т. е. треугольник DEF — равносторонний.



4. Рассмотрим левую часть равенства. Используя тригонометрические преобразования, получим:

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{\pi}{7} - 2 \cos \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \cos \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{3\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} =$$

$$= \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{14}} \left(\cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{3\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} \right) = \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}.$$

5. Одно из решений задачи приведено в таблице. Введем условные обозначения: C — солдат, P — разбойник, $\downarrow$ — движение к правому берегу, $\uparrow$ — движение к левому берегу.

	0	1		2		3		4		5		6	
Левый берег	CCC PPP	CC PP	CC PP	CC P	CC P	C P	C P	PP	PP	P	P	–	–
Лодка		↓ C P	↑ C P	↓ C P	↑ C P	↓ CC P	↑ CP P	↓ CC P	↑ C P	↓ CP P	↑ C P	↓ CP P	–
Правый берег			P	P	PP	PP	PC	PC	CC P	CC P	CC PP	CC PP	CCC PPP

11 класс

1. Умножим обе части уравнения на выражение $(1 - 1989)$, не равное нулю, и выполним тождественные преобразования, после чего получим: $1 - 1989^{x+1} = 1 - 1989^{64}$.

Ответ: 63.

2. Указание. Применить метод математической индукции.

3. $S = \pi R^2 = 25\pi$ (см²),

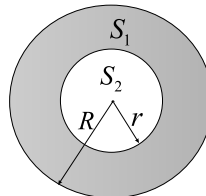
$S_1 = 2500 \cdot 0,01 = 25$ (см²);

$S_2 = \pi r^2$, $S_2 = S - S_1 = 25(\pi - 1)$;

$\pi r^2 = 25(\pi - 1)$, $r = 5\sqrt{\frac{\pi-1}{\pi}}$;

$d = 10\sqrt{\frac{\pi-1}{\pi}}$.

Ответ: $10\sqrt{\frac{\pi-1}{\pi}}$.



4. Введем функцию $f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$. Вычислим значение $\frac{2}{1,002^3}$ приближенно, используя формулу $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. Пусть $x_0 = 1$, $x_0 + \Delta x = 1 + 0,002$; $\Delta x = 0,002$, тогда $f(x_0) = 2$, $f'(x) = -6x^{-4}$; $f'(x_0) = -6$. Имеем, что $f(x_0 + \Delta x) = f(1,002) = \frac{2}{1,002^3} \approx 2 + (-6) \cdot 0,002 = 2 - 0,012 \approx 1,988$.

Ответ: $\approx 1,988$.

5. См. решение задания 5 за 10 класс.

9 класс

1. Известно, что для любых действительных чисел a и b , $a > b$, если $a - b > 0$. Рассмотрим разность

$$\frac{n^{n-1} + 1}{n^n + 1} - \frac{n^n + 1}{n^{n+1} + 1} = \frac{n^{n-1}(n-1)^2}{(n^n + 1)(n^{n+1} + 1)} > 0 \text{ при } n > 1.$$

Если $n = 1990$, то имеем

$$\frac{1990^{1989} + 1}{1990^{1990} + 1} - \frac{1990^{1990} + 1}{1990^{1991} + 1} > 0,$$

т. е. первое число больше второго.

Ответ: первое число больше второго.

2. Левая часть уравнения $42x - 99y = 1990$ при любых целых x и y делится на 3, а правая — нет. Таким образом, уравнение не будет иметь целых решений.

Ответ: не имеет.

3. Перепишем равенство в виде $1111x - 11y = x(11x)^2$, отсюда $y = x(101 - 11x^2)$. Так как x и y — цифры, большие нуля, то справедливо соотношение $1 \leq 101 - 11x^2 \leq 9$ или $92 \leq 11x^2 \leq 100$. Решив полученное неравенство и, учитывая, что x — цифра, получим $x = 3$. Тогда $y = 6$.

Ответ: $x = 3$, $y = 6$.

4. По условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} v_1 t = 12v_2, \\ v_2 t = 27v_1, \end{cases}$$

где t — время до встречи, v_1 , v_2 — скорости I-го, II-го всадника. Отсюда

$$\begin{cases} \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}, \\ t = 12 \frac{v_2}{v_1}, \end{cases}$$

т. е. $t = 18$. Тогда первый всадник проехал путь AB за время $18 + 27 = 45$ мин, а второй — за время $18 + 12 = 30$ мин.

Ответ: 45 мин, 30 мин.

5. Поскольку треугольник AOM равен треугольнику BON , как прямоугольные треугольники с равными гипотенузами и острыми углами ($AO = BO$, $\angle AOM = \angle BON$), значит $OM = BN$. В треугольнике AOM выполняется равенство $AM^2 + OM^2 = AO^2$. Но $OM = BN$, а $AO = \frac{1}{2}AC$, поэтому равенство примет вид: $AM^2 + BN^2 = \frac{1}{4}AC^2$. Поскольку $AC = \sqrt{2}$, то $AM^2 + BN^2 = \frac{1}{2}$. Аналогично $DK^2 + CL^2 = \frac{1}{2}$, т. е. $AM^2 + BN^2 + DK^2 + CL^2 = 1$ (рис. 1).

Ответ: 1.

10 класс

1. См. решение задания 3 за 9 класс.

2. См. решение задания 4 за 9 класс.

Ответ: 90 мин, 72 мин.

3. Последовательно построим графики уравнений 1) $y = x - 2$, 2) $y = |x - 2|$, 3) $y = |x - 2| - 3$, 4) $y = ||x - 2| - 3|$, 5) $|y| = ||x - 2| - 3|$. Ответ изображен на рис. 2.

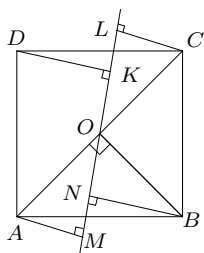


Рис. 1.

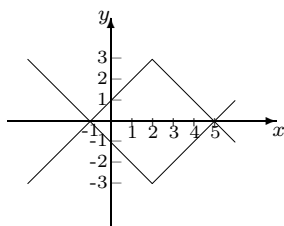
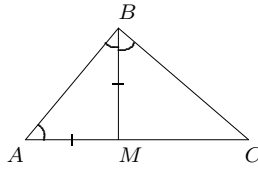


Рис. 2.

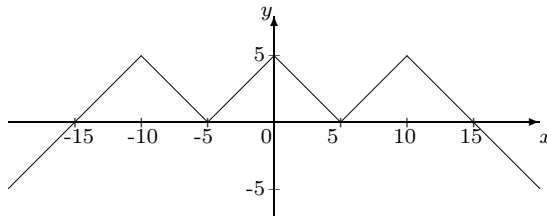
4. Условно пронумеруем зрителей, присутствующих на первом сеансе, $1, 2, 3, \dots, n$. Допустим, что у всех имеется разное число знакомых. Пусть у первого зрителя знакомых — 0, у второго — 1, у третьего — 2, ..., у n -го — $(n - 1)$ зритель. Получается, что первый ни с кем не знаком, а последний знаком со всеми, чего быть не может. Пришли к противоречию, которое следует из неверного предположения. Таким образом, имеется хотя бы два зрителя, у которых одинаковое число знакомых в зале.

5. Рассмотрим $\triangle ABC$. Проведем биссектрису BM угла B . Тогда $\triangle ABC \sim \triangle BCM$, так как $\angle C$ общий, $\angle MBC = \angle BAC$. Отсюда $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BM} = \frac{BC}{MC}$. Используя свойство, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, имеем: $\frac{AC}{BC} = \frac{AB+BC}{BM+MC} = \frac{AB+BC}{AC}$, тогда $AC^2 - BC^2 = BC \cdot AB$.



11 класс

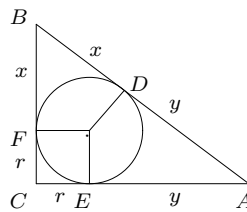
1. Перепишем исходную функцию в виде $f(x) = 5 - |x|$, тогда $f(f(f(x))) = 5 - |5 - |5 - |x|||$. График $y = f(f(f(x)))$ получим методом последовательных построений. Покажем схематически: $|x| \rightarrow -|x| \rightarrow 5 - |x| \rightarrow |5 - |x|| \rightarrow -|5 - |x|| \rightarrow 5 - |5 - |x|| \rightarrow |5 - |5 - |x|| \rightarrow -|5 - |5 - |x|| \rightarrow 5 - |5 - |5 - |x||$. Результат построений показан на рисунке:



2. Возможны два случая: 1) $x > 0$, тогда, поскольку $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $2 \sin \frac{\pi x}{2} \geq 2$, т. е. $\sin \frac{\pi x}{2} \geq 1$, что возможно лишь в случае, когда $\sin \frac{\pi x}{2} = 1$, т. е. $x_1 = 1$; 2) $x < 0$, тогда $x + \frac{1}{x} \leq -2$, следовательно, $2 \sin \frac{\pi x}{2} \leq -2$, т. е. $\sin \frac{\pi x}{2} \leq -1$, откуда, $x_2 = -1$.

Ответ: $\{-1; 1\}$.

3. Рассмотрим $\triangle ABC$ с прямым углом C . Обозначим точки касания вписанной окружности радиуса r с гипотенузой и катетами соответственно D, E, F . Обозначим: $BD = x$, $AD = y$, тогда требуется доказать, что $S_{\triangle ABC} = xy$. С одной стороны, $2S_{\triangle ABC} = (x+r)(y+r)$. С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = r(x+y+r)$. Но тогда $(x+r)(y+r) = 2(x+y+r)r$, откуда $xy = (x+y+r)r \Rightarrow S_{\triangle ABC} = xy$.



4. Умножив числитель и знаменатель второй дроби на x , третьей — на xy и, учитывая, что $xyz = 1$, получим выражение, $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+1} + \frac{xy}{xy+1+x} = 1$.

Ответ: 1.

5. При разрезании одного листа на 10 частей общее число листов увеличивается на 9 листов. Следовательно, каждый раз число листов будет увеличиваться на 9, а поэтому всего листов получится $9k + 10$ или $9n + 1$ лист, если $n = k + 1$. По условию задачи общее число листов равно $1991 = 9m + 2$. Таким образом, делаем вывод, что подсчет произведен неправильно.

Ответ: нет.

1991 г.

9 класс

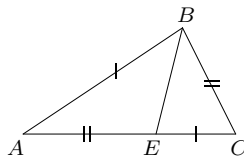
1. Пусть x, y, z руб. — суммы, внесенные соответственно каждым из товарищей. Тогда по условию задачи $x + y + z = 6$ и $x \leq \frac{y+z}{2}$, но $y + z = 6 - x$, тогда $x \leq \frac{6-x}{2} \Rightarrow x \leq 2$; аналогично $y \leq 2$; $z \leq 2$. Но так как $x + y + z = 6$, то $x = y = z = 2$ — единственное решение.

Ответ: каждый внес по 2 руб.; задача имеет одно решение.

2. Пусть $(x; y; z)$ — тройка чисел, характеризующая количество молока в бидоне, банке емкостью 9 л, банке емкостью 5 л соответственно. Тогда один из способов решения представим схематически $(14; 0; 0) \rightarrow (5; 9; 0) \rightarrow (5; 4; 5) \rightarrow (10; 4; 0) \rightarrow (1; 9; 4) \rightarrow (1; 8; 5) \rightarrow (6; 8; 0) \rightarrow (6; 3; 5)$.

3. Предположим, что разрез разностороннего $\triangle ABC$ на два равных возможен, например, $\triangle ABE = \triangle BEC$, где BE — общая сторона; так как $AB \neq BC$, то $AB = EC$, $BC = AE$ и $AB + BC = AE + EC = AC$, что невозможно.

Ответ: нет.



4. Пусть для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C — вписанная окружность с центром O' и диаметром d и описанная окружность с центром в точке O и диаметром D . Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами BC , AB ,

2. По условию справедлива следующая система неравенств:

$$\begin{cases} x^{1991} + 1 \geq 0, \\ -(x + 1) \geq 0, \end{cases}$$

решением которой является $x = -1$.

Ответ: -1 .

3. Можно. Предложим, например, один из вариантов:

20	5	16	9	12
15	8	11	4	17
6	19	2	13	10
1	14	7	18	3

Примечание. Числами обозначены порядковые номера ходов шахматного коня.

4. Южный полюс и все точки параллели, находящейся на расстоянии 100 км от параллели с длиной (по окружности) 100 км вблизи северного полюса.

5. Рассмотрим $\triangle ABC$. Проведем биссектрису AM угла A , высоту AH и окружность, описанную около $\triangle ABC$ с центром в точке O радиусом OA (рис. 4). Тогда $\angle BAM = \angle CAM$; $AH \perp BC$; AE — диаметр окружности, $AB \perp BE$, $\angle BEA = \angle BCA$ (как углы, опирающиеся на дугу AB), т. е. $\triangle BEA$ и $\triangle HCA$ подобны, значит $\angle BAE = \angle HAC$, а отсюда $\angle EAM = \angle HAM$. Аналогичное доказательство можно провести и для углов B и C .

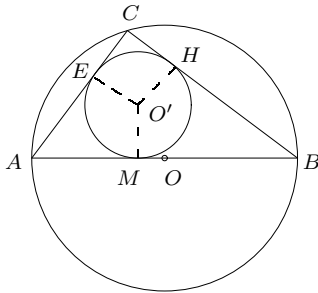


Рис. 3.

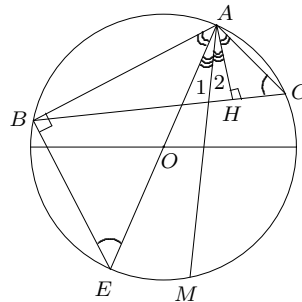


Рис. 4.

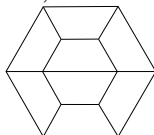
11 класс

1. Учитывая область допустимых значений переменной x , имеем:

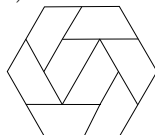
$$\begin{cases} -\sin \pi x \geq 0, \\ x(1-x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \pi x \leq 0, \\ 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 1.$$

Ответ: $\{0; 1\}$.

2. а)



б)



3. Справедливы следующие соотношения:

$$2 + \sqrt{2} = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{8}.$$

Тогда, поскольку, $\cos \frac{\pi}{2^3} > 0$, то $\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^3}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^3}$,

$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^4}$ и т. д. Далее, используя метод математической индукции, можно доказать требуемое равенство.

4. Среди этих чисел найдется хотя бы одна пара чисел, которая дает одинаковые остатки при делении на 1991. Тогда разность этих чисел будет кратна 1991.

5. См. решение задания 4 за 10 класс.

1992 г.

9 класс

1. Пусть s — расстояние от A до B , S — расстояние от A до B и обратно, т. е. $S = 2s$; t_1 — время от A до B , t_2 — время от B до A .

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{T} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{\frac{s}{23} + \frac{s}{17}} = 19,55 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 19,55 км/ч.

$$(ED)^2 = \left(\frac{3}{5}a\right)^2 + a^2 = \frac{34}{25}a^2.$$

Ответ: 90° .

4. Умножив второе уравнение на x , и вычтя из него первое, выразим y через x . Тогда $y = \frac{x^2}{x^3+2}$. Подставив найденное значение y в первое уравнение, получим:

$$x \cdot \left(\frac{x^2}{x^3 + 2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x^3 + 2} + 3x^2 = 0, \quad x^2 \cdot (3x^6 + 11x^3 + 8) = 0.$$

Ответ: $(0; 0)$, $(-1; 1)$, $(-\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}; -2\sqrt[3]{3})$.

Ответ: а) нет; б) нет.

10 класс

1. По условию задачи можно составить систему неравенств:

$$\begin{cases} x + y > 14, & (1) \\ 2x < y + 18, & (2) \\ x > 2y, & (3) \end{cases}$$

где x — число лип, y — число берез, причем $x, y \in \mathbb{N}$. Из (2) и (3) следует, что $4y < 2x < y + 18$, т. е. $y < 6$. Из (1) и (2) следует, что $28 - 2y < 2x < y + 18$, $y > \frac{10}{3}$. Таким образом, $\frac{10}{3} < y < 6$. Учитывая, что $y \in \mathbb{N}$, имеем: $y_1 = 4$, тогда $10 < x_1 < 11$, что не удовлетворяет условию $x \in \mathbb{N}$; $y_2 = 5$, тогда $10 < x_2 < 11,5$. Учитывая, что $x \in \mathbb{N}$, $x_2 = 11$.

Ответ: 11 лип и 5 берез.

2. Имеем равенство $43m + 75n = 8(3m + 7n) + 19(m + n)$. Оба слагаемых в правой части равенства кратны 19, следовательно, и сумма кратна 19.

3. Известно, что в треугольнике со сторонами a, b, c справедливы соотношения $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$. Найдем дискриминант квадратного трехчлена $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$:

$D = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) = ((b-c)^2 - a^2)((b+c)^2 - a^2) = (b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a) < 0$, поскольку первый множитель отрицателен, а остальные — положительны, то $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 > 0$ для любых x .

4. Запишем соотношения: $\sqrt{4a+1} < \sqrt{4a^2+4a+1} = 2a+1$; $\sqrt{4b+1} < 2b+1$; $\sqrt{4c+1} < 2c+1$. Тогда $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 2(a+b+c) + 3 = 5$.

5. Используя равенство $(10M + n)^2 = 100M^2 + 10 \cdot 2Mn + n^2$, где $n = 1; 3; 5; 7; 9$, получим, что если последняя цифра квадрата целого числа нечетная, то предпоследняя цифра будет четной.

11 класс

1. Обозначим через x первоначальное количество поточных линий, тогда справедливо соотношение: $\frac{15\,000}{x} < \frac{33\,792}{x+5}$, т. е. $x > \frac{75\,000}{18\,792}$ или $x \geq 4$ (так как $x \in \mathbb{N}$). По условию задачи имеем:

$$\begin{cases} \frac{15\,000}{x} = m, \\ \frac{33\,792}{x+5} = n, \\ x \geq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot m = 15\,000, \\ (x+5) \cdot n = 33\,792, \\ x \geq 4; \end{cases}$$

причем $m, n \in \mathbb{N}$. Поскольку $15\,000 = 3 \cdot 5^4 \cdot 2^3$, $33\,792 = 3 \cdot 11 \cdot 2^{10}$, то x надо искать среди делителей 15 000, с учетом, что x не делится на 5, так как из второго равенства $(x+5)$ не делится на 5. Из остальных

делителей $x = 4; 6; 8; 12; 24$ условию задачи удовлетворяет только $x = 6$.

Ответ: 6 поточных линий.

2. Запишем уравнение в виде $\sqrt[3]{3-x} = 1 - \sqrt{x-2}$. Тогда имеем: $(\sqrt[3]{3-x})^3 = (1 - \sqrt{x-2})^3$. Проведя тождественные преобразования, получим: $4(x-2) - 3\sqrt{x-2} - (\sqrt{x-2})^3 = 0$, решением которого являются числа 2; 3; 11.

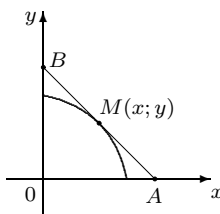
Ответ: 2; 3; 11.

3. Указание. Представим функцию в виде:

$$y = |x-1| - |x+3| - |x-4| = \begin{cases} x, & \text{если } x < -3, \\ -x-6, & \text{если } -3 \leq x < 1, \\ x-8, & \text{если } 1 \leq x < 4, \\ -x, & \text{если } x \geq 4. \end{cases}$$

4. Введем декартову систему координат. Рассмотрим отрезок AB длины a . Пусть $M(x, y)$ — середина отрезка AB . Тогда $A(2x; 0)$, $B(0; 2y)$; $AB = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = a$. Таким образом, справедлива следующая система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$



которая задает множество середин отрезков.

Ответ: искомое геометрическое место точек — часть окружности $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, лежащая в I-ой четверти.

5. Воспользуемся соотношением:

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Тогда

$$S = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1991^2} - \frac{1}{1992^2}\right) = 1 - \frac{1}{1992^2} = \frac{3968063}{3968064}.$$

Ответ: $\frac{3968063}{3968064}$.

4 Скодтаев К. Б.

9 класс

1. Сын родился в 1936 г., а отец — в 1892 г., встретились фронтовые товарищи в 1956 г.

Ответ: 64 г.

2. Произведение всех чисел квадрата 5×5 отрицательно (так как произведение чисел в каждой из пяти строк отрицательно). Значит, существует хотя бы один столбец, в котором произведение чисел отрицательно.

3. Поскольку $a+b=ab$, то $(a+b)^3 = a^3b^3$. Тогда $(a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3)^3 + 27a^6b^6 = (-3ab(a+b))^3 + 27a^6b^6 = (-3a^2b^2)^3 + 27a^6b^6 = 0$.

4. Допустим, что существует такой треугольник, у которого длины высот равны 19 см, 93 см, 94 см. Тогда

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 19 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 93 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 94,$$

где a, b, c — стороны треугольника, S — площадь. Отсюда $a > b + c$, что противоречит неравенству треугольника, т. е. такого треугольника не существует.

Ответ: не существует.

5. По условию справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -55, \\ x_1 \cdot x_2 = -45, \\ y_1 = \frac{1}{x_1^2}, \\ y_2 = \frac{1}{x_2^2}, \end{cases}$$

где y_1 и y_2 — корни искомого квадратного уравнения. Тогда имеем:

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{623}{405},$$

$$y_1y_2 = \frac{1}{(x_1x_2)^2} = \frac{1}{2025}.$$

По теореме Виета искомое уравнение будет иметь вид:

$$y^2 - \frac{623}{405}y + \frac{1}{2025} = 0.$$

10 класс

1. Пусть x — количество попаданий первого стрелка, y — второго стрелка. Тогда имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 44, \\ \frac{x}{30-x} = 2 \cdot \frac{y}{30-y}, \end{cases}$$

откуда $x = 24$, $y = 20$.

Ответ: 24; 20.

2. Ответ к задаче представим в общем виде:

0	x	$-x$	0
$-x$	0	0	x
x	0	0	$-x$
0	$-x$	x	0

, x — любое число.

Задача имеет бесконечное множество решений.

3. Известно, что 3^{1994} кратно 3, т. е. $3^{1994} = 3k$, k — натуральное число. Значит, $1 + 1993 \cdot 3^{1994} = 1 + 1993 \cdot 3k = 1 + (1993k) \cdot 3 = (1 + 1993k)(1 - 1993k + 1993^2k)$. Таким образом, $1 + 1993 \cdot 3^{1994}$ — составное число.

Ответ: не является.

4. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, AD и BF — медианы, проведенные к катетам BC и AC соответственно и $CD = a$, $CF = b$ (рис. 5). Тогда $AC = 2b$, $BC = 2a$; $AD = \sqrt{a^2 + 4b^2}$, $BF = \sqrt{4a^2 + b^2}$. Пусть $a \geq b$, тогда $BF \geq AD$, т. е. $\frac{BF}{AD} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} < \frac{\sqrt{4a^2 + 4b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2$.

5. Указание. $x = \sqrt{93} = \sqrt{100 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{10^2 - \sqrt{4^2 - 3^2}}$ (рис. 6).

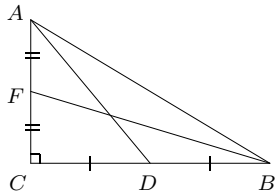


Рис. 5.

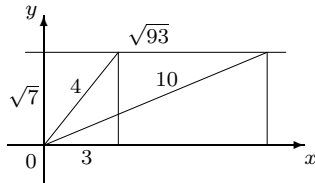
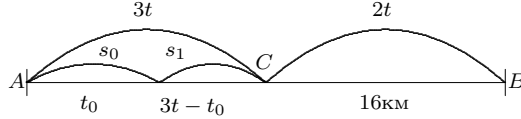


Рис. 6.

11 класс

1. Составим схематический рисунок к задаче. Пусть t_0 — время движения велосипедиста с ускорением 4 км/ч^2 , тогда $v \cdot 2t = 16$, $t = \frac{8}{v}$. $AC = CB = 16$, $s_0 + s_1 = 16$. Используя формулу для скорости, имеем: $v = at_0 = 4t_0$, $t_0 = \frac{v}{4}$; при этом $s_0 = \frac{at_0^2}{2} = \frac{v^2}{8}$, $s_1 = (3t - t_0)v = (3t - \frac{v}{4})v$, $\frac{v^2}{8} + (3 \cdot \frac{8}{v} - \frac{v}{4}) \cdot v = 16$, $v = 8$.

Ответ: 8 км/ч .



2. Обозначим через x и y стороны прямоугольника, тогда имеем: $2(x + y) = xy$. Запишем уравнение в виде: $(xy - 2x) - (2y - 4) = 4$ или $(x - 2)(y - 2) = 4$.

Ответ: 3×6 и 4×4 .

3. $\begin{cases} |x + y| \geq y, \\ x - y \leq 0 \end{cases}$ (рис. 7).

4. $OO_1 = 3$, $OO_2 = 4$, $O_1O_2 = 5 \Rightarrow \angle O_1OO_2 = 90^\circ$ (рис. 8).

$$\left. \begin{aligned} OM^2 &= (r + 1)^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ O_1M^2 &= (r + 2)^2 = (3 - x_0)^2 + y_0^2 \\ O_2M^2 &= (r + 3)^2 = x_0^2 + (4 - y_0)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_0 = \frac{21}{23}, y_0 = \frac{20}{23}, r = \frac{6}{23}.$$

Ответ: $\frac{6}{23}$.

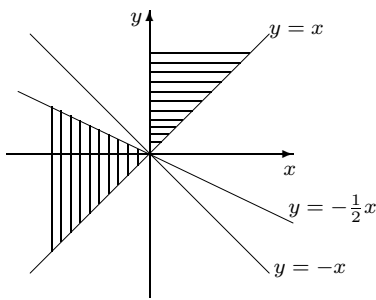


Рис. 7.

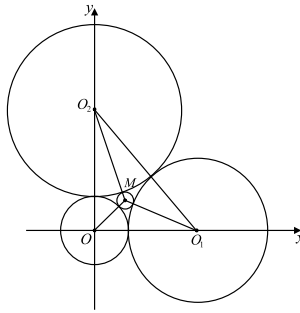


Рис. 8.

$$5. \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}); S = 30+30(\sqrt{5}-\sqrt{3})+30(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+\dots =$$

$$\frac{30}{1-(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{30}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{30}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}.$

1994 г.

9 класс

1. Ответ: существует, $\frac{7}{20}$.

2. Предположим, что это не так, т. е. $a < h_a$, $b < h_b$. Известно, что высота треугольника не больше сторон, выходящих из той же вершины, поэтому $a < h_a \leq b < h_b \leq a$, что невозможно.

3. Пусть $\overline{xy}$ — искомое число, причем $x \neq 0$. Тогда $\overline{xy} = 10x + y = x + y^2$, $y^2 - y - 9x = 0$, $x = \frac{y(y-1)}{9}$, т. е. $y = 9$, $x = 8$.

Ответ: 89.

4. Население Владикавказа больше 330 000 человек. Пусть 300 000 жителей города имеют разное число волос. Пронумеруем их 1, 2, ..., 300 000. Тогда у 300 001-го жителя число волос с кем-то совпадает.

5. В течение каждого часа стрелки 2 раза располагаются под прямым углом друг к другу, кроме промежутков от 3 до 4, от 9 до 10, от 15 до 16, от 21 до 22 часов (тогда по одному разу).

Ответ: 44.

10 класс

1. См. решение задания 4 за 9 класс.

2. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой c и катетами a и b справедливы соотношения: $c^n = c^{n-2}c^2 = c^{n-2}(a^2 + b^2) = c^{n-2}a^2 + c^{n-2}b^2 > a^n + b^n$.

3. Пусть n , $n+1$, $n+2$, $n+3$ — четыре последовательных натуральных числа. Тогда справедливы соотношения: $(n^2 + 3n)^2 < n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 < (n^2 + 3n + 1)^2$. Но поскольку $(n^2 + 3n)$ и $(n^2 + 3n + 1)$ — два последовательных натуральных числа, то произведение $n(n+1)(n+2)(n+3)$ нельзя представить в виде квадрата натурального числа.

4. Пусть x — скорость течения реки, S — путь от A до B , v — собственная скорость катера. Тогда имеем: $S = 8(v + x) = 10(v - x)$, откуда $v = 9x$, $S = 80x$. Найдем t : $t = \frac{S}{x} = 80$.

Ответ: 80 часов.

5. Данное уравнение приводится к виду:

$$3\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)^2 + 8 = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right).$$

Ответ: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{21}$; $x_3 = -2$; $x_4 = 6$.

11 класс

1. Пусть a, b, c, n — натуральные числа, причем $a \geq b \geq c$. Тогда по условию $a^n < b^n + c^n$, $a^n - b^n < c^n$. Поскольку $c^n > (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \geq (a - b) \cdot n \cdot c^{n-1}$, т. е. $a - b < \frac{c}{n}$. Это неравенство верно для любого натурального n в том и только в том случае, если $a = b$.

2. Пусть x — высота антенны, тогда

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{100}, \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{x}{200}, \\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{300}. \end{cases}$$

Поскольку $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$, то $\frac{x}{300} = \frac{1 - \frac{x}{100} \cdot \frac{x}{200}}{\frac{x}{100} + \frac{x}{200}}$. Приведем уравнение к виду $2x^2 = 100 \cdot 200$, откуда $x = 100$.

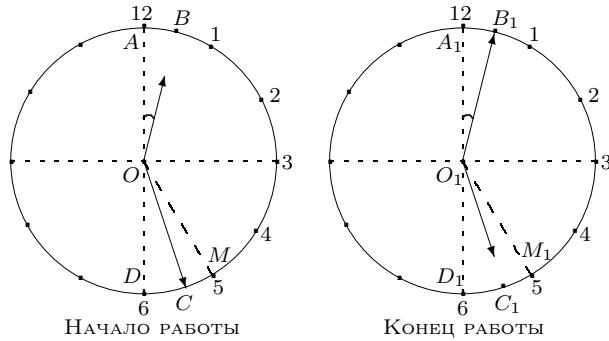
Ответ: 100 м.

3. Пусть OB — положение часовой стрелки в начале работы, а значит, и положение минутной стрелки к концу работы (из условия); OC — положение минутной стрелки в начале работы, а значит, и положение часовой стрелки к концу работы.

Так как скорость движения минутной стрелки в 12 раз больше скорости движения часовой стрелки, то: $\angle AOB : \angle AOC = 1 : 12$; $\angle МОС : \angle AOB = 1 : 12$. Обозначим $\angle AOB = \alpha$, тогда $\angle AOC = 12\alpha$ (1), $\angle МОС = \frac{\alpha}{12}$ (2). Из условия имеем: $\angle AOM = \frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$, а с учетом (2): $\angle AOC = \angle AOM + \angle МОС = 150^\circ + \frac{\alpha}{12}$ (3).

Из соотношения (1) и (3) получится: $12\alpha = 150^\circ + \frac{\alpha}{12}$, откуда $\alpha \approx 12,5874^\circ$. Положению минутной стрелки OB_1 к концу работы будет соответствовать $\angle A_1OB_1 = 12,5874^\circ$ или время: $\frac{12,5874^\circ}{360^\circ} \cdot 60_{\text{мин}} \approx 2,098_{\text{мин}} \approx 2_{\text{мин}}6_{\text{сек}}$.

Ответ: 17 ч 2 мин 6 сек.



4. После деления обеих частей данного уравнения на 6^x получаем уравнение: $\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = 2 \cdot \frac{1}{(3/2)^x}$. Находим $x = \log_{1,5} 2$.

Ответ: $\log_{1,5} 2$.

5. Ответ: а) $2^7 = 128$; б) $19^2 = 361$.

1995 г.

9 класс

1. Из неравенства треугольника $a - b < c < a + b$ следует, что сторона c может быть равна одному из целых чисел 1994, 1995, 1996, из которых только 1996 кратно 4.

Ответ: 1996.

2. Пусть S — расстояние между Владикавказом и Бесланом. Тогда: $\left(\frac{0,84S}{36} + \frac{0,16S}{40}\right) - \frac{S}{40} = \frac{3,5}{60}$, $S = 25$.

Ответ: 25 км.

3. Так как $15^3 < 9^4$, то $(15^3)^7 < (9^4)^7$. Таким образом, $15^{21} < 9^{28}$.

4. Указание. Использовать метод полной индукции, рассмотрев все случаи: 1) a и b — четные; 2) a и b — нечетные; 3) одно из чисел a и b четное, а другое — нечетное.

5. Указание. Выразить из первого уравнения системы x через y , а из второго — z через y и подставить эти значения в третье уравнение.
Ответ: $(0; 0; 0)$, $(1; 2; 3)$.

10 класс

1. Пусть $a_1 = m$, $a_2 = n$, $a_3 = k$, $a_4 = l$. Тогда по условию составим следующую систему равенств:

$$\begin{cases} m + k = 2n, \\ nl = k^2, \\ m + l = 37, \\ n + k = 36, \end{cases}$$

где m, n, k, l — целые числа. Получим $m = 12$; $n = 16$; $k = 20$; $l = 25$.
Ответ: 12; 16; 20; 25.

2. Нетрудно заметить, что $ab + bc + ca = \frac{1}{2}((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) = -\frac{1}{2}$, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) = \frac{1}{4}$. Тогда получим: $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \frac{1}{2}$.
Ответ: $\frac{1}{2}$.

3. Заметим, что $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. В числителе находится произведение трех последовательных целых чисел, поэтому полученная дробь — целое число.

4. Запишем выражение в виде:

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \sin 20^\circ}.$$

Используя формулы двойного угла и формулы приведения, получим, что $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{1}{8}$.

5. Поскольку треугольник ABC равнобедренный (рис. 9), то имеем: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2$. Тогда $h_1 + h_2 = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a} = \text{const}$.

11 класс

1. Пусть a и b — искомые положительные числа, т. е. $a = 4m$, $b = 4n$, причем $m, n \in \mathbb{N}$. По условию справедливы соотношения:

$(4m)^3 - (4n)^3 = \overline{xyzt}$, $\overline{xyzt} = 91 \cdot A$, т. е. $(4m)^3 - (4n)^3 = 91 \cdot A$.
 Запишем уравнение в виде: $64(m-n)(m^2+mn+n^2) = 91 \cdot A$, откуда
 получим, что $A = 64$, следовательно, $(m-n)(m^2+mn+n^2) = 91 =$
 $1 \cdot 91 = 91 \cdot 1 = 7 \cdot 13 = 13 \cdot 7$, тогда возможны четыре случая:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} m-n=1, \\ m^2+mn+n^2=91; \end{cases} & 2) \begin{cases} m-n=91, \\ m^2+mn+n^2=1; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} m-n=7, \\ m^2+mn+n^2=13; \end{cases} & 4) \begin{cases} m-n=13, \\ m^2+mn+n^2=7; \end{cases} \end{array}$$

причем $m, n \in \mathbb{N}$. Существует единственное решение $m = 6, n = 5$,
 тогда $a = 24, b = 20$.

Ответ: 24 и 20.

2. Запишем функцию $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ в виде $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Известно, что при $a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2$ (равенство выполняется при $a = 1$); если $a < 0$, то $a + \frac{1}{a} \leq -2$ (равенство выполняется при $a = -1$).

Ответ: 2 и -2.

3. Указание. Запишите уравнение в виде: $x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}x}$.

Ответ: 1; 4.

4. По условию можно составить следующие числа: $2222, 222^2, 22^{22}, 2^{222}, 2^{22^2}, 2^{2^{22}}, 2^{2^{2^2}}$, сравнив которые получим, что $2^{2^{2^2}}$ — наибольшее из них.

Ответ: $2^{2^{2^2}}$.

5. Указание. Нужно записать уравнение касательной к графику функции в произвольной точке $M(a; \frac{2}{3}\sqrt{18-a^2})$ и найти координаты точек A и B (рис. 10). Затем, зная значения y_B и x_A , следует представить площадь $\triangle ABO$ как функцию от a : $S_{\triangle ABO} = \frac{108}{a\sqrt{18-a^2}}$, для которой надо найти наименьшее значение при $0 < a < 3\sqrt{2}$.

Ответ: в точке $(3; 2)$.

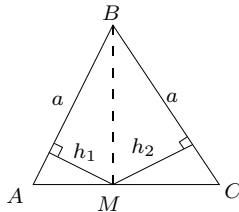


Рис. 9.

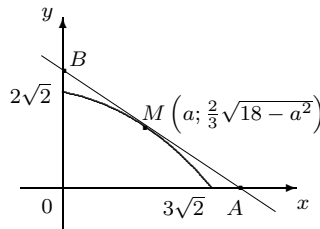
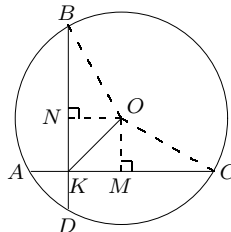


Рис. 10.

9 класс

1. Поскольку периметр треугольника равен 2, то его большая сторона меньше 1, т. е. меньше диаметра круга с радиусом $\frac{1}{2}$. Таким образом, этот треугольник можно покрыть кругом с радиусом $\frac{1}{2}$.

2. Проведем в круге с центром в точке O две взаимно перпендикулярные хорды AC и BD . По условию, $OK = d$. Проведем $ON \perp BK$, $OM \perp CK$. Тогда имеем: $ON^2 + OM^2 = d^2$.
 $AC^2 + BD^2 = (2MC)^2 + (2NB)^2 = 4(OC^2 - OM^2) + 4(OB^2 - ON^2) = 4R^2 - 4OM^2 + 4R^2 - 4ON^2 = 8R^2 - 4(OM^2 + ON^2) = 8R^2 - 4d^2 = 4(2R^2 - d^2)$.



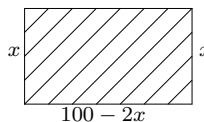
Ответ: $4(2R^2 - d^2)$.

3. Указание. Воспользуйтесь равенством: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

4. Приведем уравнение к виду: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$, откуда $x = 1, y = 2$.

Ответ: $(1; 2)$.

5. Обозначим длину одной стороны прямоугольника через x . Тогда площадь прямоугольника равна $S(x) = (100 - 2x)x$. Оценим значение $S(x)$. $S(x) = (100 - 2x)x = -2(x - 25)^2 + 1250 \leq 1250$, т. е. при $x = 25$ площадь будет наибольшей.



Ответ: $50 \text{ м} \times 25 \text{ м}$.

10 класс

1. Пусть x — первое число, y — второе число, причем x и y — натуральные числа. Тогда справедливы соотношения:

$$\begin{cases} y > x^2, \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 < 4. \end{cases}$$

Решив систему неравенств с учетом, что $x, y \in \mathbb{N}$, получим единственное решение: $x = 2, y = 5$.

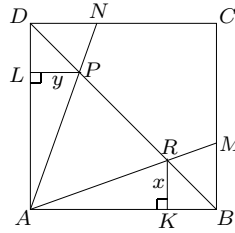
Ответ: $x = 2, y = 5$.

2. Имеют место соотношения: $a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 4p = a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 2a - 2b - 2c = \frac{1}{c}(a^4 - 2a^2 + 1) + \frac{1}{b}(b^4 - 2b^2 + 1) + \frac{1}{c}(c^4 - 2c^2 + 1) \geq 0$, т. е. $a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4p$.

3. Графиком функции $y = x|x|$ является кривая, состоящая из двух частей: правой ветви параболы $y = x^2$ и левой ветви параболы $y = -x^2$.

4. Справедливо равенство: $n^5 - n = n(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1)$. Поскольку произведение любых трех последовательных чисел кратно 6, то произведение $(n - 1)n(n + 1)$ делится на 6, причем, если делится и на 5, то задача решена, если нет, то $n = 5m \pm 2$, тогда $(n^2 + 1)$ кратно 5.

5. Опустим из точек R и P перпендикуляры RK и PL к сторонам AB и AD соответственно. Пусть $RK = x$ и $PL = y$. Тогда имеем: 1) $\frac{x}{BM} = \frac{AK}{AB}$, т. е. $AK = 3x$, $BK = a - 3x$; 2) $\frac{x}{AD} = \frac{BK}{BA}$, т. е. $\frac{x}{a} = \frac{a-3x}{a}$, следовательно, $x = \frac{a}{4}$; 3) $\frac{y}{DN} = \frac{AL}{AD}$, т. е. $\frac{y}{\frac{2}{5}a} = \frac{a-y}{a}$, $y = \frac{2}{7}a$. Поскольку $S_{\triangle BMR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot (a - 3 \cdot \frac{a}{4}) = \frac{a^2}{24}$, а $S_{\triangle DNP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}a \cdot \frac{2}{7}a = \frac{2a^2}{35}$, то получим:



$$S_{CMRPN} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{a^2}{24} - \frac{2a^2}{35} = \frac{337}{840}a^2.$$

Ответ: $\frac{337}{840}a^2$.

11 класс

1. Проведем следующие тригонометрические преобразования:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} &= \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{14}} 2 \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{14}} \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} = \dots = \frac{\sin \frac{4\pi}{7}}{8 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{7} \right)}{8 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2. Запишем неравенство в виде: $\sqrt{1 + \frac{1}{x+2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x+2}} < \frac{a^4+1}{a^2}$.

Очевидно, что $\frac{a^4+1}{a^2} \geq 2$. Поскольку $\sqrt{1 - \frac{1}{(x+2)^2}} < 1$, то $1 + \frac{1}{x+2} + 1 - \frac{1}{x+2} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{(x+2)^2}} < 4$, тогда $\sqrt{1 + \frac{1}{x+2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x+2}} < \frac{a^4+1}{a^2}$, откуда следует справедливость исходного неравенства.

3. Запишем неравенство в виде: $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) > 0$. Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) - \sin(\cos x) &= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, тогда $0 < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \pi$, $0 < \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \pi$, т. е.

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2} > 0.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство.

4. Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} xy(x+y)^2 + (xy)^2(x+y) = 30, \\ xy(x+y) + xy + (x+y) = 11; \\ (xy(x+y)) \cdot (xy + (x+y)) = 30, \\ (xy(x+y)) + (xy + (x+y)) = 11. \end{cases}$$

Пусть $xy(x+y) = u$, $xy + (x+y) = v$, тогда придем к системе:

$$\begin{cases} uv = 30, \\ u + v = 11, \end{cases}$$

решениями которой являются пары чисел (5; 6), (6; 5). Переходя к переменным x и y , получим две системы уравнений:

$$1) \begin{cases} xy(x+y) = 5, \\ xy(x+y) = 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy(x+y) = 6, \\ xy + (x+y) = 5. \end{cases}$$

Решениями этих систем являются пары чисел: (1; 2), (2; 1), $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}; \frac{2}{5+\sqrt{21}}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{2}{5-\sqrt{21}}\right)$.

5. Обозначим через x число рядов по плану. Тогда по условию задачи имеем:

$$\begin{cases} (x-2)(x+24) < 24x, \\ 24x = n^2, \\ n \in \mathbb{N}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 8, \\ 24x = n^2, \\ n \in \mathbb{N}; \end{cases} \Rightarrow x = 6,$$

т. е. прибыло $4 \cdot 30 = 120$ солдат.

Ответ: 120.

9 класс

1. Пусть x ч — время первого рабочего, y ч — время второго рабочего, тогда справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ x + y = 50. \end{cases}$$

Решением системы является пара чисел: $(30; 20)$.

Ответ: 30 ч и 20 ч.

2. Ответ: $a = 2$, $b = 8$, $c = 6$.

3. Пусть $\overline{abcd}$ — искомое число.

$$\begin{cases} a^2 + d^2 = 13, \\ b^2 + c^2 = 85, \\ \overline{abcd} - 1089 = \overline{dcba}. \end{cases}$$

Решением системы является четверка чисел: $a = 3$, $d = 2$, $b = 7$, $c = 6$. Таким образом, 3762 — искомое число.

Ответ: 3762.

4. Ответ: $\begin{cases} x = a, & a \in [0; 2] \\ y = 3 - |a - 1|. \end{cases}$

5. Ответ: $\frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{4}$.

10 класс

1. Пусть в первом ящике лежит одно яблоко, во втором — два, ..., в 240-ом — 240, в 241-ом — одно, в 242-ом — два, ..., в 480-ом — 240, а в 481 ящике либо одно, либо два, ..., либо 240. Таким образом, по крайней мере 3 ящика содержат по одинаковому числу яблок.

2. Ответ: 772344.

3. Пусть для получения III-го сплава, содержащего z частей, взяли x частей I-го сплава, y частей II сплава. Поскольку соотношения

металлов в соответствующих сплавах равны 1:2, 2:3 и 17:27 соответственно, то справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2y}{5} = \frac{17z}{44}, \\ \frac{2x}{3} + \frac{3y}{5} = \frac{27z}{44}, \end{cases}$$

Отсюда: $x = 9 \cdot \frac{7}{44}$, $y = 35 \cdot \frac{7}{44}$.

Ответ: из 9 частей I-го сплава и 35 частей II-го сплава.

4. Сумма всех коэффициентов многочлена $P(x)$ равна $P(1)$, а разность между суммой коэффициентов при четных степенях и суммой коэффициентов при нечетных равна $P(-1)$.

Ответ: 1; 0.

5. *Указание.* Воспользуйтесь формулами нахождения площадей правильных вписанных многоугольников.

Ответ: $\frac{2(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})\pi}{5}$.

11 класс

1. *Указание.* Нужно разделить монеты на три группы: 27, 27 и 26 и т. д.

2. Поскольку $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = (33 + 3)^n + 9 \cdot 3^n + 3^n = (33A + 3^n) + 10 \cdot 3^n = 11(3A + 3^n)$, то $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ делится на 11 при любом $n \in \mathbb{N}$.

3. Представим левую часть уравнения в виде произведения множителей: $x^4 + 5x - 6 = (x^4 - x^3) + (x^3 - x^2) + (x^2 - x) + (6x - 6) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 6) = (x - 1)(x + 2)(x^2 - x + 3)$.

Ответ: 1; -2.

4. *Указание.* Составить уравнение касательной. Найти координаты точек пересечения этой касательной с осями координат.

5. *Указание.* Продолжить одну из медиан за основание треугольника на $\frac{1}{3}$ ее длины, соединить конец N этого отрезка и точку пересечения медиан O с концом основания. Стороны полученного треугольника $\triangle AON$ равны соответственно $\frac{2}{3}$ медиан исходного треугольника $\triangle ABC$ и т. д.

Ответ: $\frac{3}{4}S$.

9 класс

1. *Указание.* Обозначим через x число кроликов «детсадовской» части. Тогда получим уравнение: $x^2 + (10 - x)^2 + \frac{10-x}{x} = 72$.

Ответ: 8; 2.

2. Предположим, что Аристарху n лет. Так как полученное при умножении число оканчивается двумя нулями, то $n < 15$. Поскольку полученное число кратно 49, значит, $n \geq 14$, следовательно, $n = 14$.

Ответ: 14 лет.

3. *Указание.* Ввести обозначения: $x + y = u$, $xy = v$.

Ответ: (2; 3), (3; 2).

4. *Ответ:* искомая фигура — заштрихованная область на рис. 11.

5. *Ответ:* $\frac{21}{8}$.

10 класс

1. *Указание.* Обозначим через x число пчел. Тогда по условию задачи составим уравнение: $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x$.

Ответ: 72.

2. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

1) $2x^2 + 5x = x - 2$; 2) $2x^2 + 5x = -(x - 2)$.

Ответ: -1 ; $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

3. Справедливо равенство: $6 - \sqrt{35} = \frac{1}{6 + \sqrt{35}}$. Пусть $t = \sqrt{(6 + \sqrt{35})^x}$, тогда уравнение запишется в виде: $t + \frac{1}{t} = 2$, откуда $t = 1$. Тогда $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

4. Рассмотрим круг с центром в точке O и радиусом R (рис. 12). Пусть AB и CD — хорды, причем K — их точка пересечения. Введем обозначения: $OM = x$, $BM = y$, $CN = t$, $ON = z$, где OM и ON — расстояния от центра круга до хорд AB и CD соответственно. Справедливы равенства $AK = y - z$, $BK = y + z$, $CK = t + x$, $DK = t - x$. Поскольку $x^2 + y^2 = R^2$ и $t^2 + z^2 = R^2$, то $AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2 = 4R^2 = D^2$.

5. *Указание.* Воспользоваться методом математической индукции.

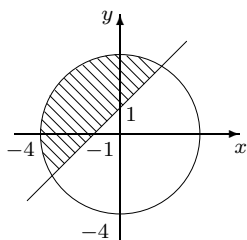


Рис. 11.

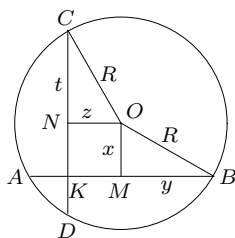


Рис. 12.

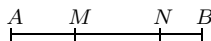
11 класс

1. *Указание.* Ввести обозначение: $\sqrt{5x^2 + 3x - 7} = t$.

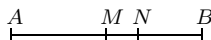
Ответ: $-\frac{8}{5}$; 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{229}}{10}$.

2. *Указание.* Воспользовавшись тригонометрическими преобразованиями: $(1 - \cos 2x) \sin 2x + (1 + \cos 2x) \cos 2x = \sin^2 2x + \cos^2 2x$, получим уравнение: $(\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x) = 0$.

3. I случай: пусть $AB = x$, $MN = 10$. Поскольку $AM : MB = 1 : 2$, $AN : NB = 3 : 1$, то получим уравнение $\frac{x}{3} + 10 = 3(\frac{2x}{3} - 10)$, решением которого является $x = 24$.



II случай: пусть теперь $AB = x$, $MN = 10$. Поскольку $AM : MB = 2 : 1$, $AN : NB = 3 : 1$, то составим уравнение $\frac{2x}{3} + 10 = 3(\frac{x}{3} - 10)$, решением которого является $x = 120$.



Ответ: 24 км (пешком); 120 км (пользуясь транспортом).

4. *Указание.* Данное число оканчивается цифрой 2, однако известно, что квадрат никакого натурального числа не оканчивается на 2.

5. Область допустимых значений уравнения находится из условий:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 \leq (\sqrt{2})^2, \\ (x - 1)^2 + y^2 \leq (\sqrt{2})^2. \end{cases}$$

После возведения обеих частей исходного уравнения в квадрат и тождественных преобразований получим: $\sqrt{2x^2 + 2(y-1)^2} = x - y + 1$; при условии $x - y + 1 \geq 0$: $2x^2 + 2y^2 - 4y + 2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y$, $(x + y - 1)^2 = 0$, следовательно, $x + y - 1 = 0$.

Учитывая ОДЗ уравнения, находим искомое множество точек (рис. 13).

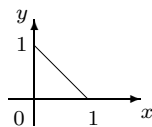


Рис. 13.

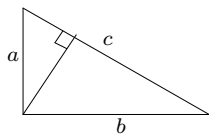


Рис. 14.

1999 г.

9 класс

1. Если за месяц лошадь, коза и овца вместе съедают $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ воза сена, то 1 воз сена они съедят вместе за $\frac{6}{11}$ месяца.

Ответ: за $\frac{6}{11}$ месяца.

2. Обозначим через P — периметр исходного прямоугольного треугольника со сторонами a, b, c (рис. 14). Тогда $P_1 : P_2 : P = a : b : c$.

Поскольку $\left(\frac{P}{P_2}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} + 1$, а $\left(\frac{P}{P_1}\right)^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$, то $P^2 = P_1^2 + P_2^2$.

Ответ: $\sqrt{P_1^2 + P_2^2}$.

3. Обозначим через $2N$ заданное четное число, тогда по условию $2N = m^2 + n^2$, где m и n — числа одинаковой четности. Возможны два случая:

- 1) $\begin{cases} m = 2m_1, \\ n = 2n_1, \end{cases}$ тогда $N = 2m_1^2 + 2n_1^2 = (m_1 + n_1)^2 + (m_1 - n_1)^2$;
- 2) $\begin{cases} m = 2m_1 - 1, \\ n = 2n_1 - 1, \end{cases}$ тогда $N = (m_1 + n_1 - 1)^2 + (m_1 - n_1)^2$.

4. Справедлива следующая система равенств:

$$\begin{cases} 0,15x = m, \\ 0,33x = n, \\ m, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда $11m = 5n$, следовательно, наименьшее $m = 5$, а наименьшее $n = 11$, т. е. наименьшее $x = \frac{5}{0,15} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$.

Ответ: $33\frac{1}{3}$.

5. Ответ: на 5; 8; 9; 10; 11 частей.

10 класс

1. Пусть x руб. составляет сумма одной части гонорара, распределенного в отношении $8 : 6 : 5$, тогда $8x$, $6x$, $5x$ руб. получает каждый автор. Пусть теперь y руб. — сумма одной части гонорара, распределенного в отношении $7 : 5 : 4$. Тогда справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} 8x + 6x + 5x = 7y + 5y + 4y, \\ 7y - 8x = 25. \end{cases}$$

Из 1-го уравнения системы имеем: $x = \frac{16}{19}y$, тогда $5y < 6x$, $4y < 5x$.

Ответ: 1520 руб.

2. Указание. Найти область допустимых значений уравнения.

Ответ: 1.

3. Указание. Достаточно доказать, что левая часть уравнения есть нечетное число.

4. Введем функцию $y = |x + 3| + |x - 2|$.

$$y = |x + 3| + |x - 2| = \begin{cases} -2x - 1, & x < -3; \\ 5, & -3 \leq x < 2; \\ 2x + 1, & x > 2. \end{cases}$$

При $a = 5$ уравнение $y = a$ имеет целые корни $-3; -2; -1; 0; 1; 2$, т. е. их сумма равна -3 (рис. 15).

Ответ: при $a = 5$.

5. Запишем выражение в виде многочлена второй степени (относительно x): $8x^2 + y^2 + 11z^2 + 4xy - 12xz - 5yz = 8x^2 + 2(2y - 6z)x + y^2 + 11z^2 - 5yz$. Тогда $\frac{D}{4} = (2y - 6z)^2 - 8(y^2 + 11z^2 - 5yz) = -4(y - 2z)^2 - 36z^2$. Поскольку $\frac{D}{4} \leq 0$, причем $\frac{D}{4} = 0$ при $z = y = x = 0$, то знак этого многочлена совпадает со знаком $8x^2$ и исходный многочлен принимает неотрицательные значения.

1. При возведении обеих частей равенства в куб и выполнении соответствующих преобразований получаем уравнение: $x^3 + 3x - 14 = 0$, откуда $(x - 2)(x^2 + 2x + 7) = 0$, т. е. $x = 2$ — корень уравнения.

Ответ: 2.

2. Пусть в равнобедренном треугольнике с основанием a и боковыми сторонами b радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно равны R и r .

Тогда $R = \frac{ab^2}{4S}$, $r = \frac{2S}{a+2b}$. Пусть $a = 2x$, а высота, проведенная к основанию a равна y (рис. 16). Тогда $b = \sqrt{x^2 + y^2}$. При $R = 25$, $r = 12$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50y, \\ 12(x + \sqrt{x^2 + y^2}) = xy; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 50y - y^2, \\ 12\sqrt{x^2 + y^2} = x(y - 12); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 50y - y^2, \\ (12\sqrt{50y})^2 = (\sqrt{50y - y^2})^2 \cdot (y - 12)^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 50y - y^2, \\ y^2 - 74y + 1344 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 50y - y^2, \\ y_1 = 32; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 = 50y - y^2, \\ y_2 = 42; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 24, \\ y_1 = 32; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = 4\sqrt{21}, \\ y_2 = 42. \end{cases}$$

Таким образом, $a_1 = 48$, $b_1 = c_1 = 40$; $a_2 = 8\sqrt{21}$, $b_2 = c_2 = 10\sqrt{21}$.

Ответ: 48 см, 40 см, 40 см; $8\sqrt{21}$ см, $10\sqrt{21}$ см, $10\sqrt{21}$ см.

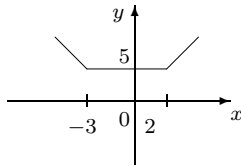


Рис. 15.

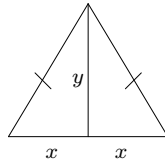


Рис. 16.

3. Указание. При $x \geq 4$ левая часть уравнения оканчивается цифрой 3, а правая часть есть квадрат натурального числа.

Ответ: $\{(1; 1); (3; 3)\}$.

4. Указание. Используйте графический способ решения (рис. 17).

Ответ: при $a \in \{(-\infty; 1) \cup (\frac{5}{4})\}$.

5. На координатной плоскости построим заданную фигуру. Из рис. 18 видно, что площадь искомой фигуры равна $S = \frac{1+4}{2} \cdot 3 = 7,5$.

Ответ: 7,5.

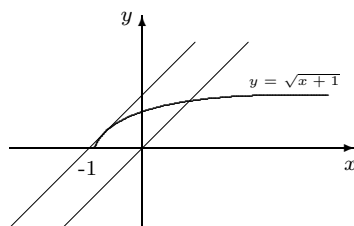


Рис. 17.

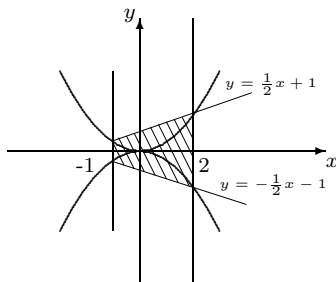


Рис. 18.

2000 Г.

9 класс

1. Среди чисел $1, 2, 3, \dots, 2000$ каждое 5-е делится на 5 — таких чисел 400. Из этих 400 каждое 5-е делится на 5^2 — таких чисел 80. Из этих 80 на 5^3 делится 16 чисел. Из этих 16 на 5^4 делится 3 числа. Итого, в разложении $2000!$ пятерка входит с показателем степени: $400 + 80 + 16 + 3 = 499$. Так как четных чисел от 1 до 2000 имеется 1000, то получается, что число $2000!$ оканчивается 499 нулями.

Ответ: 499.

2. Ответ: $(x+1)(x+2)(x+3)$.

3. Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $z \neq 0$, то

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{8}, \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{12}, \\ \frac{z+x}{xz} = \frac{7}{24}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{7}{24}. \end{cases}$$

При сложении левых и правых частей всех уравнений системы соответственно имеем: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{24}$, тогда $x = 8$, $y = 4$, $z = 6$.

Ответ: (8; 4; 6).

4. Пусть нужно взять x г первого сплава. Тогда второго сплава нужно взять $(840 - x)$ г. Составим уравнение:

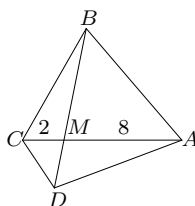
$$\frac{x \cdot 5}{100} + \frac{(840 - x)40}{100} = \frac{840 \cdot 30}{100}$$

откуда $x = 240$.

Ответ: 240 г, 600 г.

5. Пусть $S_{AMB} = S_1$, $S_{BMC} = S_2$, $S_{CMD} = S_3$, $S_{AMD} = S_4$. Тогда имеем: $S_1 : S_2 = AM : MC$, т. е. $S_1 : 6 = 8 : 2$, откуда $S_1 = 24 \text{ см}^2$; $S_3 : S_4 = CM : MA$, т. е. $S_3 : 16 = 2 : 8$, откуда $S_3 = 4 \text{ см}^2$. Таким образом, $S_{ABCD} = 50 \text{ см}^2$.

Ответ: 50 см^2 .



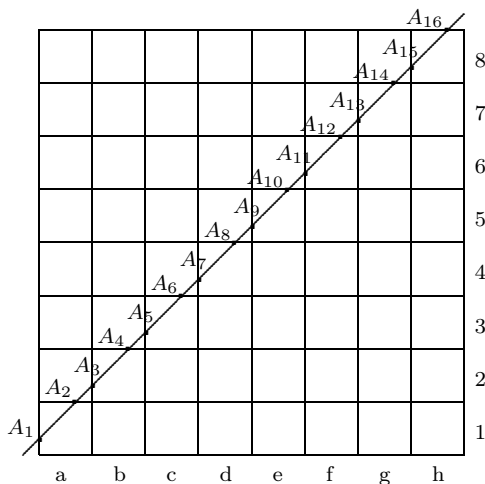
10 класс

1. Пятизначное число, оканчивающееся цифрой 6, делится на 3 тогда и только тогда, когда четырехзначное число, которое останется после отбрасывания цифры 6, делится на 3. Поскольку на 3 делится каждое третье число из всех 9000 четырехзначных чисел, то всего таких чисел $(9999 - 999) : 3 = 3000$.

Ответ: 3000.

2. Доска разделена на 64 клетки 9 вертикалями и 9 горизонталями. С каждой из них прямая может пересекаться только в одной точке, но из 4 отрезков прямых, служащих краями доски, она пересекается только с двумя. Таким образом, проведенная прямая не может иметь более 16 точек пересечения. Если соединить A_1 и A_{16} , то получается 16 точек пересечения и 15 отрезков, а значит, наибольшее число клеток, которые прямая может пересечь, равно 15.

Ответ: 15.



3. Вычислим $\operatorname{ctg} 22,5^\circ = \operatorname{ctg} \frac{45^\circ}{2} = \frac{1+\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} + 1$. Пусть $x_0 = \sqrt{2} + 1$, тогда $(x_0 - 1)^2 = 2$, т. е. $x^2 - 2x - 1 = 0$ — искомое уравнение.

4. Будем использовать графический метод решения. Графиком уравнения $|x| + |y| = 1$ является квадрат с вершинами в точках $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(0; -1)$, $(0; 1)$. Графиком уравнения $x^2 + y^2 = (\sqrt{a})^2$ является окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом $\sqrt{a}$. При $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{a} < 1$ эти фигуры имеют 8 точек пересечения (рис. 19).

Ответ: при $\frac{1}{2} < a < 1$.

5. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен r (рис. 20). Пусть D — точка касания окружности и гипотенузы, причем $BD = 2x$, $AD = 3x$. Тогда справедливо равенство $2r + 10x = 36$, откуда $r = 18 - 5x$. Выразим через x стороны треугольника ABC . $AB = 5x$, $BC = 18 - 3x$, $CA = 18 - 2x$. Из теоремы Пифагора получим уравнение: $(18 - 3x)^2 + (18 - 2x)^2 = (5x)^2$, откуда $x = 3$, тогда $r = 3$. Таким образом, $AB = 15$ см, $BC = 9$ см, $AC = 12$ см.

Ответ: 9 см, 12 см, 15 см.

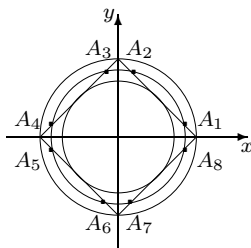


Рис. 19.

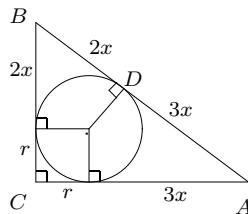


Рис. 20.

11 класс

1. Пусть s_0 — расстояние, которое прошла первая капля до момента движения второй капли; s_1 — расстояние от вершины скалы до ее подножья, s_2 — расстояние, которое прошла вторая капля до момента достижения второй каплей подножья горы. Справедливы соотношения: $s_0 = \frac{gt_0^2}{2}$, $s_1 = \frac{gt_1^2}{2}$, $s_2 = \frac{gt_2^2}{2}$. По условию $s_0 = 1,6$ дм, $s_1 = 25$ м = 250 дм, кроме того $t_2 = t_1 - t_0$. Найдём разность:

$$\begin{aligned} s_1 - s_2 &= \frac{g}{2}(t_1^2 - t_2^2) = \frac{g}{2}(t_1^2 - (t_1 - t_0)^2) = \frac{g}{2}(2t_1t_0 - t_0^2) = \\ &= \frac{g}{2} \left(2\sqrt{\frac{2s_1}{g}} \cdot \frac{2s_0}{g} - \frac{2s_0}{g} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $s_1 - s_2 = 2\sqrt{s_1 s_0} - s_0 = 2\sqrt{250 \cdot 1,6} - 1,6 = 38,4$ дм.

Ответ: 3,84 м.

2. Известно, что $S \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd$ и $S \leq \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}da$, т. е. $S \leq \frac{1}{4}(ab + cd + bc + da) = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ (рис. 21).

3. Указание. Запишем координаты вершин треугольника ABC : $A(2; 0)$; $B(x; 2x - x^2)$; $C(x; 0)$ (рис. 22). Тогда $AC = 2 - x$, $BC = 2x - x^2$. $S_{\triangle ABC} = S(x) = \frac{1}{2}(2 - x)(2x - x^2)$. Исследуем функцию $S(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x$ на наибольшее значение.

Ответ: $B\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{9}\right)$.

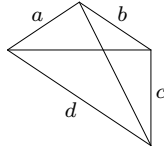


Рис. 21.

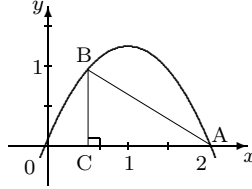


Рис. 22.

4. Сначала находим функцию $y = \varphi(x)$, обратную $y = f(x)$ (их графики симметричны относительно прямой $y = x$). Далее находим $y = g(x)$, заменяя в $y = \varphi(x)$ « x » на « $-x$ » и « y » на « $-y$ » (графики $y = g(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно начала координат). Итак, $f(x) = 3^{x-2}$, $\varphi(x) = \log_3 9x$. Тогда $-y = \log_3(-9x)$, $g(x) = -\log_3(-9x)$.

Ответ: $g(x) = -\log_3(-9x)$.

5. Рассмотрим функцию $f(x) = -x^2 + 2ax - (a^2 - 2a + 3)$. Перепишем в виде $f(x) = -(x - a)^2 + (2a - 3)$. Ясно, что графиком функции является парабола с вершиной в точке $(a; 2a - 3)$ и ветвями, направленными вниз. Возможны три случая:

а) Если $a < 0$, то $\max_{x \in [0; 1]} f(x) = f(0) = -2$. Тогда $-a^2 + 2a - 3 = -2$,

т. е. $a = 1$ не удовлетворяет условию $a < 0$.

б) Если $0 \leq a \leq 1$, то $\max_{x \in [0; 1]} f(x) = f(a) = -2$. Тогда $2a - 3 = -2$,

т. е. $a = \frac{1}{2}$, удовлетворяет условию $0 \leq a \leq 1$.

в) Если $a > 1$, то $\max_{x \in [0; 1]} f(x) = f(1) = -2$. Тогда $-1 + 2a - a^2 +$

$2a - 3 = -2$, т. е. $a_1 = 2 - \sqrt{2}$ не удовлетворяет условию $a > 1$, и $a_2 = 2 + \sqrt{2}$ удовлетворяет условию $a > 1$.

Ответ: при $a = \frac{1}{2}$ и $a = 2 + \sqrt{2}$.

9 класс

1. *Ответ:* за 5 часов.

2. К 17 верблюдам братьев мудрец прибавил свой и легко получил половину (9 верблюдов), треть (6 верблюдов) и $\frac{1}{9}$ (2 верблюда), которые в сумме составили $9 + 6 + 2 = 17$.

3. Сумма цифр данного числа 30, поэтому оно делится на 3 и не делится на 9.

4. *Указание.* Пусть x, y, z — искомые целые положительные числа, причем $x \leq y \leq z$. Тогда имеем $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Рассмотрим случаи $x = 1, x = 2, x = 3$ и т. д.

Ответ: (2; 4; 4), (2; 3; 6), (3; 3; 3).

5. Запишем уравнение в виде $x^2 - 1 = 2y^2$, что равносильно уравнению $(x - 1)(x + 1) = 2y^2$. Учитывая, что в левой части множители одинаковой четности, докажем, что y — четное число, а единственным простым четным числом является число 2, т. е. $y = 2, x = 3$.

Ответ: (3; 2).

10 класс

1. Если один из мужчин купил x предметов, то по условию он заплатил за них x^2 копеек. Если его жена купила y предметов, то она заплатила за них y^2 копеек. Значит, $x^2 - y^2 = 48$. Числа x и y по условию целые и положительные. Это возможно только в том случае, когда числа $x - y$ и $x + y$ — четные и $x + y > x - y$. Разлагая число 48 на сомножители, видим, что имеется только три удовлетворяющих этому условию возможности: $48 = 2 \cdot 24 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$, исследуя которые находим решение.

Ответ: Иван (13) и Анна (11); Петр (8) и Екатерина (4); Алексей (7) и Мария (1).

2. Следует согнуть бумагу близко к краю и разрезать по линии сгиба (она прямая!). Взять на этой прямой на большем куске бумаги (меньший выбросить) точку A и согнуть бумагу так, чтобы части прямой слева от A и справа от A совпали. Линия сгиба будет прямой, перпендикулярной первой прямой, и т. д.

3. Построив графики функции $y = \sin^2 x + 3$ и семейства $x^2 + y^2 = a^2$, получим, что существует единственная точка их пересечения при $a = 9$.

4. Преобразуем первое уравнение системы. $(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) = y^2 - y$, откуда $x^2 - x = y$ или $x^2 - x = 1 - y$. Аналогично поступим и со вторым уравнением. В результате получится четыре системы, решив которые приходим к ответу.

Ответ: $(0; 0); (1; 1); (-1; -1); (2; 2); (1; 0); (0; 1); (-1; 2); (2; -1)$.

5. Пусть одна сторона треугольника равна a . Тогда две другие равны соответственно aq и aq^2 . Из формулы $S = \frac{1}{2}ah_a$ найдем высоты треугольника. Они равны $\frac{2S}{a}, \frac{2S}{aq}, \frac{2S}{aq^2}$ соответственно и, очевидно, образуют геометрическую прогрессию, первый член которой $\frac{2S}{a}$, а знаменатель равен $\frac{1}{q}$.

11 класс

1. Указание. Использовать симметрию относительно осей координат.

Ответ: $58\pi + 80$.

2. Выразим a через x : $a = \frac{5^x + 5^{-x} - 6}{3|x| - 7 \cos x}$. Используя идеи четности функции (см. выражение в правой части), получаем, что только при $a = \frac{4}{7}$ выполняется условие задачи.

Ответ: при $a = \frac{4}{7}$.

3. Указание. Зная, что $\cos 157^\circ = a$, находим последовательно: $\cos 23^\circ, \sin 23^\circ, \operatorname{tg} 23^\circ, \operatorname{tg} 46^\circ$ и, наконец, $\operatorname{tg} 1^\circ = \operatorname{tg}(46^\circ - 45^\circ)$.

Ответ: $\frac{-2a\sqrt{1-a^2}-2a^2+1}{-2a\sqrt{1-a^2}+2a^2-1}$.

4. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда $f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (ab + b)$. Но по условию $f(f(x)) = 2x + 1$. Тогда имеем

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ ab + b = 1. \end{cases}$$

Отсюда $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2} - 1$.

Ответ: существует, например, $f(x) = \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} - 1$.

5. Пусть длины сторон прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию. Если a и b — катеты прямоугольного треугольника (b — меньший катет), c — гипотенуза, то $a^2 = bc$

(каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим между предыдущим и последующими членами). По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2 = bc + b^2$ или $c^2 - bc - b^2 = 0$. Так как $c > 0$, то $c = \frac{b+b\sqrt{5}}{2} = \frac{b(1+\sqrt{5})}{2}$. Таким образом, $\sin B = \frac{b}{c} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$; $\angle A = 90^\circ - \angle B$, и т. д.

Ответ: могут.

2002 г.

9 класс

1. Пусть $(1ш \rightarrow 1м) - x$ обменов; $(3м \rightarrow 1ш) - y$ обменов; $(1м \rightarrow 4ш) - z$ обменов. Из условия задачи следует система уравнений:

$$\begin{cases} -x + y + 4z = 0, \\ x - 3y - z = 0. \end{cases}$$

Сложив уравнения почленно, получим: $2y = 3z$, т. е. z — четное число. Тогда $y = \frac{3z}{2}$, $x = \frac{11z}{2}$, поэтому $x + y + z = 8z$, т. е. кратно 16.

2. Ответ: 49.

3. Указание. Доказать, что углы прямые и стороны равны.

4. Разложим многочлен на множители:

$a^3(a^2 - 7)^2 - 36a = a((a^2 - 7)^2 - 6^2) = a(a^3 - 7a - 6)(a^3 - 7a + 6)$; Кроме того, $a^3 - 7a - 6 = (a^3 + a^2) - (a^2 + a) - (6a + 6) = (a + 1)(a^2 - a - 6) = (a + 1)(a + 2)(a - 3)$. Аналогично, $a^3 - 7a + 6 = (a - 1)(a - 2)(a + 3)$.

Ответ: $a(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)(a - 3)(a + 3)$.

5. Указание. Очевидно, что $k = 3$. Далее «и» равно либо 5, либо 0, но 0 не подходит из-за «н», значит $i = 5$, но тогда $o = 4$. Далее рассуждаем аналогично (рис. 23).

Ответ: 4748253.

10 класс

$$1. \begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2, \\ \frac{xyz}{y+z} = 3, \\ \frac{xyz}{z+x} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2, \\ \frac{y+z}{x+y} = \frac{2}{3}, \\ \frac{z+x}{y+z} = \frac{3}{4}, \\ \frac{x+y}{z+x} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2, \\ y = 2x - 3z; \\ z = 3y - 4x; \\ x = y - 2z. \end{cases}$$

Из 2, 3, 4-го уравнений выразим y и z через x и подставим в первое уравнение системы, найдем ее решение.

Ответ: $(-\frac{2}{7}\sqrt{210}; -\frac{2}{5}\sqrt{210}; -\frac{2}{35}\sqrt{210}); (\frac{2}{7}\sqrt{210}; \frac{2}{5}\sqrt{210}; \frac{2}{35}\sqrt{210})$.

2. Ответ: Смит должен был начать с 99 долларов 98 центов, а осталось у него 49 долларов 99 центов.

3. Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{\pi^2 - x^2}(2 + 7\cos x - 7\sin x - 4\sin 2x) = 0$. Тогда $x_{1,2} = \pm\pi$. Учитывая, что $|x| \leq \pi$, найдем остальные корни из уравнения $2 + 7(\cos x - \sin x) - 4\sin 2x = 0$. Проведем тождественные преобразования: $2 + 7(\cos x - \sin x) + 4(\cos x - \sin x)^2 - 4 = 0$, $\cos x - \sin x = t$, $4t^2 + 7t - 2 = 0$, т. е. $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = -2$. Тогда $x_3 = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$.

4. Пусть площади трапеций, полученных разбиением исходной трапеции отрезком длины 7, равны соответственно S_1 и S_2 , причем h_1 и h_2 — их высоты (рис. 24). Тогда $S_1 = 5h_1$, $S_2 = 8h_2$, $S = 6(h_1 + h_2)$. Поскольку $S = S_1 + S_2$, то $6(h_1 + h_2) = 5h_1 + 8h_2$, откуда $h_1 = 2h_2$. Тогда $S_1 : S_2 = (5 \cdot 2h_2) : 8h_2 = 5 : 4$.

Ответ: 5 : 4.

$$\begin{array}{r} \text{о з о р н и к} \\ \text{з о р н и к} \\ \text{о р н и к} \\ + \quad \text{р н и к} \\ \quad \text{н и к} \\ \quad \quad \text{и к} \\ \quad \quad \quad \text{к} \\ \hline 5 \ 5 \ 5 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \end{array}$$

Рис. 23.

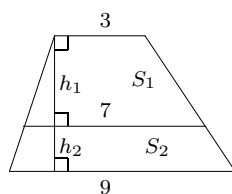


Рис. 24.

5. Докажем, что уравнение $x^2 - 2xy = 2002$ не имеет решений в целых числах. Если x — четное число, то левая часть уравнения делится на 4, а 2002 не делится на 4. Если x — нечетное число, то левая часть уравнения тоже нечетное число, а 2002 — четное. Таким образом, уравнение не имеет целых решений.

11 класс

1. Если решить неравенства $\sin x \leq \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x \leq \cos x$ (можно графически), станет видно, что пересечением их множеств решений является $\emptyset$.

Ответ: $\emptyset$.

2. Заметим, что для системы

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

выполняется условие, что если (x_0, y_0, z_0) решение, то и $(-x_0, -y_0, z_0)$ тоже решение. Но так как система должна иметь единственное решение, то они совпадают. Это выполняется при $x_0 = 0, y_0 = 0$, тогда

$$\begin{cases} z = a, \\ z = b, \\ z^2 = 4. \end{cases}$$

Полученная система равносильна совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} z = 2, \\ a = 2, \\ b = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} z = -2, \\ a = -2, \\ b = -2. \end{cases}$$

Тогда, если

1) $a = b = 2$, то справедлива система

$$\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xyz^2 + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

которая имеет 5 решений, что не удовлетворяет условию.

2) Если же $a = b = -2$, то справедлива система

$$\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

т. е. решение системы

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = -2 \end{cases}$$

единственное.

Ответ: при $a = b = -2$.

3. Пусть $\log_3 y = b$. Тогда $\log_y x = \frac{\log_3 x}{\log_3 y} = \frac{\log_3 x}{b} = a$, т. е.

$$\log_3 x = ab. \text{ Тогда } \log_{(9/x^5)}(81 \sqrt[3]{y}) = \frac{\log_3(81 \sqrt[3]{y})}{\log_3(9/x^5)} = \frac{12 + b}{6 - 15ab}.$$

Ответ: $\frac{12+b}{6-15ab}$.

4. Указание. Найти стороны треугольника BA_1D , откуда и находится $\cos \angle BA_1D$.

Ответ: $\frac{32}{5\sqrt{89}}$.

5. Справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{3}{4} - \frac{1}{100} < 0,99.$$

2003 г.

9 класс

1. Ответ: 385×412 .

2. Пусть человек родился в $\overline{18xy}$ г. и прожил $\overline{mn}$ лет. Тогда

$$\begin{cases} 1901 - \overline{18xy} = \overline{mn}, \\ x + y + 1 + 8 = m + n, \end{cases}$$

причем x, y, m, n — натуральные числа из отрезка $[1; 9]$. Тогда $x = 1$, $y = 0$; $m = 9$, $n = 1$.

Ответ: в 1810 г.

3. Пусть x — объем стакана, y — объем ложки. Тогда после двух переливаний содержимое стаканов станет следующим:

$$\text{Истакан} - (x - y) \Big|_{\text{кофе}} + \frac{y}{x + y} \cdot y \Big|_{\text{кофе}} + \frac{x}{x + y} \cdot y \Big|_{\text{молоко}};$$

$$\text{Пстакан} - x \Big|_{\text{молоко}} + y \Big|_{\text{кофе}} - \frac{y}{x + y} \cdot y \Big|_{\text{кофе}} - \frac{x}{x + y} \cdot y \Big|_{\text{молоко}};$$

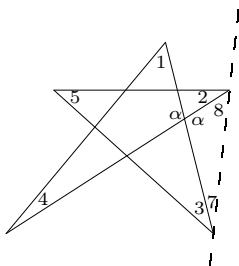
т. е. $\frac{xy}{x+y} = y - \frac{y^2}{x+y}$.

Ответ: поровну.

4. Ответ: 24.

5. $\angle 7 + \angle 8 = 180^\circ - \alpha = \angle 1 + \angle 4$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \angle 5 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 7 + \angle 8 = 180^\circ$ (см. рис. справа).

Ответ: 180° .



10 класс

1. Пусть в I-ом ящике находится x деталей, а во II-ом ящике — y деталей, причем $x, y \in \mathbb{N}$. Тогда имеем

$$\begin{cases} x + y > 29, \\ x - 2 > 3y, \\ 3x - 2y < 60, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(29 - y) < 3x < 2y + 60, \\ 3(3y + 2) < 3x < 2y + 60, \end{cases} \Rightarrow 6 \leq y \leq 7.$$

1) При $y = 6$ система $\begin{cases} x > 23, \\ 3x < 72, \end{cases}$ не имеет натуральных решений.

2) При $y = 7, x = 24$.

Ответ: 24; 7 деталей.

2. Указание. Прибавив к левой и правой частям каждого уравнения 1, получим систему

$$\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 8, \\ (y + 1)(z + 1) = -2, \\ (z + 1)(x + 1) = -4. \end{cases}$$

Ответ: $(-5; -3; 0), (3; 1; -2)$.

3. Справедливы следующие тригонометрические преобразования:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ &= 1 + \left(\frac{\sin^2 36^\circ \sin^2 72^\circ}{\cos^2 36^\circ \cos^2 72^\circ} - 1 \right) = \\ &= 1 + \frac{-\cos(72^\circ - 36^\circ) \cos(72^\circ + 36^\circ)}{\cos^2 36^\circ \cos^2 72^\circ} = \\ &= 1 + \frac{1}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ} \cdot \frac{4 \sin 36^\circ}{4 \sin 36^\circ} = 1 + \frac{4 \sin 36^\circ}{\sin 144^\circ} = 5. \end{aligned}$$

Ответ: 5.

4. Воспользуемся формулой Герона для площади треугольника

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{7,5 \cdot 3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5} = \frac{15}{4} \sqrt{7}.$$

Тогда $r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{\sqrt{7}}{2}$; $R = \frac{abc}{4S} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$, т. е. $\frac{r}{R} = \frac{7}{16}$.

Ответ: $\frac{7}{16}$.

5. Указание. Пусть $a_1 = a_2 = \dots = a_{1000} = 0,001$. Тогда сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_{1000} = 1$. $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1000}^2 = 0,001 < 0,01$.

Ответ: да.

11 класс

1. Указание. Справедливо равенство

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+10} \cdot \frac{\sqrt{99}-10}{\sqrt{99}-10} = 9.$$

Ответ: 9.

2. Указание. Вместо аргумента подставим сначала x , потом $\frac{1}{x}$:
 $2y(x) - 3y(\frac{1}{x}) = 5x + 7$, $2y(\frac{1}{x}) - 3y(x) = \frac{5}{x} + 7$.

Ответ: $y(x) = -2x - \frac{3}{x} - 7$.

3. Поскольку $\lg 15 = a$, а $\log_{20} 50 = b$, т. е. $\frac{\lg 50}{\lg 20} = b$, то $\lg 3 + \lg 5 = a$, $\frac{1+\lg 5}{2-\lg 5} = b$. Тогда $\log_3 40 = \frac{\lg 40}{\lg 3} = \frac{3-2\lg 5}{\lg 3}$.

Ответ: $\frac{5-b}{ab+a-2b+1}$.

4. Указание. Докажите равенство $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

5. Указание. Исследовать функцию $S(x) = x + \frac{250}{\sqrt{x}}$ на наименьшее значение.

Ответ: при $a = 75$.

2004 г.

9 класс

1. $6 + 6 + 99 = 111$.

Ответ: 6.

2. Указание. $\underbrace{111 \dots 111}_{2004} : 3 = \underbrace{\overbrace{370}^{2002} \overbrace{370}^{2003} \dots \overbrace{370}^{2002} \overbrace{3}^{2002} \overbrace{7}^{2003}}_{667}$.

Ответ: 667 нулей.

3. $N = \text{НОД}(108; 162; 252) = 18$.

Ответ: 18 мин.

4. Ответ: выполняются условия 2); 3); 4); 5); 6).

5. Пусть x — общие расходы фирмы, тогда $0,3x$ — накладные расходы, $0,7x$ — расходы на товар. Тогда $\frac{0,3x \cdot 6}{0,7x + 0,3x \cdot 6} \cdot 100\% = 72\%$.

Ответ: 72%.

10 класс

1. По условию $a + b = -1$, $ab = -2004$. Отсюда $a + 1 = -b$, тогда $a^2 + 2b^2 + ab + b - 2004 = a^2 + 2b^2 + b(a + 1) - 2004 = a^2 + 2b^2 - b^2 - 2004 = (a + b)^2 - 2ab - 2004 = 1 + 2 \cdot 2004 - 2004 = 2005$.

Ответ: 2005.

2. Фигура, заданная неравенством $|x| + |y| \leq 12$, имеет площадь $S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 24 = 288$ (рис. 25). Площади фигур, заданных неравенствами $|x| + |y| \leq 12$ и $|x - a| + |y - b| \leq 12$, равны.

Ответ: 288.

3. Указание. Из $\triangle ABE$ следует, что $20^\circ + (90^\circ - \angle 1 - 15^\circ) = 90^\circ$, $\angle 1 = 5^\circ$, $180^\circ = \angle ADB + \angle AEB = \angle DAE + \angle DBE \Rightarrow AEBD$ — вписанный четырехугольник $\angle ADE$ и $\angle ABE$ опираются на дугу $AE \Rightarrow \angle ADE = 20^\circ \Rightarrow \angle 2 = 70^\circ$, $\angle 3 = 105^\circ$ (рис. 26).

Ответ: 5° ; 70° ; 105° .

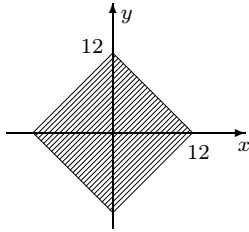


Рис. 25

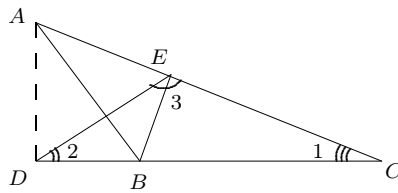


Рис. 26

4. По условию задачи имеем

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 21, \\ a_1 + a_3 = 2a_2, \\ (a_2^2)^2 = a_1^2 \cdot a_3^2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = a_1 + d = 7, \\ |a_1(a_1 + 2d)| = 49. \end{cases}$$

Ответ: $\{7 + 7\sqrt{2}; 7; 7 - 7\sqrt{2}\}$ или $\{7 - 7\sqrt{2}; 7; 7 + 7\sqrt{2}\}$.

5. Остатки от деления на 5 натуральных чисел, которым будут равны количества инфузорий, покажем из таблицы:

- | | |
|--|-----------|
| 1. В начале 1-ой недели — 6 | 1 |
| 2. В начале 2-ой недели — $(6 \cdot 4 - 9) = 15$ | 0 |
| 3. В начале 3-ой недели — $(15 \cdot 4 - 9) = 51$ | 1 |
| 4. В начале 4-ой недели — $(51 \cdot 4 - 9) = 195$ | 0 и т. д. |

Ответ: В начале 31 недели — остаток 1.

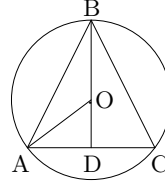
11 класс

1. Поскольку $\frac{(3n-1)+(3n-2)}{3n} = 2 - \frac{1}{n}$, то
 $(\frac{1+2}{3} + \frac{4+5}{6} + \dots + \frac{2002+2003}{2004}) + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{668}) =$
 $= (2 - 1) + (2 - \frac{1}{2}) + \dots + (2 - \frac{1}{668}) + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{668}) =$
 $\underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{668} = 1336.$

Ответ: 1336.

2. Пусть высота конуса $BD = x$, радиус описанного шара с центром в точке O , $AO = R$, тогда $OD = x - R$, $\sqrt{R^2 - (5 - x)^2} = x - R$. Введем функцию $R(x) = x + 12,5x^{-1} - 5$, тогда $R_{\min} = R(2,5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} - 5$.

Ответ: $[5\sqrt{2} - 5; +\infty)$.



3. Сравним левую и правую части уравнения с единицей. Получим, что левая часть не меньше 1, а правая часть не больше 1. Тогда $7 - \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 7$; $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

1) При $x_1 = 1$ левая часть уравнения примет вид: $1 + \sin^2 4 > 1$, что невозможно, т. е. $x_1 = 1$ не является корнем уравнения.

2) При подстановке вместо x в левую часть уравнения $x_2 = -3$ получим верное числовое равенство $1 = 1$, $x_2 = -3$ есть корень уравнения.

Ответ: -3 .

4. Сложив все три уравнения системы, получим:

$$(a - 2) \cdot \left(\underbrace{\sqrt{x}}_m + \underbrace{\sqrt[3]{y-1}}_n + \underbrace{\sqrt[5]{r+2}}_k \right) = 0.$$

Возможны несколько случаев.

1) Если $a = 2$, то справедлива система

$$\begin{cases} m + n = 2k, \\ n + k = 2m, \\ k + m = 2n, \end{cases}$$

т. е. $m = n = k = t$, следовательно,

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + 1, \\ z = t^5 - 2, \end{cases} \quad \text{для всех } t \in (-\infty; +\infty).$$

2) Если $a \neq 2$, то выполняются условия

$$\begin{cases} m+n+k=0, \\ m+n=ak, \\ n+k=am, \\ m+k=an, \end{cases}$$

тогда $k(a+1) = m(a+1) = n(a+1) = 0$.

3) Если $a = -1$, то $x \in [0; +\infty)$, $y, z \in (-\infty; +\infty)$.

4) Если $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$, то $k = m = n = 0$, следовательно, $x = 0$, $y = 1$, $z = -2$.

5. Запишем уравнение в виде $(x^4 + 11x^2 - \sqrt{p}x)^2 + (x^4 - 25)^2 = 0$, отсюда $x_1 = -\sqrt{5}$ (не является корнем уравнения), $x_2 = \sqrt{5}$. Тогда $\sqrt{p} = x^3 + 11x$, т. е. $p = 1280$.

Ответ: 1280.

2005 г.

9 класс

1. Поскольку $(10 + 11 + 15) : 4 = 9$, то стоимость одного пирожка равна $36 : 9 = 4$ руб.

Ответ: 4; 8; 24.

2. По условию $x \neq 8$. Тогда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ — корни уравнения, $x_3 = 8$ не является корнем. Поэтому произведение равно -1 .

Ответ: -1 .

3. Пусть x — скорость течения реки, v — скорость лодки. Тогда $t_p = \frac{10}{v-x} + \frac{10}{v+x} = \frac{20v}{v^2-x^2} > \frac{20v}{v^2} = \frac{20}{v} = t_{\text{оз}}$.

Ответ: по реке.

4. Если движение начать с точки $O(0; 0)$, то расстояние до одной из осей координат будет равно $\rho_1 = |\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm 9| \geq |1 + 3 - 5 - 7 + 9| = 1$, а до другой оси равно $\rho_2 = |\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm 8 \pm 10| \geq |2 + 4 - 6 - 8 + 10| = 2$. В 10 часов вечера расстояние до домика будет равным $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} \geq \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

5. $1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 20! = 1^{20} \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot \dots \cdot 19^2 \cdot 20^1 = (1^{10} \cdot 2^9 \cdot 3^8 \cdot \dots \cdot 18^2 \cdot 19^1)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 18 \cdot 20) = A^2 \cdot 2^{10} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10) = N^2 \cdot 10!$
 Ответ: $10!$

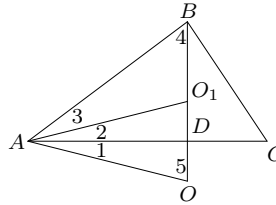
10 класс

1. Пусть x кг — первоначальный вес, тогда имеем: $x \cdot 0,75 \cdot 1,20 \cdot 0,90 \cdot 1,20 = 0,972x < x$.

Ответ: похудела.

2. Пусть $OA = OB = R$, O_1 — центр вписанной окружности, причем $O_1D = r$, $OD = r$. Тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \alpha$, $\angle 4 = 3\alpha$ (так как $OA = OB$), $\angle 5 = 90^\circ - \alpha$, $3\alpha + 3\alpha + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$, $\alpha = 18^\circ$, $\angle ABC = 2 \cdot \angle 4 = 2 \cdot 3 \cdot 18^\circ = 108^\circ$.

Ответ: 108° .



3. Пусть $\overline{xy}$ — искомое число. Тогда $3 \cdot \overline{xy} \leq \overline{yx}$, т. е. $3(10x + y) \leq 10y + x$, или $29x \leq 7y$. Если $x = 1$, то y может принимать значения 5, 6, 7, 8, 9. Если $x = 2$, то $y = 9$.

Ответ: 6.

4. Расходы на одно место в 4-местной клетке меньше расходов на одно место в 13-местной клетке (так как $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} < \frac{13}{13} + \frac{10}{13}$), поэтому $x \rightarrow \max$ (x — количество 4-местных клеток, y — 13-местных клеток).

$$\begin{cases} 4x + 13y \leq 135, \\ 3x + 10y \leq 89, \\ x \rightarrow \max, \\ 4x + 13y \rightarrow \max, \end{cases} \Rightarrow x = 23, y = 2.$$

Всего мест: $23 \cdot 4 + 2 \cdot 13 = 118$.

Ответ: 118 мест.

5. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (|x| - R)^2 + (|y| - R)^2 = (\sqrt{2}R)^2, \\ |x| + |y| = 28. \end{cases}$$

Возможны два случая: 1) $x_1 = y_1 = 14$, $R_1 = 7$; 2) $x_2 = 0$, $y_2 = 28$, $R_2 = 14$. Тогда $N = R_1 + R_2 = 21$.

Ответ: 21.

1. Запишем уравнение в виде $x^2 - (y + 1)^2 = 8$. Тогда $(x - y - 1)(x + y + 1) = 8$. Но $8 = -1 \cdot (-8) = 1 \cdot 8 = -2 \cdot (-4) = 2 \cdot 4 = -4 \cdot (-2) = 4 \cdot 2 = -8 \cdot (-1) = 8 \cdot 1$.

Ответ: $(-3; -2)$, $(3; 0)$, $(-3; 0)$, $(3; -2)$.

2. 1) $\frac{2+x}{2} \cdot h_1 = S$, $\frac{x+10}{2} \cdot h_2 = 7S$, $\frac{2+10}{2} \cdot (h_1 + h_2) = 8S$, $h_1 + h_2 = \frac{8S}{6} = \frac{2S}{x+2} + \frac{14S}{x+10} \Rightarrow x = 4$ (рис. 27.1).

2) $x = 2\sqrt{22}$ (рис. 27.2).

Ответ: 1) 4; 2) $2\sqrt{22}$.

3. Воспользуемся тригонометрическими преобразованиями:

$$\begin{aligned} & (\sin 47^\circ + \sin 367^\circ) + (\sin 87^\circ + \sin 327^\circ) + \dots + (\sin 167^\circ + \sin 247^\circ) + \\ & + \sin 207^\circ = \sin 207^\circ (2 \cos 160^\circ + 2 \cos 120^\circ + 2 \cos 80^\circ + 2 \cos 40^\circ + 1) = \\ & = \dots = 4 \sin 27^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot 2 \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 27^\circ = \\ & = \frac{8 \sin 27^\circ \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ} - \sin 27^\circ = \\ & = \frac{\sin 27^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} - \sin 27^\circ = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

4. Это число 1000044. На запись всех чисел потребуется $1000044 \cdot \frac{60}{20} = 3000132$ сек = 833 часа 1332 сек = 92 рабочих дня 5 часов 22 мин 12 сек. Это меньше, чем 93 рабочих дня, а с 15.09.2005 г. по 31.12.2005 г. — 93 рабочих дня.

Ответ: успеет.

5. Пусть x лье — искомое расстояние. Составим функцию транспортных расходов от x и найдем ее наименьшее значение. $S(x) = 25000 \cdot k \cdot P \cdot x^3 + 9000 \cdot k \cdot p \cdot (72 - x)^3 = 1000kP(25x^3 + 9(72 - x)^3)$. Тогда $S'(x) = 1000kP(75x^2 - 27(72 - x)^2)$. $S'(x) = 0$, т. е. $75x^2 - 27(72 - x)^2 = 0$, откуда $x_0 = 27$ (рис. 28).

Ответ: 27 лье.

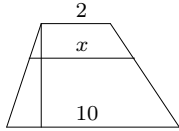


Рис. 27.1.

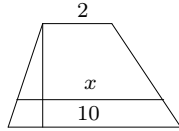


Рис. 27.2.

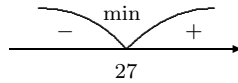


Рис. 28.

9 класс

1. Воспользуемся свойствами дробей и степеней:

$$5^{-2000} = \frac{1}{5^{2000}} = \frac{2^{2000}}{5^{2000} \cdot 2^{2000}} = \frac{(2^4)^{500}}{10^{2000}} = \frac{(16)^{500}}{10^{2000}}.$$

Так как 16^{500} есть число с последней цифрой 6, то и при делении на 10^{2000} последняя цифра в десятичной записи будет 6.

Ответ: 6.

2. Пусть радиус большей окружности — R , а меньшей — r , т. е. $OM = R$, $O_1M = r$; $OA = OM + MO_1 + O_1A$ (рис. 29). Но $OA = \sqrt{AC^2 + CO^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$. Аналогично $O_1A = r\sqrt{2}$. Тогда имеем: $R\sqrt{2} = R + r + r\sqrt{2}$, откуда $\frac{R}{r} = 3 + 2\sqrt{2}$.

Ответ: $3 + 2\sqrt{2}$.

3. Пусть n -количество «правдивцев». При $n = 0$ за столом сидят одни «лжецы» и условия задачи выполняются. При $n = 1, 2, 3, 5, 6$ условия задачи не выполняются при любом расположении сидящих. При $n = 4$ подходящее расположение показано на рис. 30.

Ответ: 0 или 4.

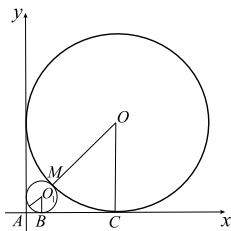


Рис. 29.

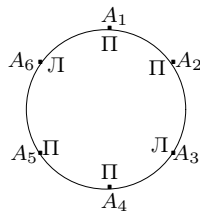


Рис. 30.

4. Разложим данный многочлен на множители:

$$\begin{aligned} A &= (x^5 + 3x^4y) - (5x^3y^2 + 15x^2y^3) + (4xy^4 + 12y^5) = \\ &= (x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4)(x + 3y) = (x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2)(x + 3y) = \\ &= (x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y)(x + 3y). \end{aligned}$$

- а) Если $y = 0$, то $A = x^5 \neq 33$ при любом натуральном x ;
 б) Если $y \neq 0$, то A , как произведение пяти различных целых чисел, не может равняться 33 (а $x - 2y$, $x - y$, $x + y$, $x + 2y$, $x + 3y$ — целые, так как по условию x и y — натуральные числа).

5. I вариант: H — наблюдатель; O_1 и O_2 — местонахождения объекта в 10 и 15 ч. Тогда скорость: $v_{об} = \frac{5-2}{15-10} = \frac{3}{5}$ (км/ч) и в 7 часов объект был на расстоянии $2 - \frac{3}{5}(10-7) = (2 - \frac{9}{5})\text{км} = \frac{1}{5}\text{км}$ от наблюдателя справа, т. е. встреча наблюдателя и объекта произошла раньше 7 часов, что противоречит условию, следовательно, не подходит.

II вариант: $v_{об} = \frac{5+2}{15-10} = \frac{7}{5}$ км/ч. B — местонахождение объекта в 11 часов, $O_1B = \frac{7}{5}\text{км}$; $BH = 2 - \frac{7}{5} = \frac{3}{5}\text{км}$.

Ответ: $\frac{3}{5}\text{км}$.

10 класс

1. $(0,1)^{100} < 0,9^{1000} < (\text{так как } 0,9^{10} = 0,81^5 > 0,8^5 = 0,64 \cdot 0,512 > 0,1); (1,1)^{10} > 2^{0,1} (\text{так как } (1,1)^{100} = (1,21)^{50} > (1,2)^{50} > \dots > 2); 2^{0,1} > 5^{0,01} > 1 (\text{так как } 2^{10} > 5). \text{ Значит, } (0,1)^{100} < (0,9)^{1000} < 5^{0,01} < 2^{0,1} < 1,1^{10}. 5^{0,01} - 1 < 1 - (0,9)^{1000} (\text{так как, очевидно, } 5^{0,01} + (0,9)^{1000} < 2). \text{ Тогда получается, что к } 1 \text{ ближе число } 5^{0,01}.$

Ответ: $5^{0,01}$.

2. Так как $CD \perp AB$ и D является точкой пересечения AB и окружности, то из подобия треугольников имеем: $(AD = x, DB = 4x) \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{10} = \frac{x}{CD} = \frac{CD}{4x} \Rightarrow CD = 2x; AC = 5; (5x)^2 = 5^2 + 10^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$, а $CD = 2\sqrt{5}$ (рис. 31).

Ответ: $2\sqrt{5}$.

3. Так как первую треть поля тракторист вспахал с производительностью на 25% больше, то на это было потрачено $\frac{60}{1,25} = 48$ (мин). На остальные $2/3$ участка было потрачено $\frac{120}{1,25 \cdot 0,75} = 128$ (мин). Значит, тракторист закончил работу на $180 - (48 + 128) = 4$ (мин) раньше.

Ответ: на 4 мин.

4. См. решение задания 3 за 9 класс 2006 г. и рис. 32.

Ответ: 3 «лжеца».

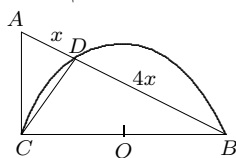


Рис. 31.

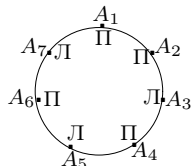


Рис. 32.

5. Воспользовавшись соответствующими тригонометрическими свойствами и формулами, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cdot \dots \cdot \cos \frac{10\pi}{11} = \\
 & = \left(\cos \frac{\pi}{11} \cos \left(\pi - \frac{\pi}{11} \right) \right) \left(\cos \frac{2\pi}{11} \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{11} \right) \right) \left(\cos \frac{3\pi}{11} \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{11} \right) \right) = \\
 & = \left(\cos \frac{4\pi}{11} \cos \left(\pi - \frac{4\pi}{11} \right) \right) \left(\cos \frac{5\pi}{11} \cos \left(\pi - \frac{5\pi}{11} \right) \right) = \\
 & = - \left(\cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} \right)^2 = \\
 & = - \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \left(2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{\pi}{11} \right) \cos \frac{2\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} \right)^2 = \\
 & = - \left(\frac{1}{8 \sin \frac{\pi}{11}} \sin \frac{8\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} \right)^2 = - \left(\frac{1}{16 \sin \frac{\pi}{11}} 2 \sin \frac{3\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} \right)^2 = \\
 & = - \left(\frac{1}{16 \sin \frac{\pi}{11}} \sin \frac{6\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} \right)^2 = - \left(\frac{1}{32 \sin \frac{\pi}{11}} 2 \sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11} \right)^2 = \\
 & = - \left(\frac{1}{32 \sin \frac{\pi}{11}} \sin \frac{10\pi}{11} \right)^2 = - \left(\frac{1}{32 \sin \frac{\pi}{11}} \sin \frac{\pi}{11} \right)^2 = - \left(\frac{1}{32} \right)^2 = -2^{-10}.
 \end{aligned}$$

Ответ: -2^{-10} .

11 класс

1. а) число -80 не может получиться, так как $|2+4+\dots+16| < 80$;

б) число $-16 = 2 + 4 - 6 + 8 + 10 + 12 - 14 - 16$;

в) так как $2+4+\dots+16 = 72$, то для получения числа 10 должны иметь суммы $(+41)$ и (-31) , что из условий задачи невозможно составить, т. е. число 10 не получается.

Так как все слагаемые четные, то результаты их комбинаций с «+» и «-» тоже будут четными, т. е. число 15 не может получиться.

Ответ: -16 .

2. См. решение задания 3 за 10 класс. $\frac{120}{0,8} = 150$ (мин) потрачено на первую четверть участка; $\frac{360}{0,8 \cdot 1,2} = 375$ (мин) потрачено на остальные $\frac{3}{4}$ участка; значит, тракторист приступил к работе на $(150 + 375) - 480 = 45$ (мин) раньше.

Ответ: на 45 мин.

3. Представим многочлен $P(x)$ в следующем виде: $P(x) = (1 - x^2 + x^3)^{2006} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{6017}x^{6017} + a_{6018}x^{6018}$. Используя известные свойства многочленов, имеем: $m = P(1) = (1 - 1^2 + 1^3)^{2006} = 1$ — сумма всех коэффициентов $P(x)$; $P(-1) = (1 - (-1)^2 + (-1)^3)^{2006} = 1$, с другой стороны: $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{6017} + a_{6018}$, $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{6017} + a_{6018}$. Отсюда

$m_{\text{неч.}} = \frac{P(1)-P(-1)}{2} = 0$; $m_{\text{чет.}} = \frac{P(1)+P(-1)}{2} = 1$. $P(m_{\text{неч.}}) = P(0) = 1$; $P(m_{\text{чет.}}) = P(1) = 1$; $P(m) = P(1) = 1$. Из этих равенств получается искомое соотношение: $P(m_{\text{неч.}}) + P(m_{\text{чет.}}) = 2P(m)$.

4. Из равенств $a+b+c=0$ и $x+y+z=0$ получается: $a^2+b^2-c^2 = -2ab$ и $x^2+y^2-z^2 = -2xy$. Тогда

$$\begin{aligned} A &= \left(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} + \sqrt{c^2+z^2} \right) \times \\ &\times \left(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} - \sqrt{c^2+z^2} \right) \times \\ &\times \left(\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{b^2+y^2} + \sqrt{c^2+z^2} \right) \times \\ &\times \left(-\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} + \sqrt{c^2+z^2} \right) = \\ &= \left(\left(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} \right)^2 - \left(\sqrt{c^2+z^2} \right)^2 \right) \times \\ &\times \left(\left(\sqrt{c^2+z^2} \right)^2 - \left(\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{b^2+y^2} \right)^2 \right) = \\ &= \left(2\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+y^2)} - 2ab - 2xy \right) \times \\ &\times \left(2\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+y^2)} + 2ab + 2xy \right) = \\ &= 4(a^2+x^2)(b^2+y^2) - 4(ab+xy) = 4(ay-bx)^2, \end{aligned}$$

т. е. A является квадратом целого числа: $A = (2ay - 2bx)^2$, так как $(2ay - 2bx)$ — по условию есть целое число.

5. Данное уравнение представим в виде: $(x^2 - 2x - p)(x^2 - 4x - p + 5) = 0$

- 1) при $p \in (-\infty; -1)$ — нет действительных корней;
- 2) при $p = 1$ — единственный действительный корень $x_1 = 1$;
- 3) при $p \in (-1; 1)$ — два корня: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+p}$;
- 4) при $p = 1$ — три корня: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, $x_3 = 2$;
- 5) при $p \in (-1; +\infty)$ — $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+p}$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{p-1}$, но при $p = \frac{5}{4}$ $1 + \sqrt{1+p} = 2 + \sqrt{p-1}$, т. е. $x_2 = x_4$ и уравнение имеет 3 различных действительных корня. Ответ: при $p = 1$ и $p = \frac{5}{4}$.

Часть II

Республиканские
олимпиады по математике
1999-2006 гг.

Задания

1999 г.

8 класс

8.1. На доске были написаны числа от 1 до 9. Часть этих чисел стерли и написали все произведения $a \times b$ из оставшихся на доске чисел ($a \neq b$). Оказалось, что среди этих произведений нашлись числа, оканчивающиеся на все цифры от 0 до 9. Какое наибольшее количество чисел могло быть стерто с доски?

(Н. Агаханов)

8.2. Куб $1 \times 1 \times 1$ полностью оклеили шестью квадратами общей площадью 6. Обязательно ли все эти квадраты равны?

(И. Акулич)

8.3. Есть 9 запечатанных коробок, в которых лежит по 1, 2, 3, ..., 9 фишек соответственно (на каждой коробке написано, сколько в ней фишек). Двое играющих по очереди берут по одной фишке из любой коробки, распечатывая, если необходимо, коробку. Проигрывает тот, кто последним распечатает коробку. Кто из игроков может всегда выигрывать независимо от игры противника?

(А. Шаповалов)

8.4. Пусть O — центр вписанной окружности $\triangle ABC$. На прямой BC отметим точки A_1 и A_2 , на прямой AC — точки B_1 и B_2 , а на прямой AB — точки C_1 и C_2 так, что $OA_1 = OA_2 = OA$, $OB_1 = OB_2 = OB$, $OC_1 = OC_2 = OC$. Докажите, что $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = AB + BC + AC$.

(М. Сонкин)

8.5. Король приказал чеканить монеты так, чтобы любую целую сумму можно было набрать не более чем десятью монетами. Сначала были выпущены монеты в наименьшую возможную сумму — 1 крона. Затем на каждом следующем шаге казначей определяет наименьшую целую сумму, которую нельзя набрать, в соответствии с приказом, и выпускает монету в эту сумму. Какие монеты будут выпущены в королевстве?

(А. Шаповалов)

8.6. Бумажный треугольник ABC перегнули по прямой, в результате чего вершина C попала на сторону AB , а непокрытая часть разбилась на два равнобедренных треугольника, у которых равные стороны сходятся в вершинах A и B . Чему равнялся угол C ?

(А. Шаповалов)

8.7. Два игрока обходят доску 99×99 каждый своей ладьей, двигая их по очереди за ход на одну клетку по маршрутам в форме змейки. Первый начинает из левого нижнего угла, идет вправо до упора, затем ход вверх, влево до упора, снова ход вверх и т. д. Второй стартует из правого нижнего угла, идет вверх до упора, затем ход влево, вниз до упора, ход влево, и т. д. Окажутся ли ладьи в какой-нибудь момент на одной клетке и если да, то после какого по счету хода?

(А. Шаповалов)

8.8. Можно ли провести на координатной плоскости 10 прямых так, чтобы любые две пересекались в целочисленной точке и никакие три не проходили через одну точку?

(А. Шаповалов)

9 класс

9.1. Найдите все натуральные m такие, что число $m^2 + 2$ записывается одними шестерками.

(В. Сендеров)

9.2. Через вершину A треугольника ABC и основание биссектрисы $\angle A$ проведена окружность S , пересекающая стороны AC и AB в точках K и L . Докажите, что если $KL \parallel CB$, то S касается BC .

(Р. Карасёв)

9.3. По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями несколько велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. При обгоне фляжка от одного обязательно переходит к другому (моментов, когда двое одновременно обгоняют одного, не случается). Может ли оказаться при некотором начальном расположении и некоторых скоростях, что, как бы долго они ни ездил, у двух из них фляжка так и не побывает?

(А. Шаповалов)

9.4. Существует ли такое натуральное число a , что в последовательности $a_n = n^3 + a^3$, $n \in \mathbb{N}$, любые два соседних члена взаимно просты?

(В. Сендеров)

9.5. Найдите все тройки (a, b, c) ($a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$) действительных чисел, для которых параболы $y = ax^2 + bx + c$ и $y = bx^2 + cx + a$ имеют общую вершину.

(Н. Агаханов)

9.6. Дан выпуклый восьмиугольник $A_1A_2 \dots A_8$, у которого $\angle A_1A_4A_5 = \angle A_2A_5A_6 = \dots = \angle A_7A_2A_3 = \angle A_8A_3A_4 = 90^\circ$. Докажите, что восьмиугольник можно вписать в окружность.

(Н. Агаханов)

9.7. У геолога есть чашечные весы без гирь и 8 камней. Он хочет знать, верно ли, что два камня всегда тяжелее одного. Как ему гарантированно проверить это за 13 взвешиваний?

(А. Шаповалов)

9.8. Двое играющих по очереди передвигают каждый свою фишку на шахматной доске 100×100 , каждым ходом — на соседнее по стороне поле. Первый выигрывает, если после его хода станут перпендикулярными отрезки, соединяющие центры занятых фишками клеток с центром доски. Докажите, что если вначале фишки стояли в противоположных углах доски, то первый может выиграть независимо от игры второго.

(А. Шаповалов)

10 класс

10.1. Найдите все x , для которых выражения $\frac{1}{\cos x}$ и $\frac{1}{\cos 2x}$ одновременно принимают целые значения.

(Н. Агаханов)

10.2. См. задание 9.3.

10.3. Отрезок с концами на сторонах треугольника делит его площадь пополам. Докажите, что его длина больше $r\sqrt{2}$, r — радиус вписанной окружности.

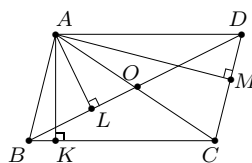
(А. Голованов)

10.4. Каково наибольшее число подряд идущих членов последовательности $x_n = n^4 + 1998$, НОД которых больше 1?

(В. Сендеров)

10.5. См. задание 9.5.

10.6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что точка O , а также основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые BC , BD и CD , лежат на одной окружности.



(П. Кожевников)

10.7. Два игрока играют в следующую игру: сначала на доске написаны числа $2, 4, 6, 8, \dots, 1998$. За 1 ход можно уменьшить на 1 любое из написанных чисел. При этом с доски стираются нули и числа, совпадающие с какими-то из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется ни одного числа. Кто выигрывает при правильной игре?

(С. Зайцев, П. Кожевников)

10.8. См. задание 9.8.

11 класс

11.1. Найдите все x , для которых выражения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ одновременно принимают целые значения.

(А. Агаханов, В. Сендеров)

11.2. Парабола $y = -x^2 + b_1x + c_1$ и парабола $y = -x^2 + b_2x + c_2$ касаются параболы $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболом.

(Р. Карасёв)

11.3. Дан остроугольный $\triangle ABC$. На продолжениях: стороны AC за точку C , CB за точку B , BA за точку A взяты соответственно точки B_1 , A_1 , C_1 так, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен $\triangle ABC$. Докажите, что ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром окружности, описанной около $\triangle ABC$.

(Р. Карасёв)

11.4. В темной комнате $20\text{ м} \times 20\text{ м}$ бегает таракан со скоростью $0,2$ м/с. Сможет ли Таня поймать таракана, если у нее есть фонарь, освещающий круг радиуса $R = 2$ м, а ее скорость 2 м/с?

(О. Подлипский)

11.5. Про квадратные трехчлены с разными старшими коэффициентами f_1, f_2 и f_3 известно, что их разности $f_1 - f_2$, $f_2 - f_3$ и $f_3 - f_1$ имеют по одному корню. Докажите, что корни разностей совпадают.
(Р. Карасёв)

11.6. См. задание 10.7.

11.7. Назовем кубоподобным многогранник, имеющий шесть граней и восемь вершин, в каждой из которых сходятся по три грани, каждая грань при этом — четырехугольник. Докажите, что если отрезки, соединяющие точки пересечения диагоналей противоположных граней кубоподобного многогранника пересекаются в одной точке, то отрезки, соединяющие противоположные вершины (главные диагонали), также пересекаются в одной точке.
(О. Подлипский)

11.8. Можно ли построить на координатной плоскости бесконечно много прямых так, чтобы любые две пересекались в целочисленной точке и никакие три не проходили через одну точку?
(А. Шаповалов)

2000 г.

8 класс

8.1. Расшифруйте числовой ребус

$$\begin{cases} МА \times МА = МИР, \\ АМ \times АМ = РИМ. \end{cases}$$

(одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные).

(А. Нагорный)

8.2. На доске написаны числа от 1 до 20. Разрешается, выбрав любые два числа, стереть их, а вместо них записать на доску их разность (из большего вычитается меньшее). При этом на доске не должны появляться равные числа. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какое наименьшее число может остаться на доске?

(А. Агаханов)

8.3. Малыш и Карлсон разделили круглый торт двумя перпендикулярными разрезами на 4 части. Карлсон взял себе наименьшую и наибольшую части, а остальные две отдал Малышу. Докажите, что Карлсону досталось не меньше половины торта.

(С. Волчёнков)

8.4. На столе лежат карточки, на которых написаны все делители числа 2000, причем на каждой карточке написан один из делителей. Два игрока по очереди берут себе по одной карточке. Проигрывает тот, у кого число на одной из его карточек делится на число на другой из его карточек. Кто выигрывает при правильной игре?

(Е. Черепанов)

8.5. Можно ли расставить на гранях куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы каждое число являлось делителем суммы своих соседей?

(А. Шаповалов)

8.6. Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки. Один из столбов покрашен в желтый цвет, другой — в синий, а остальные — в белый. Назовем расстоянием между столбами длину кратчайшей из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до желтого, если сумма расстояний от синего столба до белых равна 2000 км.

(И. Рубанов)

8.7. Имеется 100 правильных треугольников, у которых одна сторона — белая, одна — синяя, одна — красная. Разрешается прикладывать треугольники друг к другу одноцветными сторонами. Из этих треугольников составлен правильный треугольник со стороной 10. Докажите, что на границе большого треугольника одинаковое число белых, красных и синих сторон малых треугольников.

(С. Волчёнков)

8.8. В $\triangle ABC$ ($AB \neq BC$) проведена биссектриса BD . На прямой BD отметили точку E , отличную от D , такую что $CE = CD$. Докажите, что прямая, содержащая среднюю линию $\triangle ABC$, параллельную стороне AB , проходит через середину отрезка DE .

(М. Сонкин)

9 класс

9.1. Докажите, что для любого натурального a число $a^3 - 1$ не является степенью двойки.

(Н. Агаханов)

9.2. Докажите, что для любых положительных a, b, c верно неравенство

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

(Л. Емельянов)

9.3. На большем основании AB трапеции $ABCD$ выбрана произвольная точка M , и через эту точку проведены прямые, параллельные диагоналям трапеции до пересечения со сторонами BC и AD в точках N и K соответственно. Пусть отрезок KN пересекает диагонали AC и AD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки KP и QN равны.

(Д. Терёшин)

9.4. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, на всех дорогах двустороннее движение), и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

(В. Дольников)

9.5. Из цифр $2, 3, \dots, 9$ составили два натуральных числа (каждая цифра использовалась ровно один раз). Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

(Н. Агаханов)

9.6. Из A в B выехали одновременно «Жигули», «Москвич» и «Запорожец». «Жигули», доехав до B , повернули назад и встретили «Москвич» в 18 км, а «Запорожец» — в 25 км от B . «Москвич», доехав до B , также повернул назад и встретил «Запорожец» в 8 км от B . Найдите расстояние от A до B . (Скорости автомобилей постоянны.)

(С. Токарев)

9.7. Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность с центром на гипотенузе AB проходит через точку A и пересекает катет BC в точках M и N . Пусть K — точка, симметричная M относительно прямой AB . Докажите, что $KN = MC + CN$.

(М. Сонкин)

9.8. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано число 1 или -1 . Известно, что для каждой клетки произведение всех чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону, равно 1. Докажите, что в любых двух клетках, симметричных относительно центра таблицы, записаны одинаковые числа.

(С. Токарев)

7 Скюдтаев К. Б.

10 класс

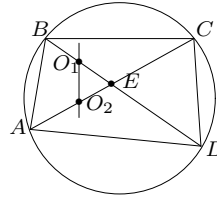
10.1. Найдите все натуральные a , для которых число $a^3 + 1$ — степень тройки.

(Н. Агаханов)

10.2. Андрей, Борис, Виктор, Григорий и Дмитрий по очереди охраняли свой дом от террористов. Каждый отдежурил по разу, причем Андрей дежурил вдвое больше Бориса, Борис — вдвое дольше Виктора, а Григорий и Дмитрий — столько же, сколько Виктор. Сердобольная старушка с первого этажа в начале каждого часа (в 1.00, 2.00 и т. д.) выносила дежурному чашку чая. Могло ли каждому из пятерых достаться ровно по одной чашке?

(И. Рубанов)

10.3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , а O_2 — центр окружности, вписанной в треугольник ABD . Докажите, что прямая O_1O_2 отсекает от треугольника AEB равнобедренный треугольник.



(М. Сонкин)

10.4. Кузнечик прыгает параллельно любой стороне некоторого правильного семиугольника на расстояние один (всякий раз выбирается один из возможных 14 векторов, на который он может сместиться). На плоскости расположена круглая кормушка радиуса 0,01. Докажите, что кузнечик всегда может попасть в кормушку.

(А. Белов)

10.5. Каждый из квадратных трехчленов $P_1(x) = x^2 + px + q$ и $P_2(x) = x^2 + qx + p$ имеет корни. Докажите, что тогда какой-то из трехчленов $Q_1(x) = x^2 + (p-2)x + 1$ и $Q_2(x) = x^2 + (q-2)x + 1$ имеет корень.

(О. Подлипский)

10.6. Найдите все натуральные n такие, что в десятичной записи числа $n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$) используется ровно две различные цифры.

(Е. Сосыка)

10.7. Пусть A_1 и A_2 — точки пересечения окружностей S_1 и S_2 , B_1 и B_2 — точки пересечения окружностей S_2 и S_3 и O_1, O_2, O_3 —

соответственно центры окружностей S_1, S_2 и S_3 . Докажите, что если точки O_1, A_1, O_2, B_1, O_3 лежат на одной окружности, то отрезок A_2B_2 параллелен отрезку O_1O_3 .

(Л. Емельянов)

10.8. См. задание 9.8.

11 класс

11.1. Дан многочлен $P(t) = t^2 - 4t$. Докажите, что при всех $x \geq 1, y \geq 1$ выполняется неравенство $P(x^2 + y^2) \geq P(2xy)$.

(Н. Агаханов)

11.2. Прямая, проходящая через середины скрепляющихся ребер тетраэдра, называется хорошей средней линией тетраэдра, если она образует равные углы с четырьмя прямыми, содержащими остальные ребра тетраэдра. Докажите, что тетраэдр — правильный, если хотя бы две его средние линии хорошие.

(Н. Агаханов)

11.3. Двое играющих по очереди красят клетки квадрата 8×8 . За один ход игрок красит своим цветом одну клетку. Перекрашивать клетки нельзя. Первый стремится закрасить своим цветом квадрат 2×2 . Может ли второй помешать первому независимо от его игры?

(О. Подлипский)

11.4. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде

$$\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}, \quad \text{где } a \text{ и } b \text{ — натуральные.}$$

(Л. Емельянов)

11.5. Найдите все пары простых чисел вида $\{a^n - 1, a^n + 1\}$, где a, n — натуральные числа, $n > 1$.

(В. Сендеров)

11.6. Докажите, что числа от 1 до 2000 можно так расставить в ряд и указать такую арифметическую прогрессию $b_1, \dots, b_n$, что первый ее член b_1 равен одному из этих чисел, b_2 — сумме двух соседних чисел, b_3 — сумме трех соседних, $\dots, b_n$ — сумме всех чисел.

(Д. Кузнецов)

11.7. Каждая точка трехмерного пространства окрашена в черный или белый цвет. Верно ли, что найдется равносторонний треугольник с одноцветными вершинами и стороной, равной 1?

(Л. Емельянов)

11.8. Точки A, B, C и D лежат на окружности с центром I . Середины перпендикуляры к отрезкам AD и BC пересекают прямую AB в точках P и Q . Докажите, что окружности, описанные около треугольников IPQ и ICD , касаются.

(Т. Емельянова)

2001 г.

8 класс

8.1. Натуральное число назовем палиндромом, если оно читается одинаково слева направо и справа налево. Найдите все простые числа — палиндромы, содержащие в своей десятичной записи четное количество знаков.

(Д. Кузнецов)

8.2. Даны угол в 60° и угольник, с помощью которого можно проводить прямую через две точки и проводить через точку прямую, перпендикулярную любой из нарисованных прямых. Разделите с помощью угольника данный угол (в 60°) пополам.

(Н. Агаханов)

8.3. Коля задумал 10 целых чисел (не обязательно различных), а затем вычислил все возможные суммы любых девяти чисел из этих десяти. У Коли получились числа: 92, 93, ..., 100 (повторяющиеся суммы Коля назвал только один раз). Какие числа он задумал?

(Д. Терёшин)

8.4. Некоторая страна, в которой n городов и из каждого города в другие выходит не менее k дорог (каждая дорога соединяет ровно два города и каждые два города соединены не более, чем одной дорогой), была разбита на m частей так, что в каждой части никакие два города не соединены дорогой. Докажите, что $m \geq \frac{n}{n-k}$.

(В. Дольников)

8.5. На всех клетках доски $n \times n$ ($n > 1$) расставлены фишки трех цветов. Оказалось, что рядом с любой фишкой стоят фишки обоих других цветов. Докажите, что какие-то фишки одного цвета стоят рядом (две фишки стоят рядом, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону).

(С. Берлов)

8.6. Существуют ли попарно различные не равные нулю цифры a, b, c такие, что $\overline{ab}$ делится на c , $\overline{bc}$ делится на a , $\overline{ca}$ делится на b ($\overline{mn}$ двузначное число с цифрами m и n)?

(А. Белов)

8.7. Точка O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. Докажите, что если периметры треугольников AOB , BOC и COD равны, то $ABCD$ — ромб.

(Н. Агаханов)

8.8. Улитка движется по поверхности куба, переползая от вершины к вершине по ребру или по диагонали грани. Найдите протяженность самого длинного пути из одной вершины куба в противоположную (наиболее удаленную) вершину, если запрещается пересекать свой путь и проходить через одну вершину дважды.

(Л. Емельянов)

9 класс

9.1. На доске записан трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Вместо трехчлена $p(x)$ записывают трехчлен $\frac{p(x+1)+p(x-1)}{2}$, а исходный трехчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трехчлен, не имеющий корней.

(А. Белов)

9.2. На сторонах AB и AC $\triangle ABC$ взяты соответственно точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Отрезки MM_1 и NN_1 — биссектрисы $\triangle AMN$. Докажите, что $M_1N_1 \parallel BC$.

(И. Исмагилов)

9.3. Даны 10 различных чисел. Из 45 их попарных сумм 40 оказались целыми числами. Докажите, что и пять оставшихся сумм также являются целыми.

(Р. Женодаров)

9.4. В некоторой стране из каждого города выходит по крайней мере одна дорога (каждая дорога соединяет ровно два города). Город назовем захолустным, если из него выходит ровно одна дорога. В стране нельзя выйти из какого-то города и, пройдя по замкнутому маршруту, вернуться в исходный. Города страны разбиты на две части так, что никакие два города в одной части не соединены дорогой. Пусть в первой части городов не меньше, чем во второй. Докажите, что в первой части есть захолустный город.

(В. Дольников)

9.5. Может ли число, составленное только из цифр 2 и 0, быть степенью выше первой натурального числа?

(Р. Женодаров)

9.6. Существуют ли нечетные числа x, y, z такие, что $xy + 1, yz + 1, zx + 1$ — полные квадраты?

(В. Сендеров)

9.7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Продолжения противоположных сторон этого четырехугольника пересекаются в точках K и N . Докажите, что окружность, описанная около $\triangle AKN$, касается окружности ω тогда и только тогда, когда окружность, описанная около $\triangle CKN$, касается окружности ω .

(Л. Емельянов)

9.8. Внутри треугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки находится ровно один узел. Какое наибольшее количество узлов может лежать на сторонах треугольника (включая вершины треугольника)?

(А. Голованов)

10 класс

10.1. Значения квадратного трехчлена $y = x^2 + ax + b$ в двух последовательных целых точках — соответственно квадраты двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что значения трехчлена во всех целых точках — точные квадраты.

(Н. Агаханов)

10.2. Для числа n^2 его *размером* назовем наибольшее количество частей (часть — несколько подряд идущих цифр), на которые может

быть разбита его десятичная часть так, что каждая из частей — квадрат натурального числа (возможно, начинающийся с нескольких нулей). Существует ли квадрат размера больше 2000?

(Е. Черепанов)

10.3. Прямая ℓ пересекает отрезок AB во внутренней точке D . Постройте на ℓ все точки X такие, что $\angle AXD - \angle XAD = \angle BXD - \angle XBD$. (разности углов могут быть отрицательными).

(В. Сендеров)

10.4. На плоскости провели 2001 прямую так, что никакие две из них не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Эти прямые разбили плоскость на части. Какое наименьшее число частей, являющихся углами, может при этом получиться?

(Р. Женодаров)

10.5. На доске записаны пять чисел, одно из которых 2000. Разрешается стереть любое число и вместо него записать число $a + b - c$, где a, b и c — какие-то три из остальных четырех чисел. Можно ли с помощью таких операций получить пять чисел, каждое из которых равно 2000?

(И. Исмагилов)

10.6. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Через точки A и C проведена окружность, касающаяся AO и CO . Докажите, что вторые точки пересечения прямых BA и BC с этой окружностью являются концами ее диаметра.

(Т. Емельянова)

10.7. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \leq 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$.

(Р. Женодаров)

10.8. Найдите все натуральные числа, единственным образом представимые в виде $\frac{x^2+y}{xy+1}$, где x, y — натуральные.

(Л. Емельянов)

11 класс

11.1. Синусы углов треугольника рациональны. Докажите, что их косинусы также рациональны.

(А. Голованов)

11.2. Окружности s_1 и s_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Пусть M — произвольная точка окружности s_1 , MA пересекается с s_2 в точке P , а MB пересекается с s_2 в точке Q . Докажите, что если четырехугольник AO_1BO_2 можно вписать в окружность, то AQ и BP пересекаются на s_1 .

(Л. Емельянов)

11.3. Существует ли многочлен $P(x)$ 2001-й степени такой, что $P(x^2 - 1)$ делится на $P(x)$?

(А. Голованов, В. Сендеров)

11.4. В стране 64 города. Широта и долгота городов измеряются целым числом градусов от 1 до 8. Два города соединены двусторонним авиарейсом тогда и только тогда, когда они либо имеют одинаковую широту, а их долгота отличается на 1° , либо имеют одинаковую долготу, а их широта отличается на 1° . Какое наибольшее число авиарейсов можно отменить, чтобы из любого города в любой другой можно было попасть, совершив не более 14 перелетов?

(Р. Женодаров)

11.5. Известно, что для чисел a, b, c выполняется двойное неравенство $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{c^2}{a+b} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} \geq \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$. Докажите, что $a = b = c$.

(Д. Кузнецов)

11.6. Из десятичного разложения дроби $1/p$ ($p > 5$ — простое) вычеркнули 2000-ную цифру. В результате получилось десятичное разложение несократимой дроби a/b . Докажите, что b делится на p .

(А. Храбров)

11.7. В выпуклом многоугольнике P_1 содержится выпуклый многоугольник P_2 . Докажите, что при любой гомотетии относительно точки $x \in P_2$ с коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$ по крайней мере одна вершина P_2 не выйдет за пределы P_1 .

(В. Дольников)

11.8. На основании ABC треугольной пирамиды $SABC$, у которой все плоские углы при вершине S больше 60° , произвольно взята точка O . Докажите, что по крайней мере один из углов SAO , SBO и SCO меньше 60° .

(П. Семенов)

8 класс

8.1. По кругу стоит 2001 коробка. В каждой коробке лежат черные и белые шарики, а на коробке написано, сколько в ней черных шариков и сколько — белых. Игорь хочет переложить из каждой коробки по одному шарiku в следующую коробку (по часовой стрелке) так, чтобы обе надписи на каждой из коробок стали неверными. Удастся ли ему это?

(И. Рубанов)

8.2. Коля перемножил два подряд идущих нечетных числа, а Вася перемножил три подряд идущих нечетных числа. Мог ли результат Коли оказаться на 2002 больше результата Васи?

(О. Подлипский, Д. Кузнецов)

8.3. Фрекен Бок поставила по кругу 50 вазочек с конфетами так, что количество конфет, в любых двух соседних вазочках отличается ровно на 1. Если Карлсон находит две вазочки, в которых поровну конфет, он съедает все конфеты в обеих вазочках. Докажите, что Карлсон сможет опустошить не меньше 32 вазочек.

(И. Рубанов)

8.4. Докажите, что любой прямоугольник можно разрезать не более чем на 5 попарно различных равнобедренных треугольников.

(Л. Емельянов)

8.5. Существует ли трехзначное число A , равное сумме двух чисел: суммы цифр числа A и произведения цифр числа A ?

(Л. Емельянов)

8.6. Восстановите с помощью циркуля и линейки треугольник ABC по трем точкам: D , E , M , где D и E — середины высот AH и CP треугольника ABC , M — середина стороны AC .

(Н. Агаханов)

8.7. По кругу расставлены числа $1, 2, \dots, 2002$ по порядку. Разрешается менять местами любые два стоящих рядом числа, разность которых больше $|2|$. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы эти числа шли в противоположном порядке?

(А. Гайфуллин)

8.8. Дано выражение, содержащее 999 дробей:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{999}{1000}.$$

Докажите, что, заменив все звездочки знаками арифметических действий, можно получить выражение, равное нулю.

(С. Токарев)

9 класс

9.1. Известно, что хотя бы один из трехчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + a^2x + b^2$, $x^2 + a^3x + b^3, \dots$ имеет вещественные корни. Докажите, что из этого множества трехчленов можно выбрать бесконечно много трехчленов, имеющих вещественные корни.

(Н. Агаханов)

9.2. Число, написанное на доске, либо удваивается, либо из него вычитается единица. После нескольких таких операций из числа 1 было получено число 2002. Докажите, что в некоторый момент на доске было написано число с цифрой 3.

(Н. Агаханов)

9.3. В треугольнике ABC угол C — прямой, CD — высота. Биссектрисы углов ABC и ACD пересекаются в точке M , а биссектрисы углов BAC и BCD — в точке N . Докажите, что длина отрезка MN равна радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

(В. Чернявский)

9.4. В турнире по футболу, проведенному среди 20 команд из разных городов, каждая команда провела одну встречу дома и не более двух встреч на выезде. Докажите, что можно было так составить расписание игр, чтобы каждая команда играла не более одной игры в день и весь турнир прошел бы за три дня.

(В. Дольников)

9.5. Известно, что для некоторых простых чисел p и q и натуральных чисел x и y таких, что $x < p$, $y < q$, число $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ — целое. Докажите, что $x = y$.

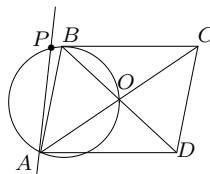
(А. Голованов)

9.6. Часы показывают время от 00.00 до 23.59. Петя написал программу, которая один раз в минуту увеличивает число, записанное

в одном из окон на мониторе, на число минут, которое показывают часы. В начальный момент в окне было число 0. Через какое наименьшее время в окне могло появиться число 2001?

(Н. Агаханов)

9.7. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, P — вторая точка пересечения окружности, проходящей через точки A , O , B с прямой BC . Докажите, что прямая AP касается окружности, проходящей через точки A , O , D .



(Л. Емельянов)

9.8. По окружности написано 2002 единицы. Два игрока по очереди стирают два соседних числа и записывают их сумму. Выигрывает тот, кто получит число 4. Если останется одно число, игра заканчивается вничью. Каков будет результат при правильной игре?

(Е. Бурков)

10 класс

10.1. Решите неравенство $\sin x \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{ctg} x \leq \cos x$.

(И. Рубанов)

10.2. Юра и Федя стоят у большой доски и играют в следующую игру. В начале на доске написано число $1000!$. Игроки по очереди проделывают следующую операцию. Выбирается число вида $n!$, являющееся делителем числа, написанного на доске, и прибавляется к написанному на доске. Результат записывается на доску, а исходное число стирается. Выигрывает тот, после чьего хода число на доске станет равным $2002!$ (если оно стало больше $2002!$, то ничья). Кто может гарантировать себе выигрыш и как, если Юра ходит первым?

(И. Богданов)

10.3. Окружность ω проходит через вершины B, C и центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Второй раз ω пересекает прямую AB в точке B_1 , а AC — в точке C_1 . Докажите, что длины отрезков BB_1 и CC_1 равны.

(Фольклор)

10.4. См. задание 9.4.

10.5. См. задание 9.5.

10.6. В таблице 6×6 расставлены натуральные числа от 1 до 36, причем каждое число встречается ровно один раз. Верно ли, что можно выбрать два таких соседних числа, стоящих в одной строке, что если взять меньшее из них в качестве коэффициента p , а большее — в качестве коэффициента q в квадратном трехчлене $x^2 + px + q$, то полученный трехчлен будет иметь различные действительные корни?

(О. Подлипский)

10.7. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник; S_{AB} , S_{BC} , S_{CD} , S_{DA} — окружности, построенные на сторонах AB , BC , CD и DA соответственно как на диаметрах. Известно, что S_{AB} касается S_{CD} , S_{BC} касается S_{DA} . Докажите, что $ABCD$ — ромб.

(А. Глазырин)

10.8. Существуют ли четыре многочлена, такие, что сумма любых трех из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух не имеет корней?

(И. Исмагилов)

11 класс

11.1. См. задание 10.1.

11.2. На большой доске написано число $1000!$. Федя проделывает следующую операцию. Он выбирает число вида $n!$, являющееся делителем числа, записанного на доске, и прибавляет выбранное число к записанному на доске. Результат записывается на доске, а исходное число стирается. Докажите, что независимо от выбираемых чисел, на доске когда-нибудь появится число $2002!$.

(И. Богданов)

11.3. Есть бусы, состоящие из p^n бусинок (p — простое, n — натуральное, $n > 2$). За ход бусы разбиваются на равные по длине куски. В каждом куске порядок следования бусинок меняется на обратный и куски возвращаются на свои места. Можно ли таким образом получить любой порядок следования бусинок?

(С. Спиридонов)

11.4. Пусть $ABCD$ — тетраэдр, ω — сфера, касающаяся всех его ребер. Две точки касания сферы ω с ребрами тетраэдра $ABCD$ соединим отрезком тогда и только тогда, когда они лежат на одной грани тетраэдра. Доказать, что сумма всех таких отрезков меньше, чем $3(AI + BI + CI + DI)$, где I — центр сферы ω .

(Н. Агаханов, А. Гайфуллин)

11.5. Коэффициенты a, b и c квадратного уравнения $ax^2 - bx + c = 0$ являются степенями двойки. Докажите, что если корни этого уравнения — целые числа, то эти корни совпадают.

(Н. Агаханов)

11.6. Дан $\triangle ABC$. Окружность ω_1 с центром на отрезке AB проходит через A и пересекает вторично отрезки AB и AC в точках A_1 и A_2 соответственно. Окружность ω_2 с центром на отрезке BC проходит через C и пересекает вторично отрезки BC и AC в точках C_1 и C_2 соответственно. Известно, что окружности ω_1 и ω_2 касаются в точке K внешним образом. Докажите, что $\angle A_1KC_1 = \angle A_2KC_2$.

(Т. Емельянова)

11.7. Множество натуральных чисел разбито на 2002 бесконечные попарно непересекающиеся арифметические прогрессии. Верно ли, что у каждой из этих прогрессий разность прогрессии не меньше первого члена прогрессии?

(П. Кожевников)

11.8. См. задание 10.8.

2003 г.

8 класс

8.1. У Васи есть несколько конфет (не обязательно одинаковой стоимости). Известно, что конфеты можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет вдвое больше, чем в другой. Также их можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет втрое больше, чем в другой. Какое наименьшее число конфет могло быть у Васи?

(О. Подлипский)

8.2. Точка пересечения высот остроугольного треугольника равноудалена от середин его сторон. Докажите, что треугольник равнобедренный.

(Н. Агаханов)

8.3. Назовем редкой парой два последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на произведение своих цифр (числа не должны содержать в своей десятичной записи нулей). Среди каких чисел больше редких пар — среди 2002- или 2003-значных?

(В. Сендеров)

8.4. Для оклейки кубика $3 \times 3 \times 3$ имеется неограниченный набор полосок ширины 1, каждая из которых состоит из целого числа клеток. Какое наименьшее число полосок необходимо взять, чтобы оклеить кубик в один слой (оклеивать разрешается так, чтобы каждая клетка полоски покрывала на поверхности кубика какую-то клетку целиком)?

(Л. Емельянов)

8.5. На острове Буяне живут племена рыцарей, лжецов и реалистов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а реалисты лгут и говорят правду через раз, причем неизвестно, с правдивого или ложного ответа начинают реалисты. Однажды репортер спросил у двух жителей А и Б этого острова, из каких они племен. Они ответили следующее:

А: «Б — рыцарь. Извините, Б — реалист».

Б: «А — лжец. Извините, А — ...».

К сожалению, последнее слово, сказанное Б, репортер не расслышал. Что это было за слово?

(И. Рубанов)

8.6. Сумма положительных чисел x , y и z равна 11. Докажите неравенство $[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geq 243$ ($[a]$ — целая часть числа a , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a).

(А. Храбров)

8.7. Докажите, что любой параллелограмм можно разрезать ровно на 9 равнобедренных треугольников.

(Л. Емельянов)

8.8. На окружности расставлены 56 точек, делящие ее на равные части. Двое играют в следующую игру. Игрок может своим ходом стереть любой набор точек, которые делят окружность на равные части (при этом одну или 56 точек стирать нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

(И. Рубанов, Д. Крамаренко)

9 класс

9.1. Можно ли раскрасить клетки таблицы 2003×2003 в три цвета так, чтобы у любой клетки первого цвета было по крайней мере два соседа второго цвета, у каждой клетки второго цвета было по крайней мере два соседа третьего цвета, у каждой клетки третьего цвета было по крайней мере два соседа первого цвета? (Соседями называются две клетки, имеющие общую сторону).

(Н. Агаханов)

9.2. Буратино время от времени сажает на поле чудес монеты. Из посаженной монеты немедленно начинает расти дерево с постоянной скоростью 1 м в час. В полночь суммарная высота посаженных Буратино деревьев равнялась 10 м, в 5 часов утра — 16 м, а в 10 утра — 29 м. Докажите, что среди деревьев Буратино найдутся два таких, которые отличаются по высоте не более, чем на 3 м.

(И. Рубанов)

9.3. На высоте AN остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность ω . Пусть B_1 и C_1 — вторые (кроме A) точки пересечения ω со сторонами AB и AC соответственно. Докажите, что касательные к ω , проведенные в B_1 и C_1 , отсекают на стороне BC отрезок, равный половине этой стороны.

(Т. Емельянова)

9.4. Докажите, что существует бесконечно много не делящихся на 3 точных квадратов, представимых в виде суммы пяти различных степеней тройки.

(А. Гарбер)

9.5. На доске написано уравнение $x^2 + 2x \cdot * + 3 \cdot (* + *) = 0$. Докажите, что любую тройку попарно различных целых чисел можно так расставить в уравнении вместо $*$, что полученное уравнение будет иметь по крайней мере один корень.

(Н. Агаханов)

9.6. За круглым столом 35 гостей уселись пить чай. Им выдали 10 литровых и 25 поллитровых кружек. Каждому принесли поллитровый чайник с чаем. Гость может вылить содержимое чайника себе или одному из своих соседей. Гости согласны пить только из полной кружки. Какое наибольшее число гостей может напиться чаю?

(Р. Женодаров)

9.7. Пусть P — произвольная точка внутри $\triangle ABC$. Выберем какую-либо вершину и отразим ее симметрично относительно P , а затем полученную точку отразим симметрично относительно середины стороны, противолежащей выбранной вершине. Обозначим полученную точку Q . Докажите, что Q не зависит от выбора вершины $\triangle ABC$.

(Л. Емельянов)

9.8. На окружности расставлены $2n > 2$ точек, делящие ее на равные части. Двое играют в следующую игру. Игрок может своим ходом стереть любой набор точек, которые делят окружность на равные части (при этом одну или $2n$ точек стирать нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

(И. Рубанов, Д. Крамаренко)

10 класс

10.1. Может ли тангенс острого угла быть в целое число раз больше как синуса, так и косинуса этого же угла?

(Н. Агаханов)

10.2. На высоте AH остроугольного треугольника ABC взята точка D . Точки M и N симметричны точке D относительно сторон AB и AC соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABM и ACN , пересекаются второй раз в точке, симметричной точке D относительно стороны BC .

(Т. Емельянова)

10.3. Существуют ли такие натуральные числа x , y и z (причем x — нечетное), что выполняется равенство $x^{10} + y^{10} = z^{11}$?

(В. Сендеров)

10.4. Для оклейки кубика $n \times n \times n$ имеется неограниченный набор полосок ширины 1, каждая из которых состоит из целого числа клеток. Какое наименьшее число полосок необходимо взять, чтобы оклеить кубик в один слой (оклеивать разрешается так, чтобы каждая клетка полоски покрывала на поверхности кубика какую-то клетку целиком)?

(Л. Емельянов)

10.5. См. задание 9.5.

10.6. Ко дню Российского Флага продавец украшает витрину 12 горизонтальными полосами ткани трех цветов. При этом он выполняет два условия: 1) одноцветные полосы не должны висеть рядом; 2) каждая синяя полоса должна висеть между белой и красной. Сколькими способами он может это сделать?

(С. Волчёнков)

10.7. В пространстве даны 4 попарно не пересекающиеся прямые. Известно, что любая плоскость, не параллельная ни одной из этих прямых, пересекает их в четырех точках, являющихся вершинами параллелограмма. Докажите, что данные прямые параллельны.

(С. Спиридонов)

10.8. На столе лежат картинками вниз 8 игральных карт. Вы можете указать на любую группу карт (в частности, на одну карту, или, например, на все 8) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа Вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Как при помощи 5 вопросов наверняка узнать число бубновых карт, лежащих на столе?

(С. Токарев)

11 класс

11.1. В треугольнике сумма косинусов двух углов равна синусу третьего угла. Докажите, что треугольник прямоугольный.

(Н. Агаханов)

11.2. Биссектрисы AL , BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O . Какой из отрезков LO , MO или NO наибольший, если $\angle A > \angle B > \angle C$?

(В. Сендеров)

11.3. Пусть x , y , z — неотрицательные числа и выполняется равенство $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Докажите неравенство $x + y + z \leq \frac{3}{2}$.

(В. Дольников)

11.4. В лагерь приехали $n \geq 9$ школьников. Известно, что любую группу из 6 школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что в каждой комнате все школьники знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть среди школьников?

(Д. Крамаренко)

11.5. Сумма положительных чисел x , y и z равна 11. Докажите неравенство $x^{[x]} + y^{[y]} + z^{[z]} > 81$. ($[a]$ — целая часть числа a , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a).

(А. Храбров)

11.6. На доске написаны числа от 1 до n , $n \geq 3$. Разрешается стереть любые два числа одной четности и вместо них записать на доску их полусумму. Эта операция проделывается до тех пор, пока на доске не останется одно число. Докажите, что в конце на доске могло остаться любое число от 2 до $n - 1$.

(Н. Агаханов)

11.7. Пусть A_1 , B_1 , C_1 , D_1 — соответственно середины ребер SA , SB , SC , SD четырехугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырехугольники ABC_1D_1 , A_1BCD_1 , A_1B_1CD , AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

(Н. Агаханов)

11.8. См. задание 10.8.

2004 г.

8 класс

8.1. Даны действительные числа x , y , z . Докажите, что одно из чисел $x^2 + 2xy + z^2$, $y^2 + 2yz + x^2$, $z^2 + 2zx + y^2$ неотрицательно.

(Жюри)

8.2. Дан клетчатый прямоугольник 1×1000 . Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может покрасить клетки какого-то прямоугольника 1×1 , 1×3 или 1×5 клеток (два раза красить одну и ту же клетку нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

(О. Подлипский)

8.3. Пусть AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного $\triangle ABC$. Из точки A_1 проведена прямая под углом C к стороне BC , не параллельная AC , а из точки C_1 проведена прямая под углом A к стороне AB , не параллельная AC . Докажите, что эти прямые пересекаются на стороне AC .

(Л. Емельянов)

8.4. Существуют ли такие натуральные числа x и y , при которых $x^2 - y^3 = 2003^{2004}$?

(В. Сендеров)

8.5. На перекрестке дорог встретились четыре путника: жители города лжецов (которые всегда лгут) и города рыцарей (которые всегда говорят правду). При этом не все были жителями одного города. Первый сказал: «Кроме меня, здесь ровно один житель моего города». Второй добавил: «А из моего города — я один». Третий подтвердил слова второго: «Ты прав». А четвертый промолчал. Из какого города четвертый?

(О. Дмитриев, Д. Кузнецов)

8.6. О натуральных числах a и b известно, что $an + 1$ делится на $bn + 1$ при любом натуральном n . Докажите, что $a = b$.

(А. Голованов)

8.7. Клетчатый прямоугольник разрезали по линиям сетки на шестиклеточные «корытца» и нечетное число клеточек. Какое наименьшее число отдельных клеточек могло при этом оказаться? (Шестиклеточное «корытце» выглядит так: , его можно поворачивать).

(Л. Емельянов)

8.8. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 3 многоугольника, из которых складывается прямоугольный треугольник (переворачивать части нельзя).

(Л. Емельянов)

9 класс

9.1. Двое по очереди ставят точки в клетки таблицы 7×7 . За один ход ставится ровно одна точка. В одну клетку может быть поставлено несколько точек. Проигрывает тот, после чьего хода в клетках какой-то строки или какого-то столбца суммарно будут стоять 5 точек. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

(О. Подлипский)

9.2. Назовем натуральное число «тройным», если его десятичная запись состоит из трех подряд идущих одинаковых групп цифр (например, 200420042004). После приписывания к некоторому тройному числу справа даты (по две цифры, означающие последовательно число, месяц и год), получилось новое тройное число. Найдите все такие даты в XXI веке.

(О. Дмитриев)

9.3. Пусть A_1 и C_1 — проекции вершин A и C треугольника ABC на биссектрису внешнего угла при вершине B соответственно. Докажите, что отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются на биссектрисе угла ABC треугольника ABC .

(Л. Емельянов)

9.4. В футбольном тотализаторе принимаются ставки на исходы 3 матчей очередного тура. (Каждый матч может завершиться любым из трех исходов: победой хозяев поля, победой гостей либо вничью). Составьте наименьшее число вариантов прогноза так, чтобы среди них наверняка имелся вариант, в котором исходы всех матчей указаны неверно.

(С. Токарев)

9.5. Найдите все квадратные трехчлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющие неравенствам $x^2 + x + 1 \leq P(x) \leq 2x^2 + 2x + 2$ при всех x .

(А. Голованов)

9.6. См. задание 8.7.

9.7. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap + 1$ делится на q , а $aq + 1$ делится на p . Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

(А. Голованов)

9.8. Произвольную точку P плоскости отразили симметрично относительно прямой, содержащей сторону BC треугольника ABC , и полученную точку отразили симметрично относительно середины стороны BC . Обозначим через A' полученную точку. Аналогично, отражая точку P симметрично относительно сторон CA и AB , а затем их середин, построим точки B' и C' . Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

(Л. Емельянов)

10 класс

10.1. На острове Невезения отменили понедельники. Известно, что в 2003 г. ровно 8 четвергов на острове пришлось на наши четверги. Сколько таких совпадений будет в 2005 г.?

(С. Токарев)

10.2. Пусть $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ — три квадратных трехчлена с положительными старшими коэффициентами. Известно, что каждый из них имеет хотя бы один общий корень с суммой двух других. Докажите, что $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ имеют общий корень.

(Жюри)

10.3. Какую наименьшую длину может иметь расположенная в пространстве замкнутая пятизвенная ломаная, все звенья которой различны по длине, а концы звеньев расположены в точках с целочисленными координатами?

(Н. Агаханов)

10.4. В остроугольном $\triangle ABC$ точка M — середина стороны BC , точки D и E — проекции точки M на стороны AB и AC соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABE и ACD , пересекаются в точке K , отличной от A . Докажите, что $AK \perp BC$.

(Л. Емельянов, П. Кожевников)

10.5. Докажите неравенство $a^n + b^n > (a + b)^n$, где a, b, n — действительные числа такие, что $a \cdot b < 0$, $a + b > 0$, $n > 1$.

(В. Сендеров)

10.6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC делит диагональ BD пополам. Докажите, что произведение расстояний от точки внутри четырехугольника до его сторон будет наибольшим, если эта точка — середина диагонали AC .

(С. Спиридонов)

10.7. В компании из 2004 человек некоторые знакомы между собой. Известно, что два человека дружат, если они знакомы и у них есть общий знакомый. Назовем человека необщительным, если у него нет друзей. Назовем человека странным, если он имеет в этой компании 1003 знакомых, но при этом необщительный. Какое максимальное число странных людей может быть в этой компании?

(Е. Куликов)

10.8. Наибольшие делители трех последовательных натуральных нечетных чисел, отличные от них самих, образуют (в некотором порядке) возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

(И. Богданов, А. Голованов)

11 класс

11.1. Пусть $ax^2 + 2bx + c$, $cx^2 + 2ax + b$, $bx^2 + 2cx + a$ — квадратные трехчлены с положительными коэффициентами, причем любые два из них имеют общий корень. Докажите, что $a = b = c$.

(О. Подлипский)

11.2. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбрали точки M и N так, что четырехугольник $AMNC$ — вписанный, и радиусы окружностей, описанных около четырехугольника $AMNC$ и треугольника MBN , равны. Докажите, что ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника MBN совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC .

(Н. Агаханов)

11.3. Сумма действительных чисел x, y, z равна 3, а сумма их попарных произведений равна a . Докажите неравенство $(x - 1)^2 < 4(1 - a/3)$.

(А. Храбров)

11.4. От квадратной доски 1001×1001 отрезали четыре угловых квадрата 2×2 . Можно ли оставшуюся часть доски разбить на фигурки вида ,  и ? (Все фигурки состоят из пяти клеточек 1×1 , их можно поворачивать).

(Б. Трушин)

11.5. Множество S состоит из чисел $1, 1 + b, 1 + b + b^2, 1 + b + b^2 + b^3, \dots$, где b — некоторое натуральное число. Докажите, что если два числа из S являются членами возрастающей арифметической прогрессии, то найдется еще одно число из S , также являющееся членом этой прогрессии.

(Н. Агаханов)

11.6. В круге площади 1001 два игрока по очереди проводят диаметры. Проигрывает тот, после хода которого площадь какого-то из получившихся секторов меньше 1. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

(О. Подлипский)

11.7. Найдите геометрическое место точек P , лежащих внутри куба $ABCD A' B' C' D'$, для которых в каждую из шести пирамид $PABCD$, $PABB' A'$, $PBCC' B'$, $PCDD' C'$, $PDAA' D'$, $PA' B' C' D'$ можно вписать сферу.

(О. Подлипский)

11.8. Существуют ли такие действительные x , что числа $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{ctg} 2004x$ оба целые?

(И. Богданов, В. Сендеров)

8 класс

8.1. На доске выписываются числа по следующему правилу: в первой строке число 1, во второй строке два числа 2 и 3, в третьей строке три числа 3, 4 и 5 и т. д. (в n -й строке стоят n последовательных натуральных чисел, начиная с n). Сколько раз на доске будет выписано число 2005?

(Р. Женодаров)

8.2. В наборе из пяти попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых трех гирь больше суммарного веса двух оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора.

(О. Подлипский)

8.3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 90^\circ$, а вершина C удалена от прямых AB и AD на расстояния, равные длинам отрезков AB и AD соответственно. Докажите, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

(С. Токарев)

8.4. В клетчатом квадрате 5×5 центральная клетка (вместе с ее границей) закрашена. Два игрока по очереди закрашивают еще не закрашенные клетки. Клетки закрашиваются вместе с границей. Игрок проигрывает, если после его хода на любом луче с началом в центральной клетке есть хотя бы одна закрашенная точка, помимо начала луча. Кто из игроков может выиграть независимо от игры соперника?

(К. Малевич, И. Рубанов)

8.5. В школе все учащиеся сидят за партами по двое, причем у 60% мальчиков сосед по парте — тоже мальчик, а у 20% девочек сосед по парте — тоже девочка. Сколько процентов учащихся этой школы составляют девочки?

(С. Токарев)

8.6. Найдите наименьшую возможную сумму 10 различных натуральных чисел таких, что произведение любых 5 из них четно, а сумма всех 10 чисел нечетна.

(О. Подлипский)

8.7. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC отметили точки C_1 , A_1 , B_1 соответственно так, что $2AC_1 = C_1B$, $2BA_1 = A_1C$, $2CB_1 = B_1A$. После этого исходный треугольник стерли, оставив точки A_1 , B_1 , C_1 . Постройте исходный треугольник.

(Л. Емельянов)

8.8. Боря соединил лампочку с каждым из десяти выключателей. Олег перерезал пять проводов так, что теперь ровно пять выключателей могут включить лампочку. Олег указал Боре на один из выключателей и спросил, может ли Боря узнать, перерезан ли провод, идущий от него к лампочке. При этом за одну попытку Олег разрешает включить одновременно любые три выключателя (лампочка загорится, если хотя бы один из них соединен с ней). После этого Олег одновременно возвращает выключатели в первоначальное положение. Верно ли, что Боре всегда хватит девяти таких попыток, чтобы ответить на вопрос Олега?

(О. Подлипский, Б.Трушин)

9 класс

9.1. См. задание 8.2.

9.2. Найдите наименьшее натуральное число, большее 100, такое, что при вписывании между любыми двумя его цифрами любой ненулевой цифры (скажем, n) получится число, делящееся на n .

(В. Сендеров)

9.3. Робот загадал натуральное число от 1 до 2005. По нашей просьбе он может проделывать следующие операции:

- 1) увеличить число в памяти на 1,
- 2) уменьшить число в памяти на 1,
- 3) сказать, является ли число в памяти точным квадратом.

Докажите, что не более чем за 300 операций мы можем узнать, какое число загадал робот.

(А. Кришеник)

9.4. Пусть P - ближайшая к вершине B точка пересечения биссектрисы угла B со вписанной окружностью треугольника ABC . Касательная к этой окружности, проведенная через P , пересекает стороны BC и BA в точках C_1 и A_1 соответственно. Докажите, что расстояние от точки A_1 до биссектрисы угла A равно расстоянию от точки C_1 до биссектрисы угла C .

(Л. Емельянов)

9.5. По кругу записаны 5 чисел. Известно, что любое число не меньше суммы двух соседних с ним чисел и не больше суммы двух несоседних с ним чисел. Какие числа могли быть записаны?

(Д. Пермяков)

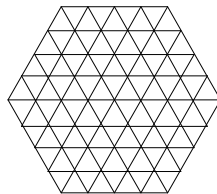
9.6. Через точку, лежащую внутри треугольника со сторонами a, b, c ($a < b < c$), провели три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые образуют в пересечении с внутренностью треугольника отрезки, длины которых равны l, m, n . Докажите, что $l + m + n \leq b + c$.

(Л. Емельянов)

9.7. Можно ли выбрать 100 последовательных четных чисел и разбить их на пары $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{50}, b_{50})$ так, чтобы каждое из уравнений $x^2 + a_1x + b_1 = 0, x^2 + a_2x + b_2 = 0, \dots, x^2 + a_{50}x + b_{50} = 0$ имело целые корни?

(Н. Агаханов)

9.8. Правильный шестиугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольнички со стороной 1. Этот шестиугольник замостили плитками в виде ромбиков, каждая из которых покрывает два треугольничка. Докажите, что плиток, расположенных каждым из трех спо-



собов: ,  и  в этом замощении встретится поровну.

(Е. Куликов)

10 класс

10.1. В наборе из одиннадцати попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых семи гирь больше суммарного веса четырех оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора.

(О. Подлипский, И. Богданов)

10.2. Докажите, что если число $\underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ единиц}} \underbrace{211 \dots 11}_{n \text{ единиц}}$ делится на 11, то оно также делится и на 121.

(В. Сендеров)

10.3. Пусть B_0 — середина стороны AC треугольника ABC . Проведем из середины отрезка AB_0 перпендикуляр к стороне BC , а из середины отрезка B_0C — перпендикуляр к стороне AB . Обозначим точку пересечения этих перпендикуляров через B' . Аналогично построим точки C' и A' . Докажите, что $\triangle A'B'C'$ и $\triangle ABC$ подобны.
(Л. Емельянов)

10.4. Какое наибольшее число клеток клетчатого квадрата $(2n - 1) \times (2n - 1)$ можно закрасить так, чтобы никакие три закрашенные клетки не образовывали уголок вида , ,  или ?
(О. Дмитриев)

10.5. В вершинах правильного 2005-угольника записаны числа. Известно, что для любой вершины записанное в ней число не больше суммы чисел, записанных в двух соседних с ней вершинах, и не меньше суммы чисел, записанных в двух наиболее удаленных от нее вершинах. Какие числа могли быть записаны?
(Д. Пермяков)

10.6. Из вершины B остроугольного треугольника ABC проведены перпендикуляры к сторонам AB и BC до пересечения с прямой AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и PBQ касаются.
(Т. Емельянова)

10.7. Существуют ли такие три квадратных трехчлена f_1, f_2, f_3 , что у каждого из них и у суммы $f_1 + f_2 + f_3$ имеется хотя бы по одному корню, а у трех попарных сумм $f_1 + f_2, f_2 + f_3, f_3 + f_1$ корней нет?
(И. Рубанов, О. Дмитриев)

10.8. На плоскости расположено бесконечное множество L прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что, как не расположить на плоскости квадрат со стороной 1, он будет пересекаться хотя бы с одной прямой множества L . Докажите, что найдется квадрат со стороной 0,8, который пересекается не менее, чем с тремя прямыми множества L .
(С. Волчёнков)

11 класс

11.1. См. задание 10.2.

11.2. Известно, что $\sin x + \cos 2x$ и $\cos x + \sin 2x$ — ненулевые рациональные числа. Докажите, что $\sin x$ и $\cos x$ рациональны.
(Н. Агаханов)

11.3. Докажите, что всякий выпуклый n -угольник ($n \geq 4$) с вершинами в точках с целыми координатами содержит параллелограмм с вершинами в точках с целыми координатами.

(В. Дольников)

11.4. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две непараллельные треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырехугольники ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , CAA_1C_1 . Докажите, что плоскость, проведенная через точки пересечения диагоналей четырехугольных граней, содержит прямую пересечения плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$.

(Л. Емельянов)

11.5. См. задание 10.5.

11.6. Пусть P — произвольная точка внутри остроугольного треугольника ABC с описанной окружностью Ω . Прямые AP , BP и CP вторично пересекаются с Ω в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Обозначим через A_2 , B_2 и C_2 проекции точки P на прямые BC , CA и AB соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

(Л. Емельянов)

11.7. Пусть a , b , c — действительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 2, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2. \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, отличающихся не менее, чем на 1.

(М. Мурашкин)

11.8. На доске написано уравнение

$$(x^2 + *x + *) \cdot (x^2 + *x + *) \cdot \dots \cdot (x^2 + *x + *) = \\ = (x^2 + *x + *) \cdot (x^2 + *x + *) \cdot \dots \cdot (x^2 + *x + *),$$

где в левой и правой частях по 10 квадратных трехчленов. Два игрока по очереди заменяют коэффициенты $*$ на ненулевые действительные числа. Первый игрок выигрывает, если после последнего хода второго игрока получившееся уравнение имеет действительный корень, в противном случае выигрывает второй игрок. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

(Н. Агаханов)

8 класс

8.1. В государстве каждый житель — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Все жители знакомы друг с другом. Президент однажды сделал два утверждения: «Я знаком с четным числом рыцарей» и «Я знаком с нечетным числом лжецов». Докажите, что любой другой житель сделает такие же утверждения (президент входит в число жителей).

(И. Богданов)

8.2. В произведении $ДО \cdot РЕ \cdot МИ \cdot СИ$ одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры. Каким наибольшим количеством нулей может заканчиваться это произведение?

(И. Рубанов)

8.3. Назовем диагональ пятиугольника хорошей, если какие-то другие диагонали делят ее на 3 равные части. Какое наибольшее число хороших диагоналей может быть у выпуклого пятиугольника?

(И. Рубанов)

8.4. В приборе имеется $n \geq 4$ контактов и $m \geq 4$ проводов, причем каждый провод соединяет ровно два контакта. Известно, что для любых четырех проводов найдутся такие два контакта, что любой из этих проводов подсоединен хотя бы к одному из них. Докажите, что найдутся такие три контакта, что любой провод в приборе подсоединен хотя бы к одному из них.

(В. Дольников)

8.5. В написанном на доске выражении $\frac{AC}{B+C}$ Петя и Коля заменяют буквы тремя различными натуральными числами: вначале Петя заменяет букву A , затем Коля — букву B , затем опять Петя — букву C . Докажите, что Петя может писать числа так, чтобы окончательное число на доске оказалось целым.

(И. Рубанов, В. Сендеров)

8.6. Клетки прямоугольника 7×8 покрашены в три цвета, причем в любом квадрате 2×2 есть клетки всех трех цветов. Какое наибольшее количество клеток может быть покрашено в первый цвет?

(О. Подлипский)

8.7. Каждый день Малыш и Карлсон едят пирожные. В первый день они съели по одному пирожному. Затем Малыш каждый день съедает ровно одно пирожное, а Карлсон ровно столько, сколько они съели вместе за все предыдущие дни. Могло ли число пирожных, съеденных однажды Карлсоном, оканчиваться на 101?

(Н. Агаханов)

8.8. На разных сторонах угла с вершиной S выбраны точки P и Q ($SP \neq SQ$). Через середину M отрезка PQ проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла. Эта прямая пересекается с прямой SP в точке T . Докажите, что перпендикуляр к SP , восстановленный в точке T , и перпендикуляр к PQ , восстановленный в точке M , пересекаются на биссектрисе угла.

(Л. Емельянов)

9 класс

9.1. Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

(Н. Агаханов)

9.2. Найдите все натуральные n , удовлетворяющие равенству $n! = \overline{1 \dots n}$ (в правой части последовательно выписаны друг за другом десятичные записи всех натуральных чисел от 1 до n ; $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

(В. Сендеров)

9.3. Из точки A , расположенной вне окружности ω , проведены две касательные AB и AC к этой окружности. Точка D лежит на ω и диаметрально противоположна C . Перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую CD , пересекает ее в точке H . Докажите, что прямая AD делит отрезок BH пополам.

(В. Астахов)

9.4. На острове живут 2006 человек, каждый — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Некоторые из жителей знакомы (если A знаком с B , то и B знаком с A). Каждый житель острова, кроме президента, сделал два

утверждения: «Я знаю четное число рыцарей» и «Я знаю нечетное число лжецов». Докажите, что президент должен сделать такие же утверждения. (Президент входит в число жителей острова.)

(И. Богданов)

9.5. См. задание 8.7.

9.6. На доске написаны многочлены $x + 1$ и $x^2 + 1$. Разрешается дописывать на доску многочлен f , равный сумме, разности или произведению любых двух различных из написанных многочленов, если многочлен f не был выписан на доске ранее. Можно ли выписать на доску многочлен $x^{2006} + 1$?

(Н. Агаханов)

9.7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны CD и DA в точках P и Q , а описанная окружность треугольника CDA пересекает стороны AB и BC в точках R и S соответственно. Прямые BP и BQ пересекают отрезок RS в точках M и N . Докажите, что точки M , N , P , Q лежат на одной окружности.

(С. Берлов)

9.8. Есть 15 монет, среди которых четное (не известное нам) число фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но они легче настоящих. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах найти хотя бы одну настоящую монету?

(С. Токарев)

10 класс

10.1. См. задание 9.1.

10.2. Натуральные числа от 1 до 100 выписали в строку в некотором порядке. Докажите, что найдутся два рядом стоящих числа, сумма которых больше 50, но меньше 150.

(С. Берлов)

10.3. Пусть a и b — различные натуральные числа, большие 1000000, и такие, что $(a + b)^3$ делится на ab . Докажите, что $|a - b| > 10000$.

(И. Богданов, В. Сендеров)

10.4. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q . Обозначим через M и N середины диагоналей AC и BD . Докажите, что если $\angle APM = \angle CPN$, то $\angle BQN = \angle DQM$.
(Л. Емельянов)

10.5. Уравнение $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня. Оказалось, что первый корень является синусом, второй — косинусом, а третий — тангенсом одного угла. Найдите все такие уравнения.

(Н. Агаханов, И. Богданов)

10.6. На плоскости провели 8 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?
(И. Рубанов)

10.7. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность ω_1 касается основания BC в точке M и продолжений сторон AB и CD за точки B и C ; окружность ω_2 касается основания AD в точке N и продолжений сторон AB и CD за точки A и D . Докажите, что отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

(Л. Емельянов)

10.8. В стране есть несколько городов, соединенных дорогами. Каждая дорога соединяет только два города, и на ней введено одностороннее движение; при этом пара городов соединена не более, чем одной дорогой. Выехав из любого города, нельзя в него вернуться. Известно, что из города A в город B можно проехать ровно 2006 способами. Найдите минимальное возможное число городов в стране.

(И. Богданов)

11 класс

11.1. График линейной функции касается графика квадратичной функции $y = f(x)$, а график квадрата этой линейной функции получается из графика $y = f(x)$ сдвигом вниз на величину p . Докажите, что для всех таких $f(x)$ число p одинаково.

(Н. Агаханов)

11.2. См. задание 10.2.

11.3. Положительные числа x и y таковы, что для некоторого натурального n справедливо равенство

$$x + x^2 + \dots + x^n + y + \dots + y^n = 2n.$$

Докажите, что тогда выполняется неравенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2.$$

(В. Астахов, А. Гаврилюк)

11.4. Описанная окружность четырехугольника $ABCD$ отражается симметрично относительно сторон AB и AD . Построенные окружности вторично пересекаются в точке A' , отличной от A . Аналогично строятся точки B' , C' и D' . Докажите, что четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны.

(Л. Емельянов)

11.5. Числа $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ являются членами некоторой бесконечной в обе стороны геометрической прогрессии $(\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots)$. Докажите, что $\operatorname{ctg} x$ также входит в эту прогрессию.

(Н. Агаханов)

11.6. Основания трех высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан противоположных граней. Докажите, что все ребра пирамиды равны.

(Н. Агаханов)

11.7. На плоскости проведено 12 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?

(И. Рубанов)

11.8. Имеется куча из $N > 1$ камней. Двое играют в игру. За один ход можно либо забрать один камень из любой кучки, либо разделить любую имеющуюся кучку на две произвольным образом (если в куче более одного камня). Побеждает тот, кто заберет последний камень. Кто из соперников сможет победить независимо от игры соперника?

(Д. Храмцов)

Ответы

1999 г.

8.1. 3; **8.2.** Не обязательно; **8.3.** Выигрывает второй; **8.5.** Монеты в $1, 11, 21, 31, \dots, 10n+1$ крон; **8.6.** 60° ; **8.7.** Да, после 4900 ходов; **8.8.** Можно; **9.1.** $m = 2$, $m = 8$; **9.3.** Не может; **9.4.** Нет; **9.5.** $a = d$, $b = -2d$, $c = 4d$, $d \neq 0$; **9.7.** Достаточно выявить два самых легких и один самый тяжелый и сравнить их; **10.1.** $x = 2\pi k$, $x = \pi + 2\pi k$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$; **10.2.** Не может; **10.4.** 2; **10.7.** Выигрывает первый игрок; **11.1.** $x = \pi n$; **11.4.** Да; **11.8.** Можно.

2000 г.

8.1. $13 \times 13 = 169$, $31 \times 31 = 961$; **8.2.** 2; **8.4.** Выигрывает второй; **8.5.** Нет; **8.6.** 25; **9.5.** Нет; **9.6.** 60 км; **10.1.** $a = 2$; **10.2.** Не могло; **10.6.** $n = 4$; **11.3.** Да; **11.4.** Нельзя представить в указанном виде число 1 и числа, на 2 больше степеней двойки; **11.5.** $\{3; 5\}$; **11.7.** Да.

2001 г.

8.1. 11; **8.3.** 7, 8, 8, 9, $\dots$, 15; **8.6.** Не существуют; **8.8.** $3 + 4\sqrt{2}$; **9.5.** Не может; **9.6.** Не существуют; **9.8.** 9 (считая вершины); **10.2.** Существует; **10.4.** 3; **10.5.** Можно; **10.8.** Все натуральные числа, кроме 1. **11.3.** Существует. Например $P(x) = (x + \alpha)^{2001}$, где $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; **11.4.** 48 авиарейсов.

2002 г.

8.1. Нет; **8.2.** Нет; **8.5.** Нет; **8.7.** Нет; **9.6.** Через 66 минут; **9.8.** Выигрывает второй игрок; **10.1.** $\emptyset$; **10.2.** Юра; **10.6.** Верно; **10.8.** Не существуют; **11.1.** $\emptyset$; **11.3.** Нет; **11.7.** Верно; **11.8.** Не существуют.

2003 г.

8.1. 3 конфеты; **8.3.** Среди 2002 — значных чисел редких пар больше; **8.4.** 6 полосок; **8.5.** «Реалист»; **8.8.** Выигрывает первый; **9.1.** Нет; **9.6.** 30 гостей; **9.8.** Если n является степенью двойки, то выигрывает второй, иначе — первый; **10.1.** Не может; **10.3.** Существуют; **10.4.** $2n$ полосок; **10.6.** 288; **11.2.** OM ; **11.4.** $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

9 Скюдтаев К. Б.

2004 г.

8.2. Выигрывает второй; **8.4.** Существуют; **8.5.** Из города рыцарей; **8.7.** 3; **9.1.** Выигрывает второй; **9.2.** 10.10.10, 11.11.11, 12.12.12; **9.5.** $P(x) = x^2 + x + 1$ или $P(x) = 2x^2 + 2x + 2$; **9.6.** 3; **10.1.** 9; **10.3.** $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$; **10.7.** 1001; **10.8.** 23, 25, 27; **11.4.** Нет; **11.6.** Выигрывает второй; **11.7.** Искомое ГМТ — объединение диагоналей AC' , BD' , CA' , DB' ; **11.8.** Не существуют.

2005 г.

8.1. 1003; **8.2.** 35 г.; **8.4.** Выигрывает второй игрок; **8.5.** $33\frac{1}{3}\%$; **8.6.** 65; **8.8.** Да; **9.1.** 35 г.; **9.2.** 777777777000; **9.5.** Все числа равны нулю; **9.7.** Нельзя; **10.1.** 109 г.; **10.4.** $n(2n-1)$; **10.5.** Все числа равны нулю; **10.7.** Нет; **11.5.** Все числа равны нулю; **11.8.** Первый игрок.

2006 г.

8.2. Пять нулей; **8.3.** Две «хорошие» диагонали; **8.6.** 32 клетки; **8.7.** Не могло; **9.1.** Нельзя; **9.2.** $n = 1$; **9.5.** Не могло; **9.6.** Можно; **9.8.** Можно; **10.1.** Нельзя; **10.5.** $2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$; **10.6.** 24; **10.8.** 13; **11.7.** 60; **11.8.** Если N четно, то выигрывает первый, если же N нечетно, то выигрывает второй.

Часть III

Дополнительные задания
республиканских олимпиад
2005, 2006 гг.

Задания

2005 г.¹

9 класс

1. Нищий на паперти за один час насобирал 230 р. монетами по 1, 2 и 5 р. (были монеты всех достоинств). Сколько в его шляпе было монет каждого достоинства, если всего их оказалось 50?

2. Найти какие-нибудь целые k и n , удовлетворяющие равенству $\frac{1}{12^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2}$.

3. Решить уравнение $x^2 - 5 = \sqrt{x + 5}$.

4. Доказать неравенство

$$\frac{2x^2}{y^4 + x^2} + \frac{2y^2}{x^4 + y^2} \leq xy + \frac{1}{x^2 y^2} \quad (x \geq 1, y \geq 1).$$

5. В квадрате 5×5 16 клеток закрашено в черный цвет. Доказать, что найдется квадрат 2×2 , содержащий не менее трех закрашенных клеток.

6. См. задание 8.2 за 2005 г.

2005 г.²

10, 11 классы

1. В полночь из пункта A в пункт B по течению реки отправился катер, а из B в A в тот же момент вышла лодка. Лодка была в пути не менее суток. Катер, дойдя до пункта B , сразу повернул назад и возвратился в пункт A не позднее 10 часов 48 минут того же дня.

¹Задания подобрала Ларионова З. И.

²Задания подобрал Койбаев В. А.

Первая встреча катера и лодки состоялась в 4 часа утра. Найти, когда катер прибыл в пункт B , если его скорость в стоячей воде втрое больше скорости лодки в стоячей воде.

(5 баллов)

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

(4 балла)

3. Разложить многочлен $x^8 + x^4 + 1$ на квадратные трехчлены.

(4 балла)

4. x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $3x^3 - 4x + 4$. Вычислить

$$(x_1x_3)/x_2 + (x_3x_2)/x_1 + (x_1x_2)/x_3.$$

(3 балла)

5. Корни многочлена $x^3 + px^2 - 6x + 8$ образуют геометрическую прогрессию. Найти p и корни многочлена.

(3 балла)

6. Пусть $a + b + c = 1$. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1/3$.

(2 балла)

7. Доказать неравенство $1/4 \leq (\sin x)^6 + (\cos x)^6 \leq 1$.

(2 балла)

8. Составьте многочлен, если известны его корни $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = \sqrt{5}$, $x_5 = -\sqrt{5}$ и его свободный член равен 5.

(1 балл)

9. Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ кратно 120 при всех натуральных n .

(2 балла)

10. Положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Вычислить

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}.$$

(2 балла)

11. Найти все значения d , при которых многочлен $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - d$ имеет три положительных корня.

(4 балла)

12. Вычислить $f(3)$, если $f(\lg x) = \log_{100x} 10$.

(1 балл)

13. Решить уравнение

$$|x^3 + 12x^2 - 11x + 6| + |x^3 - 7x^2 - x - 1| = 18x^2 - 14x + 3.$$

(5 баллов)

14. Из пункта A в пункт B поезд ехал со скоростью 30 км/ч, а обратно из B в A со скоростью 70 км/ч. Найти среднюю скорость движения поезда на всем пути.

(1 балл)

15. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, делит ее на две трапеции, площади которых относятся как 1 : 7. Найти длину отрезка, если основания трапеции равны 2 и 10.

(4 балла)

16. Доказать, что если вокруг четырехугольника можно описать окружность, то его площадь вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c, d — его стороны, p — полупериметр, а если, к тому же, в него можно вписать окружность, то $S = \sqrt{abcd}$.

(4 балла)

2006 г.³

10 класс

1. Сравнить числа:

$200520052005 \cdot 20062006$ и $20052005 \cdot 200620062006$.

(3 балла)

³Задания подобрал Скодтаев К. Б.

2. У Пети и Васи имелось по одинаковой прямоугольной открытке. Каждый из мальчиков разрезал свою открытку на два прямоугольника равной площади и один из них выбросил, а другой оставил себе. Затем Вася оставшийся у него прямоугольник снова разрезал на два прямоугольника равной площади и один из них выбросил, а другой оставил себе. Петя же свой прямоугольник больше не разрезал. Оказалось, что периметры прямоугольников, оставшихся у Пети и Васи, равны. Найти отношение сторон прямоугольной открытки.

(4 балла)

3. Расположить 25 чисел, от 1 до 25, в квадрате из 25 клеток так, чтобы в каждой строке, каждом столбце, а также по обеим диагоналям квадрата получились одинаковые суммы.

(7 баллов)

4. Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ ни при каком натуральном n не делится на 121.

(10 баллов)

5. Зависит ли количество положительных корней уравнения $x^3 + ax^2 - x - 2 = 0$ от значений параметра a , если нет, то сколько их?

(8 баллов)

6. Доказать, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{500} > 5.$$

(9 баллов)

7. Найти натуральные a, b, c, d , удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} ab + cd = 34, \\ ac - bd = 19. \end{cases}$$

(9 баллов)

Решения и ответы

2005

9.1. $\{2; 4; 44\}$; **9.2.** 15 и 20; **9.6.** 35.

10, 11 кл. **1.** 4 ч. 48 мин.; **2.** $\{(a; a; -a), (a; -a; a), (-a; a; a)\}$;

3. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$; **4.** $4/3$; **5.** $p = 3$;
 $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 4$; **8.** $f(x) = (x - 1)(x + 1)^2(x^2 - 5)$; **10.** $\frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$.

11. $4 < d < 5$; **12.** $\frac{1}{5}; 13; -2$; **14.** 42км/ч; **15.** 4 или $2\sqrt{22}$.

2006

10 класс

1. Оба равны $2005 \cdot 2006 \cdot 10001 \cdot 100010001$.

2. Пусть a, b — длины сторон открыток. Тогда периметры прямоугольников Пети менялись так:

$$P_{\text{Петр.пр.}} \rightarrow 2(a + b) \rightarrow 2(a/2 + b) = 2(a/2 + b),$$

а периметры прямоугольников Васи —

$$P_{\text{Вас.пр.}} \rightarrow 2(a + b) \rightarrow 2(a + b/2) \rightarrow 2(a + b/4).$$

По условию: $2(a/2 + b) = 2(a + b/4)$, откуда $\Rightarrow a : b = 3 : 2$.

Ответ: 3 : 2.

3. В таблице приведен один из искомым способов расположения чисел:

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

4. Пусть $N = n^2 + 3n + 5 = (n + 7)(n - 4) + 33 = N_1 + 33$.

1) Если $(n - 4) \vdots 11$, то и $(n + 7) \vdots 11$, откуда следует, что $N_1 \vdots 121$, а $N \nmid 121$;

2) Если $(n - 4) \nmid 11$, то $(n + 7) \nmid 11$, откуда следует, что $N_1 \nmid 11$, а $N \nmid 121$.
Значит, $n^2 + 3n + 5$ ни при каком натуральном n не делится на 121.

5. Используя свойство корней кубического уравнения, имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1, \\ x_1x_2x_3 = 2. \end{cases}$$

Из третьего уравнения следует, что количество положительных корней или три, что противоречит второму уравнению, или один, что является ответом. Ответ: не зависит; один.

$$\begin{aligned} \text{6. } & 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{14}\right)}_1 + \\ & + \underbrace{\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{100}\right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{500}\right)}_1 > 5, \text{ так как:} \end{aligned}$$

$$1) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1;$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{14} &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) = \\ &= \frac{19}{5 \cdot 14} + \frac{19}{6 \cdot 13} + \frac{19}{7 \cdot 12} + \frac{19}{8 \cdot 11} + \frac{19}{9 \cdot 10} > 5 \cdot \frac{19}{90} > 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{100} &= \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{99}\right) + \dots + \left(\frac{1}{57} + \frac{1}{58}\right) = \\ &= \underbrace{\frac{115}{15 \cdot 100} + \frac{115}{16 \cdot 99} + \dots + \frac{115}{57 \cdot 58}}_{43} > 43 \cdot \frac{115}{57 \cdot 58} > 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{500} &= \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{500}\right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{499}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301}\right) = \underbrace{\frac{601}{101 \cdot 500} + \frac{601}{102 \cdot 499} + \dots + \frac{601}{300 \cdot 301}}_{200} > \end{aligned}$$

$> 200 \cdot \frac{601}{300 \cdot 301} > 1$. (Здесь воспользовались неравенством: $n(n+1) > (n-k)(n+k+1)$, где n, k — натуральные числа)

7. Возведем каждое из уравнений в квадрат и сложим:

$$a^2b^2 + c^2d^2 + a^2c^2 + b^2d^2 = 1517,$$

отсюда следует:

$$(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) = 1517 = 37 \cdot 41 = 41 \cdot 37.$$

Учитывая, что a, b, c, d — натуральные числа, имеем:

$$1) \begin{cases} a^2 + d^2 = 37, \\ b^2 + c^2 = 41, \\ a, b, c, d \in N, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a^2 + d^2 = 41, \\ b^2 + c^2 = 37, \\ a, b, c, d \in N. \end{cases}$$

и т. д.

Ответ: $(6; 5; 4; 1), (4; 1; 6; 5)$.

Литература

1. Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков.—М.: Просвещение, 1971.
2. Башмаков М. И. Уравнения и неравенства.—М.: Наука, 1976.
3. Башмаков М. И. и др. Задачи по математике. Алгебра и анализ.—М.: Наука, 1982.
4. Братусь Т. А. и др. Все задачи «Кенгуру» 1994–2005.—Спб.: ИПО и ЦТТ «Кенгуру-Плюс», 2005.
5. Бугулов Е. А., Толасов Б. А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам.—Орджоникидзе: СОКИ, 1962.
6. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад.—М.: Наука, 1988.
7. Васильев Н. Б. и др. Заочные математические олимпиады.—М.: Наука, 1986.
8. Васильев Н. Б. и др. Математические соревнования. Геометрия.—М.: Наука, 1974.
9. Гельфанд И. М. и др. Метод координат.—М.: Наука, 1971.
10. Гурский И. П. Функции и построение графиков.—М.: Просвещение, 1968.
11. Денищева Л. О. и др. Единый государственный экзамен. Математика. Варианты КИМ.—М.: Центр тестирования МО РФ, 2002.
12. Дорофеев Г. В. Квадратный трехчлен в задачах // Квантор.—М, 1991.
13. Дятлов В. Н., Дятлов Г. В. Пособие для подготовки к письменному экзамену по математике в НГУ. Задачи с параметром.—Новосибирск, 1991.
14. Егоров А. А. Алгебра и анализ.—М.: Бюро «Квантум», 1994.
15. Егоров А. А. и др. Материалы вступительных экзаменов. Задачи по математике и физике.—М.: Бюро «Квантум», 1993.
16. Зив Б. Г., Мейлер В. М., Баханский А. Г. Задачи по геометрии для 7–11 классов.—М.: Просвещение, 1991.
17. Ивлев Б. М. и др. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа.—М.: Просвещение, 1990.
18. Изосимов Ю. А. Задачи для подготовки к математическим олимпиадам.—Астрахань: АГПИ, 1989.
19. Клово А. Г. Экзаменационные материалы для подготовки к ЕГЭ по математике.—М.: ФИЦТ, 2005.
20. Королева Т. М. и др. Пособие по математике в помощь участникам централизованного тестирования.—М.: Прометей, 1999.
21. Королева Т. М. и др. Пособие по математике в помощь участникам централизованного тестирования.—М.: Прометей, 2000.
22. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности.—М.: Просвещение, 1986.
23. Курош А. Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней.—М.: Наука, 1983.
24. Кюршак Й. и др. Венгерские математические олимпиады.—М.: Мир, 1976.
25. Лаппо Л. Д., Попов М. А. Математика. Пособие для подготовки к ЕГЭ и централизованному тестированию.—М.: Экзамен, 2004.
26. Леман А. А. Сборник задач московских математических олимпиад.—М.: Просвещение, 1965.
27. Лурье М. В., Александров Б. И. Задачи на составление уравнений.—М.: Наука, 1980.

28. Людмилов Д. С. Задачи без числовых данных.—М.: изд. МП РСФСР, 1961.
29. Максимов В. М. Пособие по математике для поступающих в МГУ.—М.: изд-во МГУ, 1972.
30. Морозова Е. А. и др. Международные математические олимпиады.—М.: Просвещение, 1976.
31. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.—М.: Наука, 1985.
32. Олехник С. Н. и др. Старинные занимательные задачи.—М.: Наука, 1988.
33. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников.—М.: Просвещение, 1982.
34. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Части 1, 2.—М.: Наука, 1991.
35. Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии.—М.: Наука, 1989.
36. Саакян С. М. и др. Задачи по алгебре и началам анализа для 10-11 классов.—М.: Просвещение, 1990.
37. Скорняков Л. А. Системы линейных уравнений.—М.: Наука, 1986.
38. Фомин А. А., Кузнецова Г. М. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады.—М.: Дрофа, 2000.
39. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия.—М.: Наука, 1982.
40. Шарыгин И. Ф. Избранные задачи по геометрии конкурсных экзаменов в ВУЗы (1987–1990) // Квантор.—Львов, 1991.
41. Шклярский Д. О. и др. Избранные задачи и теоремы элементарной математики.—М.: Наука, 1976.
42. Штейнгауз Г. Сто задач.—М.: Наука, 1986.
43. Ястребинецкий Г. А. Задачи с параметрами.—М.: Просвещение, 1986.
44. Журналы «Математика в школе» и «Квант» (1970-2006 гг.).

Оглавление

Предисловие	3
Часть I. Районные олимпиады по математике	
1989-2006 гг.	7
Задания	9
Решения и ответы	37
Часть I. Республиканские олимпиады по математике	
1999-2006 гг.	89
Задания	91
Ответы	129
Часть III. Дополнительные задания республиканских	
олимпиад 2005, 2006 гг.	131
Задания	133
Решения и ответы	137
Литература	140

Учебное издание

Скодтаев Коста Борисович

**СБОРНИК ЗАДАЧ СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИХ
ШКОЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД
1989-2006**

*Редактор издательства В. С. Абатурова
Компьютерный набор и верстка М. С. Биченова
Дизайн обложки Д. К. Скодтаев*

Подписано в печать 15.02.2007 г. Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 8, 37. Тираж 800 экз.

Издательство Владикавказского научного центра РАН,
362008, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.

Отпечатано в соответствии с предоставленными диапозитивами
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие им. В. Гасиева».
362021, г. Владикавказ, ул. Тельмана, 16. Тел. 76-99-11, 76-81-97, 74-24-23.