

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

У ч е б н а я с е р и я

ПЛИЕВ А. Н.

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

ВЛАДИКАВКАЗ
2006

УДК 512.83

ББК 22.143

ПЗ8

Научный редактор: кандидат физ.-мат. наук *Г. Н. Шотаев*

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук *Е. К. Басаева*,

канд. физ.-мат. наук *К. Т. Тибилов*

Плиев А. Н.

Теория определителей: Учеб. пос. / Институт прикладной математики и информатики.—Владикавказ: Владикавк. науч. центр РАН, 2006.—48 с.

Реформы Российского образования, предполагающие профильное обучение, влекут за собой необходимость введения в школьный курс математики элементов математического моделирования, одним из важнейших разделов которого является линейное программирование. В этой связи возникает необходимость изучения школьниками основ теории матриц и определителей.

В учебном пособии одновременно на достаточно строгом и доступном для понимания школьниками и студентами уровне излагается теория определителей. Для лучшего усвоения изучаемого материала теоретические сведения снабжены примерами.

© Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, 2006

© А. Н. Плиев, 2006

Предисловие

Теория определителей возникла в результате работы над теорией линейных систем уравнений. Общий закон составления определителей впервые подметил Лейбниц в 1693 году. В письме к Лопиталю от 28 апреля 1693 года он говорит о системе двойных индексов, которыми он обозначал коэффициенты при неизвестных. Ввиду того, что результаты Лейбница не были опубликованы, они остались неизвестными.

В 1750 г. швейцарский ученый Г. Крамер опубликовал работу, посвященную теории алгебраических кривых. В этой работе он указывает общий закон составления определителей и приводит общую формулу решения системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Более законченную теорию определителей выработал французский математик А. Вандермонд. В 1741 г. в представленных в Парижскую академию наук мемуарах он впервые выделяет вопрос об определителях и рассматривает его как самостоятельную теорию.

Большую роль в развитии теории определителей сыграла работа Коши, написанная в 1812 г. В этой работе он впервые расположил элементы определителя в виде квадратной схемы (термин «матрица» появился позже). Он говорит о «детерминанте» этой системы (схемы), термин «детерминант» впервые был им употреблен в современном значении.

Определители (или детерминанты), имеющие интересные свойства, применяются не только в исследовании и решении систем линейных уравнений, но и почти во всех отраслях математики: в алгебре, в аналитической геометрии,

в механике, в теории дифференциальных уравнений, в теории функций, в теории чисел и т. д.

Для построения теории определителей существуют разные подходы. Часто применяются теории перестановок и подстановок.

В данной брошюре, после введения понятия матрицы, вводятся понятия двукратного минора и двукратного алгебраического дополнения, доказываются некоторые их свойства и после этого строится теория определителей [7, 8].

Плиев А. Н.

1. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Прямоугольная таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в которой n натуральное число, а $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{nn}$ элементы некоторого числового поля, называется квадратной матрицей n -го порядка.

Из двух индексов первый обозначает номер строки, а второй — номер столбца. Например, a_{23} является элементом второй строки и третьего столбца, а

$$(a_{11}), \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

являются квадратными матрицами соответственно первого, второго и третьего порядков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Число a называется *определителем* матрицы, составленной из единственного элемента a . Если для натурального числа $n > 1$ известно значение определителя квадратной матрицы $(n - 1)$ -го порядка, то *определителем* квадратной матрицы порядка n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

называется число

$$\Delta = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}, \quad (2)$$

где M_{1j} ($j = 1, \dots, n$) — определитель квадратной матрицы $(n-1)$ -го порядка, которая из матрицы (1) получается вычеркиванием первой строки и j -го столбца.

Определитель матрицы (1) обозначают так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Определитель матрицы n -го порядка также называют определителем n -го порядка или *детерминантом* n -го порядка.

Определитель $(n-1)$ -го порядка M_{1j} называют также *минором* элемента a_{1j} определителя (3).

Таким образом, M_{1j} является определителем $(n-1)$ -го порядка, который из определителя (3) получается вычеркиванием первой строки и j -го столбца.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, который из данного определителя получается вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, т. е. вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен данный элемент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} определителя (3) называется минор этого элемента M_{ij} , взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

Если алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначить через A_{ij} , тогда, согласно определению, получим

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

После вышеуказанных обозначений напомним:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. В определителе n -го порядка вычеркнем сначала строку и столбец, проходящие через элемент a_{ij} , а потом в полученном определителе $(n-1)$ -го порядка — строку и столбец, проходящие через элемент a_{kl} ($k \neq i$, $l \neq j$). Таким образом получим минор элемента a_{kl} в миноре элемента a_{ij} . Такой минор назовем *двукратным минором* элементов a_{ij} и a_{kl} . Обозначим его через M_{ij}^{kl} .

Очевидно, что

$$M_{ij}^{kl} = M_{kl}^{ij}. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. *Двукратным алгебраическим дополнением* элементов a_{ij} и a_{kl} ($i \neq k$, $j \neq l$) определителя (3) назовем двукратный минор этих элементов M_{ij}^{kl} , взятый со знаком $(-1)^{i+j+k_1+l_1}$, в котором k_1 и l_1 являются индексами элемента a_{kl} в миноре M_{ij} .

Двукратное алгебраическое дополнение элементов a_{ij} и a_{kl} обозначим через A_{ij}^{kl} , тогда, согласно определению,

$$A_{ij}^{kl} = (-1)^{i+j+k_1+l_1} M_{ij}^{kl}.$$

ПРИМЕР 1.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Согласно определению определителя, имеем:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 3 \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = \\
 &= 2((-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot |6| + (-1)^{1+2} \cdot 7 \cdot |8|) - 3((-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot |6| + \\
 &+ (-1)^{1+2} \cdot 7 \cdot |9|) + 4((-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot |8| + (-1)^{1+2} \cdot 5 \cdot |9|) = \\
 &= 2(5 \cdot 6 - 7 \cdot 8) - 3(-7 \cdot 9) + 4(-5 \cdot 9) = \\
 &= -52 + 189 - 180 = -43.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.2. Дан определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Вычислить M_{23} , A_{23} , M_{23}^{42} , A_{23}^{42} , A_{23}^{44} , A_{23}^{14} , A_{23}^{12} .

Решение. Для M_{23} , A_{23} , M_{23}^{42} , A_{23}^{42} получим следующее:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

а так как $(-1)^{2+3} = -1$, то

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$M_{23}^{42} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \cancel{a_{41}} & \cancel{a_{42}} & \cancel{a_{43}} & \cancel{a_{44}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix},$$

$$A_{23}^{42} = (-1)^{2+3+3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$$

(индексы элемента a_{42} в миноре элемента a_{23} будут $k_1 = 3$, $l_1 = 2$). Для A_{23}^{44} , A_{23}^{14} , A_{23}^{12} получим:

$$A_{23}^{44} = (-1)^{2+3+3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (k_1 = 3, l_1 = 3),$$

$$A_{23}^{14} = (-1)^{2+3+1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (k_1 = 1, l_1 = 3),$$

$$A_{23}^{12} = (-1)^{2+3+1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (k_1 = 1, l_1 = 2).$$

Заметим, что четности сумм $i + j + k + l$ и $i + j + k_1 + l_1$ не всегда совпадают. Так, например, для двукратных алгебраических дополнений A_{23}^{44} и A_{23}^{12} четности этих сумм совпадают ($2+3+4+4 = 13$, $2+3+3+3 = 11$; так же $2+3+1+2 = 8$, $2+3+1+2 = 8$), а для двукратных алгебраических дополнений A_{23}^{42} и A_{23}^{14} — нет ($2+3+4+2 = 11$, $2+3+3+2 = 10$; так же $2+3+1+4 = 10$ и $2+3+1+3 = 9$ — противоположной четности). Какая закономерность существует между четностями этих сумм? Этот вопрос исследуется в следующем параграфе.

2. Теоремы о двукратных алгебраических дополнениях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Скажем, что элементы определителя a_{ij} и a_{kl} стоят на левой диагонали, если индексы одного

из них больше соответствующих индексов другого, а на правой диагонали — если они не лежат ни на левой диагонали, ни в одном столбце.

Например, a_{12} и a_{23} лежат на левой диагонали, а элементы a_{34} и a_{44} — на правой диагонали.

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 2.1. *Двукратное алгебраическое дополнение элементов определителя n -го порядка a_{ij} и a_{kl} имеет знак $(-1)^{i+j+k+l}$, если эти элементы лежат на левой диагонали, и знак противоположный этому, если они лежат на правой диагонали.*

◁ Допустим a_{ij} и a_{kl} лежат на левой диагонали данного определителя

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * & * \\ * & a_{kl} & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & a_{ij} & * \\ * & * & * & * & * \end{vmatrix}.$$

Двукратное алгебраическое дополнение элементов a_{ij} и a_{kl} есть

$$A_{ij}^{kl} = (-1)^{i+j+k_1+l_1} M_{ij}^{kl}.$$

Нетрудно заметить, что при вычеркивании строки и столбца, проходящих через элемент a_{ij} , индексы элемента a_{kl} не изменяются, т. е. $k_1 + l_1 = k + l$ и, следовательно, знак двукратного алгебраического дополнения A_{ij}^{kl} будет

$$(-1)^{i+j+k+l}.$$

Двукратное алгебраическое дополнение элементов a_{kl} и a_{ij} есть

$$A_{kl}^{ij} = (-1)^{k+l+i_1+j_1} M_{kl}^{ij}.$$

Если вычеркнуть строку и столбец, содержащие элемент a_{kl} , то оба индекса элемента a_{ij} уменьшаться на единицу, т. е. $i_1 + j_1 = i + j - 2$ и знак двукратного алгебраического дополнения будет

$$(-1)^{k+l+i_1+j_1} = (-1)^{k+l+j+i}.$$

Теперь допустим, что элементы a_{ij} и a_{kl} лежат на правой диагонали

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & a_{kl} & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & a_{ij} & * & * & * \end{vmatrix}.$$

При вычеркивании строки и столбца, проходящих через элемент a_{ij} , второй индекс элемента a_{kl} уменьшится на единицу, т. е.

$$k_1 + l_1 = k + l - 1.$$

Аналогично, при вычеркивании строки и столбца, проходящих через элемент a_{kl} , первый индекс элемента a_{ij} уменьшится на единицу, т. е. $i_1 + j_1 = i + j - 1$. Следовательно, знаки как A_{ij}^{kl} , так и A_{kl}^{ij} совпадают со знаком $(-1)^{i+j+k+l-1}$. $\triangleright$

Теорема 2.2. Двукратные алгебраические дополнения определителя n -го порядка A_{ij}^{kl} и A_{kl}^{ij} равны.

$\triangleleft$ Согласно предыдущей теореме знаки двукратных алгебраических дополнений A_{ij}^{kl} и A_{kl}^{ij} совпадают. Приняв во внимание и равенство (5), заключаем, что $A_{ij}^{kl} = A_{kl}^{ij}$. $\triangleright$

Теорема 2.3. Если поменять местами любые две строки определителя n -го порядка, то двукратные алгебраические дополнения элементов этих строк изменят знак на противоположный (по абсолютной величине не изменятся).

◁ Пусть элементы a_{ij} и a_{kl} каких-нибудь двух строк ($i \neq k, j \neq l$) определителя n -го порядка лежат на левой диагонали, если поменять местами эти строки, то они окажутся на правой диагонали, и наоборот. Тогда, согласно теореме 1, данную теорему можно считать доказанной. ▷

3. Свойства определителей

Определители имеют ряд замечательных свойств.

Свойство 1. *Определитель n -го порядка Δ равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения.*

◁ Согласно определению,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Рассмотрим сумму произведений элементов второй строки на соответствующие алгебраические дополнения

$$\begin{aligned} a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} &= (-1)^{2+1}a_{21}|a_{12}| + (-1)^{2+2}a_{22}|a_{11}| = \\ &= -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}, \end{aligned}$$

т. е. разложения $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$ и $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}$ равны. Следовательно, теорема верна для определителя второго порядка.

Применим метод математической индукции. Допустим, что теорема верна для определителя $(n - 1)$ -го порядка. Определитель n -го порядка Δ разложим по элементам первой строки, см. (4).

Потом, в этом разложении миноры $(n - 1)$ -го порядка, согласно индуктивному допущению, разложим по элементам $(k - 1)$ -ой строки (в определителе $\Delta - k$ -й строки).

Заметим, что Δ является суммой $n(n-1)$ членов вида

$$a_{1j}a_{kl}A_{1j}^{kl}, \quad k \neq 1, \quad l \neq j. \quad (6)$$

Сомножители $a_{1j}a_{kl}$ являются произведениями каждого элемента a_{1j} первой строки определителя Δ на все элементы k -й строки, для которых $l \neq j$. Следовательно, полученные $n(n-1)$ членов вида (6) попарно различны.

Теперь составим сумму произведений элементов k -й строки определителя Δ на соответствующие алгебраические дополнения. Обозначим полученную сумму через Δ_1 . Здесь миноры $(n-1)$ -го порядка разложим по элементам первой строки.

Заметим, что Δ_1 является суммой $n(n-1)$ членов вида

$$a_{kl}a_{1j}A_{kl}^{1j}, \quad k \neq 1, \quad l \neq j, \quad (7)$$

которые также попарно различны.

Согласно теореме 2.2, выражения (7) и (6) равны. Таким образом, суммы Δ и Δ_1 , каждая из которых состоит из $n(n-1)$ попарно различных членов, содержат попарно равные слагаемые, т. е. $\Delta = \Delta_1$. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Операция замены строк в матрице соответствующими по номеру столбцами называется *транспонированием матрицы*. Аналогично определяется *транспонирование определителя*.

Свойство 2. При транспонировании определителя его значение не изменяется.

$\triangleleft$ Следует доказать равенство определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Утверждение верно для $n = 2$. Допустим, что оно верно и для определителя порядка $n - 1$. Определитель Δ' разложим по элементам k -й строки ($k = 1, 2, \dots, n$). В этом разложении по индуктивному допущению производим транспонирование определителей (миноров) порядка $n - 1$. Таким образом определитель Δ' является суммой произведений элементов k -го столбца определителя Δ' на их алгебраические дополнения.

Разложим Δ по элементам всех строк:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta = a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn}.$$

Согласно сделанному заключению, сумма первых (а также вторых, третьих...) слагаемых равна Δ' . Следовательно,

$$n\Delta = \Delta' + \Delta' + \dots + \Delta', \text{ т. е. } n\Delta = n\Delta' \text{ или } \Delta = \Delta'. \quad \triangleright$$

Согласно свойству 2 все свойства определителя, которые справедливы для строк, будут справедливыми и для столбцов. В этом смысле строки и столбцы определителя равноправны. Например, вместо свойства 1 получим такое свойство.

Свойство 3. *Определитель n -го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

Следствие 1. *Если все элементы какого-нибудь столбца (строки), кроме одного, равны нулю, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.*

Следствие 2. Если все элементы какого-нибудь столбца (строки) определителя равны нулю, то определитель также равен нулю.

Следствие 3. Если все элементы какого-нибудь столбца (строки) определителя n -го порядка умножить на одно и то же число k , то значение определителя умножится на k .

Указание. Определитель разложим по элементам указанного столбца (строки) и вынесем k за скобки.

Следствие 4. Если все элементы какого-нибудь столбца (строки) определителя n -го порядка имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Свойство 4. Если поменять местами две строки (столбца) определителя n -го порядка, то определитель изменит только знак.

◁ Допустим, что Δ' определитель n -го порядка, который из определителя Δ получается перестановкой i -й и k -й строк. Разложим оба определителя по элементам i -й и k -й строк. Тогда, согласно теореме 2.3, соответствующие члены этих разложений будут различаться только знаком. Следовательно, $\Delta' = -\Delta$. ▷

Свойство 5. Определитель n -го порядка, у которого две строки (столбца) одинаковые, равен нулю.

◁ Пусть у определителя Δ две строки одинаковые. Если поменять местами эти две строки, то согласно свойству 4, определитель Δ должен изменить знак, но этого не случится (так как эти строки одинаковые). Число, которое не изменяется с изменением его знака, есть 0. Следовательно, $\Delta = 0$. ▷

Свойство 6. Определитель n -го порядка, у которого элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, равен нулю.

◁ Справедливость этого свойства вытекает из свойств 3 и 5. ▷

Свойство 7. Определитель n -го порядка Δ , элементы k -го столбца (строки) которого являются суммами двух слагаемых, равен сумме двух определителей, один из которых есть Δ без первых слагаемых k -того столбца (строки), а другой, также Δ , без вторых слагаемых k -того столбца (строки).

◁ Следует доказать:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} + b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Или после соответствующих обозначений:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Левую сторону равенства (8) разложим по элементам i -го столбца:

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_{1i} + b_{1i})A_{1i} + (a_{2i} + b_{2i})A_{2i} + \dots + (a_{ni} + b_{ni})A_{ni} \\ &= (a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{ni}A_{ni}) + (b_{1i}A_{1i} + b_{2i}A_{2i} \\ &\quad + \dots + b_{ni}A_{ni}) = \Delta_1 + \Delta_2. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Свойство 8. Определитель n -го порядка не меняет своего значения от прибавления ко всем элементам какой-нибудь строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

◁ Следует доказать:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + ka_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + ka_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} + ka_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

К правой части равенства (9) применим свойство 7, получим сумму двух определителей: один из них — данный определитель, а второй — определитель с двумя пропорциональными столбцами, который, согласно свойству 4, равен нулю. ▷

4. Теорема Лапласа

В определителе n -го порядка Δ выделим k строк и k столбцов. В пересечении этих строк и столбцов получится минор k -го порядка. Обозначим его через $\Delta_{\alpha\beta}$, где α и β являются суммами номеров соответственно строк и столбцов этого минора. Минор порядка $n - k$, который получится в результате вычеркивания указанных k строк и k столбцов определителя Δ , называется *дополнительным минором минора* $\Delta_{\alpha\beta}$.

Пусть элемент a_{ij} определителя Δ не принадлежит к указанным строкам и столбцам. Вычеркнем эти k строк и k столбцов, а также i -ю строку и j -й столбец. Получится минор порядка $n - k - 1$. Этот минор назовем *двукратным минором элемента a_{ij} и минора $\Delta_{\alpha\beta}$ определителя Δ* . Обозначим его через $M_{ij}^{\alpha\beta}$.

Двукратным алгебраическим дополнением элемента a_{ij} и минора $\Delta_{\alpha\beta}$ определителя Δ назовем $(-1)^{i+j+\alpha_1+\beta_1} M_{ij}^{\alpha\beta}$, в котором α_1 и β_1 являются суммами номеров соответственно строк и столбцов $\Delta_{\alpha\beta}$ в миноре элемента a_{ij} . Обозначим его через $A_{ij}^{\alpha\beta}$, т. е.

$$A_{ij}^{\alpha\beta} = (-1)^{i+j+\alpha_1+\beta_1} M_{ij}^{\alpha\beta}.$$

Аналогично определяются двукратный минор $M_{\alpha\beta}^{ij}$ и двукратное алгебраическое дополнение минора $\Delta_{\alpha\beta}$ и элемента a_{ij}

$$A_{\alpha\beta}^{ij} = (-1)^{\alpha+\beta+i_1+j_1} M_{\alpha\beta}^{ij},$$

в котором i_1 и j_1 являются индексами элемента a_{ij} в дополнительном миноре минора $\Delta_{\alpha\beta}$.

ПРИМЕР 4.1. Пусть в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{61} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{43} & a_{45} & a_{46} \\ a_{53} & a_{55} & a_{56} \\ a_{73} & a_{75} & a_{76} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad a_{ij} = a_{64}.$$

Тогда двукратный минор элемента a_{ij} и минора $\Delta_{\alpha\beta}$ будет

$$M_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Составим двукратное алгебраическое дополнение элемента a_{ij} и минора $\Delta_{\alpha\beta}$:

$$A_{ij}^{\alpha\beta} = (-1)^{(i+j+\alpha_1+\beta_1)} M_{ij}^{\alpha\beta}.$$

Суммы первых и вторых индексов минора $\Delta_{\alpha\beta}$ соответственно равны

$$\alpha = 4 + 5 + 7 = 16, \quad \beta = 3 + 5 + 6 = 14. \quad (10)$$

Так как вычеркнуты 6-я строка и 4-й столбец определителя Δ , получим

$$\alpha_1 = 4 + 5 + 6 = 15, \quad \beta_1 = 3 + 4 + 5 = 12$$

(в результате вычеркивания 6-й строки 7-я строка переместилась в 6-ю строку, а в результате вычеркивания 4-го столбца 5-й и 6-й столбцы переместились соответственно в 4-й и 5-й столбцы). Тогда

$$A_{ij}^{\alpha\beta} = A_{64}^{16;14} = (-1)^{6+4+15+12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{37} \end{vmatrix}.$$

Теперь составим двукратное алгебраическое дополнение минора $\Delta_{\alpha\beta}$ и элемента a_{ij} :

$$A_{\alpha\beta}^{ij} = (-1)^{\alpha+\beta+i_1+j_1} M_{\alpha\beta}^{ij}.$$

$i = 6$, а $i_1 = 4$, так как выше шестой строки были две строки минора $\Delta_{\alpha\beta}$ (5-я и 4-я) и строки с этими номерами определителя вычеркнуты.

Также $j = 4$, а $j_1 = 3$, так как левее 4-го столбца был 1-й столбец (3-й) минора $\Delta_{\alpha\beta}$ и столбец с этим номером вычеркнут. Следовательно,

$$A_{\alpha\beta}^{ij} = A_{16;14}^{64} = (-1)^{16+14+4+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{37} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что в последнем примере

$$A_{ij}^{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^{ij}.$$

Ниже это равенство будет доказано в виде леммы.

Лемма 4.1. *Справедливо равенство*

$$A_{ij}^{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^{ij}.$$

◁ Так как $M_{ij}^{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^{ij}$, достаточно доказать

$$(-1)^{i+j+\alpha_1+\beta_1} = (-1)^{\alpha+\beta+i_1+j_1}.$$

Допустим, в определителе Δ ниже i -й строки стоит s строк минора $\Delta_{\alpha\beta}$ (это минор порядка k), а правее j -го столбца t столбцов. Тогда

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta - (s + t).$$

В определителе Δ выше i -й строки будет $k - s$ строк, а левее j -го столбца $k - t$ столбцов минора $\Delta_{\alpha\beta}$. Тогда

$$i_1 + j_1 = (i - (k - s)) + (j - (k - t)) = i + j - 2k + (s + t).$$

Четность этого числа совпадает с четностью числа:

$$i + j = (s + t) - 2(s + t) = i + j - (s + t).$$

Таким образом,

$$(-1)^{i+j+\alpha_1+\beta_1} = (-1)^{i+j+\alpha+\beta-(s+t)},$$

$$(-1)^{\alpha+\beta+i_1+j_1} = (-1)^{\alpha+\beta+i+j-(s+t)}.$$

Следовательно, $(-1)^{i+j+\alpha_1+\beta_1} = (-1)^{\alpha+\beta+i_1+j_1}$. ▷

Теорема Лапласа. Пусть в определителе Δ порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов) $1 \leq k \leq n - 1$. Тогда сумма произведений всех миноров k -го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю Δ . Указанную сумму назовем *разложением по k строкам*.

◁ Обозначим сумму индексов элемента a_{ij} определителя n -го порядка через s , а сумму номеров строк и столбцов его минора через σ , тогда

$$s + \sigma = 2 \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot n = n(n+1)$$

(это число является суммой всех номеров строк и столбцов определителя Δ , т. е. s и σ имеют одинаковую четность).

Следовательно, теорема Лапласа верна для определителя порядка $k+1$ относительно k строк (чтобы убедиться в этом, представим разложение его по элементам какой-либо строки. Это и будет разложением по k строкам).

Допустим, что теорема верна для определителя порядка $n-1$ относительно k строк ($n-1 \geq k+1$) и докажем, что она верна для определителя n -го порядка относительно k строк. Определитель Δ n -го порядка разложим по элементам i -й строки. А в полученном разложении миноры порядка $n-1$ (по индуктивному допущению) по каким-нибудь k строкам.

Получим: $\frac{n!}{k!(n-k-1)!}$ слагаемых вида $a_{ij}\Delta_{\alpha\beta}A_{ij}^{\alpha\beta}$.

После этого составим сумму произведений всех миноров k -го порядка, содержащихся в выбранных k строках, на их алгебраические дополнения. Обозначим эту сумму через Δ' . В разложении Δ' дополнительные миноры порядка $n-k$ разложим по элементам i -й строки. Получим

$$\frac{n!}{k!(n-k-1)!} \text{ слагаемых вида } \Delta_{\alpha\beta}a_{ij}A_{\alpha\beta}^{ij}.$$

Полученные суммы, согласно лемме 4.1, совпадают, т. е. $\Delta = \Delta'$. $\triangleright$

В определителе n -го порядка Δ выделим k строк и k столбцов. В пересечении этих строк и столбцов получится минор данного определителя k -го порядка. Обозначим его через $\Delta_{\alpha\beta}$, где α и β являются суммами индексов соответственно строк и столбцов этого минора. Минор порядка $n - k$, который получится в результате перечеркивания указанных k строк и k столбцов определителя Δ , называется *дополнительным минором минора* $\Delta_{\alpha\beta}$. Дополнительный минор со знаком $(-1)^{\alpha+\beta}$ называется *алгебраическим дополнителем* $\Delta_{\alpha\beta}$.

ПРИМЕР 4.2. В определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

для минора $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ дополнительным минором будет $\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$. Суммы индексов соответственно строк и столбцов данного минора равны

$$\alpha = 1 + 2 = 3, \quad \beta = 1 + 3 = 4,$$

тогда его алгебраическое дополнение равно

$$(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Мы знаем, что определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

◁ *II способ доказательства теоремы Лапласа.* Теорема верна относительно одной строки (свойство определителя 3). Допустим, эта теорема верна для $k > 1$ строки и докажем ее справедливость для $k + 1$ строки.

В определителе Δ выделим любые k строк и не входящую в эти строки еще одну i -ю строку. Δ разложим (по индуктивному допущению) по выделенным k строкам. Получится сумма членов следующего вида

$$\Delta_{\alpha\beta} \cdot (-1)^{\alpha+\beta} M, \quad (11)$$

где $\Delta_{\alpha\beta}$ минор k -го порядка, α и β суммы индексов соответственно строк и столбцов минора $\Delta_{\alpha\beta}$, M — дополнительный минор минора $\Delta_{\alpha\beta}$.

Число слагаемых вида (11) будет равно числу сочетаний из n элементов (столбцов) по k :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Все дополнительные миноры этого разложения разложим по элементам i -й строки. Тогда каждое слагаемое разлагается еще на $n - k$ слагаемых и Δ окажется суммой членов вида

$$(-1)^{\alpha+\beta} \cdot \Delta_{\alpha\beta} \cdot a_{ij} (-1)^{i_1+j_1} M_{i_1 j_1}$$

или

$$(-1)^{\alpha+\beta+i_1+j_1} \cdot a_{ij} M_{i_1 j_1} \cdot \Delta_{\alpha\beta}. \quad (12)$$

Число слагаемых этой суммы будет

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}.$$

Ясно, что все эти члены попарно различны.

Теперь за $k+1$ строк примем ранее выделенные k строк и i -ю строку. Составим сумму произведений всех миноров $(k+1)$ -го порядка, содержащихся в выбранных $k+1$ строках, на их алгебраические дополнения. Эту сумму обозначим через Δ' . Пусть минор $(k+1)$ -го порядка, для которого $\Delta_{\alpha\beta}$ является минором k -го порядка, есть $M_{\alpha+i,\beta+j}$. Тогда соответствующий член этого разложения будет равен

$$(-1)^{\alpha+i+\beta+j} M_{\alpha+i,\beta+j} \cdot M', \quad (13)$$

где $\alpha+i$ и $\beta+j$ являются суммами индексов соответственно строк и столбцов минора $M_{\alpha+i,\beta+j}$.

Число членов вида (13) будет

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}.$$

В указанном разложении разложим все миноры $(k+1)$ -го порядка по элементам i -й строки. Всего получится

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} (k+1) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}$$

слагаемых, которые попарно различны.

Один из членов этого разложения, в который входит $\Delta_{\alpha\beta}$, будет

$$(-1)^{\alpha+\beta+i+j} a_{ij} (-1)^{i_2+j_2} \Delta_{\alpha\beta} \cdot M' = (-1)^{\alpha+\beta+i+j+i_2+j_2} \cdot a_{ij} \Delta_{\alpha\beta} M' \quad (14)$$

i_2 и j_2 являются индексами элемента a_{ij} в миноре $(k+1)$ -го порядка $M_{\alpha+i,\beta+j}$.

Докажем равенство членов (12) и (14). $M_{i_1 j_1} = M'$, т. к. каждый из них получен в результате вычеркивания выделенных k строк и k столбцов, в пересечении которых стоит минор $\Delta_{\alpha\beta}$, и также i -й строки и j -го столбца.

Установим равенство знаков выражений (12) и (14).

Допустим, выше элемента a_{ij} из строк минора $\Delta_{\alpha\beta}$ стоит p строк, а левее от него — q столбцов.

Тогда после вычеркивания строк и столбцов, проходящих через минор $\Delta_{\alpha\beta}$, индексы элемента a_{ij} в дополнительном миноре $M_{i_1j_1}$, будут $i_1 = i - p$ и $j_1 = j - q$. Поэтому (12) примет вид

$$(-1)^{\alpha+\beta+i-p+j-q} \cdot a_{ij} \cdot \Delta_{\alpha\beta} \cdot M'. \quad (12')$$

По той же причине, индексы элемента a_{ij} в миноре $\Delta_{\alpha+i, \beta+j}$ (после вычеркивания строк и столбцов, проходящих через минор $\Delta_{\alpha\beta}$) будут равны $i_2 = p + 1$, $j_2 = q + 1$ и (14) примет вид

$$(-1)^{\alpha+\beta+i+j+p+q+2} \cdot a_{ij} \cdot \Delta_{\alpha\beta} \cdot M', \quad (14')$$

$(\alpha+\beta+i-p+j-q) + (\alpha+\beta+i+j+p+q+2) = 2(\alpha+\beta+i+j+1)$ — четное число, т. е. четности показателей степеней (-1) в (12) и (14) совпадают.

Таким образом, для любого слагаемого в разложении Δ существует равное ему слагаемое в разложении Δ' . Но эти разложения состоят из одинакового количества попарно различных членов. Следовательно, $\Delta = \Delta'$. $\triangleright$

5. Вычисление определителей

При помощи определения и свойств определителя можно преобразовать его к более удобному для нахождения численного значения виду.

5.1. Согласно определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для запоминания правила вычисления детерминанта второго порядка поступаем так: условно элементы a_{11} и a_{22} назовем элементами левой диагонали (эта диагональ идет слева вниз), а элементы a_{12} и a_{21} — элементами правой диагонали (диагональ идет справа вниз). Теперь ясно, что произведение элементов левой диагонали в определитель входит со знаком плюс, а произведение элементов правой диагонали — со знаком минус. Схематически это правило выглядит так:

$$-\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} +$$

Рассмотрим определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

С целью запоминания правила вычисления определителя третьего порядка, условимся элементы a_{11} , a_{22} , a_{33} называть элементами левой главной диагонали, элементы a_{21} и a_{32} (также a_{12} и a_{23}) — элементами левой неполной диагонали (все левые диагонали параллельны, они идут слева вниз). Аналогично определяются элементы правой главной диагонали и элементы правых неполных диагоналей.

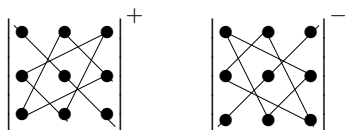
Видно, что произведение элементов левой главной диагонали (a_{11} , a_{22} , a_{33}) в определитель входит со знаком плюс. С таким же знаком в определитель входит произведение

элементов каждой неполной диагонали на элемент, стоящий в противоположном углу (a_{21} , a_{32} , a_{13} и a_{12} , a_{23} , a_{31}).

Аналогично определяются члены определителя, соответствующие правой главной диагонали и правым неполным диагоналям

$$-a_{13}a_{22}a_{31}, -a_{12}a_{21}a_{33}, -a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Приведенное выше правило вычисления определителя третьего порядка известно как правило Саррюса (или правило диагоналей и треугольников). Схематически оно выглядит так:



ПРИМЕР 5.1. Вычислить определитель, воспользовавшись правилом Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & -5 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6(-1) + (-2)(-4)4 + (-3)(-5)0 \\ - 4 \cdot 6 \cdot -(-5)(-4)2 - (-3)(-2)(-1) \\ = -12 + 32 - 40 + 6 = -14.$$

Существует и такой способ (разновидность правила Саррюса): к матрице третьего порядка справа припишем первые два столбца без изменения:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Проводим диагонали, параллельные главным диагоналям. Составляем произведения элементов, лежащих на каждой

диагонали. Произведения, соответствующие левым диагоналям, берутся со знаком плюс. Остальные произведения соответствуют правым диагоналям и берутся со знаком минус.

Рассмотренный определитель этим способом вычисляется так:

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \\ \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ -3 \\ \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ 4 \\ \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ 2 \\ \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ -3 \\ \diagdown \end{array} & \\
 -2 & 6 & -5 & -2 & 6 & \\
 0 & -4 & -1 & 0 & -4 & \\
 - & - & - & + & + & +
 \end{array}$$

Получим:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot 6(-1) + (-3)(-5)0 + 4(-2)(-4) \\
 & - 4 \cdot 6 \cdot 0 - 2(-5)(-4) - (-3)(-2)(-1) = -14.
 \end{aligned}$$

Можно поступить так: к матрице третьего порядка снизу приписываем первые две строки без изменения и проводим диагонали, параллельные к главным диагоналям:

$$\begin{array}{cccc}
 + & \begin{array}{c} \diagdown \\ a_{11} \\ \diagup \end{array} & a_{12} & \begin{array}{c} \diagup \\ a_{13} \\ \diagdown \end{array} & - \\
 + & \begin{array}{c} \diagdown \\ a_{21} \\ \diagup \end{array} & a_{22} & \begin{array}{c} \diagup \\ a_{23} \\ \diagdown \end{array} & - \\
 + & \begin{array}{c} \diagdown \\ a_{31} \\ \diagup \end{array} & a_{32} & \begin{array}{c} \diagup \\ a_{33} \\ \diagdown \end{array} & - \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} &
 \end{array}$$

И здесь произведения элементов левых диагоналей берутся со знаком плюс, остальные — со знаком минус.

Перед вычислением определителя следует ознакомиться с составами отдельных строк и столбцов, и согласно этому выбрать наиболее рациональное свойство. Например, выше рассмотренный определитель заметно упростился бы, если бы ко 2-ой строке прибавили 1-ую:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & -5 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 2(-3 - 4) = -14.$$

5.2. *Определитель правой треугольной матрицы* имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(все элементы ниже левой главной диагонали равны нулю). Согласно следствию 1 свойства 3 указанный определитель равен произведению элементов его главной диагонали, т. е.

$$\Delta = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \dots = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}. \end{aligned}$$

Определитель левой треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

тоже равен $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. Рассуждаем аналогично, или применяем свойство 2, согласно которому от транспонирования значение определителя не меняется.

5.3. Аналогично вычисляется *определитель правой треугольной матрицы*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Данный определитель разложим по элементам 1-ой строки, потом полученный определитель опять по элементам 1-ой строки и т. д.

Применяя это преобразование $n - 1$ раз, показатель степени (-1) станет $(1 + 2) + (1 + 3) + \dots + (1 + n)$ или $(2 + 1) + (2 + 2) + \dots + (2 + (n - 1))$. Если выбросим четное слагаемое $2(n - 1)$, получим $\frac{n(n-1)}{2}$ и, следовательно,

$$\Delta' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}.$$

Знак «+» получится, если n делится на 4 с остатком 0 или 1.

5.4. Способ нулей. Если один элемент какой-нибудь строки (столбца) определителя не равен нулю, тогда, используя свойство 8, все элементы этой строки (столбца), кроме указанного, можно превратить в нули. Этот способ преобразования определителя можно назвать способом нулей. С помощью этого способа определитель можно привести к треугольной форме.

ПРИМЕР 5.2. Привести определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & 8 & 3 & -7 \\ 6 & 7 & 5 & -8 \\ 8 & 8 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

к правой треугольной форме и вычислить.

Решение. Выполним следующие преобразования:

1) из 2-й, 3-й, 4-й строк вычтем 1-ю строку, умноженную соответственно на 2, 3, 4;

2) в полученном определителе из 3-й строки вычтем 2-ю строку, а к 4-й строке прибавим 2-ю, умноженную на 2;

3) в новом определителе из 4-й строки вычтем 3-ю строку.

Последовательно получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & 8 & 3 & -7 \\ 6 & 7 & 5 & -8 \\ 8 & 8 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8.$$

ПРИМЕР 5.3. Вычислить определитель при помощи разложения по строкам или столбцам.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \\
 = -2 \cdot 6(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 7 \cdot 4 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = \\
 = 12(3 - 8) + 28(24 - 35) = -368.$$

5.5. Вычислить определитель используя свойства вынесения общего множителя за знак определителя и прибавления к одной строке (столбцу) другой, умноженной на некоторое число

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 6 & 9 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Из третьей строки вычтем сумму первых двух строк, а из 4-й строки — сумму 2-й и 3-й строк:

$$6a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 6a(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -12a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь к 3-му столбцу прибавим 4-й столбец, умноженный на 3 и получим определитель треугольной формы

$$-12a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12a \cdot 5 = -60a.$$

5.6. Вычислить определитель n -го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n-4 & n-3 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Строки этого определителя получаются циклическим передвижением элементов первой строки.

Из n -й строки вычтем $(n-1)$ -ю, из $(n-1)$ -й строки $(n-2)$ -ю и т. д. из второй строки первую, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе n -ю строку вычтем из всех предыдущих строк:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1+n & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -n \\ 0 & n & 0 & \dots & -n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & n & -n & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1+n & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ n & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из каждой строки, кроме первой, нового определителя $(n-1)$ -го порядка вынесем за знак определителя множитель n :

$$(-1)^{n+1}n^{n-2} \begin{vmatrix} 1+n & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

К первому столбцу прибавим все остальные столбцы:

$$\begin{vmatrix} \frac{n+1}{2}n & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$(-1)^{n+1} \cdot n^{n-2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Получим левую треугольную матрицу и, следовательно, последний определитель $(n-2)$ -го порядка равен:

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{2}} (-1)^{n-2} = (-1)^{\frac{n^2-3n+2}{2}}.$$

Подставим это значение:

$$(-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{n^2-3n+2}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n^{n-1}$$

(из показателя степени (-1) отбросили четное слагаемое 2).
Таким образом:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

5.7. Определитель вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

называется *кососимметрическим определителем*.

Из каждой строки вынесем множитель (-1) , получим:

$$\Delta = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Второй множитель является транспонированным определителем данного определителя. Следовательно,

$$\Delta = (-1)^n \cdot \Delta.$$

Если n нечетное число, тогда $\Delta = -\Delta$. А это значит, что $\Delta = 0$, т. е. кососимметрический определитель нечетного порядка равен нулю.

5.8. Определитель Вандермонда n -го порядка имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Для определителя Вандермонда 2-го порядка имеем:

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Рассмотрим определитель Вандермонда 3-го порядка:

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Из третьей строки вычтем 2-ую, умноженную на a_1 , а из 2-ой строки 1-ую, умноженную на a_1

$$\begin{aligned} V_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)a_3(a_3 - a_1) = \\ &= - (a_2 - a_1)a_2(a_3 - a_1) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2). \end{aligned}$$

Докажем равенство:

$$\begin{aligned}
 V_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\
 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \times \\
 &\times (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_n - a_2) \times \\
 &\times \dots \times \\
 &\times (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-2}) \times \\
 &\times (a_n - a_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Допустим, что для определителя $(n - 1)$ -го порядка V_{n-1} данное равенство справедливо.

Как и при вычислении определителя V_3 , из каждой строки, начиная со второй, вычтем 1 строку, умноженную на a_1 :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель разложим по элементам первого столбца и вынесем общие множители за знак определителя, получим:

$$V_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Здесь последний множитель есть определитель Вандермонда порядка $(n - 1)$ для элементов $a_2, a_3, \dots, a_n$, т. е.

$$V_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot V_{n-1}.$$

Применяя индуктивное предположение, напишем:

$$V_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots \\ (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-2})(a_n - a_{n-1}) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

5.9. Определитель-многочлен. Рассмотрим определитель

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Разложим его по элементам первой строки и вычислим

$$\Delta(x) = a_0 \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + \\ + a_2 \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

или $\Delta(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$.

Аналогично получим

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

6. Произведение определителей

Теорема 6.1. *Произведение двух определителей n -го порядка есть определитель n -го порядка, элемент c_{ij} которого является суммой произведений элементов i -й строки первого определителя на соответствующие элементы j -го столбца второго определителя.*

◁ Даны определители n -го порядка

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

По теореме Лапласа определитель порядка $2n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

равен произведению $\Delta_1 \cdot \Delta_2$. Определитель Δ преобразуется так, чтобы элементы b_{ij} превратились в нули. Для этой

цели к $(n + 1)$ -му столбцу определителя Δ прибавим его первый столбец, умноженный на b_{11} , второй, умноженный на b_{22} и т. д., наконец, n -й столбец, умноженный на b_{n1} . Затем к $(n - 2)$ -му столбцу определителя Δ прибавим первый столбец, умноженный на b_{12} , второй, умноженный на b_{22} и т. д. Вообще, к $(n + j)$ -му столбцу определителя Δ ($j = 1, 2, \dots, n$), прибавим сумму первых n столбцов взятых, соответственно, с коэффициентами $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$.

После этих преобразований Δ примет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по минорам последних n строк. Ясно, что минор

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n$$

есть единственный минор, отличный от нуля. Алгебраическое дополнение этого минора равно:

$$a = (-1)^{((n+1)+(n+2)+\dots+2n)+(1+2+\dots+n)} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n^2+n} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta = MA + (-1)^{2n^2+n+n} \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}. \triangleright$$

ПРИМЕР.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0+1+1+1+3+2 & 0+0+1+0+3+2 & 0+4+1+2+3+0 \\ 1+1+3+1+2+2 & 1+0+3+0+2+2 & 1+4+3+2+2+0 \\ 1+1+4+1+1+2 & 1+0+4+0+1+2 & 1+4+4+2+1+0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 12 \\ 10 & 8 & 12 \end{vmatrix}.$$

7. Формулы Крамера

Для вывода формул Крамера докажем следующую теорему.

Теорема 7.1. *Сумма произведений элементов некоторого столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца равна нулю.*

◁ Вместе с определителем Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Решением системы (15) называется совокупность таких значений неизвестных

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n,$$

которые удовлетворяют всем уравнением данной системы. Указанное решение коротко обозначают так:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*. Две системы n линейных уравнений с одними и теми же n неизвестными называются *равносильными*, если каждое решение одной системы является решением и другой, или если они обе несовместны.

Из коэффициентов при неизвестных уравнений системы (15) составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называют определителем данной системы. Допустим, что $\Delta \neq 0$ и постараемся решить систему (15).

Чтобы исключить неизвестные $x_2, x_3, \dots, x_n$ системы (15) достаточно 1-ое, 2-ое, $\dots$, n -ое уравнения данной системы умножить соответственно на алгебраические дополнения элементов 1-го столбца, т. е. на

$$A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}.$$

Все это наглядно видно из следующего:

$$A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) = b_1A_{11},$$

$$A_{21}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) = b_2A_{21},$$

.....

$$A_{n1}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) = b_nA_{n1}.$$

Складывая эти равенства, получим:

$$\begin{aligned} (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 + \\ + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2 + \cdots \\ + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n = \\ = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}. \end{aligned}$$

Видно, что коэффициентом для x_1 оказался определитель Δ , все остальные коэффициенты при неизвестных равны нулю.

Получим уравнение

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}. \quad (16)$$

Правая часть этого уравнения есть определитель n -го порядка, который из определителя Δ получится заменой в нем коэффициентов при x_1 соответствующими свободными членами. Обозначив его через Δ_1 , будем иметь

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда уравнение (16) примет вид

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1.$$

Аналогичные уравнения получим относительно и других неизвестных. Таким образом, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta \cdot x_1 &= \Delta_1, \\ \Delta \cdot x_2 &= \Delta_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta \cdot x_n &= \Delta_n.\end{aligned}\tag{17}$$

Покажем равносильность систем (15) и (17).

Допустим $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ есть некоторое решение системы (15). Тогда получим следующие числовые равенства:

$$\begin{aligned}a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n &= b_n.\end{aligned}\tag{18}$$

Если данные равенства умножить на соответствующие алгебраические дополнения элементов 1-го столбца Δ и потом сложить, получим $\Delta \cdot \alpha_1 = \Delta_1$. Аналогично получим также

$$\Delta \cdot \alpha_2 = \Delta_2, \quad \Delta \cdot \alpha_3 = \Delta_3, \quad \dots, \quad \Delta \cdot \alpha_n = \Delta_n.$$

Эти числовые равенства показывают, что $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ есть решение и системы (17).

Докажем теперь обратное: *любое решение системы (17) будет решением и системы (15).*

Так как $\Delta \neq 0$, решением системы (17) будет

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.\tag{19}$$

Эти значения подставим в левую часть, например, первого уравнения системы (15), получим числовое выражение:

$$a_{11} \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \frac{\Delta_2}{\Delta} + \dots + a_{1n} \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Идея такого способа решения, рассмотренной выше системы линейных уравнений, принадлежит швейцарскому математику Г. Крамеру (1704–1752), поэтому формулы (19) носят название *формул Крамера*, а правило решения этой системы с использованием указанных формул — *правила Крамера*.

Литература

1. Кемхадзе Ш. С. Высшая алгебра.—Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1972.
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.—М.: Наука, 1971.
3. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры.—М.: Наука, 1975.
4. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре.—М.: Наука, 1984.
5. Окунев Л. Н. Высшая алгебра.—М.: Изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1958.
6. Шапиро Г. М. Высшая алгебра.—Тбилиси: Изд-во научно-методического кабинета, 1949.
7. Плиев А. Н. Теорема Лапласа // Труды педагогических институтов ГрССР, серия физики и математики.—Тбилиси, 1978.
8. Плиев А. Н. Один вариант построения теории определителей // Межвузовский сборник научных трудов ГССР.—Тбилиси, 1982.

Оглавление

Предисловие	3
1. Основные понятия	5
2. Теоремы о двукратных алгебраических дополнениях	9
3. Свойства определителей	12
4. Теорема Лапласа	17
5. Вычисление определителей	25
6. Произведение определителей	38
7. Формулы Крамера	40
Литература	46

Плиев Арон Николаевич

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Учебное пособие

Зав. редакцией Е. К. Басаева

Подписано в печать 22.12.2006. Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$.
Усл. п. л. 2,8. Тираж 100 экз.

Издательство Владикавказского научного центра,
362025, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.