



*Посвящается памяти профессора
Амурхана Хаджумаровича Гудиева
(10.05.1932 – 23.05.1999)*

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTRE
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

MATHEMATICAL ANALYSIS
AND
MATHEMATICAL MODELING

Proceedings
of the International Conference of Young Scientists
(Russia, Vladikavkaz, July 16–21, 2012)

Vladikavkaz
2012

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Труды VIII региональной
школы-конференции молодых ученых
«Владикавказская молодежная
математическая школа»
(Россия, Владикавказ, 16–21 июля 2012 г.)

Владикавказ
2012

ББК 22.16+я43
УДК 517.21+
М 34

Редакционная коллегия:

д. ф.-м. н. *Демиденко Г. В.*, д. ф.-м. н. *Каменецкий Е. С.*,
д. ф.-м. н. *Кусраев А. Г.*

Ответственный секретарь: к. пед. н. *Абатурова В. С.*

Издание осуществлено при финансовой поддержке Президиума РАН в рамках целевой программы «Поддержка молодых ученых».

Математический анализ и математическое моделирование:
тр. VIII региональной шк.-конф. молодых учен. «Владикавказская
молодежная математическая школа» (Владикавказ, 16–21 июля
2012 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2012.—186 с.

В сборник вошли обзорные лекции и тезисы секционных докладов VIII региональной школы-конференции молодых ученых «Владикавказская молодежная математическая школа», состоявшейся в г. Владикавказе с 16 по 21 июля 2012 г.

ISBN 978-5-904695-17-0

© Южный математический институт
ВНИЦ РАН и РСО-А, 2012



*Амурхан Хаджумарович Гудиев
(10.05.1932 – 23.05.1999)*

ВЕХИ ЖИЗНИ А. Х. ГУДИЕВА

1932	Родился 10 мая в селении Гизель Северо-Осетинской АССР.
1948–1952	Студент физико-математического факультета Северо-Осетинского педагогического института.
1952–1955	Аспирант кафедры математики Северо-Осетинского педагогического института.
1955–1957	Ассистент кафедры математики Северо-Осетинского педагогического института.
1957–1961	Старший преподаватель кафедры математики Северо-Осетинского педагогического института.
1961–1970	Научный сотрудник Института математики Сибирского отделения Академии наук СССР.
1963	Степень кандидата физ.-мат. наук.
1969	Степень доктора физ.-мат. наук.
1970–1971	Заведующий кафедрой математического анализа Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова.
1971	Проректор по научной работе Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова.
1971–1976	Ректор Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова.

- 1972—1999** Заведующий-организатор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова.
- 1999** Умер 23 мая после тяжелой продолжительной болезни и похоронен в селении Гизель Республики Северная Осетия-Алания.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В период с 16 по 21 июля 2012 г. Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН при поддержке Министерства РСО-А по делам молодежи, физической культуры и спорта и Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова проводил на базе отеля «Сказка» (с. Н. Цей, Алагирский район, РСО-А) VIII региональную школу-конференцию молодых ученых «Владикавказская молодежная математическая школа», посвященную памятной дате — 80-летию со дня рождения д. ф.-м. н., профессора Амурхана Хаджумаровича Гудиева.



В оргкомитет конференции вошли: д. ф.-м. н., профессор А. В. Абанин (ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН, Ростов-на-Дону), к. пед. н. В. С. Абатурова (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ) — ученый секретарь оргкомитета, д. ф.-м. н., профессор А. О. Ватутлян (ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН, Ростов-на-Дону), д. ф.-м. н., профессор Е. С. Каменецкий (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ) — заместитель председателя оргкомитета, к. ф.-м. н., доцент М. И. Карякин (ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН, Ростов-на-Дону), Р. К. Келехсаев (Минмолспорта РСО-А, Владикавказ), д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраев (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ) — председатель оргкомитета, д. т. н., профессор В. Г. Созанов (СОГУ, Владикавказ), д. ф.-м. н., доцент В. Г. Цибулин (ЮФУ, Ростов-на-Дону).



В работе конференции приняли участие студенты, магистранты, аспиранты и молодые ученые из вузов и научных организаций Юга России и Республики Южная Осетия — Владикавказа (ЮМИ ВНЦ РАН, СОГУ), Ростова-на-Дону (ЮФУ), Воронежа (ВИ МВД), Махачкалы (ДГПУ), Наль-

чика (НИИ ПМА КБНЦ РАН), Цхинвала (ЮОГУ).

Была организована выставка научных работ и фотоматериалов из семейного архива профессора А. Х. Гудиева и архива кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений СОГУ, основанной А. Х. Гудиевым.

В рамках ВММШ-2012 была проведена конференция молодых ученых, в которой приняло участие более 30 человек. Молодые исследователи рассказывали о своих научных достижениях и перспективах дальнейшей работы, поделились с коллегами научными проблемами, возникшими в ходе работы, предлагали для обсуждения актуальные темы, которые были развиты в ходе круглых столов и неформальных бесед молодых ученых и приглашенных лекторов школы.





Конференция открылась двумя обзорными лекциями о математике двадцатого века: «Прикладная математика XX столетия. Семейное серебро» (д. ф.-м. н., профессор Г. Г. Малинецкий — заведующий сектором нелинейной динамики ИПМ РАН, вице-президент Нанотехнологического общества РФ,

Москва) и ««Чистая» математика XX столетия» (д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраева — директор ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ).

Затем с докладом «О работах профессора А. Х. Гудиева по функциональным пространствам и дифференциальным

уравнениям» выступил д. ф.-м. н., профессор Г. В. Демиденко — заведующий лабораторией дифференциальных и разностных уравнений Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск). В своем докладе Геннадий Владимирович рассказал о вкладе профессора А. Х. Гудиева в теорию



функциональных пространств и дифференциальных уравнений, об Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН и семинаре академика С. Л. Соболева, активным участником которого был А. Х. Гудиев с 1961 по 1970 гг.

В ходе школы-конференции были прочитаны следующие циклы лекций: «Инъективные банаховы решетки», лектор — д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраев (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ); «Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа» и «Числовые характеристики в задачах устойчивости», лектор — д. ф.-м. н., профессор Г. В. Демиденко (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск); «Математические модели социальных и исторических процессов», лектор — д. ф.-м. н., профессор Е. С. Каменецкий (ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ); «Математика самоорганизации», лектор — д. ф.-м. н., профессор Г. Г. Малинецкий (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва); «Математическое моделирование и методы нелинейной динамики», лектор — д. ф.-м. н., доцент В. Г. Цибулин (ЮФУ, Ростов-на-Дону); «Приближение гладких функций тригонометрическими полиномами в пространстве Лебега с переменным показателем», лектор — д. ф.-м. н., профессор И. И. Шарипудинов (ДГПУ, Махачкала).



По традиции лекторы школы-конференции уже несколько лет приезжают со своими учениками — студентами, магистрантами и аспирантами. Это позволяет создать в ходе проведения школы-конференции атмосферу совместного поиска в решении актуальных научных проблем, способствует расширению связей между различными российскими научными школами.

Важный элемент проведения школы-конференции — возможность обсуждения научных проблем в ходе научных консультаций и неформального общения лекторов и слушателей школы.

Культурно-оздоровительная программа участников школы-конференции включала пешие экскурсии по туристическим маршрутам Цей, включая поход к водопадам, осмотр святилища Реком, подъем по канатной дороге к леднику «Сказка».



Активность молодых участников школы-конференции, прекрасные условия работы и отдыха, созданные администрацией отеля «Сказка», достойный уровень организации научно-образовательного процесса школы-конференции, желание приглашенных лекторов приехать в следующем году с молодыми учеными Новосибирска, Москвы, Ростова-на-Дону и других городов России, позволяет говорить о том, что Владикавказская молодежная математическая школа стала заметным явлением математической жизни Юга России.

Высокий уровень технического и телекоммуникационного оснащения школы-конференции позволил создать банк видеолекций школы, с которым можно ознакомиться в сети Интернет на сайте www.youtube.ru.

Материалы конференции, включая презентации лекций, тезисы докладов молодых ученых, статьи лекторов, подготовленные для публикации в сборнике трудов школы-конференции, размещены на сайте Южного математического института ВНЦ РАН и РСО-А www.smath.ru в разделе «Конференции ВММШ-2012».

О РАБОТАХ ПРОФЕССОРА А. Х. ГУДИЕВА
ПО ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВАМ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Г. В. Демиденко¹

В конце 50-х гг. Амурхан Хаджумарович Гудиев получил приглашение от академика Сергея Львовича Соболева на работу в только что созданный Институт математики Сибирского отделения Академии наук СССР. В это время С. Л. Соболев активно занимался формированием научного коллектива Института, стремясь к тому, чтобы в Институте были представлены все важнейшие направления современной математики. Колоссальный авторитет С. Л. Соболева позволил в кратчайший срок решить кадровую проблему. Ряд выдающихся математиков приняли приглашение С. Л. Соболева переехать в Новосибирск и организовать здесь научные школы. На работу в Институт было принято много талантливой молодежи. В течение нескольких лет Институт математики стал всемирно известным математическим центром.

В 1961 г. А. Х. Гудиев переехал в Новосибирский Академгородок и стал сотрудником Института математики. К этому времени он уже глубоко погрузился в новую для себя область математики — функциональный анализ. Это произошло после бесед с С. Л. Соболевым и изучения знаменитой монографии [1]. С этого времени Амурхан Хаджумарович начинает заниматься теорией вложения функциональных пространств дифференцируемых функций. Эти исследования были связаны с новым направлением в функциональном анализе, появившемся благодаря знаменитым работам С. Л. Соболева, в которых были введены пространства W_p^l и для них доказаны первые теоремы вложения (о том, как происходило становление этого направления, можно проследить по работам С. Л. Соболева в [2, 3]). Поэтому после переезда в Сибирь перед молодым математиком А. Х. Гудиевым вопрос о выборе темы для исследований уже не стоял, и он был зачислен в отдел, которым руководил С. Л. Соболев. В этом отделе теорией функциональных пространств и их приложениями занимались молодые талантливые математики Л. В. Войтишек, В. Б. Коротков, В. Р. Портнов, С. В. Успенский и др. Десять лет проработал

¹Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН; Новосибирский государственный университет.

Амурхан Хаджумарович в этом замечательном научном коллективе, именно здесь им были получены основные результаты по теории вложения функциональных пространств и приложениям к краевым задачам для дифференциальных уравнений с частными производными. О некоторых из этих результатов будет рассказано ниже.

1. Теоремы вложения С. Л. Соболева

Напомним кратко формулировки теорем вложения С. Л. Соболева.

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная и звездная относительно некоторого шара. По определению пространство Соболева $W_p^l(G)$, $1 \leq p < \infty$, состоит из функций $u(x) \in L_p(G)$, имеющих на G обобщенные производные $D_x^\alpha u(x)$, $|\alpha| \leq l$, и конечную норму

$$\|u\|_{W_p^l} = \sum_{|\alpha| \leq l} \|D_x^\alpha u\|_{L_p}.$$

Теорема 1. Если функция $u(x) \in W_p^l(G)$ и $lp > n$, то $u(x)$ почти всюду совпадает с $\tilde{u}(x) \in C(\bar{G})$ и

$$\|\tilde{u}\|_C \leq a \|u\|_{W_p^l},$$

где константа $a > 0$ не зависит от $u(x)$.

Теорема 2. Если функция $u(x) \in W_p^l(G)$ и $lp \leq n$, то $u(x)$ почти всюду совпадает с $\tilde{u}(x)$, которая имеет след на сечении G_m области G любой гиперплоскостью m измерений, где $m > n - lp$. При этом след принадлежит $L_q(G_m)$, $q < \frac{mp}{n-lp}$, и

$$\|\tilde{u}\|_{L_q} \leq a \|u\|_{W_p^l},$$

где константа $a > 0$ не зависит от $u(x)$.

В теореме вложения Соболева о следах функций $u(x) \in W_p^l(G)$ указано ограничение на размерность многообразия G_m вида $m > n - lp$. Это условие является существенным, поскольку в случае, когда $1 \leq m \leq n - lp$, для конкретного многообразия G_m понятие следа $u|_{G_m}$ может не иметь смысла. Вопрос об аналогах теорем вложения о следах в случае многообразий «малой» размерности оставался открытым до начала 60-х гг. Изучение этого вопроса началось в 1961 г. после высказывания гипотезы Соболева — Никольского

о формулировке теорем подобного типа. Первые результаты в этом направлении были получены уже в 1962 г. в работах А. Х. Гудиева и С. М. Никольского.

2. Гипотеза Соболева — Никольского

На 4-ом Всесоюзном математическом съезде (г. Ленинград, 1961 г.) в совместном докладе С. Л. Соболева и С. М. Никольского [4] был поставлен вопрос о поведении функций $u(x) \in W_p^l(G)$ на многообразиях G_m размерности $1 \leq m \leq n - lp$ и была высказана гипотеза (см. [5]) о том, что для этого нужно использовать пространства суммируемых функций со смешанной нормой $L_{(p_1, p_2)}(G)$. Интересно отметить, что в этом же году была опубликована работа [6], в которой изучались свойства пространств со смешанной нормой.

Поясним гипотезу Соболева — Никольского в случае, когда $G = \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (y, z) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m},$$

$$1 \leq p, q < \infty.$$

$L_{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$ — пространство измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций $u(x)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{L_{(p,q)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(y, z)|^p dy \right)^{q/p} dz \right)^{1/q}.$$

Согласно гипотезе Соболева — Никольского можно утверждать, что при некоторых условиях на числа p, q, n и m пространство $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ должно быть вложено в пространство со смешанной нормой $L_{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$, при этом неравенство

$$\|u\|_{L_{(p,q)}} \leq c \|u\|_{W_p^l}$$

характеризует поведение нормы

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(y, z)|^p dy \right)^{1/p}$$

как функции от z в терминах принадлежности пространству $L_q(\mathbb{R}^{n-m})$.

Аналогичным образом формулируется гипотеза Соболева — Никольского для областей $G \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство гипотезы Соболева — Никольского было получено А. Х. Гудиевым (1962 г.) и вытекает из следующей теоремы [7].

Теорема 3. Если функция $u(x) \in W_p^l(G)$, $\frac{n}{p} - l < \frac{n-m}{p_2} + \frac{m}{p_1}$, где $p_2 \geq p_1 \geq p > 1$, то $u(x) \in L_{(p_1, p_2)}(G)$ и

$$\|u\|_{L_{(p_1, p_2)}} \leq c \|u\|_{W_p^l},$$

где константа $c > 0$ не зависит от $u(x)$.

В работе [8] А. Х. Гудиевым доказано, что в условии предыдущей теоремы $\frac{n}{p} - l < \frac{n-m}{p_2} + \frac{m}{p_1}$ знак « $<$ » можно заменить на знак « $\leq$ ».

Теорема 4. Если функция $u(x) \in W_p^l(G)$, $\frac{n}{p} - l = \frac{n-m}{p_2} + \frac{m}{p_1}$, где $p_2 \geq p_1 > p > 1$, то $u(x) \in L_{(p_1, p_2)}(G)$ и

$$\|u\|_{L_{(p_1, p_2)}} \leq c \|u\|_{W_p^l},$$

где константа $c > 0$ не зависит от $u(x)$.

Из этих теорем, в частности, следует, что для функции $u(x) \in W_p^l(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leq m < n - lp$ функция

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_m \right)^{1/p}$$

принадлежит пространству $L_q(\mathbb{R}^{n-m})$, где $p < q \leq \frac{p(n-m)}{n-m-lp}$.

Аналогичные результаты были установлены А. Х. Гудиевым по теоремам вложения для абстрактных функций множеств [9, 10].

Результаты, полученные в работах [7–10], составили основу кандидатской диссертации [11], которую Амурхан Хаджумарович успешно защитил в 1963 г.

Отметим, что в 1962 г. опубликована также работа С. М. Никольского [12], в которой была доказана гипотеза Соболева — Никольского для пространств $H_p^l(\mathbb{R}^n)$.

3. Обобщение гипотезы Соболева — Никольского

В последующем цикле работ [13–19] А. Х. Гудиев получил ряд результатов по обобщению известных теорем вложения для пространств Соболева — Слободецкого, анизотропных пространств Соболева, анизотропных пространств Бесова, некоторых весовых пространств Соболева, абстрактных функций множеств. В частности,

им проведены исследования по обобщению гипотезы Соболева – Никольского о вложении соболевских пространств W_p^l в пространства суммируемых функций со смешанной нормой $L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}$ (см., например, [14, 16, 19]). Приведем формулировку одной из доказанных теорем, относящейся к обобщению гипотезы Соболева – Никольского.

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$G = G_{n_1} \times G_{n_2} \times \dots \times G_{n_k}, \quad G_{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i}, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^k) \in G, \quad x^i \in G_{n_i}.$$

$$1 < p_1, p_2, \dots, p_k < \infty.$$

$L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}(G)$ — пространство измеримых на G функций $u(x)$, для которых конечна норма

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}} = \\ & = \left(\int_{G_{n_k}} \left(\int_{G_{n_{k-1}}} \dots \left(\int_{G_{n_1}} |u(x)|^{p_1} dx^1 \right)^{p_2/p_1} \dots dx^{k-1} \right)^{p_k/p_{k-1}} dx^k \right)^{1/p_k}. \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Если функция $u(x) \in W_p^l(G)$ и

$$\frac{n}{p} - l < \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{p_i}, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n, \quad 1 < p < p_1, \dots, p_k,$$

то $u(x) \in L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}(G)$, при этом

$$\|u\|_{L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}} \leq c \|u\|_{W_p^l},$$

где константа $c > 0$ не зависит от $u(x)$. Если область G ограничена, то оператор вложения

$$W_p^l(G) \longrightarrow L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}(G)$$

вполне непрерывен.

А. Х. Гудиев провел также исследования по обобщению гипотезы Соболева — Никольского для соболевских пространств $W_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^l$ со смешанной нормой вида

$$\|u\|_{W_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^l} = \|u\|_{L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}} + \|u\|_{L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^l},$$

где

$$\|u\|_{L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}^l} = \left\| \left(\sum_{|\alpha|=l} |D_x^\alpha u|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}}.$$

Для этих пространств им были впервые доказаны теоремы вложения, аналогичные теоремам 3–5 (см., например, [16, 19]).

4. Неравенства типа Пуанкаре — Стеклова — Фридрихса

Хорошо известно, что классические неравенства Пуанкаре — Стеклова — Фридрихса играют очень важную роль при изучении разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными в соболевских пространствах $W_p^l(G)$.

В работах А. Х. Гудиева [20, 21] для пространств со смешанной нормой впервые были получены аналоги неравенств Пуанкаре — Стеклова — Фридрихса. В дальнейшем такие неравенства также были использованы при рассмотрении краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Приведем некоторые из полученных интегральных неравенств в пространствах со смешанной нормой.

Теорема 6. Если функция $u(x) \in \mathring{W}_p^l(G)$ и

$$\frac{n}{p} - l < \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{p_i}, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n, \quad 1 < p < p_1, \dots, p_k,$$

тогда справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}} \leq c \|u\|_{L_p^l}^\alpha \|u\|_{L_p}^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{l} \left(\frac{n}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{p_i} \right),$$

где константа $c > 0$ не зависит от $u(x)$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что для функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}_p^1(G)$ имеет место оценка

$$\|u\|_{L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}} \leq c \|\nabla u\|_{L_p}^\alpha \|u\|_{L_p}^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{n}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{p_i}.$$

Теорема 7. Пусть функция $u(x) \in W_2^1(G)$ такая, что

$$\int_G u(x) dx = 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_{(p_1, p_2, \dots, p_k)}} \leq c \|\nabla u\|_{L_2}^\beta \|u\|_{L_2}^{1-\beta},$$

где

$$\frac{n}{2} - \beta = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{p_i}, \quad \beta \geq \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ 1 - \frac{2}{p_i} \right\}, \quad p_i \geq 2,$$

и константа $c > 0$ не зависит от $u(x)$.

Новые результаты по теоремам вложения для пространств со смешанной нормой А. Х. Гудиев применил при исследовании некоторых краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений второго порядка. В цикле работ по дифференциальным уравнениям (см., например, [20–27]) ему удалось доказать теоремы о существовании и единственности обобщенных решений краевых задач при более слабых ограничениях на коэффициенты уравнений, на правые части и граничные данные.

5. Обобщенные решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} (a_{ij}(x) D_{x_j} u + a_i(x) u) + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_{x_i} u + a(x) u = \\ = \sum_{i=1}^n D_{x_i} f_i(x) + f(x), \quad x \in G, \\ u|_{\partial G} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\nu_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \nu_2 |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Обобщенным решением задачи Дирихле называется функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(G)$, удовлетворяющая соотношению

$$\begin{aligned} \int_G \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} D_{x_j} u + a_i u) D_{x_i} v - \left(\sum_{i=1}^n b_i D_{x_i} u + a u \right) v \right) dx = \\ = \int_G \left(\left(\sum_{i=1}^n f_i D_{x_i} v \right) - f v \right) dx, \quad v(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(G). \end{aligned}$$

В 50–60-е гг. прошлого столетия были получены теоремы о разрешимости задачи Дирихле при следующих условиях:

$$a_i^2, b_i^2, a \in L_{p/2}, \quad f_i \in L_2, \quad f \in L_{2p/(n+2)},$$

при этом $p > \frac{n}{2}$ и мера $\mu(G)$ области G , вообще говоря, должна быть достаточно мала (О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, С. Miranda, С. Morrey, G. Stampacchia и др.).

Вопрос. Насколько существенны требования $p > \frac{n}{2}$, $\mu(G) \approx 0$?

Используя полученные результаты по теоремам вложения для пространств со смешанной нормой, А. Х. Гудиев доказал ряд теорем, в которых эти требования были ослаблены (см., например, [21, 22, 26, 27]). В частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема 8. Пусть выполнены следующие условия:

$$a_i^2, b_i^2, a \in L_{(p, \frac{p(n-m)+\alpha}{2p-m})}, \quad p > m/2 \geq 1, \quad \alpha > 0.$$

Тогда, если мера $\mu(Pr_{n-m}G)$ проекции G на $\mathbb{R}^{n-m}$ достаточно мала, то задача Дирихле не может иметь более одного обобщенного решения.

Теорема 9. Пусть выполнены условия на коэффициенты уравнения из теоремы 8. Тогда существует константа $A > 0$ такая, что если

$$\int_G a(x) dx < A,$$

то задача Дирихле не может иметь более одного обобщенного решения.

Теорема 10. Пусть для коэффициентов уравнения выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда для любой правой части, удовлетворяющей условиям

$$f_i \in L_2, \quad f \in L_{\left(q, \frac{2q(n-m)}{(n+2)q-2m}\right)}, \quad q > m/2,$$

задача Дирихле имеет единственное обобщенное решение.

Рассмотрим первую краевую задачу для параболического уравнения

$$\begin{aligned} D_t u - \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} (a_{ij}(x, t) D_{x_j} u + a_i(x, t) u) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) D_{x_i} u + \\ + a(x, t) u = f(x, t), \quad x \in G, \quad t \in [0, T], \\ u|_{\partial G \times [0, T]} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \end{aligned}$$

где

$$\nu_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \nu_2 |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В начале 60-х гг. прошлого столетия были получены теоремы о существовании и единственности обобщенного решения первой краевой задачи при следующих условиях:

$$a_i^2, b_i^2, a \in L_{p/2}, \quad f \in L_2,$$

при этом $p > \frac{n}{2}$ (М. И. Вишик, А. В. Иванов, О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева и др.).

ВОПРОС. Насколько существенно требование $p > \frac{n}{2}$?

Используя полученные результаты по теоремам вложения для пространств со смешанной нормой, А. Х. Гудиев доказал ряд теорем, в которых это требование было ослаблено и сформулировано в терминах принадлежности коэффициентов уравнения и данных задачи пространствам со смешанной нормой $L_{(p_1, p_2, p_3)}$ (см., например, [24, 25]).

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{aligned} Lu \equiv D_t^2 u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) D_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) D_{x_i} u + a(x, t) u = f(x, t), \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x), \end{aligned}$$

где

$$\nu_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \nu_2 |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Функция $u(x, t) \in L_{loc}(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи Коши в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, если $u(x, t)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Omega} u L^* v \, dx \, dt = \int_{\Omega} f v \, dx \, dt, \quad v(x, t) \in C_0^2(\Omega),$$

где L^* — сопряженный оператор к L , при этом на любом сечении $\Omega_t = \Omega \cap \{t = \text{const}\}$ выполнено

$$u(x, t) \in W_2^1(\Omega_t), \quad D_t u(x, t) \in L_2(\Omega_t).$$

Траектория $\{u, D_t u\} \in W_2^1 \times L_2$ должна быть непрерывной по t и удовлетворять начальным условиям.

В работах С. Л. Соболева (см. [1]) были доказаны теоремы о существовании и единственности обобщенного решения задачи Коши при следующих условиях на коэффициенты:

- 1) $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i \in C(\bar{\Omega})$, $a \in L_{n+\varepsilon}(\Omega)$;
- 2) существуют обобщенные производные $D_{x_j} b_i, D_t b_i \in L_{n+\varepsilon}(\Omega)$, $D_{x_j} a, D_t a \in L_q(\Omega)$, $q = \frac{n+\varepsilon}{2}$ при $n \geq 4$ и $q = 2$ при $n \leq 3$.

Используя полученные результаты по теоремам вложения для пространств со смешанной нормой, А. Х. Гудиев [23] показал, что второе требование на коэффициенты b_i, a можно ослабить, заменив его на следующее условие:

$$(D_{x_j} b_i)^2, (D_t b_i)^2 \in L_{(p_1, p_2)}(\Omega_t),$$

$$D_{x_j} a, D_t a \in L_p(\Omega_t), \quad p \geq 2 \quad \text{при} \quad n \leq 3,$$

$$D_{x_j} a, D_t a \in L_{(p_1, p_2)}(\Omega_t), \quad p_i \geq 2 \quad \text{при} \quad n \geq 4,$$

где

$$2p_1 p_2 - \varepsilon = (n - m)p_1 + m p_2, \quad \varepsilon > 0,$$

$$p_1 > \begin{cases} 1, & \text{если } m = 1, \\ \frac{m}{2}, & \text{если } m \geq 2, \end{cases} \quad p_2 > \begin{cases} 1, & \text{если } n - m < 2, \\ \frac{n-m}{2}, & \text{если } n - m \geq 2. \end{cases}$$

Результаты, полученные А. Х. Гудиевым при изучении свойств пространств со смешанной нормой и обобщенных решений краевых

задач для дифференциальных уравнений, составили основу докторской диссертации [28], которую Амурхан Хаджумарович успешно защитил в Институте математики СО АН СССР в 1969 г.

* * *

Научная деятельность профессора А. Х. Гудиева получила широкое признание в нашей стране и за рубежом. Его работы заложили основу для дальнейших исследований в важных разделах теории функциональных пространств и теории уравнений с частными производными.

Литература

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.—255 с.; изд. 2-е, перераб. и доп.—Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.—255 с.; изд. 3-е, перераб. и доп.—М.: Наука, 1988.—336 с.
2. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т. I. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы / Ред.-сост.: В. Л. Васкевич, Г. В. Демиденко.—Новосибирск: Ин-т математики, 2003.—692 с.
3. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т. II. Функциональный анализ. Дифференциальные уравнения с частными производными / Ред.-сост.: С. К. Водопьянов, Г. В. Демиденко.—Новосибирск: Ин-т математики, 2006.—689 с.
4. *Соболев С. Л., Никольский С. М.* Теоремы вложения // Аннот. пленарных докл. 4-го Всесоюз. мат. съезд (3–12 июля 1961 г.).—Л., 1961.—С. 28–29.
5. *Соболев С. Л., Никольский С. М.* Теоремы вложения // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда (3–12 июля 1961 г.).—Л.: Наука, 1963.—С. 227–242.
6. *Benedek A., Panzone R.* The spaces L^p with mixed norm // *Duke Math. J.*—1961.—Vol. 28, № 3.—Р. 301–324.
7. *Гудиев А. Х.* Теорема вложения для следа в абстрактных функциях // Докл. АН СССР.—1962.—Т. 147, № 4.—С. 764–767.
8. *Гудиев А. Х.* Проблема С. Л. Соболева и С. М. Никольского для предельного показателя // Докл. АН СССР.—1963.—Т. 149, № 3.—С. 509–512.
9. *Гудиев А. Х.* К теоремам вложения С. Л. Соболева для абстрактных функций // Докл. АН СССР.—1963.—Т. 148, № 1.—С. 24–27.
10. *Гудиев А. Х.* Классы $L_{p_1, p_2, \dots, p_k}(\Omega_m)$ и теорема вложения для абстрактных функций множеств // Докл. АН СССР.—1963.—Т. 149, № 2.—С. 241–244.
11. *Гудиев А. Х.* Некоторые обобщения теорем вложения для абстрактных функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Новосибирск, 1963.
12. *Никольский С. М.* Об одной задаче С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн.—1962.—Т. 3, № 6.—С. 845–851.
13. *Гудиев А. Х.* Теоремы вложения для некоторых классов абстрактных функций // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 156, № 5.—С. 1014–1017.
14. *Гудиев А. Х.* Дифференциальные свойства следов функций на гиперплоскостях любых размерностей // Докл. АН СССР.—1965.—Т. 160, № 2.—С. 267–270.

15. Гудиев А. Х. Некоторые обобщения теорем вложения // Сиб. мат. журн.—1965.—Т. 6, № 4.—С. 775–797.
16. Гудиев А. Х. Теоремы вложения для пространств со смешанной нормой // Докл. АН СССР.—1966.—Т. 166, № 3.—С. 522–525.
17. Гудиев А. Х. Об интегралах типа потенциала и теоремах вложения в пространствах со смешанной нормой // Дифференц. уравнения.—1966.—Т. 11, № 1.—С. 83–106.
18. Гудиев А. Х. Нелинейные интегралы типа потенциала и их свойства // Дифференц. уравнения.—1966.—Т. 11, № 2.—С. 172–193.
19. Гудиев А. Х. Теоремы вложения для смешанных пространств // Дифференц. уравнения.—1967.—Т. 111, № 1.—С. 130–138.
20. Гудиев А. Х. Об условиях непрерывности по Гёльдеру ограниченных обобщенных решений квазилинейных уравнений эллиптического типа // Дифференц. уравнения.—1968.—Т. 4, № 1.—С. 3–15.
21. Гудиев А. Х. Обобщенные решения эллиптических уравнений второго порядка с коэффициентами из пространств со смешанной нормой // Сиб. мат. журн.—1970.—Т. 11, № 1.—С. 42–70.
22. Гудиев А. Х. О разрешимости первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с дивергентной главной частью в W_2^1 // Докл. АН СССР.—1968.—Т. 178, № 3.—С. 518–521.
23. Гудиев А. Х. Задача Коши для нормально-гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами // Докл. АН СССР.—1968.—Т. 179, № 2.—С. 267–270.
24. Гудиев А. Х. К краевой задаче для линейных параболических уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР.—1968.—Т. 180, № 6.—С. 1275–1278.
25. Гудиев А. Х. Об обобщенных решениях параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн.—1968.—Т. 9, № 5.—С. 1041–1061.
26. Гудиев А. Х. О задаче Дирихле для уравнений с коэффициентами, принадлежащими пространствам со смешанной нормой // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 184, № 5.—С. 1023–1026.
27. Гудиев А. Х. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения с суммируемым младшим коэффициентом и правой частью // Дифференц. уравнения.—1983.—Т. 19, № 1.—С. 27–30.
28. Гудиев А. Х. Теоремы вложения для пространств со смешанной нормой и их применение к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка: дис. ... д-ра физ.-мат. наук.—Новосибирск, 1969.

WORKS BY PROFESSOR A. KH. GUDIEV ON FUNCTION SPACES AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

G. V. Demidenko

The lecture gives a survey of some results by Professor A. Kh. Gudiev on embedding theorems of function spaces and their applications to boundary value problems for partial differential equations.

Пленарные лекции

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА¹

Г. В. Демиденко²

К середине 50-х гг. прошлого века в литературе «накопилось» достаточно много дифференциальных операторов в частных производных, которые не попадали в жесткие рамки классификации операторов: гиперболические, параболические и эллиптические. С появлением новых примеров классификация дифференциальных операторов, естественно, расширялась. Появились, например, слабо гиперболические операторы, эллиптические операторы по Дуглису — Ниренбергу, операторы соболевского типа и др. Описание новых классов дифференциальных операторов обычно проводилось в алгебраических терминах. Однако иногда определение нового класса дифференциальных операторов давалось в терминах свойств решений соответствующих уравнений и систем. Одним из таких классов, которые были введены без использования алгебраических терминов, был класс гипоэллиптических операторов. Этот класс был определен в работе Л. Хёрмандера [1]. Напомним его определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальный оператор $\mathcal{L}(D_x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, называется *гипоэллиптическим*, если решения уравнения

$$\mathcal{L}(D_x)u = f(x)$$

бесконечно дифференцируемы, когда $f(x)$ бесконечно дифференцируема.

Класс скалярных гипоэллиптических операторов включал в себя, в частности, параболические и эллиптические операторы, а также ряд неклассических. В конце 50-х — начале 60-х гг. в литературе наблюдается бурный всплеск работ по изучению скалярных и матричных гипоэллиптических операторов. В частности, были получены алгебраические критерии гипоэллиптичности операторов с постоянными коэффициентами (см., например, [2, 3]), начато изучение краевых задач для гипоэллиптических уравнений и систем, а также

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракты № № 16.740.11.0127, 14.В37.21.0355; Сибирского отделения Российской академии наук, междисциплинарный проект № 80.

²Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН; Новосибирский государственный университет.

операторов с переменными коэффициентами.

Одними из первых работ по изучению краевых задач для уравнений гипоеллиптического типа были работы С. М. Никольского (см. [2, с. 177–184]). В этих работах был выделен подкласс гипоеллиптических операторов, которые впоследствии в литературе стали называть квазиэллиптическими (иногда полуэллиптическими). Характерной особенностью квазиэллиптических операторов является то, что их «старшие» части состоят из дифференциальных операторов, которые могут иметь неодинаковые порядки по различным направлениям.

При изучении свойств решений гипоеллиптических уравнений с переменными коэффициентами класса C^∞ в работах Б. Мальгранжа [4] и Л. Хёрмандера [5] была доказана эквивалентность определений гипоеллиптического оператора с переменными коэффициентами $\mathcal{L}(x, D_x)$, $x \in G$, и гипоеллиптических операторов с постоянными коэффициентами $\mathcal{L}(x^0, D_x)$, получающихся при фиксации коэффициентов в любой точке $x^0 \in G$. Этот факт имеет очень важное значение при применении классической схемы построения решения дифференциального уравнения, используя операторы с «замороженными» коэффициентами. Однако, как было показано в 1961 г. Л. Р. Волевичем, аналогичный факт, вообще говоря, не имеет места для гипоеллиптических систем. В дальнейшем в работе Л. Р. Волевича [6] был описан класс гипоеллиптических систем, для которых указанная выше эквивалентность будет справедлива. Соответствующий класс дифференциальных операторов был назван классом матричных квазиэллиптических операторов.

Интересно отметить, что работы С. М. Никольского [2, с. 177–184] и Л. Р. Волевича [6], очень важные в теории квазиэллиптических операторов, были опубликованы в один и тот же год.

1. Квазиэллиптические операторы

В лекциях изложены некоторые результаты из теории квазиэллиптических операторов. Мы ограничимся рассмотрением одного класса матричных операторов, которые иногда в литературе называют «однородными» квазиэллиптическими операторами. Напомним их определение.

Рассмотрим матричный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(D_x) = (l_{k,j}(D_x)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Обозначим через $l_{k,j}(i\xi)$ элементы символа $\mathcal{L}(i\xi)$ этого оператора.

УСЛОВИЕ 1. Пусть матрица $\mathcal{L}(i\xi)$ имеет размер $m \times m$. Предположим, что существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $1/\alpha_k \in \mathbb{N}$, такой, что

$$l_{k,j}(c^\alpha i\xi) = cl_{k,j}(i\xi), \quad c > 0.$$

УСЛОВИЕ 2. Равенство

$$\det \mathcal{L}(i\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальный оператор (1) называется «однородным» квазиэллиптическим оператором, если его символ $\mathcal{L}(i\xi)$ удовлетворяет условиям 1, 2.

Матричные операторы, удовлетворяющие указанным условиям, входят в класс квазиэллиптических операторов, введенных Л. Р. Волевичем [6].

Приведем некоторые примеры операторов, удовлетворяющих условиям 1, 2.

ПРИМЕР 1. Однородные эллиптические операторы: $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$. К ним относится, например, оператор Навье

$$\begin{pmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu)D_{x_1}^2 & (\lambda + \mu)D_{x_1x_2}^2 & (\lambda + \mu)D_{x_1x_3}^2 \\ (\lambda + \mu)D_{x_1x_2}^2 & \mu\Delta + (\lambda + \mu)D_{x_2}^2 & (\lambda + \mu)D_{x_2x_3}^2 \\ (\lambda + \mu)D_{x_1x_3}^2 & (\lambda + \mu)D_{x_2x_3}^2 & \mu\Delta + (\lambda + \mu)D_{x_3}^2 \end{pmatrix},$$

λ, μ — постоянные Ламе, Δ — оператор Лапласа по x . Здесь $\det \mathcal{L}(i\xi) = -\mu^2(\lambda + 2\mu)|\xi|^6$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 2. Операторы, параболические по Петровскому:

$$\mathcal{L}(D_x) = \begin{pmatrix} D_{x_n} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & D_{x_n} \end{pmatrix} - \mathcal{L}^0(D_{x'}), \quad x = (x', x_n).$$

Вектор однородности имеет вид $\alpha = (\frac{1}{2b}, \dots, \frac{1}{2b}, 1)$, $b \in \mathbb{N}$, при этом мнимые части корней уравнения

$$\det \mathcal{L}(is, i\lambda) = 0, \quad s \in \mathbb{R}^{n-1},$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Im} \lambda_j(s) \geq \delta(s_1^{2b} + \dots + s_{n-1}^{2b}), \quad \delta > 0.$$

ПРИМЕР 3. Оператор *параболического типа с «противоположными временами»* [7]:

$$\mathcal{L}(D_x) = \begin{pmatrix} D_{x_n} - \Delta' & 0 \\ 0 & D_{x_n} + \Delta' \end{pmatrix},$$

где Δ' — оператор Лапласа по x' , $\alpha = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 1)$.

Очевидно, в класс однородных квазиэллиптических операторов входят скалярные квазиэллиптические операторы

$$\mathcal{L}(D_x) = \sum_{\beta \alpha = 1} a_\beta D_x^\beta, \quad \mathcal{L}(i\xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

2. Разрешимость квазиэллиптических систем в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим квазиэллиптическую систему во всем пространстве:

$$\mathcal{L}(D_x)u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Применяя технику, подробно изложенную в монографии [8], можно доказать следующие теоремы о разрешимости системы (2) в анизотропном соболевском пространстве

$$W_p^l(\mathbb{R}^n), \quad l = (l_1, \dots, l_n), \quad l_k = 1/\alpha_k, \quad 1 < p < \infty,$$

с нормой

$$\|u(x), W_p^l(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{\beta \alpha \leq 1} \|D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Теорема 1. Пусть $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > p'$, $1/p' + 1/p = 1$. Тогда для любой вектор-функции $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ система (2) имеет единственное решение $u(x) \in W_p^l(\mathbb{R}^n)$, и справедлива оценка

$$\|u(x), W_p^l(\mathbb{R}^n)\| \leq c (\|f(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| + \|f(x), L_1(\mathbb{R}^n)\|)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(x)$.

Теорема 2. Если $|\alpha| \leq p'$, то предположим, что $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям

$$(1 + \langle x \rangle)^{N|\alpha|} f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta f(x) dx = 0, \quad |\beta| = 0, \dots, N-1, \quad (3)$$

где натуральное N определяется из неравенств

$$\frac{|\alpha|}{p'} + N\alpha_{\min} > 1 \geq \frac{|\alpha|}{p'} + (N-1)\alpha_{\min}, \quad \alpha_{\min} = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Тогда система (2) имеет единственное решение $u(x) \in W_p^l(\mathbb{R}^n)$, и выполняется оценка

$$\|u(x), W_p^l(\mathbb{R}^n)\| \leq c (\|f(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| + \|(1 + \langle x \rangle)^{N|\alpha|} f(x), L_1(\mathbb{R}^n)\|)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(x)$.

В теоремах указаны достаточные условия разрешимости систем вида (2) в соболевском пространстве $W_p^l(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что число условий ортогональности (3) существенно зависит от порядков операторов, размерности n и показателя суммируемости p . Можно привести примеры эллиптических операторов (1) таких, что условия разрешимости вида (3) для соответствующих систем или уравнений, являются также необходимыми.

Проиллюстрируем сказанное на примере уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (4)$$

В этом случае $\alpha = (1/2, 1/2, 1/2)$. Для простоты предположим, что $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Уравнение (4) однозначно разрешимо в пространстве $W_p^2(\mathbb{R}^3)$ для любой $f(x)$ только при $|\alpha| > p'$, т. е. при $p > 3$. В случае $p \leq 3$ необходимо потребовать, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx = 0.$$

Это условие является достаточным при $3/2 < p \leq 3$. Для разрешимости в $W_p^2(\mathbb{R}^3)$ при $1 < p \leq 3/2$ необходимо и достаточно выполнение уже четырех условий

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} x_i f(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и для краевых задач для систем вида (2) в полупространстве $\mathbb{R}_+^n$ (см., например, [9–11]). Следовательно, индекс краевых задач может существенно зависеть от показателя суммируемости p ! Поэтому теория краевых задач для эллиптических уравнений и систем в неограниченных областях существенно отличается от теории краевых задач в ограниченных областях (см., например, [12]).

3. Изоморфизм квазиэллиптических операторов

Теоремы об изоморфизме дифференциальных операторов

$$\mathcal{L}(D_x) : V_1 \longrightarrow V_2$$

представляют большой интерес в теории уравнений с частными производными и математическом анализе. Они имеют множество приложений. Однако во многих случаях их формулировки далеко не очевидные. Например, дифференциальный оператор

$$\Delta - \varepsilon I : W_p^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty,$$

при $\varepsilon > 0$ устанавливает изоморфизм, но для оператора Лапласа

$$\Delta : W_p^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty,$$

как следует из сказанного выше, это утверждение не верно. Аналогичная ситуация имеет место для полигармонического оператора

$$\Delta^m : W_p^{2m}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty.$$

Ни при каких m этот оператор не является изоморфизмом.

Теоремы о свойствах изоморфизма дифференциальных операторов с однородными символами в литературе начали изучаться в конце 70-х гг. после публикаций работ Л. Ниренберга, Х. Уолкера [13] и Л. А. Багирова, В. А. Кондратьева [14]. Первые результаты по свойствам изоморфизма оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^n$ были получены М. Кантором [15], которые были дополнены в работе Р. Мак-Овена [16]. В 80-х гг. были проведены исследования свойств изоморфизма однородных эллиптических операторов (см., например, [17–20]). Все результаты об изоморфизмах формулировались в терминах некоторого класса весовых соболевских пространств, которые в зарубежной литературе назывались пространствами Ниренберга — Уолкера — Кантора.

Первая теорема об изоморфизме для однородных квазиэллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ была доказана автором [21]. Для формулировки этого результата нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения о свойствах квазиэллиптических операторов и определение специальной шкалы весовых соболевских пространств [22]:

$$W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n), \quad l = (l_1, \dots, l_n), \quad l_k = 1/\alpha_k, \quad 1 < p < \infty, \quad \sigma \geq 0.$$

Норма в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\|u(x), W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{\beta\alpha \leq 1} \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(1-\beta\alpha)} D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\|,$$

где

$$\langle x \rangle^2 = \sum_{k=1}^n x_k^{2l_k}.$$

В изотропном случае $l_1 = \dots = l_n = l$ норма эквивалентна следующей:

$$\sum_{0 \leq |\beta| \leq l} \|(1 + |x|)^{-\sigma(l-|\beta|)} D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Обозначим символом $L_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $\sigma \geq 0$, пространство суммируемых вектор-функций $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ с нормой

$$\|f(x), L_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\| = \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma} f(x), L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть $|\alpha| > 1$ и $|\alpha|/p \geq \sigma$. Тогда множество функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в пространстве $W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4. Пусть $|\alpha| > 1$, $|\alpha|/p > \sigma > |\alpha|/p - (|\alpha| - 1)$. Тогда для любой вектор-функции $f(x) \in L_{p,\sigma-1}(\mathbb{R}^n)$ система (2) имеет единственное решение $u(x) \in W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$, и выполнена оценка

$$\|u(x), W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)\| \leq c \|f(x), L_{p,\sigma-1}(\mathbb{R}^n)\|$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$.

Теорема 5. Пусть $|\alpha| > 1$, $|\alpha|/p > \sigma > |\alpha|/p - (|\alpha| - 1)$. Тогда для любой вектор-функции $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при любых β , $0 \leq \beta\alpha \leq 1$, имеют место оценки

$$\|\langle x \rangle^{-\sigma(1-\beta\alpha)} D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq c \|\langle x \rangle^{(1-\sigma)(1-\beta\alpha)} \mathcal{L}(D_x)u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\|$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(x)$.

Из этих теорем вытекает теорема об изоморфизме.

Теорема 6. Пусть $|\alpha|/p > 1$, тогда оператор

$$\mathcal{L}(D_x) : W_{p,1}^l(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$$

устанавливает изоморфизм.

Отметим, что в изотропном случае при $\sigma = 1$ оценка из теоремы 5 ранее была доказана Л. Ниренбергом, Х. Уолкером [13] для однородных эллиптических операторов.

Проиллюстрируем теоремы 5, 6 на следующих примерах.

ПРИМЕР 4. *Оператор Лапласа* Δ . Из теоремы 5 имеем следующее неравенство для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$:

$$\| |x|^{-2\sigma} u(x), L_p(\mathbb{R}^n) \| \leq c \| |x|^{2(1-\sigma)} \Delta u(x), L_p(\mathbb{R}^n) \|,$$

$$\frac{n}{n-2(1-\sigma)} < p < \frac{n}{2\sigma}.$$

Из теоремы 6 следует, что

$$\Delta : W_{p,1}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$$

— изоморфизм при $n \geq 3$, $p \in (1, n/2)$ (см. [15, 16]).

ПРИМЕР 5. *Оператор теплопроводности*

$$L(D_x) = D_{x_n} - \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}^2.$$

Из теоремы 5 имеем следующее неравенство для оператора теплопроводности в $\mathbb{R}^n$:

$$\| (|x_n| + |x'|^2)^{-\sigma} u(x), L_p(\mathbb{R}^n) \| \leq c \| (|x_n| + |x'|^2)^{1-\sigma} L(D_x) u(x), L_p(\mathbb{R}^n) \|,$$

$$\frac{n+1}{n-1+2\sigma} < p < \frac{n+1}{2\sigma}.$$

Из теоремы 6 следует, что

$$L(D_x) : W_{p,1}^l(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad l = (2, \dots, 2, 1),$$

— изоморфизм при $p \in (1, (n+1)/2)$.

Теоремы об изоморфизме для более общих классов матричных квазиэллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ (в частности, для эллиптических по Дуглису — Ниренбергу) содержатся в работах [23, 24].

4. Уравнения соболевского типа

Теоремы об изоморфизме для квазиэллиптических операторов имеют приложения в теории уравнений и систем соболевского типа [8]. Приведем один результат для задачи Коши для уравнения

соболевского типа

$$L_0(D_x)D_t^m u + \sum_{k=0}^{m-1} L_{m-k}(D_x)D_t^k u = f(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

$$D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

где $L_0(D_x)$ — скалярный квазиэллиптический оператор, удовлетворяющий условиям 1, 2.

Из теоремы 6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $|\alpha|/p > 1$. Тогда для любой функции $f(t, x) \in C([0, T]; L_p(\mathbb{R}^n))$ существует единственное решение задачи Коши (5) $u(t, x) \in C^m([0, T]; W_{p,1}^l(\mathbb{R}^n))$.

ПРИМЕР 6. Задача Коши для уравнения Соболева [25]

$$\Delta D_t^2 u + \omega^2 D_{x_n}^2 u = f(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u|_{t=0} = D_t u|_{t=0} = 0.$$

Для любой $f(t, x) \in C([0, T]; L_p(\mathbb{R}^n))$, $1 < p < n/2$, существует единственное решение $u(t, x) \in C^2([0, T]; W_{p,1}^2(\mathbb{R}^n))$.

Литература

1. Hörmander L. On the theory of general partial differential operators // Acta Math.—1955.—Vol. 94, № 1.—P. 161–248.
2. Никольский С. М. Избранные труды. Т. 3. Уравнения в функциональных пространствах / Ред.-сост.: С. И. Похожаев.—М.: Наука, 2009.—480 с.
3. Шиллов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс.—М.: Наука, 1965.—328 с.
4. Malgrange B. Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques // Bull. Soc. Math. France.—1957.—Vol. 85, № 3.—P. 283–306.
5. Hörmander L. On interior regularity of the solutions of partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math.—1958.—Vol. 11, № 1.—P. 197–218.
6. Волевич Л. Р. Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб.—1962.—Т. 59, № 3.—С. 3–52.
7. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.—М.: Мир, 1972.—416 с.
8. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.—Новосибирск: Научная книга, 1998.—438 с.
9. Демиденко Г. В. Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 1.—С. 41–65.
10. Demidenko G. V. On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in R_+^n // J. Anal. Appl.—2006.—Vol. 4, № 1.—P. 1–11.

11. Бондарь Л. Н. Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве // Дифференц. уравнения.—2012.—Т. 48, № 3.—С. 341–350.
12. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. —М.: Мир, 1980.—664 с.
13. Nirenberg L., Walker H. F. The null spaces of elliptic partial differential operators in R^n // J. Math. Anal. Appl.—1973.—Vol. 42, № 2.—P. 271–301.
14. Багиров Л. А., Кондратьев В. А. Об эллиптических уравнениях в R^n // Дифференц. уравнения.—1975.—Т. 11, № 3.—С. 498–504.
15. Cantor M. Spaces of functions with asymptotic conditions on R^n // Indiana Univ. Math. J.—1975.—Vol. 24, № 9.—P. 897–902.
16. McOwen R. C. The behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces // Comm. Pure Appl. Math.—1979.—Vol. 32, № 6.—P. 783–795.
17. McOwen R. C. On elliptic operators in R^n // Comm. Partial Diff. Eq.—1980.—Vol. 5, № 9.—P. 913–933.
18. Cantor M. Elliptic operators and decomposition of tensor fields // Bull. Amer. Math. Soc.—1981.—Vol. 5, № 3.—P. 235–262.
19. Choquet-Bruhat Y., Christodoulou D. Elliptic systems in $H_{s,\sigma}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity // Acta Math.—1981.—Vol. 146, № 1.—P. 129–150.
20. Lockhart R. B., McOwen R. C. Elliptic differential operators on noncompact manifolds // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.—1985.—Vol. 12, № 3.—P. 409–447.
21. Демиденко Г. В. О квазиэллиптических операторах в R_n // Сиб. мат. журн.—1998.—Т. 39, № 5.—С. 1028–1037.
22. Демиденко Г. В. О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // Докл. РАН.—1994.—Т. 334, № 4.—С. 420–423.
23. Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа // Сиб. мат. журн.—2008.—Т. 49, № 5.—С. 1064–1076.
24. Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа. II // Сиб. мат. журн.—2009.—Т. 50, № 5.—С. 1060–1069.
25. Соболев С. Л. Избранные труды. Т. I. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы / Ред.-сост.: В. Л. Васкевич, Г. В. Демиденко.—Новосибирск: Ин-т математики, 2003.—692 с.

QUASIELLIPTIC OPERATORS AND SOBOLEV TYPE EQUATIONS

G. V. Demidenko

We consider a class of matrix homogeneous quasielliptic operators in $\mathbb{R}^n$. Theorems on solvability of quasielliptic systems in Sobolev spaces and special scales of weighted Sobolev spaces are formulated. We point out the case when the isomorphism theorem holds for the quasielliptic operators. This theorem is used in the proof of solvability of Sobolev type equations.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ¹

Г. В. Демиденко²

В лекциях речь будет идти о некоторых числовых характеристиках матриц, которые можно использовать при исследованиях асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений, проводя расчеты на компьютере. Эти характеристики обладают замечательными свойствами, которые при численных расчетах обеспечивают достоверность результата.

1. Критерии асимптотической устойчивости

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad t > 0, \quad (1)$$

с постоянной матрицей A размера $n \times n$. Обсудим классический вопрос об асимптотической устойчивости решений этой системы.

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений рассказывается о двух подходах к решению этого вопроса. Один подход основан на спектральном критерии асимптотической устойчивости, второй — на критерии Ляпунова.

Вначале напомним спектральный критерий.

Теорема 1. Нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A расположены в левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$.

Отметим, что если известна принадлежность спектра $\sigma(A)$ матрицы A левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, то в силу конечномерности все собственные значения строго отделены от мнимой оси. Поэтому оценку скорости убывания решений системы (1) при $t \rightarrow \infty$ можно получить, используя следующую теорему Гельфанда — Шилова (см., например, [1, 2]).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракты № № 16.740.11.0127, 14.В37.21.0355; Сибирского отделения Российской академии наук, междисциплинарный проект № 80.

²Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН; Новосибирский государственный университет.

Теорема 2 (Гельфанд — Шилов). Если для всех собственных значений λ_j матрицы A выполнено условие $\operatorname{Re} \lambda_j \leq \sigma$, то справедлива оценка

$$\|e^{tA}\| \leq e^{\sigma t} \left(1 + \frac{2t\|A\|}{1!} + \dots + \frac{(2t\|A\|)^{n-1}}{(n-1)!} \right), \quad t \geq 0.$$

Напомним критерий А. М. Ляпунова (см., например, [2, 3]).

Теорема 3 (Ляпунов). Нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда существует эрмитово положительно определенное решение H матричного уравнения

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0. \quad (2)$$

Если спектр $\sigma(A)$ матрицы A лежит в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, то решение матричного уравнения (2) имеет вид

$$H = \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt. \quad (3)$$

Интересно отметить, что имея этот интеграл и не зная собственных значений матрицы A , можно получить оценки решений системы (1) при $t \rightarrow \infty$, используя следующую теорему М. Г. Крейна [2].

Теорема 4 (Крейн). Пусть $H = H^* > 0$ — решение матричного уравнения Ляпунова (2) при $C = I$. Тогда

$$\|e^{tA}\| \leq e^{-t/(2\|H\|)} \sqrt{2\|A\|\|H\|}, \quad t \geq 0.$$

Подход к исследованию задачи об асимптотической устойчивости решений системы (1), основанный на спектральном критерии, дает полный ответ, если известны собственные значения матрицы A . Однако, если спектр матрицы A не известен, и мы попытаемся его вычислить на компьютере, используя хорошо известные системы (например, Maple, Mathematica, MATLAB, Mathcad), то это может привести к существенным ошибкам. Дело в том, что нахождение собственных значений матриц является, вообще говоря, плохо обусловленной задачей [4].

2. О вычислительных проблемах спектральных задач

Приведем два примера, которые показывают, что неизбежные ошибки при нахождении матричного спектра на компьютере, могут существенно сказаться на результатах.

ПРИМЕР 1 (Уилкинсон [4]). Пусть

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 10 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 10 \\ \varepsilon & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица размера $n \times n$. Если $\varepsilon = 0$, то $\lambda_j = -1$, $j = 1, \dots, n$. При $\varepsilon \neq 0$ собственные значения находятся из уравнения

$$(-1 - \lambda)^n + \varepsilon(-10)^{n-1} = 0.$$

Поэтому при $\varepsilon = (-1)^{n-1}10/8^n$ одно из собственных значений $\lambda_k = 1/4$, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$. Следовательно, на конкретном компьютере при достаточно больших n матрица A_ε будет «совпадать» с A_0 , но в действительности собственные значения обеих матриц существенно различны!

ПРИМЕР 2. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -26191 & -41698\frac{1}{2} & -15508 & -26190\frac{1}{2} & -15720 \\ 27571\frac{1}{2} & 15899\frac{1}{6} & -8354 & 24252\frac{2}{3} & 702\frac{1}{6} \\ 32724 & 44396\frac{1}{3} & 8354 & 36042\frac{5}{6} & 20097\frac{1}{3} \\ 9623 & 36802\frac{5}{6} & 23862 & 12941\frac{1}{3} & 26021\frac{5}{6} \\ -11003 & -11003 & 0 & -11003 & -11003\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{2}$. Но проводя вычисления на компьютере, используя систему Maple 13.0, получаем следующие собственные значения:

$$\begin{bmatrix} 12.1009526865261599 + 0.0\,i \\ 3.73485832635707160 + 11.4914865814321098\,i \\ 3.73485832635707160 - 11.4914865814321098\,i \\ -9.78533466963527588 + 7.09677432824626830\,i \\ -9.78533466963527588 - 7.09677432824626830\,i \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при вычислении на компьютере за счет неизбежного появления погрешностей мы получили, что ни одно из собственных значений матрицы A не лежит в единичном круге, хотя в действительности все они лежат внутри этого круга!

Отметим, что примеры такого типа неоднократно строили студенты ММФ Новосибирского государственного университета при изучении курса «Дополнительные главы линейной алгебры».

Разумеется, рассмотренные примеры не являются контрпримерами к классической теореме о непрерывной зависимости корней многочленов от их коэффициентов и никак не умаляют достоинств замечательной системы Maple 13.0. Причина этих «парадоксов» заключается в том, что модуль непрерывности собственных значений зависит от свойств матрицы, и даже незначительные изменения в ее элементах, а также неизбежные погрешности в процессе вычислений могут существенно сказаться на результатах счета (см. [4–6]). Для сравнения приведем формулировки двух теорем (см. [6]), в которых содержатся оценки возможных отклонений собственных значений матриц A и возмущенной $A + \Delta A$.

Теорема 5. Пусть матрица A подобна диагональной D

$$T^{-1}AT = D,$$

и ΔA — матрица «возмущения». Тогда для любого собственного значения λ_j матрицы A существует собственное значение $\tilde{\lambda}_i$ матрицы $A + \Delta A$ такое, что

$$|\lambda_j - \tilde{\lambda}_i| \leq \mu(T) \|\Delta A\|, \quad \mu(T) = \|T\| \|T^{-1}\|.$$

Теорема 6 (Островский). Пусть матрицы A и B такие, что

$$|a_{k,l}| < 1, \quad |b_{k,l}| < 1,$$

и $\varepsilon > 0$. Тогда для любого собственного значения $\lambda_j \in \sigma(A)$ существует собственное значение $\tilde{\lambda}_i \in \sigma(A + \varepsilon B)$ такое, что

$$|\lambda_j - \tilde{\lambda}_i| \leq 2(n+1)^2 (n^2 \varepsilon)^{\frac{1}{n}}.$$

Из теоремы 5 вытекает, что задача нахождения спектра нормальных матриц относится к *хорошо обусловленным* задачам, но для произвольных матриц это не так.

3. Свойства интеграла Ляпунова

Второй подход к исследованию задачи об асимптотической устойчивости решений системы (1), основанный на критерии Ляпунова, на практике является более предпочтительным. В силу теоремы Ляпунова достаточно проверить разрешимость матричного уравнения (2) в классе эрмитовых положительно определенных матриц. В случае разрешимости матрица H имеет вид (3). Из теоремы Крейна вытекает, что норму $\|H\|$ этого интеграла можно рассматривать, как *числовую характеристику асимптотической устойчивости решений* системы дифференциальных уравнений (1).

Приведем алгоритм вычисления интеграла Ляпунова H при $C = I$ (см. [5, 7]). Для этого запишем его в виде

$$H = \lim_{k \rightarrow \infty} H_k, \quad H_k = \int_0^{2^k} e^{tA^*} e^{tA} dt.$$

Нетрудно проверить справедливость рекуррентной формулы

$$H_k = H_{k-1} + e^{2^{k-1}A^*} H_{k-1} e^{2^{k-1}A}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, после вычисления интеграла H_0 вся последовательность $\{H_k\}$ определяется по этой формуле.

Следует отметить, что из теоремы Крейна вытекает оценка аппроксимации $H \approx H_k$ при $k \gg 1$ (см., например, [8]).

Теорема 7. *Имеет место оценка относительной погрешности*

$$\frac{\|H - H_k\|}{\|H\|} \leq \mu(H) e^{-\frac{2^k}{\|H\|}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из следующей теоремы следует, что задача вычисления интеграла Ляпунова относится к хорошо обусловленным задачам.

Теорема 8. *Пусть спектр $\sigma(A)$ матрицы A лежит в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$ и $H = H^* > 0$ — интеграл Ляпунова. Если матрица ΔA такая, что*

$$\delta = \|H\Delta A + \Delta A^* H\| < 1,$$

то спектр матрицы $A + \Delta A$ также принадлежит $\mathbb{C}_-$, и существует единственное решение $\tilde{H} = \tilde{H}^ > 0$ уравнения Ляпунова*

$$\tilde{H}(A + \Delta A) + (A + \Delta A)^* \tilde{H} = -I,$$

при этом

$$\frac{\|\tilde{H} - H\|}{\|H\|} \leq \frac{\delta}{1 - \delta}.$$

Следствие. Если матрица ΔA такая, что $\|\Delta A\| \leq 1/(4\|H\|)$, то

$$\frac{\|\tilde{H} - H\|}{\|H\|} \leq 4\|H\| \|\Delta A\|.$$

Однако при исследовании задачи об асимптотической устойчивости решений, основанном на критерии Ляпунова, могут возникнуть трудности, связанные с невозможностью нахождения решений матричного уравнения (2) на данном компьютере. Например, если собственные значения матрицы A принадлежат левой полуплоскости, но некоторые из них расположены достаточно близко к мнимой оси, то норма решения H может быть очень большой. По этой причине, в силу ограниченности разрядной сетки, такая матрица может оказаться невычисляемой на данном компьютере. Отметим, что неразрешимость на компьютере матричного уравнения (2) может возникнуть и в других случаях (см. следующий параграф).

4. Интегралы типа Ляпунова

Рассмотрим еще один подход [8, 9] к исследованию асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений. Он основан на использовании весовых пространств интегрируемых функций. Поясним идею подхода [9].

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений (1)

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad y|_{t=0} = v.$$

Предположим, что спектр $\sigma(A)$ матрицы A содержится в замкнутой левой полуплоскости. Тогда для любого вектора $v \in E^n$ решение $y(t) = e^{tA}v$ не может иметь рост при $t \rightarrow \infty$ выше степенного. Следовательно, существуют число $p \in [0, n]$ и константа $c_p > 0$ такие, что

$$\left(\int_0^\infty (1 + t\|A\|)^{-2p} \|y(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \leq c_p \|v\|.$$

Число p зависит от матрицы A , в качестве константы c_p будем брать норму линейного оператора $R : v \rightarrow e^{tA}v$, действующего из E^n в весовое пространство вектор-функций $L_{2,p}(0, \infty)$.

Если $p \geq 0$ является минимальным числом, для которого выполняется оценка

$$\left(\int_0^\infty (1 + t\|A\|)^{-2p} \|y(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \leq c_p \|v\|, \quad (4)$$

то p и $c_p = \|R\|$ являются числовыми характеристиками, определяющими поведение решений системы уравнений (1) при $t \rightarrow \infty$.

ВОПРОС. Как вычислить c_p ?

Перепишем левую часть (4), используя равенство

$$\int_0^\infty (1 + t\|A\|)^{-2p} \|y(t)\|^2 dt = \left\langle \left[\int_0^\infty (1 + t\|A\|)^{-2p} e^{tA^*} e^{tA} dt \right] v, v \right\rangle.$$

Тогда неравенство (4) эквивалентно следующему:

$$\left\langle \left[\int_0^\infty (1 + t\|A\|)^{-2p} e^{tA^*} e^{tA} dt \right] v, v \right\rangle^{1/2} \leq c_p \|v\|.$$

Отсюда

$$c_p = \|R\| = \|H_p\|^{1/2}, \quad H_p = \int_0^\infty (1 + t\|A\|)^{-2p} e^{tA^*} e^{tA} dt.$$

В частности,

$$c_0^2 = \left\| \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} dt \right\|$$

— норма интеграла Ляпунова.

Итак, числа p и $\|H_p\|$ характеризуют поведение решений системы уравнений (1) при $t \rightarrow \infty$. Изучим некоторые их свойства.

Рассмотрим ненулевую матрицу A размера $n \times n$. Введем следующие матричные интегралы:

$$H_p(T) = \int_0^T (1 + t\|A\|)^{-2p} e^{tA^*} e^{tA} dt, \quad T > 0, p \geq 0.$$

Если существует предел $\lim_{T \rightarrow \infty} H_p(T)$, будем обозначать его

$$H_p = \int_0^\infty (1 + t\|A\|)^{-2p} e^{tA^*} e^{tA} dt$$

и называть *интегралом типа Ляпунова*.

Если $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$, то решение уравнения Ляпунова (2) при $C = I$ есть $H = H_0$.

Свойство 1. Если определена матрица H_p , то она является эрмитовой и положительно определенной.

Свойство 2. Если при некотором $p \geq 0$ определена матрица H_p , то при любом $q > p$ определена матрица H_q , при этом $\|H_q\| < \|H_p\|$.

Свойство 3. Пусть при некотором p определена матрица H_p . Тогда спектр матрицы A принадлежит замкнутой левой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$.

Свойство 4. Если $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{C}}_-$, то определена матрица H_n .

Свойство 5. Если определена матрица $H_{1/2}$, то существует интеграл Ляпунова H_0 .

Из этих свойств вытекает теорема.

Теорема 9. Следующие три условия эквивалентны:

- а) $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$;
- б) существует интеграл Ляпунова H_0 ;
- в) существует интеграл типа Ляпунова $H_{1/2}$.

Следовательно, нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда существует интеграл типа Ляпунова $H_{1/2}$.

Таким образом, при решении задачи об асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений (1) можно использовать матричные интегралы типа Ляпунова H_p при $p \leq 1/2$.

Из свойства 2 следует

$$\|H_{1/2}\| < \|H_p\| < \|H_0\|, \quad 0 < p < 1/2.$$

Как показывают примеры, норма интеграла $H_{1/2}$ может быть значительно меньше нормы интеграла Ляпунова H_0 . Поэтому при проведении численных расчетов использование интеграла $H_{1/2}$ вместо H_0 может оказаться более предпочтительным. Проиллюстрируем это на простом примере.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим матрицу

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -0.001 & \alpha \\ 0 & -0.001 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.001$. Следовательно, при любом α матричное уравнение Ляпунова (2) однозначно разрешимо.

В следующей таблице указаны порядки значений норм $\|H_0\|$ и $\|H_{1/2}\|$ при различных значениях параметра α :

α	$\ H_0\ $	$\ H_{1/2}\ $
10^2	10^{13}	10^8
10^3	10^{15}	10^9
10^4	10^{17}	10^{10}
10^5	10^{19}	10^{11}
10^6	10^{21}	10^{12}

Из таблицы следует, что увеличение параметра α на порядок влечет увеличение нормы $\|H_0\|$ на 2 порядка, в то время как норма $\|H_{1/2}\|$ увеличивается лишь на 1 порядок. Итак, даже для простейших матриц возможно неравенство $\|H_{1/2}\| \ll \|H_0\|$.

Следовательно, в силу ограниченности разрядной сетки возможна такая ситуация, что матричный интеграл Ляпунова H_0 на данном компьютере вычислить невозможно, а матрица $H_{1/2}$ вычисляема, и именно по ней можно сделать вывод об асимптотической устойчивости решений системы дифференциальных уравнений (1).

Можно показать, что задача вычисления интеграла $H_{1/2}$ относится к хорошо обусловленным задачам. Алгоритм вычисления матрицы $H_{1/2}$ содержится в работе [10].

Литература

1. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс.—М.: Наука, 1965.—328 с.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1970.—536 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М.: Наука, 1988.—552 с.
4. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений.—М.: Наука, 1970.—564 с.
5. Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры.—Новосибирск: Науч. книга, 1997.—390 с.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.—М.: Мир, 1989.—655 с.
7. Bulgak A., Bulgak H. Linear Algebra.—Konya: Selcuk University, 2001.
8. Демиденко Г. В. Матричные уравнения.—Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2009.—203 с.
9. Демиденко Г. В. Об одном классе спектральных характеристик матриц // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 5.—С. 1032–1051.
10. Матвеева И. И., Новожилова Э. Ю. О принадлежности спектра матриц левой полуплоскости // Вычисл. технологии.—2000.—Т. 5, № 2.—С. 71–81.

NUMERICAL CHARACTERISTICS IN STABILITY PROBLEMS

G. V. Demidenko

We consider numerical characteristics that can be used for numerical study of asymptotic stability of solutions to systems of ordinary differential equations with constant coefficients. Problems of computing these characteristics are well-posed. Therefore, taking into account arithmetic errors, we can study asymptotic stability.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ И ИСТОРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Е. С. Каменецкий¹

В настоящее время стремление понять и, по возможности, прогнозировать динамические процессы в социальных системах привело к появлению многочисленных качественных и количественных моделей этих процессов. Количественные модели используют математическое описание процессов и либо представляют собой агентно-ориентированные имитационные модели, либо динамические модели, связанные с решением систем дифференциальных уравнений. В настоящих лекциях мы рассмотрим несколько типичных моделей социальных и исторических процессов.

Одна из таких моделей была предложена и исследована А. А. Лаптевым [1]. В ней рассматривалось развитие замкнутого общества за время порядка нескольких сотен лет, а в качестве переменных принимались политическая дифференциация P , состояние экономики E , определяющее степень адаптации общества к окружающей среде, уровень социетальности K , характеризующий социальный контроль за членами общества, обеспечивающий выполнение ими принятых норм, и степень поддержания институционализированных этнических образцов D , которые конкурируют с социетальностью в сфере поддержания жизнеспособности общества, но являются более архаичными и менее приспособляющимися к изменениям условий жизни общества. Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\frac{dG}{dt} = k_{GG}(e^{\delta P - \delta_1} - 1)G + (l_GE - k_{GE}E^2) - k_{GK}(K + D)G,$$

$$\frac{dE}{dt} = k_{EE}(e^{\delta P - \delta_1} - 1)E + (l_EG - k_{EG}G^2) - k_{EK}(K + D)E,$$

$$\frac{dK}{dt} = (k_{KG}G^2 + k_{KE}E^2)K - (l_KK - k_{KK}K^2)P - k_{KD}D^2,$$

$$\frac{dD}{dt} = k_{DG}G^2D - l_DDP - k_{DK}K^2,$$

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

где P — пассионарность [2], которая является заданной функцией времени, а k, l, δ с различными индексами — константы.

Выбирая константы, можно моделировать изменение состояния как древних, так и современных обществ за длительные промежутки времени порядка сотен лет [3].

Наиболее сложным вопросом при использовании такой модели является подбор констант и ее верификация. Количественная оценка каждого члена в уравнениях и тех величин, которые получаются в результате решения, по данным исторических и современных источников, либо невозможна, либо крайне затруднительна.

Используя аналогичный подход, можно построить модель изменения социальной напряженности P и социетальности K общества за небольшие промежутки времени порядка нескольких лет под влиянием изменения состояния экономики, политического единства и нормативных установок, выработавшихся в соответствии с культурными нормами. Изменения экономического и политического состояния общества задаются в качестве внешних параметров либо по имеющимся в литературе данным, либо прогнозируются. Напряженность в этой модели играет роль подобную пассионарности. Уравнения в этом случае имеют вид [4]

$$\frac{dP}{dt} = (\mu(I_e + \mu_1 \dot{E} - P) + \alpha K(P_D - P))(1 - P^2),$$

$$\frac{dK}{dt} = (k_S(S^2 + E^2) - k_K e^{-\gamma K + \gamma_1} K P^2 - k_D D^2) K^2 (1 - K^2).$$

Здесь I_e — информация, источник которой находится вне системы, P_D — нормативный уровень напряженности для данного общества, а $\mu, \mu_1, \alpha, \gamma, \gamma_1, k_S, k_K$ и k_D — константы. Состояние экономики E оценивалось по уровню среднедушевого потребления, а уровень политического единства общества S — по степени поддержки правящей партии.

В этой модели меньше констант и изменение задаваемых функций можно оценить по имеющимся источникам.

Для верификации модели было сделано предположение о том, что индикатором уровня социальной напряженности в обществе является число самоубийств за определенный промежуток времени [4].

Рассмотренные модели предполагают однородность общества, которая во многих случаях отсутствует. Общество делится на слои по социальному положению, на национальные и конфессиональные

группы с различным доступом к благам и информации и различным восприятием ситуаций.

Система уравнений, описывающая изменение напряженности общества, состоящего из элиты и трудящихся двух национальностей, и учитывающая влияние изменения экономической ситуации, воздействие информации и взаимодействия групп между собой имеет следующий вид [5]:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1}{dt} &= -k_1 P_1 + W_1 + \left(0, 1 \exp \left(- (P_1/\rho)^2 \right) + \right. \\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_1^2 \exp(-P_1^2/(2\rho^2))}{\rho^3} \Big) \times \left(b_1 \dot{E} + d_1 I_B + c_{12}(P_2 - P_1)(1 + P_2)/2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{13}(P_3 - P_1)(2 - |P_3 - P_1|)/2 + c_{14}(P_4 - P_1)(1 + P_4)/2 \right), \\
\frac{dP_2}{dt} &= -k_2 P_2 + W_2 + \left(0, 1 \exp \left(- (P_2/\rho)^2 \right) + \right. \\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_2^2 \exp(-P_2^2/(2\rho^2))}{\rho^3} \Big) \times \left(b_2 \dot{E} + d_2 I_B + c_{21}(P_1 - P_2)(1 + P_1)/2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{23}(P_3 - P_2)(1 + P_3)/2 + c_{24}(P_4 - P_2)(2 - |P_4 - P_2|)/2 \right), \\
\frac{dP_3}{dt} &= -k_3 P_3 + \left(0, 1 \exp \left(- (P_3/\rho)^2 \right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_3^2 \exp(-P_3^2/(2\rho^2))}{\rho^3} \right) \times \\
&\quad \times \left(b_3 \dot{E} + d_3 I_B + c_{31}(P_1 - P_3)(2 - |P_1 - P_3|)/2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{32}(P_2 - P_3)(1 + P_2)/2 + c_{34}(P_4 - P_3)(1 + P_4)/2 \right), \\
\frac{dP_4}{dt} &= -k_4 P_4 + \left(0, 1 \exp \left(- (P_4/\rho)^2 \right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_4^2 \exp(-P_4^2/(2\rho^2))}{\rho^3} \right) \times \\
&\quad \times \left(b_4 \dot{E} + d_4 I_B + c_{41}(P_1 - P_4)(1 + P_1)/2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{42}(P_2 - P_4)(2 - |P_2 - P_4|)/2 + c_{43}(P_3 - P_4)(1 + P_3)/2 \right).
\end{aligned}$$

Напряженность в этих уравнениях меняется от минус единицы до плюс единицы, причем отрицательные значения напряженности соответствуют недовольству существующим состоянием общества и стремлению его изменить, а положительные — стремлению поддерживать существующий порядок.

Первый член в правой части всех уравнений описывает уменьшение напряженности со временем при отсутствии внешних воздействий. Для изменения напряженности элитных групп вводятся константы W_i , величина которых характеризует нормативный уровень конструктивной или деструктивной напряженности, внутренне присущий данной группе в рассматриваемый период времени.

Множитель в скобках перед вторым слагаемым учитывает связь между уровнем напряженности социального слоя и восприятием внешнего информационного воздействия. При малых и больших по модулю значениях напряженности внешние воздействия почти не воспринимаются. В условиях высокой напряженности (когда ситуация осознается как серьезный конфликт) воспринимается только та информация, которая согласуется с имеющимися стереотипами, вся остальная игнорируется. В периоды относительно спокойной политической жизни интерес общественности к социальным и политическим проблемам снижается. Возможна также апатия общества: потеря интереса к неприятным социальным проблемам. Поскольку нулевого восприятия внешней информации не может быть, выражение в скобках содержит быстро уменьшающееся с ростом напряженности слагаемое, определяющее восприятие информации при нулевом уровне напряженности.

Само второе слагаемое учитывает влияние изменения экономической ситуации, информационного воздействия и содержит по три члена, учитывающих воздействие других выделенных социальных групп на данную. При этом, если взаимодействуют две социальные группы одного этноса, предполагается, что воздействие уменьшается с увеличением разности напряженностей групп, а для разных этносов восприятие воздействия тем слабее, чем интенсивнее деструктивная напряженность воздействующей группы, так как предполагается, что каждая группа стремится разрушить существующую систему для того, чтобы получить для себя дополнительные блага за счет другого этноса.

Модель позволяет анализировать неравномерность распределения благ между элитой и трудящимися и различными этническими группами, а также неодинаковость восприятия информации в зависимости от социального статуса и этнической принадлежности.

И эта модель содержит много констант, значение которых трудно оценить, что затрудняет ее верификацию.

Другим распространенным подходом к математическому модели-

рованию социальных процессов является разработка агентно-ориентированных имитационных моделей. В этих моделях рассматриваются агенты, т. е. отдельные представители общества, и устанавливаются определенные правила изменения состояния этих агентов в зависимости от ситуации. Типичным примером такого подхода является модель этнической мобилизации в обществе, состоящем из двух этнических групп [6, 7]. Оценивается уровень этнической мобилизации каждого члена общества характеризующий его готовность к активным действиям в пользу своего этноса. Этот уровень изменяется в соответствии с выражением

$$m^i(t+1) = m^i(t) + (m_{app}^i + m_{socnet}^i + m_{cool}^i) \Delta t,$$

где m_{app}^i — воздействие СМИ и других источников информации, не ориентированных непосредственно на агента. Такой источник информации может быть связан со своей или чужой этнической группой, а также быть нейтральным.

В первом случае это слагаемое имеет вид

$$m_{app}^i = k_{app} * k_{same} * gr^i * m^i(t),$$

где k с индексами — постоянные коэффициенты, а gr^i — уровень неудовлетворенности данного агента своим состоянием.

Во втором случае это слагаемое выглядит аналогично, но вместо коэффициента k_{same} используется коэффициент k_{opp} .

В третьем случае воздействие информации уменьшается с ростом уровня этнической мобилизации

$$m_{app}^i = k_{app} * k_{neutpal} * gr^i * (1 - m^i(t)).$$

Вторая составляющая воздействия на агента m_{socnet}^i учитывает воздействие социальной сети, в которую включен агент. Она определяется выражением

$$m_{socnet}^i = k_{socnet} * \frac{\text{imp}_{same} - \text{imp}_{opp}}{netsize},$$

где $netsize$ — константа, определяющая число случайно выбираемых агентов, от которых получает информацию данный агент.

Восприятие информации от членов своей и другой этнических групп различно и определяется выражениями

$$\text{imp}_{same} = \sum_{j=1}^{N_{same}} (m^j(t) - m^i(t)) [\min(m^j(t), m^i(t)) + \min(1 - m^j(t), 1 - m^i(t))]$$

и

$$\text{imp}_{opp} = \sum_{j=1}^{N_{opp}} (m^j(t) - m^i(t)) \min(1 - m^j(t), 1 - m^i(t))$$

соответственно.

Снижение уровня этнической мобилизации агента с течением времени при отсутствии внешних воздействий (его охлаждение) описывается как

$$m_{cool}^i = -k_{cool} * (\exp(m^i(t) - 1) - \exp(-1)),$$

где k_{cool} — константа.

При изменении значений констант модель показывает как выход системы в стационарный режим с постоянными значениями уровней мобилизации этнических групп, так и периодические режимы с различной частотой и амплитудой колебаний. И в этой модели оценить реальные значения констант крайне сложно.

При исследовании социальных процессов часто пытаются применить модели, возникшие в других разделах науки. По аналогии с распространением паразитарных заболеваний была создана модель развития социального стресса [8]. В ней выделяются три фазы развития стресса: начальная, генерализованная и восстановительная. Общее число индивидов, находящихся в каждой из этих фаз (N_1 , N_2 и N_3 соответственно), полагается постоянным. Переход индивидов из одной фазы в другую описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\alpha V N_1 N_2 - p V N_1 + q N_3, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \alpha V N_1 N_2 + p V N_1 - \beta N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} &= \beta N_2 - q N_3, \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} = (cN_1 - r - m_0)V.$$

Здесь V — степень эмоциональной выраженности сообщения, $\alpha V N_1 N_2$ — интенсивность распространения образа в передаче от носителей восприимчивым, а $p V N_1$ — от теле- радио-комментаторов восприимчивым, β — величина обратная характерной длительности пребывания в фазе генерализованного стресса, q — величина обратная характерной длительности сохранения иммунитета к повторному стрессу, cN_1 и r — слагаемые, отражающие положительную и отрицательную обратную связь.

Определение значений констант и верификация модели и в этом случае представляет достаточно сложную задачу.

В настоящее время появляются также несложные модели аграрных и раннекапиталистических обществ. Одна из наиболее простых моделей такого типа рассматривает экономику примитивного общества как изменение богатства военной элиты X и каждого из крестьян Y [10].

$$\frac{dX}{dt} = aXYm - A_x X - (c_1/Y + c_2Y),$$

$$\frac{dY}{dt} = -aXY - A_y Y + \gamma R.$$

В правой части первого уравнения содержатся члены описывающие увеличение богатства элиты за счет налогов, собираемых с крестьян, где m — число крестьян, расходы элиты на свои нужды и расходы на поддержание безопасности — подавление бунтов и защиту от внешних врагов. Правая часть второго уравнения описывает налоги, которые отдает крестьянин, его затраты на поддержание жизни и увеличение его богатств за счет обработки земли.

Модель позволяет оценить результаты различных экономических стратегий элиты.

В заключение отметим, что основная ценность моделей рассмотренного типа заключается в прояснении причин имеющих место событий, а также в постановке вопросов перед традиционными социологами и историками: почему в данном конкретном случае реализовались определенные значения коэффициентов модели, характеризующие степень влияния различных факторов на протекающие в обществе процессы?

Литература

1. Лаптев А. А. Математическое моделирование глобальных социальных процессов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Омск, 2002.—11 с.
2. Гумилев Л. Н. Этногенез и биосфера Земли.—М.: Танаис ДИ-ДИК, 1994.—554 с.
3. Гуц А. К., Коробицин В. В., Лаптев А. А., Паутова Л. А., Фролова Ю. В. Социальные системы. Формализация и компьютерное моделирование.—Омск: Омский гос. ун-т, 2000.—160 с.
4. Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х. Краткосрочный прогноз социодинамики общества // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНИЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 5–11.
5. Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х., Челпанова Д. Д. Математическое моделирование напряженности общества в РСО-А и ее связи с протестной активностью населения // Системный кризис на Северном Кавказе и государственная стратегия развития макрорегиона.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮНЦ РАН, 2011.—С. 12–16.
6. Srbljinovic A., Penzar D., Rodik P., Karlov K. An agent based model of ethnic mobilisation // J. Artif. Soc. Social Simul.—2003.—Vol. 6, № 1.—P. 1–14.
7. Penzar D., Srbljinovic A. Dynamic modeling of ethnic conflicts // Int. Trans. Oper. Res.—2004.—Vol. 11.—P. 63–76.
8. Колесин И. Д. Математические модели социальной самоорганизации: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.—СПб., 2012.—32 с.
9. Турчин И. В. Историческая динамика.—М.: Изд-во ЛКИ, 2010.—368 с.

MATHEMATICAL MODELING OF SOCIAL AND HISTORICAL PROCESSES

E. S. Kamenetskii

This is a synopsis of the lectures given at the Conference and comprises a brief description of mathematical models in sociology and history.

1. Introduction. A real Banach lattice X is said to be *injective* if, for every Banach lattice Y , every closed vector sublattice $Y_0 \subset Y$, and every positive linear operator $T_0 : Y_0 \rightarrow X$ there exists a positive linear extension $T : Y \rightarrow X$ with $\|T_0\| = \|T\|$. Equivalently, X is an injective Banach lattice if, whenever X is lattice isometrically imbedded into a Banach lattice Y , there exists a positive contractive projection from Y onto X . Thus, the injective Banach lattices are the injective objects in the category of Banach lattices and positive contractions. Arendt [4, Theorem 2.2] proved that the injective objects are the same if the regular operators with contractive modulus are taken as morphisms.

Lotz [21] was the first to introduce this concept. Cartwright [6, Chapter 2] was able to characterize injective Banach lattices in terms of some order intersection property. Haydon [12] discovered that a general injective Banach lattice has a mixed *AM-AL*-structure. In [16, 18] a Boolean-valued analysis approach to injective Banach lattices was developed.

The aim of this work is to survey recent results on injective Banach lattices, outline a general approach, and pose some open problems. We deal only with the isometric theory, i. e. with 1-injective Banach lattices. For λ -injective Banach lattices ($\lambda > 1$) see [19, 22]. For the theory of Banach lattices and positive operators we refer to the books [1, 3, 23].

We denote by $\mathbb{P}(X)$ the Boolean algebra of all band projections in a vector lattice X . Throughout the sequel $\mathbb{B}$ is a complete Boolean algebra with unit $\mathbb{1}$ and zero $\mathbb{0}$, while $\Lambda := \Lambda(\mathbb{B})$ is a Dedekind complete *AM*-space with unit such that $\mathbb{B} = \mathbb{P}(\Lambda)$. A *partition of unity* in $\mathbb{B}$ is a family $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ in $\mathbb{B}$ such that $\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi = \mathbb{1}$ and $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbb{0}$ whenever $\xi \neq \eta$.

¹This is a synopsis of the lectures given at the Conference of Young Scientists (Russia, Vladikavkaz, July 16–21, 2012).

²The study was supported by The Ministry of education and science of Russian Federation, project 8210; by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, project 12-01-00623-a.

³Russia, Vladikavkaz, Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Science Center of the Russian Academy of Sciences.

2. Classes of Banach lattices. A Banach lattice X is said to be an *AL-space* (*AM-space*) whenever $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ (resp. $\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|$) for all positive $x, y \in X$. A (*strong*) *unit* of an *AM-space* is a vector $\mathbb{1}$ such that the unit ball of X is the order interval $[-\mathbb{1}, \mathbb{1}] := \{x \in X : -\mathbb{1} \leq x \leq \mathbb{1}\}$.

Theorem 1 (Lotz [21]). *Every Dedekind complete AM-space with unit is an injective Banach lattice.*

Theorem 2 (Lotz [21]). *Every AL-space is an injective Banach lattice.*

A Banach lattice X is said to have: *property (P)* if there exists a positive contractive projection in X'' onto X [23, p. 47]; *Levi property* if $0 \leq x_\alpha \uparrow$ and $\|x_\alpha\| \leq 1$ imply that $\sup_\alpha x_\alpha$ exists in X [1, Definition 7 (2)]; *Fatou property* if $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ implies $\|x_\alpha\| \uparrow \|x\|$ [1, Definition 7 (3)]. A Banach lattice with the Levi (Fatou) property is also called *order semicontinuous* (resp. *monotonically complete*) [23].

A Dedekind complete Banach lattice X with a separating order continuous dual has property (P) if and only if it has the Levi and Fatou properties [24, Propositions 7.6 and 7.10].

3. Splitting property and M-projections. A Banach lattice X has the *splitting property* (or the *Cartwright property*) if, given $x_1, x_2, y \in X_+$ with $\|x_1\| \leq 1$, $\|x_2\| \leq 1$, and $\|x_1 + x_2 + y\| \leq 2$, there exist $y_1, y_2 \in X_+$ such that $y_1 + y_2 = y$, $\|x_1 + y_1\| \leq 1$, and $\|x_2 + y_2\| \leq 1$.

Theorem 3 (Cartwright [6]). *A Banach lattice has the splitting property if and only if its second dual is injective.*

Theorem 4 (Haydon [12]). *A Banach lattice is injective if and only if it has the Cartwright, Fatou, and Levi properties.*

A band projection π in a Banach lattice X is called an *M-projection* if $\|x\| = \max\{\|\pi x\|, \|\pi^\perp x\|\}$ for all $x \in X$, where $\pi^\perp := I_X - \pi$. The collection of all *M-projections* forms a subalgebra $\mathbb{M}(X)$ of the Boolean algebra $\mathbb{P}(X)$. The *f*-subalgebra of the center $\mathcal{Z}(X)$ generated by $\mathbb{M}(X)$ is called the *M-center* of X and denoted by $\mathcal{Z}_m(X)$.

Observe that $\mathbb{M}(X)$ is an order closed subalgebra of $\mathbb{P}(X)$ whenever X has the Fatou and Levi properties. In this event the relations $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$ and $\Lambda(\mathbb{B}) \simeq \mathcal{Z}_m(X)$ are equivalent.

Theorem 5 (Haydon [12]). *An injective Banach lattice X is an AL-space if and only if there is no M-projection in it other than zero and identity, i. e. $\mathbb{M}(X) = \{0, I_X\}$.*

4. Maharam operators. A positive operator $T : X \rightarrow \Lambda$ is said to have the *Levi property* if $T(X)^{\perp\perp} = \Lambda$ and $\sup x_\alpha$ exists in X for every increasing net $(x_\alpha) \subset X_+$, provided that the net (Tx_α) is order bounded in Λ . A *Maharam operator* is an order continuous order intervals preserving ($\equiv T([0, x]) = [0, Tx]$ for all $x \in X_+$) operator, see [1, § 3.4]. Say that T is *strictly positive* if $x > 0$ implies $T(x) > 0$.

Suppose that $\Phi : X \rightarrow \Lambda$ is strictly positive and put $\lfloor x \rfloor := \Phi(|x|)$ ($x \in X$). Then $(X, \lfloor \cdot \rfloor)$ is a lattice-normed space. The *bo*-completion of X , denoted by $L^1(\Phi)$, is a Banach–Kantorovich lattice, see [1, Theorems 2.2.8 and 2.2.11]. It is easy to see that $L^1(\Phi) = X$ if and only if Φ is a strictly positive Maharam operator with the Levi property.

Assume that X is a vector lattice endowed with an Λ -valued norm $x \mapsto \lfloor x \rfloor \in \Lambda$ ($x \in X$) which is monotone in the sense that $x \leq y$ implies $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. Then we are able to introduce a *mixed norm* in X by

$$\| \| x \| \| := \| \lfloor x \rfloor \| \quad (x \in X).$$

In this event $(X, \| \| \cdot \| \|)$ is called a *normed lattice with mixed norm* and a *Banach lattice with mixed norm* if, in addition, it is norm complete. It can be easily seen that $(X, \| \| \cdot \| \|)$ is a Banach lattice if and only if $(X, \lfloor \cdot \rfloor)$ is *br*-complete, i. e. norm complete with respect to uniform convergence in Λ , [1, Theorem 7.1.2].

5. Main representation result. Now we are able to formulate a general representation result for injective Banach lattices. Let X and Y be Banach lattices and $\mathbb{M}(X) \simeq \mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(Y)$. We identify $\mathbb{B}$ with the corresponding subsets in $\mathcal{L}(X)$ and $\mathcal{L}(Y)$. A lattice isometry $T : X \rightarrow Y$ is called a *lattice $\mathbb{B}$ -isometry*, if $\pi \circ T = T \circ \pi$ for all $\pi \in \mathbb{B}$.

Theorem 6. *If Φ is a strictly positive Maharam operator with the Levi property taking values in a Dedekind complete AM-space Λ with unit and $\| \| x \| \| = \| \Phi(|x|) \|_\infty$ ($x \in L^1(\Phi)$), then $(L^1(\Phi), \| \| \cdot \| \|)$ is an injective Banach lattice and there is a Boolean isomorphism φ from $\mathbb{P}(\Lambda)$ onto $\mathbb{M}(L^1(\Phi))$ with $\pi \circ \Phi = \Phi \circ \varphi(\pi)$ ($\pi \in \mathbb{B}$).*

Conversely, any injective Banach lattice X is lattice $\mathbb{B}$ -isometric to $(L^1(\Phi), \| \| \cdot \| \|)$ for some strictly positive Maharam operator Φ with the Levi property taking values in a Dedekind complete AM-space Λ with unit, where $\mathbb{B} = \mathbb{P}(\Lambda) \simeq \mathbb{M}(X)$.

Consider an injective Banach lattice represented as $L^1(\Phi)$. Denote by $L^0(\Phi)$ the universal completion of $L^1(\Phi)$ with a fixed order unit $\mathbb{1}$. Then there is a unique structure of a semiprime f -algebra on $L^0(\Phi)$ with

ring unit $\mathbb{1}$. Consider also the set $X' \subset L^0(\Phi)$ defined as

$$X' := \{x' \in L^0(\Phi) : x' \cdot X \subset L^1(\Phi)\}.$$

A downward directed set $A \subset X$ is said to be $\mathbb{B}$ -convergent to zero if for every $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ there exists a partition of unity $(\pi_a)_{a \in A}$ in $\mathbb{B}$ such that $\|\pi_a a\| \leq \varepsilon$ for all $a \in A$. Say that the norm in X is order $\mathbb{B}$ -continuous (or X is order $\mathbb{B}$ -continuous) if every downward directed set $A \subset X$ with $\inf A = 0$ is $\mathbb{B}$ -convergent to zero.

Theorem 7. *Let X be an order $\mathbb{B}$ -continuous $\mathbb{B}$ -cyclic Banach lattice. In the universal completion X^u of X there is an order dense ideal which is an injective Banach lattice represented as $L^1(\Phi)$ for some order continuous Maharam operator with the Levi property. Moreover, the map assigning the operator $S_{x'} \in \mathcal{L}_\Phi(X, \Lambda)$ to an element $x' \in X'$ by*

$$S_{x'}(x) = \Phi(x \cdot x') \quad (x \in X).$$

is an lattice $\mathbb{B}$ -isometry from $X^\#$ onto X' .

Corollary 8. *Let X be an injective Banach lattice. Let E and Λ be Dedekind complete AM-spaces with unit such that $\mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}(X)$ and $\mathbb{P}(\Lambda) \simeq \mathbb{M}(X)$. Then X is lattice isometric to $\mathcal{L}_\mathbb{B}^\times(E, \Lambda)$.*

Remak 9. Corollary 8 is essentially the Haydon's main representation theorem in [12, Theorem 5C]. Haydon's another representation result [12, Theorem 6H] tells us that an injective Banach lattice can be represented as $L^1(\mathbf{m})$ for some Λ -valued modular Maharam measure $\mathbf{m}$. This result is immediate from our representation result (Theorem 7), since the mapping $\Phi : L^1(\mathbf{m}) \rightarrow \Lambda$ defined by $\Phi : f \mapsto \int f d\mathbf{m}$ is a Maharam operator with the Levi property and $L^1(\mathbf{m}) = L^1(\Phi)$, see [1, Theorem 6.1.10].

Now, we shall handle the problem how to produce new injective Banach lattice from the old ones using direct sums and tensor products.

6. Sums. Denote by $\text{Prt}_\sigma := \text{Prt}_\sigma(\mathbb{B})$ and $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ the set of all countable partitions of unity in $\mathbb{B}$ and the collection of all finite subsets of X , respectively. The details concerning the following result see in [16].

Theorem 10. *Let $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ be a family of injective Banach lattices. Assume that there is a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ and a family $(b_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $\mathbb{B}$ with $\bigvee_{\alpha \in A} b_\alpha = \mathbb{1}$ and $\mathbb{M}(X_\alpha) \simeq \mathbb{B}_\alpha = [\mathbb{O}, b_\alpha]$ for all $\alpha \in A$. Then there exists a unique up to a lattice $\mathbb{B}$ -isometry injective Banach lattice X such that the following hold:*

- (1) $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$;
- (2) For any $\alpha \in A$ there is a lattice $\mathbb{B}_\alpha$ -isometry $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$;
- (3) $(\iota_\alpha(X_\alpha))_{\alpha \in A}$ is a family of pair-wise disjoint bands in X ;
- (4) $\mathbb{B}\langle \bigoplus_{\alpha \in A} \iota_\alpha(X_\alpha) \rangle$ is norm dense in X ;
- (5) For any $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$ we have

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{ins}} = \sup_{\theta \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(A)} \inf_{(\pi_k) \in \text{Prt}_\sigma} \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha \in \theta} \|\pi_k x_\alpha\|.$$

The Banach lattice $(X, \|\cdot\|_{\text{ins}})$ is called the *injective sum* of injective Banach lattices. Denote $\sum_{\alpha \in A}^{\text{ins}} X_\alpha := X$.

7. Tensor products. In [8] Fremlin introduced for every two Archimedean vector lattices X and Y a new Archimedean vector lattice $X \bar{\otimes} Y$. The *Fremlin projective tensor product* $X \hat{\otimes}_{|\pi|} Y$ of Banach lattices X and Y is the completion of $X \bar{\otimes} Y$ with respect to the norm $\|\cdot\|_{|\pi|}$, [9]. Details concerning the following result can be found in [17].

Theorem 11. *Let X_1 and X_2 be arbitrary injective Banach lattices. Then there exist a unique up to isomorphism injective Banach lattice $X_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} X_2$ and a lattice bimorphism $\bar{\otimes} : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} X_2$ such that the following hold:*

- (1) $\bar{\otimes}$ induces an embedding of the Fremlin tensor product $X_1 \bar{\otimes} X_2$ into $X_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} X_2$;
- (2) there is a Boolean isomorphism j from $\mathbb{M}(X_1) \hat{\otimes} \mathbb{M}(X_2)$ onto $\mathbb{M}(X_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} X_2)$ with $j(\pi_1 \otimes \pi_2)(x_1 \bar{\otimes} x_2) = \pi_1 x_1 \bar{\otimes} \pi_2 x_2$ for all $\pi_i \in \mathbb{M}(X_i)$ and $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$);
- (3) $\|x_1 \otimes x_2\|_{\varepsilon|\pi|} = \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ for all $x_1 \in X_1$ and $x_2 \in X_2$;
- (4) $X_1 \bar{\otimes} X_2$ is $\mathbb{B}$ -dense in $X_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} X_2$ with $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} X_2)$;
- (5) $X_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} X_2 = X_0^{\uparrow}$, where X_0 comprises all finite sums $\sum_{k=1}^n \pi_k \phi(u_k)$ with $\pi_k \in \mathbb{M}(X_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} X_2)$ and $u_k \in X_1 \bar{\otimes} X_2$ ($k = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$).
- (6) For any $x \in X_1 \bar{\otimes} X_2$ we have the representation

$$\|x\|_{\varepsilon|\pi|} = \inf \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \|\pi_k u_{i,k}\| \cdot \|\rho_k v_{i,k}\| \right\}$$

where infimum is taken over all $(\pi_k) \in \text{Prt}_\sigma(\mathbb{B}_1)$, $(\rho_k) \in \text{Prt}_\sigma(\mathbb{B}_2)$, and $0 \leq u_{i,k} \in X_1$, $0 \leq v_{i,k} \in X_2$ ($i \leq n$) with $|x| \leq \sum_{i=1}^n u_{i,k} \otimes v_{i,k}$ ($k \in \mathbb{N}$).

8. Building blocks. For every cardinal γ , there exists a canonical measure on $[0, 1]^\gamma$ that is the γ th power of Lebesgue's measure on $[0, 1]$. The associated measure algebra will be denoted by $\mathbb{I}^\gamma$.

The famous Maharam theorem tells us that the measure algebras are 'building blocks' for every Maharam algebra ($\equiv$ measure algebra of the measure space with the direct sum property). More precisely, every atomless nonzero (finite) Maharam algebra is isomorphic to a direct sum of concrete measure algebras $\mathbb{I}^\gamma$, and it is uniquely determined by a family of cardinals, see [10, 321A] and [25, 17.5.3]. Transferring the structure theory of Maharam algebras, yields the following important representation theorem for AL -spaces, see [25, 26.4.7].

Theorem 12. *Let X be an AL -space. Then there exists a unique well-ordered family $(\mathfrak{m}_\sigma)_{0 \leq \sigma < \tau}$ of cardinals with τ an ordinal such that $\{\sigma : \mathfrak{m}_\sigma \neq 0\}$ is cofinal in τ , each $\mathfrak{m}_\sigma$ is either equal to 0, or 1, or is uncountable, and*

$$X \simeq l_1(\gamma) \oplus \sum_{0 \leq \sigma < \tau}^{\oplus} \mathfrak{m}_\sigma L_1([0, 1]^{\omega_\sigma}),$$

where $\simeq$ denotes lattice isometry, $\oplus$ and $\sum^{\oplus}$ denote l_1 -joins, and $\mathfrak{m}E$ stands for the l_1 -join of $\mathfrak{m}$ copies of E .

Let M_γ be a Dedekind complete AM -space with unit and L_γ be an AL -space. Then by Theorems 1, 2, and 11 $M_\gamma \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} L_\gamma$ is an injective Banach lattice. In view of Theorem 10 we have that $\sum_{\gamma \in \Gamma}^{\text{ins}} M_\gamma \hat{\otimes}_{\varepsilon|\pi|} L_\gamma$ is also an injective Banach lattice. Actually, every injective Banach lattice have a similar representation, so that AM - and AL -spaces are the building blocks for any injective Banach lattices. But there is no guarantee that such representation is unique. To overcome this difficulty one can choose M_γ in such a way that $\mathbb{P}(M_\gamma)$ is γ -stable (see § 9 below). The whole picture is rather complicated. Therefore, below in Theorem 13, we restrict ourselves to the simple case of $\mathbb{B}$ -atomic Banach lattice.

9. Cardinals over Boolean algebras. Take some cardinal λ . Given $b \in \mathbb{B}$ and an ordinal β , denote by $b(\beta)$ the set of all partitions of b of the form $(b_\alpha)_{\alpha \in \beta}$. Define the $[\mathbb{O}, b]$ -valued function d on $b(\beta)$ by

$$d(u, v) := \left(\bigvee_{\alpha \in \beta} u_\alpha \wedge v_\alpha \right)^* \quad (u = (u_\alpha), v = (v_\alpha) \in b(\beta)).$$

Clearly, the function d is a Boolean valued metric, see [1, 7.4.11].

Given an ordinal γ , write $b(\beta) \simeq b(\gamma)$ if there is a bijection ι between $b(\beta)$ and $b(\gamma)$ which preserves the Boolean metric; i. e. $d(\iota(u), \iota(v)) = d(u, v)$. Say that the Boolean algebra $\mathbb{B}$ is λ -stable provided that $\lambda \leq \alpha$ for all nonzero $b \in B$ and each ordinal α with $b(\lambda) \simeq b(\alpha)$. A nonzero element $b \in \mathbb{B}$ is λ -stable by definition, whenever $[\mathbb{O}, b]$ is a λ -stable Boolean algebra.

10. A classification result. A positive element x of a $\mathbb{B}$ -cyclic Banach lattice X is said to be $\mathbb{B}$ -indecomposable or a $\mathbb{B}$ -atom if for any pair of disjoint elements $x, y \in X_+$ with $y+z \leq x$ there exists a projection $\pi \in \mathbb{B}$ such that $\pi y = 0$ and $\pi^\perp z = 0$, while X is called $\mathbb{B}$ -atomic if the only element of X disjoint from every $\mathbb{B}$ -atom is the zero element.

Theorem 13. *Let X be a $\mathbb{B}$ -atomic injective Banach lattice with $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$. Then there is a family of Dedekind complete AM -spaces with unit $(M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, with Γ a set of cardinals, such that $\mathbb{B}_\gamma := \mathbb{P}(M_\gamma)$ is γ -stable for all $\gamma \in \Gamma$, $\mathbb{B} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{B}_\gamma$, and the following lattice $\mathbb{B}$ -isometry holds:*

$$X \simeq_{\mathbb{B}} \sum_{\gamma \in \Gamma}^{\text{ins}} M_\gamma \hat{\oplus}_{\varepsilon|\pi|} l_1(\gamma).$$

If some family $(\bar{M}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ of Dedekind complete AM -spaces with unit satisfies the above conditions, then $\Gamma = \Delta$, and $\bar{M}_\gamma$ is lattice isometric to M_γ for all $\gamma \in \Gamma$.

Corollary 14. *An injective Banach lattice X is atomic if and only if there is a set of cardinals Γ such that the following lattice isometry holds:*

$$X \simeq \left(\sum_{\gamma \in \Gamma}^{\oplus} l_1(\gamma) \right)_{l_\infty}.$$

11. Boolean-valued analysis approach. In [16, 17, 18] a *Boolean valued transfer principle* from AL -spaces to injective Banach lattices was established. It was proved that every injective Banach lattice embeds into an appropriate Boolean-valued model, becoming an AL -space. According to this fact and fundamental principles of Boolean-valued models, each theorem about the AL -space within Zermelo–Fraenkel set theory has an analog for the original injective Banach lattice interpreted as the Boolean-valued AL -space. Translation of theorems from AL -spaces to injective Banach lattices is carried out by appropriate general operations of Boolean-valued analysis. To make a more precise statement we need some definition.

Given a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$, one can define the universe $V^{(\mathbb{B})}$ of $\mathbb{B}$ -valued sets. There is a natural way of assigning to each formula

$\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_n)$ of the language of set theory and $x_1, \dots, x_n \in V^{(\mathbb{B})}$ an element $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket \in \mathbb{B}$. We say that the *statement* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ is *valid inside* $V^{(\mathbb{B})}$ or the *elements* $x_1, \dots, x_n$ *possess the property* φ if $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket = 1$. In this event, we write $V^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Given $\mathcal{X} \in V^{(\mathbb{B})}$, we define the *descent* $X \downarrow$ of X as the set of all $x \in V^{(\mathbb{B})}$ with $\llbracket x \in X \rrbracket = 1$.

Let $\mathcal{R}, \mathcal{X} \in V^{(\mathbb{B})}$ and $\llbracket \mathcal{R} \text{ is a field of reals} \rrbracket = 1$ and $\llbracket \mathcal{X} \text{ is a Banach lattice} \rrbracket = 1$. Then $\mathcal{R} \downarrow$ is a universally complete vector lattice with $\mathbb{B} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{R} \downarrow)$ and $\mathcal{X} \downarrow$ is a Banach–Kantorovich space over $\mathcal{R} \downarrow$, see [1, Theorems 8.1.2 and 8.3.1]. Let Λ be the bounded part of $\mathcal{R} \downarrow$. The *bounded descent* $\mathcal{X} \Downarrow$ of $\mathcal{X}$ is defined as $\mathcal{X} \Downarrow := \{x \in \mathcal{X} \downarrow : |x| \in \Lambda\}$.

Theorem 15. *The bounded descent $X := \mathcal{X} \Downarrow$ of an AL -space $\mathcal{X}$ in $V^{(\mathbb{B})}$ is an injective Banach lattice with $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$ and $\Lambda(\mathbb{B}) \simeq \mathcal{Z}_m(X)$. Conversely, if X is an injective Banach lattice and $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$, then there exists a unique up to lattice isometry AL -space $\mathcal{X}$ in $V^{(\mathbb{B})}$ whose bounded descent is lattice $\mathbb{B}$ -isometric to X .*

Remak 16. It should be emphasized that, according to Theorem 15, our representation Theorem 6 is just an interpretation of Theorem 5 in the Boolean-valued model $V^{(\mathbb{B})}$.

12. Some open problems. A real Banach lattice X is said to be λ -*injective*, if for every Banach lattice Y , closed sublattice $Y_0 \subset Y$, and positive $T_0 : Y_0 \rightarrow X$ there exists a positive extension $T : Y \rightarrow X$ with $\|T\| \leq \lambda \|T_0\|$. It was proved in [19] that every finite-dimensional λ -injective Banach lattice is lattice isomorphic to $(\sum_{j \leq k}^{\oplus} l_1(n_j))_{l_\infty}$, while it was shown in [22] that every order continuous λ -injective Banach lattice is lattice isomorphic to $L_1(\mu)$ space. But the general question, as far as I know, is still open:

PROBLEM 1. *Is every λ -injective Banach lattice order isomorphic to 1-injective Banach lattice?*

One of the intriguing problems, dating from the work [11], is the classification of the Banach space whose duals are isometric to an AL -space, see also [20]. I believe that the injective version of this problem deserves an independent study.

PROBLEM 2. *Classify and characterize the Banach spaces whose duals are injective Banach lattices.*

As is seen from Theorem 6 an injective Banach lattice X has a mixed LM -structure. Thus, the dual X' should have, in a sense, an ML -structure. Hence a natural question arises:

PROBLEM 3. *What kind of duality theory is there for injective Banach lattices?*

Every Banach space has an injective envelope, see [7, 14]. Following [7] we can give the definition: An *injective envelope* of a Banach lattice X is a pair $({}^eX, \iota)$ with eX an injective Banach lattice and $\iota : X \rightarrow {}^eX$ a lattice isometry such that the only sublattice of eX that is injective and contains $\iota(X)$ is eX itself, cf. [7].

PROBLEM 4. *Does every Banach lattice have an injective envelope?*

An *orthogonally additive convex modular* [13, § 3.3] on a vector lattice X is an operator $\Theta : X \rightarrow \Lambda$ satisfying (for all $x, y \in X$ and $a \in [0, 1]$):

- (1) $\Theta(x) = 0 \iff x = 0$;
- (2) $|x| \leq |y| \implies \Theta(x) \leq \Theta(y)$;
- (3) $\Theta(ax + (1-a)y) \leq a\Theta(x) + (ax + (1-a)\Theta(y))$;
- (4) $|x| \wedge |y| = 0 \implies \Theta(x+y) = \Theta(x) + \Theta(y)$.

Say that an orthogonally additive convex modular $\Theta : X \rightarrow \Lambda$ *admits factorization* through injective Banach lattice L , whenever $\Theta = \Phi \circ \theta$ for a strictly positive Maharam operator $\Phi : L \rightarrow \Lambda$ with the Levi property and an orthogonally additive (nonlinear) embedding $\theta : X \rightarrow L$.

PROBLEM 5. *Find conditions under which an orthogonally additive convex modular admits factorization through injective Banach lattice.*

An *Orlicz $\mathbb{B}$ -lattice* is a $\mathbb{B}$ -cyclic Banach lattice X (cf. [13, § 3.3] if there is an orthogonally additive convex modular $\Theta : X \rightarrow \Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$ with $\|x\| = \inf\{\alpha > 0 : \Theta(x/\alpha) \leq 1\}$ ($x \in X$).

PROBLEM 6. *Prove a representation theorem for Orlicz $\mathbb{B}$ -lattices making use of the above representation of injective Banach lattices.*

References

1. Abramovich Y. A., Aliprantis C. D. Positive operators // Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 1 / Eds. W. B. Johnson, J. Lindenstrauss.—Amsterdam a.o.: Elsevier, 2001.—P. 85–122.
2. Akilov G. P., Kolesnikov E. V., Kusraev A. G. The Lebesgue extension of a positive operator // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1988.—Vol. 298, № 3.—P. 531–524.
3. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
4. Arendt W. Factorization by lattice homomorphisms // Math. Z.—1984.—Vol. 185, № 4.—P. 567–571.
5. Buskes G. Separably-injective Banach lattices are injective // Proc. Roy. Irish Acad. Sect.—1985.—Vol. A85, № 2.—P. 185–186.

6. *Cartwright D. I.* Extension of positive operators between Banach lattices // Mem. Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 164.—P. 1–48.
7. *Cohen H. B.* Injective envelopes of Banach spaces // Bull. Amer. Math. Soc.—1964.—Vol. 70.—P. 723–726.
8. *Fremlin D. H.* Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math.—1972.—Vol. 94, № 3.—P. 777–798.
9. *Fremlin D. H.* Tensor products of Banach lattices // Math. Ann.—1974.—Vol. 211.—P. 87–106.
10. *Fremlin D. H.* Measure Theory. Vol. 3. Measure Algebras.—2002.—672 p.
11. *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle métrique des espaces L^1 // Canad. J. Math.—1955.—Vol. 7.—P. 552–561.
12. *Haydon R.* Injective Banach lattices // Math. Z.—1977.—Vol. 156.—P. 19–47.
13. *Haydon R., Levy M., Raynaud Y.* Randomly Normed Spaces.—Paris: Hermann, 1991.—138 p.
14. *Kaufman R.* A type of extension of Banach spaces // Acta. Sci. Math. (Szeged).—1966.—Vol. 27.—P. 163–166.
15. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000.—xiii+446 p.
16. *Kusraev A. G.* Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices. I.—Vladikavkaz: Southern Math. Inst. VSC RAS, 2011.—28 p.—(Preprint № 1).
17. *Kusraev A. G.* Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices. II.—Vladikavkaz: Southern Math. Inst. VSC RAS, 2012.—26 p.—(Preprint № 1).
18. *Kusraev A. G.* Boolean-valued analysis and injective Banach lattices // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2012.—Vol. 444, № 2.—P. 143–145; Engl. transl.: Dokl. Math.—2012.—Vol. 85, № 3.—P. 341–343.
19. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* On the isomorphic classification of injective Banach lattices // Advances Math.—1981.—Vol. 7B.—P. 489–498.
20. *Lindenstrauss J., Wulbert D. E.* On the classification of the Banach spaces whose duals are L^1 -spaces // J. Funct. Anal.—1969.—Vol. 4.—P. 332–349.
21. *Lotz H. P.* Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 211.—P. 85–100.
22. *Mangheni P. J.* The classification of injective Banach lattices // Israel J. Math.—1984.—Vol. 48.—P. 341–347.
23. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—xvi+395 p.
24. *Schwarz H.-V.* Banach Lattices and Operators.—Teubner: Leipzig, 1984.—208 p.
25. *Semadeni Z.* Banach Spaces of Continuous Functions. Vol. 1.—Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1971.—208 p.
26. *Wickstead A. W.* Relatively central operators on Archimedean vector lattices // Proc. Roy. Irish Acad. Sect.—1980.—Vol. A80, № 2.—P. 191–208.

ИНЪЕКТИВНЫЕ БАНАХОВЫ РЕШЕТКИ

А. Г. Кусраев

Статья представляет собой конспект миникурса лекций, прочитанных на Владикавказской молодежной математической школе (Владикавказ, 16–21 июля, 2012). Дается обзор основных результатов об инъективных банаховых решетках, излагается новый подход к проблеме и формулируются нерешенные задачи.

Тем, кому предстоит развивать и применять математику в начавшемся веке, очень важно заглянуть в будущее и верно выбрать направление приложения своих усилий. Цель этих заметок — поделиться соображениями на этот счет.

Математики часто считают свою науку «вечной», следующей своей внутренней логике. Они с гордостью вспоминают о трех классических задачах Античности (удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга), которые были решены почти через двадцать веков после их постановки, или о проблемах Гильберта, ставших для многих исследователей ориентиром в ХХ веке.

Однако реальность меняется, а вместе с ней меняется математика. Научное творчество — диалог с коллегами, в том числе работающими в других областях, предшественниками и последователями. Поэтому много важного и интересного будет рождаться и происходить на границе и во взаимодействии с другими быстро развивающимися дисциплинами, с техникой.

Это подтверждают математические итоги ХХ века, подведенные выдающимся ученым академиком Владимиром Игоревичем Арнольдом [1]: «Вся математика делится на три части: криптография (оплачиваемая ЦРУ, КГБ и им подобными), гидродинамика (поддерживаемая производителями атомных подводных лодок) и небесная механика (финансируемая военными и другими организациями, типа НАСА, имеющими отношение к ракетам).

Криптография привела к созданию теории чисел, алгебраической геометрии над конечными полями, алгебры³, комбинаторики и компьютеров.

Гидродинамика породила комплексный анализ, уравнения в частных производных, теорию групп и алгебр Ли, теорию когомологий и методы вычислений.

Небесная механика дала начало теории динамических систем, ли-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00786.

²Россия, Москва, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

³Создатель современной алгебры Виет был криптографом короля Генриха IV во Франции.

нейной алгебре, топологии, вариационному исчислению, симплектической геометрии.

Существование таинственных связей между всеми этими различными областями — самая поразительная и прекрасная сторона математики (не имеющая никакого разумного объяснения).

Опыт прошедших столетий показывает, что развитие математики было обусловлено не столько техническим прогрессом (больше всего поглощавшим усилия математиков во все времена), сколько неожиданными открытиями взаимосвязей между ее различными областями (которые сделались возможны благодаря этим усилиям) . . .

Сильвестр (1876 г.) называл удивительным интеллектуальным феноменом тот факт, что *общие утверждения проще, чем их частные случаи*. Согласно Сильвестру *математическая идея не должна застывать в аксиоматической форме, а должна течь подобно реке*. Надо всегда быть готовым изменить аксиомы, сохраняя идею».

Каковы же те области, которые будут активно развиваться в XXI веке и порождать новые математические задачи?

Со школьных времен у большинства сохранилось субъективное ощущение, что математика — большая серьезная наука. Физика и химия и по объему, и по сложности примерно вдвое меньше. Биология тоже примерно вдвое «меньше», чем физика и химия.

Однако, чтобы судить о настоящей, «взрослой» науке, нужно опираться на объективные данные. Например, на индекс цитируемости различных научных дисциплин (см. рис. 1). Эта величина показывает, насколько велико и активно научное сообщество, развивающее данную область исследований. Если взять вместе молекулярную биологию, иммунологию, генетику — «потомков» школьной биологии, то характерный показатель цитируемости — 50, для химии около 10, для физики — 8, для математики и информатики примерно по 1,5. Картина совсем другая. Из нее следует, что XXI век будет веком биологии и наук о человеке.

Если в XIX и XX веках основными «заказчиками» и поставщиками математических проблем были физика, механика и криптография, то в XXI веке лидерами, которые будут ставить задачи, станут биология, экономика, социология, психология, история, география, робототехника, наука о материалах, нейронаука.

Науке XXI века предстоит научиться заглядывать в будущее, оценивать и предупреждать различные риски, на новом уровне понять сущность, возможности и ограничения людей и коллективов.

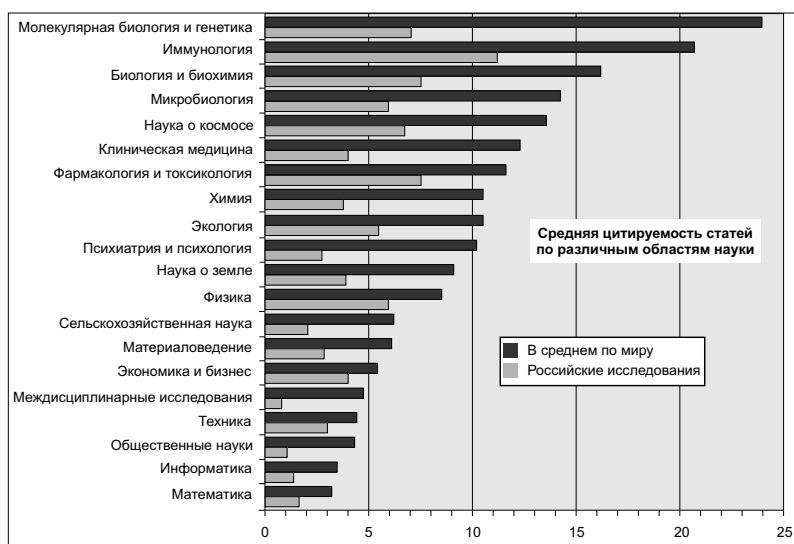


Рис. 1. Средняя цитируемость статей по областям науки.
Обращает на себя внимание очень большая разница
в цитируемости статей в разных областях.

Жизнеобеспечивающие технологии, которые мы имеем сегодня (производство энергии, продовольствия, переработки (рециклинга) отходов, здравоохранения, управления, ряд других), позволяют поддерживать нынешний уровень потребления в течение нескольких ближайших десятилетий. Нам предстоит найти технологии, которые дадут возможность успешно развиваться человечеству хотя бы в течение нескольких веков. Очень большую роль предстоит сыграть в этом математике и *междисциплинарным подходам* (которые позволяют переходить от отдельных задач, решаемых различными научными дисциплинами, к большим, сложным, комплексным проблемам, требующим совместных усилий, а с другой стороны, опираясь на сходство или аналогию математических моделей, помогают увидеть общность различных явлений и процессов) [2].

В то же время имеет место и другая тенденция. То, что считалось передним краем науки и было результатом творчества выдающихся исследователей, становится со временем общим достоянием, затем используется в инженерной практике и попадает в институтские учебники.

Это можно проследить по работам Института прикладной мате-

матики им. М. В. Келдыша РАН (ИПМ), созданного в 1953 г. для решения стратегических задач, требующих компьютерного моделирования и использования методов прикладной математики [3]. Первыми задачами Института были следующие:

- Проблемы совершенствования ядерного оружия и создания водородной бомбы. В советском ядерном проекте участвовало более 800 тысяч человек, среди которых более 8000 исследователей. Реализация этого проекта потребовала создания атомной отрасли промышленности, которой руководило Министерство среднего машиностроения.

- Создание космических аппаратов и ракетной техники, баллистическое обеспечение запусков стратегических ракет, искусственных спутников, межпланетных полетов. Прорыв в космос потребовал усилий более 1,5 миллионов человек, более 1200 предприятий и создания Министерства общего машиностроения.

- Разработка и внедрение компьютерных систем управления сложными объектами и системами.

Первым директором нашего института был выдающийся математик, механик, организатор науки, «главный теоретик космонавтики», академик Мстислав Всеволодович Келдыш. Известна его дискуссия с выдающимся физиком, академиком Л. А. Арцимовичем. В историю вошла шутка последнего о том, что «наука — способ удовлетворения личного любопытства за государственный счет». Он считал, что не так важно, какими проблемами заниматься, важно это делать на высоком уровне (науковеды сейчас называют это *ценностной ориентацией*). М. В. Келдыш полагал, что у науки должно быть несколько (приоритетов не бывает много) крупных, важных для общества задач, решение которых в конечном счете определит и направление теоретических поисков (*целевая ориентация*). История подтвердила правоту М. В. Келдыша.

Без преувеличения можно сказать, что в 1940–1950-х гг. будущее мира решалось в лабораториях ученых. И на этом историческом рубеже отечественные исследователи успешно справились со стоящими перед ними задачами, причем в удивительно короткие по нынешним меркам сроки.

На этом пути была создана большая часть современной вычислительной математики, многие разделы дискретной математики, системное программирование, основы вычислительной геометрии (на которых строится вся компьютерная графика), теория конечных ав-

томатов, алгоритмы распознавания образов и новые разделы теории управления, аэродинамики и небесной механики (связанные с роботами, проектированием и обеспечением авиационных и космических комплексов) и многое другое.

Реализация больших научно-технических проектов требовала математического моделирования (во многих случаях двигаться методом проб и ошибок слишком дорого или невозможно) и совместной работы математиков с ведущими специалистами, работающими в разных областях, усилий многих талантливых людей. И поэтому Институт оказывался в центре важнейших проектов, становился своеобразным системным интегратором.

По-видимому, время больших проектов, обеспечивающих взлет нашего отечества и математики, не только в прошлом, но и в будущем.

Уроки XX века

С омерзением и ужасом я отворачиваюсь от этой зловредной язвы — непрерывных функций, нигде не имеющих производных.

Эрмит, в письме к Стильтьесу

Академик Яков Борисович Зельдович — выдающийся физик, один из создателей ядерного оружия, специалист по космологии, химической кинетике, квантовой механике, предложивший свое видение высшей математики, прикладной математики и математической физики [4], будучи сотрудником ИПМ, заложил основы космо-микрофизики. Более 40 лет назад он показал, что эпохе гигантских ускорителей сравнительно скоро придет конец, и что свойства нашей вселенной и ее развитие в первые мгновения после Большого взрыва определяются тонкими свойствами элементарных частиц — мельчайших кирпичиков материи. И напротив, — свойства элементарных частиц придется очень скоро изучать, только решая *обратные задачи*. Эти свойства надо будет восстанавливать на основе наблюдаемого состояния космоса. В роли гигантского ускорителя, намного превосходящего все, что может быть создано людьми, выступит сама вселенная. И действительно, и астрофизика, и физика элементарных частиц пошли во многом именно по этому пути, намеченному Я. Б. Зельдовичем.

Однако в этой дерзкой идее есть и прямая аналогия и с рождением больших проектов, и с развитием математики. Очень часто все начинается с небольшой, конкретной, иногда кажущейся странной задачи.

Вспомним математическую революцию конца XIX века, заставившую всерьез отнестись к доказательствам существования и единственности исследуемых объектов и установившую намного более высокие, чем раньше, стандарты строгости рассуждений.

Великий Эйлер сделал удивительно много в математике и механике, от доказательства, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке, до основополагающих уравнений гидродинамики, от основ теории функций комплексного переменного до замечательных результатов математического анализа и теории чисел. Привычные нам обозначения $\sin$, $\cos$, tg , ctg , $\ln$, e , π в мире часто называют «петербургскими символами», так как он ввел их, работая в Санкт-Петербурге, в Академии наук, одновременно с Михаилом Васильевичем Ломоносовым. Во многом судьба М. В. Ломоносова, вклад которого в науку и культуру России трудно переоценить, сложилась благодаря активной поддержке Леонарда Эйлера. Этот выдающийся математик полагал, что надо делать выкладки и получать результаты, оставив их обоснование, говоря современным языком, на долю не слишком способных аспирантов.

В течение многих лет Лагранжа и многих других выдающихся математиков волновала «небольшая задача» — доказательство того, что, говоря современным языком, непрерывная функция, заданная на отрезке, является дифференцируемой почти всюду. Многолетние неудачи заставляли думать, что с этой задачей не все так просто.

И наконец К. Вейерштрасс (1815–1897 гг.) построил контрпример — функцию, которая определяется суммой ряда

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1, \quad b > 1, \quad ab > 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Поскольку этот ряд мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем меньшим единицы, то из классических теорем математического анализа следует, что функция $W(x)$ непрерывна на отрезке. Однако К. Вейерштрассу удалось доказать, что при некоторых значениях параметров a и b производная функции $W(x)$ не существует ни в одной точке отрезка (позже было показано, что для этого достаточно, чтобы $0 < a < 1$, $ab > 1$).

Этот и несколько других контрпримеров вызвали шок и переоценку ценностей — мало найти формальное решение или выписать его в виде ряда. Надо доказать, что оно существует, единственно и лежит в том пространстве, в котором мы его ищем.

Математики утешали себя тем, что придуманные ими «монстры» не встречаются в природе. Но к реальности оказался гораздо ближе взгляд Альберта Эйнштейна, считавшего, что природа представляет собой реализацию простейших математических конструкций (какими бы экзотическими они не казались вначале, можем мы добавить сегодня).

В самом деле, вскоре после работ К. Вейерштрасса Жаном Батистом Перреном было исследовано броуновское движение. При этом траектория частиц описывалась не дифференцируемой функцией, а извилистой ломаной, повторяющей себя на все меньших масштабах (или, говоря современным языком, обладающей *масштабной инвариантностью*). А после работ французского математика Бенуа Мандельброта стало ясно, что исследование Вейерштрасса положило начало изучению замечательных геометрических объектов — *фракталов*, что мир полон ими и надо разбираться в их свойствах, механизмах возникновения и способах использования [5, 6]. Сейчас эти объекты применяют в задачах диагностики, прогноза, в компьютерной графике, при решении проблем сжатия информации, в технологиях повышения нефтеотдачи пластов, в географии.

Новое рождается на границе нашего незнания, представляясь «странным случаем», «частным случаем», «математической экзотикой».

В полной мере это относится и к задачам, которые не являются корректными. Под знаком их изучения и решения и прошла значительная часть всех исследований в прикладной математике XX века.

В конце XIX века в центре внимания ученых оказались уравнения в частных производных. Стало понятно, что одни краевые задачи «хороши», содержательны и с физической, и с математической точки зрения, а другие обладают скрытыми пороками. Например, задача Коши для уравнения колебаний струны

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned}$$

прекрасно описывает распространение колебаний и успешно решается различными математическими методами. А похожая по виду

задача для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xx} &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned}$$

неустойчива по отношению к возмущению начальных данных. Как бы не были малы возмущения, решение при этих начальных данных может быть сколь угодно далеко от исходного. И если такая задача возникает при построении теории, то надо искать существенные факторы, которые не были учтены при создании математической модели.

Исходя из множества подобных примеров, Жаком Адамаром (1865–1963 гг.), было введено понятие *корректности задачи математической физики*. К таковым он предложил относить те задачи, решения которых *существуют, единственны, устойчивы* относительно начальных данных, краевых условий и параметров, входящих в задачу. То, что не является корректным, либо находится на краю того, что нужно изучать, либо за краем. И именно в этой области произошли многие важнейшие события прикладной математики XX века.

Существование. Приведем «школьный» пример задачи, решение которой не существует в целом — при $0 < t < \infty$

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = a. \quad (1)$$

Его решение $\frac{1}{t_f - t}$, где $t_f = \frac{1}{a}$. Это решение относится к классу так называемых *режимов с обострением*, в которых одна или несколько характеристик системы неограниченно возрастают за конечное время, называемое *временем обострения*.

Оказалось, что именно такие решения описывают множество неустойчивостей в гидродинамике, физике плазмы, экологии, в лазерной термохимии. Такая динамика является типичной асимптотикой в системах с сильной положительной обратной связью. Теория режимов с обострением, построенная в научной школе третьего директора ИПМ, член-корреспондента РАН, моего учителя Сергея Павловича Курдюмова (1928–2004 гг.), получила мировое признание [7].

Более того, именно по гиперболическому закону вида (1) в течение сотен тысяч лет росла численность населения Земли $N(t)$,

где $t_f \approx 2025$ г. Этот важнейший для демографии, истории, социологии, экономики и множества других дисциплин, для всех нас факт был осознан в последние десятилетия. Это произошло во многом благодаря построенной профессором Сергеем Петровичем Капицей *глобальной демографической теории* [2] и деятельности по ее популяризации.

Данные палеодемографии, системный анализ и простейшая математическая модель позволили осознать масштаб того перелома, на котором находится человечество.

Изменение этой асимптотики, резкое уменьшение скорости роста числа людей на планете, происходящее в течение жизни одного поколения, получило название *глобального демографического перехода* (см. рис. 2). Это переход от стратегии «высокая рождаемость — высокая смертность» к стратегии «низкая рождаемость — низкая смертность». Именно этот переход, который помогла «заметить» прикладная математика, является главным содержанием нынешней эпохи. Отличие нынешней траектории от асимптотики, определявшей развитие человечества в течение сотен тысяч лет и являвшейся главной «пружиной» истории, уже составило более 2-х миллиардов человек. Причины глобального демографического перехода являются предметом активных исследований.

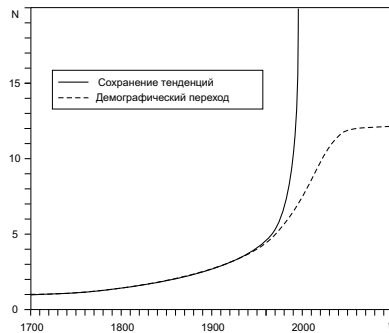


Рис. 2. Рост населения мира.

Режим с обострением, по которому росло человечество на протяжении всей его истории, и выход на стационар, который происходит в наши дни.

Многолетние безуспешные попытки доказать существование решений фундаментальных задач могут быть признаком замечательных физических явлений. Трудности, связанные с доказательством существования ряда решений обратных задач теории дифракции,

в течение многих лет относились на счет несовершенства используемых математических инструментов. Однако оказалось, что это ключ к *метаматериалам*, которые сделали реальным воплощение сказки о «шапке-невидимке» или «эльфийском плаще». В школьном курсе физики проходят закон преломления света

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2},$$

где α и β — углы падения луча, n_1 и n_2 — показатели преломления. Оказалось, метаматериалы позволяют сделать показатель преломления одной из сред отрицательным! И это дает удивительные возможности. Свет, распространяясь по системе, состоящей из обычных и метаматериалов, огибает тот предмет, который мы хотим скрыть.

Единственность решения. Классическим примером неединственности является задача

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/2}, \quad x(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Кроме тривиального решения $x(t) = 0$ она имеет решение $x(t) = t^2/4$ (теорема единственности, которая приводится в институтских курсах дифференциальных уравнений, при $x = 0$ неприменима, так как в этом случае не выполняется условие Липшица).

Одним из центральных понятий математики XX века стало понятие *бифуркации* — изменения числа и устойчивости решений определенного типа при изменении параметров исследуемой задачи.

Оказалось, что, во-первых, в системах различной природы возникают *одни и те же бифуркации*. Во-вторых, *их число невелико*. Во многих случаях эту «неединственность» удалось расклассифицировать. Например, это сделано в теории катастроф для динамических систем вида

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U(x, \lambda_1, \dots, \lambda_p)}{\partial x}.$$

До тех пор, пока число параметров невелико ($p \leq 5$), все типичные бифуркации или «неединственности» определяются семью «каноническими» катастрофами [8], а затем возникают принципиальные трудности — «канонические» формы начинают зависеть от непрерывного параметра и «типов катастроф» становится бесконечно много.

Одним из основных достижений нелинейной динамики в XX веке стало выявление *универсальных сценариев возникновения хаоса* —

последовательности бифуркаций, приводящей к переходу простейших упорядоченных, периодических, регулярных режимов к нерегулярным, хаотическим [9].

В течение трехсот лет физики, механики, математики решают проблему турбулентности. В простейшем варианте она сводится к тому, чтобы выяснить, описывает ли классическая модель гидродинамики — уравнения Навье — Стокса — те хаотические движения жидкости, которые наблюдают физики, или нужно нечто сверх этих уравнений (например, малые случайные силы и т. д.). В прошедшем веке математикам не удалось доказать существование и единственность решений этой задачи в трехмерных областях. В нескольких списках «задач тысячелетия» эту проблему относят к одной из самых фундаментальных в современной математике. И многие специалисты склоняются к мысли, что, по крайней мере для многих классов «разумных» начальных данных, эти решения не существуют или неединственны.

Неединственность характерна для обратных задач прикладной математики. Разработка методов решения обратных и некорректных задач, огромный вклад в которую внесла научная школа второго директора ИПМ академика Андрея Николаевича Тихонова, стала одним из фундаментальных достижений математики XX века.

Однако подлинным героем, одной из центральных «фигур» математики XX века стала *неустойчивость*. На рубеже прошлого столетия выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре (1854–1912 гг.) была выдвинута исследовательская программа, связанная с анализом *нелинейных динамических систем*.

Отличительной чертой таких систем является *отсутствие принципа суперпозиции*. Если условно записать изучаемую задачу в виде $Lu = 0$, то для нелинейных систем

$$L(u_1 + u_2) \neq L(u_1) + L(u_2).$$

Поэтому «спить» общее решение из частных, как это делают студенты, решая большинство задач по университетским курсам математической физики и дифференциальных уравнений, не удастся.

Большинство математиков конца XIX века надеялись, что введение новых специальных функций и поиск решений в виде сходящихся рядов поможет справиться с задачами, возникающими при математическом моделировании механических систем и физических процессов. Пуанкаре выдвинул принципиально новую исследовательскую

программу. Ее главными моментами стали [10]

– *Исследование притягивающих множеств — аттракторов* (от английского to attract — притягивать) в фазовом пространстве, которые описывают установившиеся на больших характерных временах режимы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Упрощение состоит в том, что множество различных систем может иметь *одни и те же аттракторы*, и в том, что в системах небольшой размерности $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$, $p \leq 2$, типов аттракторов *всего несколько*, а также в том, что с целых классов начальных данных происходит выход на *одни и те же* притягивающие множества.

– *Качественная теория динамических систем*, выяснение того, какие свойства сохраняются (остаются инвариантными), а какие меняются при возмущениях, принадлежащих к определенному классу (на этом пути было введено очень важное понятие грубости динамических систем).

– *Исследование бифуркаций*.

– *Привлечение геометрических идей в эту область*, исследование геометрии фазового пространства динамических систем. Из этих работ, которые А. Пуанкаре называл «геометрией положения», выросла топология — одна из основ современной математики.

– *Асимптотический анализ*.

До Пуанкаре во многих областях и, прежде всего, в задачах небесной механики рассматривали уравнения вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) + \varepsilon \vec{g}(\vec{x})$$

и искали их решения в виде рядов

$$\vec{S}_N(\varepsilon, t) = \sum_{n=0}^N \vec{x}_n(t) \varepsilon^n,$$

где $\vec{x}_0(t)$ — некоторое известное решение, а остальные члены ряда определяют поправки к нему. Считалось, что имеет смысл рассматривать только такие ряды, в которых

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\vec{S}_N(\varepsilon, t) - \vec{x}(t)\| \rightarrow 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\vec{S}_N(\varepsilon, t) - \vec{x}(t)\| \rightarrow 0.$$

Большие усилия вкладывались в доказательства сходимости этих рядов (второго из выписанных выше неравенств). Образно говоря, «хвост вилял собакой».

А. Пуанкаре предложил рассматривать ряды, которые обладают иными свойствами:

$$\|\vec{S}_N(\varepsilon, t) - \vec{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, N = N^*.$$

Иными словами, мы берем «разумное» число членов ряда N^* , не обращая внимания на «хвост». Эта идея оказалась очень важной и конструктивной. Она без преувеличения, преобразила асимптотический анализ [12].

Итак, в асимптотических рядах, которые могут не сходиться, надо найти то число членов N^* , которое дает наилучшее приближение. И здесь показательны физические теории. Квантовая электродинамика последовательно описывает взаимодействие микрообъектов с электромагнитным полем, которое тоже рассматривается как квантовая система. За создание этой теории Р. Ф. Фейнман, Д. С. Швингер и С. Томонага были удостоены Нобелевской премии по физике за 1965 г. Ее предсказания с удивительной точностью (в 8 значащих цифр) совпадают с экспериментом. Малым параметром в этой теории, которая является асимптотической, является постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$, где e — заряд электрона, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света. Для этой теории глубокие содержательные уравнения получаются, если взять $N^* = 1$, учет следующих членов порождает расходимости, анализ и осмысление которых потребовали больших усилий от физики.

Схожим образом дело обстоит и в гидродинамике. Людвиг Больцман на рубеже XX века предложил уравнение, описывающее изменение во времени плотности вероятности $\rho(\vec{r}, \vec{p}, t)$. Функция $\rho(\vec{r}, \vec{p}, t) \Delta \vec{r} \Delta \vec{p}$ характеризует вероятность нахождения частицы в кубе с ребрами $(\Delta r_x, \Delta r_y, \Delta r_z, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z)$ с центром в точке с координатами $(\vec{r}, \vec{p})$ в момент времени t . Позже оказалось, что разложив по малому параметру и рассматривая моменты соответствующих распределений вероятности, взяв $N^* = 1$, мы получаем классические уравнения гидродинамики. Однако, уже при $N^* = 2$, как показал сотрудник ИПМ А. В. Бобылев, мы получаем уравнения, некорректные с точки зрения математической физики. Мораль понятна — используя асимптотические ряды, очень важно знать, когда следует остановиться.

Перенос акцента с аналитического или численного нахождения интегральной кривой динамической системы $\tilde{x}(t)$ на изучение аттракторов кардинально изменил отношение к устойчивости. Суть дела иллюстрирует простейший пример

$$\dot{x} = ax, \quad x(a) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad a > 0.$$

Решение этого уравнения с начальными данными $x(0) = \delta$ — экспонента $x(t) = \delta e^{at}$. Вспомним ε — δ определение устойчивости. Чтобы траектория на интервале $0 \leq t \leq \tau$ была устойчива по начальным данным, нужно указать для любого малого ε такое δ , что возмущение начальных данных на δ не выведет возмущенную траекторию $\tilde{x}(t)$ из ε -трубки, построенной вокруг исходной траектории $x(t)$

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T,$$

если $\|x(0) - \tilde{x}(0)\| < \delta$.

Зададим ε . Пусть $\delta e^{aT} < \varepsilon$, для этого возьмем $\delta < \varepsilon e^{-aT}$ (тогда и для всех $0 \leq t \leq T$ будет $\|\tilde{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$, $x(t) = 0$). Траектория $x(t)$ для этой динамической системы устойчива на интервале $0 \leq t \leq T$. Конечно, чем больший интервал нас интересует, тем меньшее значение δ при данном ε надо брать. Однако, если $T = \infty$, то такого значения δ просто не существует! Траектория $x(t) = 0$ оказывается неустойчива, $|x(t)| \rightarrow \infty$ при любом $\delta \neq 0$.

Это кажется естественным и очевидным — возмущенные траектории уходят на бесконечность. Устойчивость на конечном и бесконечном промежутках здесь принципиально различаются.

В рассмотренном случае неустойчивые траектории уходили на бесконечность. Но ведь для других систем они могут оставаться в ограниченной части фазового пространства, а сам аттрактор представлять собой множество *неустойчивых* по каким-то направлениям траекторий. Это понимание стало основой для революции в теории динамических систем, связанной с открытием *странных аттракторов* и *динамического хаоса*.

Простейший пример, поясняющий принципиальную роль неустойчивости, дает отображение (его называют «палаткой», «тен-том» или отображением Неймана)

$$x_{n+1} = 1 - 2|x_n| \equiv f(x_n), \quad x_1 = a, \quad -1 \leq a \leq 1.$$

Очевидно (см. рис. 3), это отображение переводит отрезок $[-1, 1]$ в себя: если $-1 \leq x \leq 1$, то $-1 \leq f(x) \leq 1$.

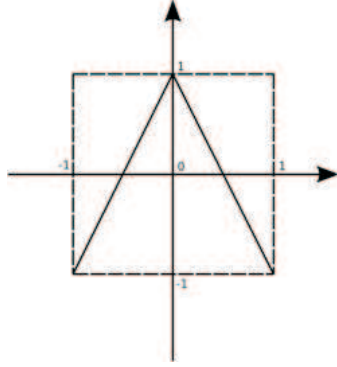


Рис. 3. Отображение «тент».

Это отображение сыграло огромную роль в нелинейной динамике, вычислительной математике, эргодической теории.

Пусть для исходной траектории $\{x_n\}$ начальные данные $x_1 = a$, для возмущенной траектории $\{x'_n\}$ — $x'_1 = a + \delta$. Будем считать — если x_n принадлежит правой или левой ветви отображения, то и x'_n принадлежит той же ветви (модуль для них раскрывается одинаково). Это так, пока траектории достаточно близки.

Зададим значение ε . Проследим за траекторией $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$

$$|x_1 - x'_1| = \delta, |x_2 - x'_2| = 2\delta, |x_3 - x'_3| = 4\delta, \dots, |x_n - x'_n| = 2^{n-1}\delta.$$

Отсюда следует, что при $n > \log_2(\varepsilon/\delta) + 1$ траектории при данном δ разойдутся больше, чем на ε , а поскольку нас интересует аттрактор $n \rightarrow \infty$, то и об устойчивости любой траектории $\{x_n\}$ для этого отображения говорить не приходится.

Джон фон Нейман рассматривал это отображение как генератор случайных чисел для метода Монте-Карло. Этот метод завораживал не одно поколение математиков.

Будем считать, что мы рассматриваем не одну динамическую систему, а бесконечное множество таковых. Пусть распределение начальных данных для них имеет плотность $\rho(x_1)$ или меру $\mu(x_1)$. После первой итерации плотность и мера изменятся $\rho(x_2)$ и $\mu(x_2)$.

Спросим себя, когда мера не будет меняться с течением дискретного времени ($n = 1, 2, \dots$). Уравнение для такой меры (которую называют *инвариантной*) очевидно

$$\mu(x) = \mu(f^{-1}(x)),$$

где $f^{-1}(x)$ — все прообразы точки x .

Естественно думать, что именно инвариантная мера и характеризует аттрактор. Решение уравнения для одной из инвариантных мер для «тента» — $\rho(x) = 1/2$ при $-1 \leq x \leq 1$, т. е. наше отображение переводит равномерное распределение прообразов $\{x\}$ в равномерное распределение образов $\{f(x)\}$.

Это отображение удивляет и порождает иллюзию, что «тент» является хорошим генератором случайных чисел.

Имея хороший генератор, можно делать очень многое. Очевидный пример. Пусть нам надо посчитать объем тела G в p -мерном пространстве ($p \gg 1$). Пусть для простоты G принадлежит кубу ($0 \leq y_1 \leq 1, \dots, 0 \leq y_p \leq 1$), и мы можем определить, попала ли точка внутрь этого тела или нет.

Дальнейшая стратегия такова. Располагая случайными числами $\{x_n\}$, мы формируем случайные p -мерные векторы $\vec{y}_1 = (x_1, \dots, x_p)$, $\vec{y}_2 = (x_2, \dots, x_{p+1})$, $\dots$, $\vec{y}_p = (x_1, \dots, x_{n+p})$, определяющие координаты случайных точек в p -мерном пространстве.

Строим M таких векторов. Пусть M_{in} из них задают точки, попавшие внутрь тела G . Тогда для объема тела $V(G)$ получаем оценку

$$V(G, M) = M_{in}/M.$$

Очевидно, $V(G, M) \rightarrow V(G)$ при $M \rightarrow \infty$.

Наличие «хороших» случайных чисел является критичным в криптографии. В идеальном случае, зная всю выборку сгенерированных ранее случайных чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, мы не можем предсказать $(N + 1)$ -е число. Чем лучший генератор используется, тем труднее расшифровать перехваченное сообщение.

Генератор, задаваемый «тентом», не хорош. В самом деле, пусть начальное значение x_1 ($-1 \leq x_1 \leq 1$) — рациональное число $x_1 = P/Q$, где P и Q — целые. Но тогда, посмотрев на отображение, мы увидим, что и $f(x_1)$ также имеет вид P/Q с тем же знаменателем Q , но таких чисел на отрезке $[-1, +1]$ всего лишь $2Q + 1$. Поэтому с рациональных данных вида P/Q мы не более, чем за $2Q + 1$ итераций попадем в цикл (числа в последовательности $\{x_n\}$ будут повторяться), и о случайности здесь говорить не приходится.

Однако используются, предлагаются и будут изучаться более совершенные генераторы — по-видимому, их разработка стала одной из «вечных проблем» вычислительной математики [13, 14].

Понадобилось почти 20 лет, чтобы от «тента» и методов Монте-Карло перейти к исследованию динамических систем с непрерывным

временем.

Пионерская работа была выполнена американским метеорологом Эдвардом Лоренцем в 1963 г. Этому ученому заинтересовало, почему несмотря на грандиозный прогресс компьютеров и совершенствование систем мониторинга исследователям не удается получить среднесрочный (на 2–3 недели) прогноз погоды. У него возникла гипотеза, что дело не в существовании решений соответствующих уравнений, не в эффективности алгоритмов и быстродействии компьютеров, а в самой природе изучаемого явления.

В большой степени погода определяется конвективными процессами в атмосфере. Массы холодного воздуха из верхних слоев опускаются вниз, прогреваются, плотность их падает, и они поднимаются наверх, чтобы уступить свое место более тяжелым и холодным массам.

Конечно, чтобы описать такую конвекцию, можно было бы решать трехмерные уравнения газовой динамики с учетом теплопереноса. Однако Э. Лоренц рассмотрел простейший двумерный вариант, воспользовался методом Галеркина и получил простейшее приближение, учитывающее всего три гармоники поля скоростей и температур

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \quad \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz.$$

Далее эту систему, называемую ныне системой Лоренца, он проинтегрировал на компьютере. И оказалось, что сколько бы ни наблюдали за решением, оно не становится периодическим (см. рис. 4). Кроме того, расстояние между исходной траекторией $\vec{S}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и возмущенной $\vec{S}'(t)$ растет, $d(t) \sim \delta \exp(\lambda t)$, $\lambda > 0$.

Иными словами, аттрактор (притягивающее множество) динамической системы определяется неустойчивой траекторией! По данным наблюдений за возмущенной системой $\vec{S}'(t)$ мы можем судить о состоянии исходной системы, лишь если $\lambda t < 1$, т. е.

$$t < T = 1/\lambda$$

до некоторого *горизонта прогноза* T . Следовательно, мы имеем здесь в точности ту же ситуацию, с которой математики столкнулись, рассматривая отображение Неймана. И «горизонт прогноза» для атмосферы, судя по оценкам, которые были сделаны позже, оказался

равным именно тем 2–3 неделям, за которые никак не удавалось заглянуть метеорологам.

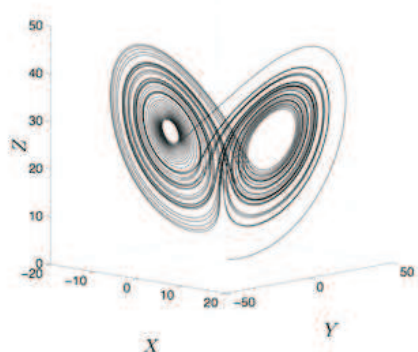


Рис. 4. Аттрактор Лоренца.

Траектория получена для начальных данных $(1; 1; 1)$ на временном интервале $[0; 50]$ при параметрах $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

От удачной остроты шута мог зашататься королевский трон. И точно так же исследование модели Лоренца и открытие динамического хаоса — странных аттракторов, (описывающих установившееся периодическое движение в динамических системах) изменило наш взгляд на мир.

В самом деле, выдающийся математик и механик И. Ньютон мыслил себе мир как гигантский часовой механизм, который создал и запустил бог. В этом мире нет места для случайности и свободы воли.

Его последователь Пьер Симон Лаплас, живший в наполеоновскую эпоху (вспомним уравнение Лапласа, преобразование Лапласа, лапласиан, ...) считал, что не нуждается в гипотезе бога. По его мысли, ум, который смог бы учесть координаты и скорости всех частиц во вселенной и для них решить уравнения Ньютона, мог бы заглянуть как угодно далеко в будущее и прошлое. И вновь все предопределено и мы с вами — всего лишь актеры, исполняющие роли в уже написанной пьесе, которую не можем изменить. Это взгляд философы называют *лапласовским детерминизмом*.

Модель Лоренца и прикладная математика показали, что Лаплас был неправ, позволили спуститься с небес на землю. В самом деле, любое измерение выполняется с некоторой конечной точностью δ .

Однако если для нашей системы величина $\lambda > 0$ и имеет место конечный горизонт прогноза $T = 1/\lambda$, то заглянуть дальше него мы не сможем, как бы успешно не моделировались изучаемые процессы и не решались получившиеся уравнения. (Величину λ называют *ляпуновским показателем*.)

С одной стороны, вывод грустный — мы добавили еще одно ограничение к известным. В самом деле, механика показала неосуществимость вечного двигателя первого рода (производящего работу без затрат энергии), термодинамика — второго рода (осуществляющего передачу тепла от холодного тела к горячему без изменения окружающей среды), теория относительности утверждает, что нельзя передавать информацию со сверхсветовой скоростью, квантовая механика с ее принципом неопределенности заставляет забыть о бесконечно точном одновременном измерении скорости и координаты микрочастицы.

С другой стороны, результат очень оптимистичен. В самом деле, очень мало изменив состояние системы (на δ), мы можем через время T перевести ее в совершенно другое положение. Взмах крыльев бабочки в нужное время в нужном месте может привести через пару недель к разрушительному урагану за тысячи километров от нее. Иными словами, бабочка, как и мы с вами, является творцом реальности, а не шестеренкой в гигантском часовом механизме. И это коренное изменение взгляда на мир связано с исследованием и осмыслением довольно простых математических моделей.

ТВОРЧЕСКАЯ РОЛЬ МАТЕМАТИКИ

Самые удивительные сказки — те, которые придумывает жизнь.

Г. Х. Андерсен

Очень часто мы смотрим на математику так же, как во времена Евклида: изобретательность и настойчивость позволяет придумывать и решать замечательные задачи, при необходимости прочерчивая путь от желаемого результату к исходным данным.

Мы склонны не замечать грандиозных перемен, кардинально изменивших математическую реальность. «Первой ласточкой» была «воображаемая геометрия», построенная Н. И. Лобачевским, и последовавший за ним набор других неевклидовых теорий. Некоторые

из них удивительным образом отличаются от привычного евклидова мира. Например, сумма внутренних углов треугольника на сфере может быть 270° . . .

Эти размышления имели такое влияние на умы математиков, что Карл Гаусс занимался триангуляцией (съемкой местности), чтобы посчитать сумму внутренних углов и экспериментально проверить, какая геометрия лучше описывает нашу реальность.

Евклидов мир и схемы рассуждений, которые были описаны еще Аристотелем, казались незыблемыми. Но так ли это? «Брадобрей бреет всех, кто не бреется сам. Бреет ли он себя?» И положительный, и отрицательный ответ здесь нехороши. Этот и другие парадоксы начала века показали — что-то не так с самой логикой и схемой построения математических теорий. Разных «математик» становилось все больше — нестандартный анализ, неархимедовы теории, некоммутативный анализ, . . .

Если до XX века исследователи, проводя рассуждения, имели надежду разобраться «как же все устроено на самом деле», то сейчас произвола и свободы творчества стало намного больше. «В одних теориях это так, а в других совсем иначе», — все чаще можно услышать в ответ, — «Выбирайте, что вам больше подходит». Так же как Алиса в сказке Кэрролла, оказавшись в Зазеркалье, математики увидели много разных миров, среди которых можно либо выбрать свой, самый уютный и красивый, и провести в нем жизнь, либо создать иной, либо скитаться, переходя из одной математической вселенной в другую . . .

Посмотрим на развитие большинства наук: *удивление* → *поиски и идеи* → *отдельные задачи и эксперименты* → *теории* → *возможности приложений результатов* → *выход на технологии, инженерные решения, отрасли промышленности*. Никого не удивляет, что эта схема относится к аэродинамике, превратившейся за столетие из фундаментальной науки в ремесло, к органической химии, оптике, ко многим другим наукам, породившим технологии.

Однако точно то же относится и к математике! Путь от классической логики через идеи Тьюринга, Поста, Черча к системному программированию, а от них к созданию огромной отрасли промышленности, занятой производством компьютеров и разработкой программ, оказался пройден удивительно быстро.

Развитие абстрактных математических, вначале «вычислительных», идей открыло путь человечеству в виртуальную реальность.

Наряду со специалистами по компьютерным наукам (computer science) в западных университетах готовят компьютерных инженеров (computer engineering). И масштаб, и значение этой отрасли оказались очень велики. В настоящее время Индия экспортирует программное обеспечение на 40 миллиардов долларов в год. Это всего лишь в два с небольшим раза меньше, чем стоимость экспорта российской нефти и в 5 раз больше, чем цена экспорта российского оружия.

Способность страны производить надежное и эффективное программное обеспечение является очень важной, становится стратегическим фактором. Например, программа полномасштабной системы противоракетной обороны и «звездных войн», провозглашенная Рональдом Рейганом, по счастью, не была реализована (щит и меч следует рассматривать в комплексе). Причин для этого было несколько, но одной из ключевых стало осознание, что создание соответствующего программного комплекса потребовало бы нескольких миллионов человеко-лет работы квалифицированных программистов.

В связи с развитием компьютерной промышленности и программной индустрии возникает множество новых и необычных задач, о которых стоило бы рассказать отдельно.

Однако весьма возможно, мы станем свидетелями и участниками создания еще одной гигантской отрасли, сравнимой по масштабу с компьютерной индустрией, в основе которой лежит ряд математических идей. Эту отрасль можно назвать «когнитивной промышленностью» [15]. В самом деле, компьютеры помогают нам сегодня вычислять, обеспечивать связь, осуществлять заказ билетов, решать задачи логистики и, конечно, развлекаться. Однако их роль в принятии решений, в анализе и осмыслении доступной нам информации, в выдвижении и проверке гипотез пока остается очень малой. Мы смогли поручить им лишь наиболее простую и хорошо формализованную часть интеллектуальной работы.

Если нам не удастся добиться большего, то это может оказаться одним из ключевых препятствий на пути прогресса. В самом деле, человек в состоянии следить всего за 5–7 медленно меняющимися параметрами. Принимая решение, он сможет учесть лишь 5–7 факторов. Наконец, содержательно, по существу, он может взаимодействовать только с 5–7 людьми (с остальными опосредованно, или действуя стандартно).

Во многих случаях этого недостаточно. Надо понять, какие тех-

нологии выявления закономерностей, обучения, распознавания образов (все это называется *когнитивными технологиями*) использует человек, и научить этому компьютеры.

Судя по всему, основы для этого уже заложены. Множество примеров здесь дают задачи медицинской диагностики. Судя по учебникам, постановка диагноза многих заболеваний требует учета более 400 симптомов, результатов анализов, факторов. Человек не мыслит в пространствах такой размерности и, тем не менее, во многих случаях действует крайне успешно.

Каковы же его «решающие правила» — итог его профессиональной деятельности? Во множестве случаев врач сам их не осознает, они остаются «скрытым», «интуитивным» знанием. В научной школе сотрудника ИПМ, академика И. М. Гельфанда, были созданы алгоритмы, позволяющие выявить это знание, научить ему компьютер и сделать достоянием всех [16]. По-видимому, очень скоро компьютеры станут намного более «толковыми» помощниками, чем сейчас.

Однако одна из самых удивительных черт математики — это возможность придумывать и вводить удивительные объекты, которые со временем начинают преображать реальность. Эйнштейн подчеркивал универсальность математики как инструмента физика. Один из создателей квантовой механики — Е. Вигнер обращал внимание на ее непостижимую эффективность в естественных науках. Академик В. И. Арнольд вообще считал ее частью физики. Но мы сейчас можем осознать, что это инструмент является не только средством для понимания, но и для преобразования, конструирования реальности.

Классикой в этом отношении стала машина Тьюринга. Модель выполнения *любых* формализованных алгоритмов оказалась удивительно простой — бесконечная лента с написанными символами 0, 1 и знаком останова; головка, которая считывает символы и в зависимости от своего внутреннего состояния (тоже принадлежащего конечному набору) сдвигается вдоль ленты или меняет написанный на ней знак. Удивительно просто. Более того, все такие «машины» оказалось возможным пронумеровать [17].

И эта модель, начиная с некоторого уровня сложности, может стать *универсальной вычислительной машиной*, которая считывает записанную на ленте программу, выполняет ее, а затем записывает полученный результат на ленту. Эта модель позволила увидеть задачи, которые *не могут* быть решены в результате выполнения фиксированного числа действий некоторого алгоритма.

В этой простейшей, но очень глубокой модели вычислений содержалось в зародыше будущее развитие вычислительной техники. Все компьютеры — от калькуляторов до суперкомпьютеров и кластеров — представляют собой несовершенное воплощение машины Тьюринга. Когда электроника предложила подходящие материалы и схемы для реализации такого проекта, вычислительная техника двинулась вперед семимильными шагами. Однако основополагающая идея, обеспечивающая развитие, была выдвинута математиками.

Появление компьютеров расширило рамки возможного в математике, физике, химии, биологии, экономике, во многих других науках. И вновь возник вопрос, каковы же эти рамки? Какие задачи «с компьютерной точки зрения» являются простыми (которые можно либо достаточно быстро решить, либо доказать их неразрешимость), а какие сложными, для которых сделать то или другое достаточно трудно.

В ходе размышлений над этими проблемами родилась *концепция сложности алгоритма*. Пусть объем входных данных N , а для получения результата нужно произвести $f(N)$ действий. Асимптотика этой функции при больших N и определяет сложность алгоритма. Простые задачи — те, в которых $f(N)$ растет не быстрее степенной функции N^α при $N \rightarrow \infty$, где α — константа, зависящая от алгоритма. Приведем два примера.

Простая задача — сложить два N -значных числа. Она требует порядка N действий — зависимость $f(N)$ линейна.

Сложная задача, часто называемая *задачей коммивояжера*. На плоскости расположено N точек. Следует найти кратчайший маршрут, который проходит через все эти точки. Доказывается, что в такой постановке требуется полный перебор. Сколько же всего возможных маршрутов? Первый пункт мы можем выбрать N способами, второй $N - 1$ и т. д. В итоге по формуле Стирлинга

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N} \sim \exp[(N + 1/2) \ln N - N].$$

Поскольку $N^\alpha = \exp(\alpha \ln N)$, в задаче коммивояжера число вариантов растет при $N \rightarrow \infty$ быстрее любой степени N .

Ну, а теперь можно привести новый математический объект, который был введен М. Хеллманом и У. Диффи, и произвел революцию в криптографии.

Шифровал свои сообщения еще Юлий Цезарь. С тех пор придумано было очень много. Но неизменно, узнав алгоритм шифрования,

мы могли прочитать зашифрованное сообщение, если уже оно попало нам в руки. И в любом случае прочесть сообщение, которые мы сами зашифровали.

Но американские исследователи обратили внимание еще на одну удивительную возможность — *функцию с секретом* k — F_k [18, 19]. Для нее

- существует полиномиальный алгоритм нахождения значения $F_k(x)$ для любых k и x ;
- не существует полиномиального алгоритма вычисления $F_k^{-1}(y)$ (где F_k^{-1} — обратная функция $y = F_k(x)$, $x = F_k^{-1}(y)$) при неизвестном k ;
- существует полиномиальный алгоритм вычисления $F_k^{-1}(y)$ при известном k .

Допустим, мы хотим получать от своих абонентов секретную информацию по открытым, доступным всем каналам, например, по интернету. Мы знаем секрет k , и всем своим адресатам передаем F_k (не сообщая k).

Они с легкостью (за полиномиальное по N , где N — длина сообщения, время) шифруют сообщение x и передают $F_k(x)$ по открытому каналу. Пусть те, кто интересуется перепиской, перехватывают сообщение $F_k(x)$, но расшифровка его (об этом следует позаботиться) без знания k может потребовать работы всех компьютеров планеты в течение времени, превышающем срок существования Вселенной. Мы вообще можем предоставить $F_k(x)$ всем желающим. Заметим, что сам, зашифровавший текст x , тоже не сможет прочесть его!

Для нас же это не составит труда — любое присланное сообщение будет расшифровано за полиномиальное время, так как мы знаем секрет k .

При наличии односторонних функций — функций с секретом — у нас появляются удивительные возможности. Например, мы можем играть в орлянку по телефону. Один бросает монету, которая выпадает орлом (ему сопоставляем нечетное число) или решкой (четное число).

Пусть у нас есть односторонняя функция $y = f(x)$. При этом $f(x) = f(y)$, если x и y имеют одинаковую четность.

Последующий алгоритм (его называют схемой Блюма — Микали) таков:

- A выбирает большое число x , вычисляет $y = f(x)$ и высылает y B (в криптографии A часто называют Алисой, B — Бобом);

- B получает y и высылает свою догадку A ;
- A получает догадку B и говорит, угадал ли он, и посылает B число x ;
- B проверяет, не обманывает ли его A , вычисляя $f(x)$ и сравнивая с y .

Подобные схемы и алгоритмы обеспечивают электронную подпись, разделение общего секрета (когда N человек имеют часть ключа, но открыть замок можно только если M человек хотят это сделать), подписание контрактов.

Односторонние функции породили криптографию с открытым ключом, сделали доступным для многих то, что раньше считалось прерогативой военных, дипломатов, политиков. Они позволили создать новую математическую вселенную.

Вероятно, XXI век преподнесет математикам много удивительных подарков, волнующих проблем, новых математических миров.

В заключение выражаю глубокую признательность Анатолию Георгиевичу Кусраеву, Вере Сергеевне Абатуровой, Геннадию Владимировичу Демиденко, Евгению Самойловичу Каменецкому, всем участникам замечательной VIII региональной школы-конференции для молодых ученых «Владакавказская молодежная математическая школа» за прекрасную творческую атмосферу, интересные обсуждения и научную романтику.

Благодарен Вере Комаровой, Андрею Подлазову и Дмитрию Фаллеру за помощь в оформлении этого текста.

Литература

1. Арнольд В. И. Полиматематика: является ли математика единой наукой или набором ремесел // Математика: границы и перспективы / Пер. с англ. под ред. Д. В. Аносова, А. Н. Паршина.—М.: ФАЗИС, 2005.—С. 1–18.
2. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего, изд. 3-е.—М.: Едиториал УРСС, 2003.—288 с.
3. Будущее прикладной математики. Лекции для молодых исследователей / Под ред. Г. Г. Малинецкого.—М.: Едиториал УРСС, 2005.—512 с.
4. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики.—М.: Наука, 1973.—351 с.
5. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах.—М.: Постмаркет, 2000.—352 с.
6. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.—488 с.
7. Режимы с обострением: эволюция идеи / Под ред. Г. Г. Малинецкого, изд. 2-е.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.—312 с.
8. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.—М.: Мир, 1980.—608 с.

9. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.—М.—Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2002.—560 с.
10. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент, изд. 5-е.—М.: Изд-во ЛКИ, 2007.—312 с.—(Синергетика: от прошлого к будущему).
11. Мухин Р. Р. Очерки по истории динамического хаоса: Исследования в СССР в 1950-е — 1980-е годы / Предисл. Г. М. Заславского, В. П. Визгина, Г. Г. Малинецкого, изд. 2-е, перераб.—М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.—320 с.—(Синергетика: от прошлого к будущему, № 63).
12. Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика: Путь к целостной простоте, изд. 2-е.—М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.—304 с.—(Синергетика: от прошлого к будущему).
13. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы.—М.: Мир, 2007.—723 с.
14. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло.—М.: Наука, 1973.—312 с.
15. Малинецкий Г. Г., Митин Н. А., Маненков С. К., Шишов В. В. Когнитивный вызов и информационные технологии // Вестник РАН.—2011.—Т. 81, № 8.—С. 707–716.
16. Котов Ю. Б. Новые математические подходы к задачам медицинской диагностики.—М.: Едиториал УРСС, 2004.—328 с.—(Синергетика: от прошлого к будущему).
17. Пенроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики / Предисл. Г. Г. Малинецкого, изд. 4-е.— М.: Изд-во ЛКИ, 2011.—400 с.—(Синергетика: от прошлого к будущему).
18. Введение в криптографию / Под общ. ред. В. В. Яценко, изд. 3-е.—М.: МЦНМО «ЧеРо», 2000.—288 с.
19. Мао В. Современная криптография: теория и практика.—М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.—768 с.

APPLIED MATHEMATICS AT TURN OF XXI CENTURY

G. G. Malinetskii

In the paper written for graduate students and young researches the results of the most important ideas of applied mathematics in XX century are presented. A number of tendencies that will probable determine the prospects for this area in the XXI century are discussed.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ¹

В. Г. Цибулин²

Молодежные математические школы направлены на то, чтобы помочь молодому исследователю освоить те разделы математического знания, которые еще не стали каноническими. Чтобы справиться с обилием научной литературы, нужно хорошо знать классику, читать труды основоположников, включая работы великих современников — Владимира Игоревича Арнольда [1, 2], Александра Андреевича Самарского [3, 4] и других математиков. Таков проверенный жизнью рецепт.

Этот короткий цикл лекций — попытка рассказать о некоторых методах нелинейной динамики и математического моделирования, опираясь на работы Виктора Иосифовича Юдовича (1934–2006 гг.). Глубокий математик и механик, создатель Ростовской школы математической гидродинамики В. И. Юдович получил важные результаты в теории гидродинамической устойчивости и математического моделирования [5–8], написал прекрасные учебники по дифференциальным уравнениям, математической физике и математическим моделям естественных наук [9–11].

Об устойчивости решений дифференциальных уравнений. При исследовании динамических систем эффективным методом является линеаризация, В. И. Юдович подчеркивал, что линеаризация — это и процесс и метод. Начнем с устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений [9]. Задачу Коши на прямой

$$\dot{u} = f(u), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{(\cdot)} = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$$

можно проинтегрировать, но проще анализировать динамику, найдя равновесия (стационарные решения) u_* , такие что $f(u_*) = 0$, и определив их устойчивость. Для этого записываем уравнение в возмущениях, положив $u(t) = u_* + v(t)$:

$$\dot{v} = f'(u_*)v + o(v).$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00708.

²Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Предполагая малость v , будем судить о неустойчивости (устойчивости) решения u_* по росту (убыванию) возмущения для линейного уравнения

$$\dot{v} = f'(u_*)v.$$

Для уравнения первого порядка знак $f'(u_*)$ определяет устойчивость равновесия u_* : при $f'(u_*) > 0$ возмущение растет, что означает неустойчивость, а при $f'(u_*) < 0$ получается убывание возмущения и устойчивость равновесия u_* . В случае системы ($u(t)$ — вектор, $f(u)$ — вектор-функция), устойчивость равновесия определяется по спектру — собственным числам матрицы Якоби (матрицы линеаризации) $\nabla_u f(u_*)$. Устойчивым будет равновесие, в спектре которого нет собственных значений с вещественной правой частью.

Для начала рассмотрим логистическое уравнение, моделирующее ограничение роста популяции ($u(t)$ — численность, вес или объем популяции) при приближении к предельной численности $u(t) = 1$:

$$\dot{u} = u(1 - u) = f(u), \quad u(0) = u_0.$$

Стационарными решениями (равновесиями) являются точки $u = 0$ и $u = 1$. Производная правой части уравнения есть $f'(u) = 1 - 2u$. Равновесие $u = 0$ неустойчиво, так как $f'(0) = 1 > 0$, а равновесие $u = 1$ устойчиво ($f'(1) = -1 < 0$). Знание равновесий и их устойчивости позволяет судить о динамике при любых начальных значениях u_0 : популяция растет при $0 < u_0 < 1$ и убывает при $1 < u_0 < \infty$. Таким образом, анализ устойчивости равновесий — первый шаг анализа глобальной динамики нелинейного уравнения.

В следующем примере проанализируем систему второго порядка, исследование динамики подобных систем включено в практикум по курсу «Математические модели естественных наук» на мехмате ЮФУ (бывший Ростовский университет). Рассматривается натуральная механическая система (лагранжиан равен разности кинетической и потенциальной энергий)

$$L = T - V, \quad T = \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad V = (\lambda - 1)\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Далее записывается уравнение Лагранжа второго рода с учетом диссипации

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = -q, \quad q = \mu \dot{x}(1 - x^2).$$

В результате получается система двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -(\lambda - 1)x - x^3 - \mu y(1 - x^2),\end{aligned}$$

равновесиями которой будут 1) $x = y = 0$, 2) $x_{\pm} = \pm\sqrt{1-\lambda}$, $y = 0$ (при $\lambda < 1$). Для анализа устойчивости равновесий вычислим матрицу Якоби

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \lambda - 3x^2 - 2\mu yx & -\mu(1 - x^2) \end{pmatrix}.$$

Матрица линеаризации получается при подстановке в J координат равновесия. Для $x = y = 0$ матрица линеаризации имеет характеристический многочлен $P(\sigma) = \sigma^2 + \mu\sigma + \lambda - 1 = 0$. По критерию Стодоль равновесие $x = y = 0$ устойчиво при $\lambda > 1$ и $\mu > 0$. На границе области устойчивости $\lambda = 1$ происходит обмен устойчивостью равновесия $x = y = 0$ с рождающимися при $\lambda = 1$ равновесиями $x_{\pm} = \pm\sqrt{1-\lambda}$, $y = 0$. На границе $\mu = 0$ пара комплексных чисел пересекает мнимую ось, происходит бифуркация Хопфа и рождается автоколебательный режим — предельный цикл.

Имея информацию о равновесиях и их устойчивости, проще приступить к вычислительному эксперименту по анализу динамики исходной системы [11]. Нестационарные режимы при различных значениях параметров можно найти, используя универсальные пакеты Maple или MATLAB (см., например, [12]) или специальные программы исследования динамических систем.

1. Исследование устойчивости решений нелинейных задач математической физики. В лекции дан вывод уравнения струны из системы, описывающей движение гибкой нерастяжимой нити (см. [8, 11]). Нить — это деформируемое твердое тело, у которого один из размеров много больше двух других. Недеформированное состояние нити — отрезок $[0, \ell]$ на вещественной оси, ℓ — длина. Положение нити в момент времени t есть отображение $x : [0, \ell] \rightarrow R^3$, далее нас интересует нахождение функции $x(s, t)$. Условие нерастяжимости означает, что длина дуги нити между близкими точками не меняется в ходе движения

$$x'^2 = 1. \tag{1}$$

Здесь штрихом обозначена производная по s .

Нить — натуральная механическая система ($L = T - V$), ее кинетическая и потенциальная энергии есть

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho \dot{x}^2 ds, \quad V = - \int_0^\ell \rho x \cdot g ds, \quad (2)$$

где $\rho(s)$ — линейная плотность. Для модели абсолютно гибкой нити нет внутренней потенциальной энергии (сжатие, растяжение, изгиб не учитываются) и нет иных внешних сил, кроме силы тяжести (g — вектор ускорения).

Из принципа Гамильтона в [8] выведено уравнение движения нити

$$\rho \ddot{x} = (\lambda x')' + \rho g. \quad (3)$$

Неизвестная функция $\lambda(s, t)$ возникает как параметр Лагранжа и физически означает натяжение. Система (1), (3) должна быть дополнена начальными и краевыми условиями.

Следуя [11], получим линейное уравнение струны, которое описывает бесконечно малые колебания нити около ее прямолинейной формы равновесия. Будем считать плотность постоянной по длине нити $\rho(s) = 1$ и пренебрежем силой тяжести. Считаем, что левый конец нити ($s = 0$) закреплен, а правый — растягивается силой в направлении оси x_1 . Система уравнений

$$\ddot{x} = (\lambda x')', \quad x'^2 = 1, \quad (4)$$

и краевых условий

$$x|_{s=0} = 0, \quad x_2|_{s=\ell} = 0, \quad x_3|_{s=\ell} = 0, \quad \lambda x'_1|_{s=\ell} = T \quad (5)$$

имеет стационарное решение, отвечающее прямолинейной форме равновесия нити: $x_1 = s$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 0$, $\bar{\lambda} = T$. Для произвольного решения (x, λ) положим

$$x = \bar{x} + u, \quad \lambda = \bar{\lambda} + \mu, \quad (6)$$

где $\bar{x} = (s, 0, 0) = s\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ — координатный орт оси x_1), $\bar{\lambda} = T$. Вектор-функция $u(s, t)$ называется возмущением формы равновесия $\bar{x}$, а функция $\mu(s, t)$ — возмущением продольного усилия $\bar{\lambda} = T$.

Подставляя выражения (6) в уравнения и краевые условия (5), получим нелинейную систему для возмущений u , μ

$$\ddot{u} = (Tu' + \mu \dot{\mathbf{i}} + \mu u')', \quad 2u'_1 + u'^2 = 0, \quad (7)$$

$$u|_{s=0} = 0, \quad u_2|_{s=\ell} = 0, \quad u_3|_{s=\ell} = 0, \quad \mu + (T + \mu)u'_1|_{s=\ell} = 0. \quad (8)$$

Эти уравнения имеют тривиальное решение $u = 0$, $\mu = 0$.

Линеаризуем систему (7). В каждом из этих уравнений оставим лишь линейные члены, а нелинейные относительно μ и u , например, $\mu u'$, u'^2 и т. п., отбросим

$$\ddot{u} = (Tu' + \mu \dot{\mathbf{i}})', \quad u'_1 = 0, \quad (9)$$

$$u|_{s=0} = 0, \quad u_2|_{s=\ell} = 0, \quad u_3|_{s=\ell} = 0, \quad \mu + Tu'_1|_{s=\ell} = 0. \quad (10)$$

Из (9) следует, что u_1 не зависит от s и $u_1 \equiv 0$. Уравнение движения (9) в координатной форме примет вид

$$0 = \mu', \quad \ddot{u}_2 = Tu''_2, \quad \ddot{u}_3 = Tu''_3. \quad (11)$$

Из первого уравнения (11) и краевого условия (10) получаем $\mu = 0$, так что в принятом приближении сила натяжения нити остается равной T .

Второе и третье уравнения (11) имеют одну и ту же форму — это уравнение поперечных колебаний струны

$$\ddot{u} = c^2 u'', \quad c^2 = \frac{T}{\rho},$$

здесь c — скорость распространения поперечных волн.

Таким образом, уравнение струны получается в результате процесса линеаризации исходной нелинейной задачи для гибкой нити. Если решение линеаризованной системы неограниченно возрастает со временем, то очевидно, что исходное предположение о малости отброшенных слагаемых нарушается. Во многих случаях удается строго доказать — для обыкновенных дифференциальных уравнений это сделал А. М. Ляпунов, — что рост решений линеаризованной системы означает неустойчивость основного решения полной системы [8].

Выше предполагалось, что нить растягивается внешней нагрузкой и $T > 0$. Когда внешняя сила сжимает нить ($T < 0$), вместо

гиперболического уравнения струны получается (пусть $\rho = \text{const}$) уравнение эллиптического типа

$$\ddot{u} + ku'' = 0, \quad k = -\frac{T}{\rho} > 0.$$

Задача Коши для уравнения Лапласа некорректна. Даже для C^∞ -гладких начальных функций $u|_{t=0} = u_0(s)$, $\dot{u}|_{t=0} = v_0(s)$ решение, если и существует, то малейшее начальное возмущение чрезвычайно быстро по времени возрастает и за конечное время уходит на бесконечность. Это показывает, что сжатая нить неустойчива, сама модель заявляет о своей неадекватности. К корректной задаче можно прийти, если учесть сопротивление реальной нити изгибу.

2. Вычислительный эксперимент в задачах конвективно-го переноса. Новым разделом математической физики стала теория косимметрии В. И. Юдовича [7, 13]. Термин «косимметрия» появился в результате попытки объяснить нетривиальное рождение непрерывного семейства стационарных решений в плоской задаче фильтрационной конвекции [14]. Для жидкости в подогреваемой емкости гравитационная конвекция начинается, когда превышено критическое значение градиента температуры. При этом в зависимости от размеров емкости и начальных возмущений получается конечное число стационарных движений в виде нескольких конвективных валов. Например, в квадратной емкости могут реализовываться движения в виде одного вала, направленного слева вверх или справа вверх.

Для модели Дарси, описывающей движение жидкости, насыщающей пористую среду, получается, что при потере устойчивости состоянием механического равновесия (жидкость в покое) рождается континуальное семейство стационарных режимов. Обычно это является следствием существования у задачи непрерывной группы симметрии [15, 16], но в таком случае все стационарные решения имеют одинаковый спектр устойчивости. Косимметрия объясняет возникновение семейств стационарных решений с переменным (индивидуальным) спектром, т. е. семейств, не обусловленных наличием симметрии.

Плоская задача фильтрационной конвекции Дарси описывается уравнениями в частных производных относительно функции тока ψ (горизонтальная и вертикальная скорости жидкой частицы выражаются по формулам $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$) и отклонения температуры

от равновесного профиля θ (добавка к линейному по высоте профилю температуры)

$$\theta_t = \Delta\theta + \lambda\psi_x - J(\theta, \psi) \equiv F, \quad J(\theta, \psi) = \theta_x\psi_y - \theta_y\psi_x, \quad (12)$$

$$0 = \Delta\psi - \theta_x \equiv G, \quad \theta|_{\partial D} = 0, \quad \psi|_{\partial D} = 0. \quad (13)$$

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y). \quad (14)$$

Фильтрационное число Рэлея λ пропорционально градиенту температуры, характеризующему степень подогрева. Нулевое равновесие (состояние механического покоя) $\theta = \psi = 0$ является решением задачи (12)–(14).

В. И. Юдович [13, 14] показал, что задача (12)–(14) обладает косимметрией $L\theta = \psi = G\theta_x$, т. е.

$$\int_{\mathcal{D}} F\psi \, dx \, dy = 0.$$

Задача (12)–(14) глобально разрешима, и при малых значениях фильтрационного числа Рэлея λ нулевое равновесие устойчиво. В. И. Юдович [13, 17] доказал, что первое критическое значение λ_{11} линеаризованной задачи (12)–(13)

$$0 = \Delta\theta + \lambda\psi_x, \quad 0 = \Delta\psi - \theta_x, \quad \theta|_{\partial D} = 0, \quad \psi|_{\partial D} = 0$$

для произвольной области двукратно, и при переходе параметра λ через λ_{11} от механического равновесия ответвляется семейство стационарных режимов. Это семейство для односвязной области имеет переменный спектр, что отличает косимметричную ситуацию от симметричной. Каждому переходу λ через последующие критические значения λ_{mn} соответствует бифуркация рождения семейства неустойчивых стационарных режимов. Для прямоугольной области $\mathcal{D} = [0, a] \times [0, b]$ критические значения имеют аналитическое выражение $\lambda_{nm} = 4\pi^2 (n^2/a^2 + m^2/b^2)$.

При дискретизации уравнений фильтрационной конвекции важно сохранять дискретные аналоги интегральных тождеств. Построение расчетных схем для вычисления семейств стационарных решений требует дополнительных усилий. Первые результаты были получены в [18] на основе метода Галеркина. Реализация схемы метода конечных разностей, сохраняющей косимметрию задачи фильтрационной конвекции, дана в [19].

3. Анализ устойчивости и бифуркаций в моделях пространственно-распределенных популяций. Теория косимметрии оказалась полезна и при анализе динамики популяций [20–23]. В качестве предваряющего примера рассмотрим простой случай двух неантагонистических популяций с единым жизненным ресурсом. Соответствующая система уравнений обобщает логистическую модель

$$\dot{u}_1 = \eta_1 u_1 (1 - u_1 - u_2), \quad (15)$$

$$\dot{u}_2 = \eta_2 u_2 (1 - u_1 - u_2), \quad (16)$$

здесь η_1 и η_2 — коэффициенты роста. Равновесиями системы являются: 1) изолированная точка $u_1 = 0, u_2 = 0$, 2) семейство (прямая из точек) $1 = u_1 + u_2$.

Для анализа устойчивости нужно вычислить матрицу Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \eta_1(1 - 2u_1 - u_2) & -\eta_1 u_1 \\ -\eta_2 u_1 & \eta_2(1 - u_1 - 2u_2) \end{pmatrix}.$$

Матрица линеаризации на равновесии $u_1 = 0, u_2 = 0$ имеет спектр $\sigma_1 = \eta_1, \sigma_2 = \eta_2$, так что это равновесие неустойчиво при положительных коэффициентах роста. Для семейства равновесий $1 = u_1 + u_2$ получаем одно нулевое собственное значение $\sigma_{\top} = 0$, отвечающее собственному вектору, направленному вдоль семейства, и второе собственное значение $\sigma_{\perp} = -\eta_1 u_1 - \eta_2 u_2 = \eta_2 + (\eta_2 - \eta_1)u_1$, соответствующее трансверсальному к семейству направлению.

Косимметрией системы является вектор $(\eta_2 u_2, -\eta_1 u_1)$. Семейство решений образует прямую ($u_1 + u_2 = 1$), спектр устойчивости равновесий меняется от точки к точке. Бесконечномерное обобщение этой системы с бесконечным числом решений (семейство стационарных распределений) дано в работе [23].

4. Проблемы гидродинамической устойчивости. На рубеже 21-го столетия рядом выдающихся математиков и механиков была предпринята попытка перечислить фундаментальные проблемы современной науки. Среди актуальных тем были отмечены проблема описания турбулентности, доказательство теорем существования решений основных уравнений гидродинамики. Это именно то, чем занимался В. И. Юдович, поэтому так ценны обзорные работы [24–26], в которых В. И. Юдович попытался передать свое видение проблем гидродинамики, перечислить задачи гидродинамической теории устойчивости начала третьего тысячелетия.

Следует отметить, что проблема «Существование и гладкость ре-

шений уравнений Навье — Стокса» указана под номером три в перечне семи математических задач тысячелетия (Millennium Prize Problems) Математического института Клэя (<http://www.claymath.org/>). Задачи тысячелетия были сформулированы в 2000 г. и являются «важными классическими задачами, решение которых не найдено вот уже в течение многих лет», за решение каждой из этих проблем институтом Клэя предложен приз в миллион долларов США.

Закключение. Мощь математики заключается в том, что идеи, методы и результаты из одной области часто помогают и в смежных (иногда далеких) областях. Уравнениями параболического типа описываются и процессы распространения тепла, и диффузия примеси, и динамика популяций. Соответственно, методы, разработанные для решения одного класса задач, можно использовать и для анализа других проблем. В данном цикле из нескольких лекций указан один из возможных вариантов освоения аппарата исследования нелинейных задач математического моделирования.

Литература

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.—М.: Наука, 1989.—472 с.
2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.—Ижевск: ИРТ, 2000.—368 с.
3. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование.—М.: Наука, 2007.
4. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные диссипативные структуры и диффузионный хаос.—М.: Наука, 1992.—541 с.
5. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.—192 с.
6. Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Юдович В. И. Математическая теория электрофореза.—Киев: Наукова думка, 1983.—202 с.
7. Куракин Л. Г., Юдович В. И. Устойчивость и бифуркации в системах с косимметрией.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2009.—230 с.
8. Юдович В. И. Избранные труды.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2009.— Т. 1–3.
9. Есипов А. А., Сазонов Л. И., Юдович В. И. Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1989.—336 с.; изд. 2-ое.—М.: Вузовская книга, 2001.—396 с.
10. Юдович В. И. Лекции об уравнениях математической физики.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1998–1999.—Ч. 1–2.
11. Юдович В. И. Математические модели естественных наук.—СПб.: Лань, 2011.—336 с.
12. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Компьютер в математическом исследовании.—СПб.: Питер, 2001.—624 с.

13. Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, № 5.—С. 142–148.
14. Любимов Д. В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ.—1975.—№ 2.—С. 131–137.
15. Dorodnitsyn V. A. Applications of Lie Groups to Difference Equations.— New York: Chapman and Hall/CRC, 2010—344 p.
16. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations.—Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.—661 p.
17. Yudovich V. I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos.—1995.—Vol. 5.—P. 402–411.
18. Говорухин В. Н. Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // Докл. РАН.—1998.—Т. 363, № 6.—С. 772–774.
19. Karasözen B., Tsybulin V. G. Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Lett. A.—1999.—Vol. 262.—P. 321–329.
20. Frischmuth K., Tsybulin V. G. Families of equilibria and dynamics in a population kinetics model with cosymmetry // Phys. Lett. A.—2005.—Vol. 338.—P. 51–59.
21. Ковалева Е. С., Цибулин В. Г., Фришмут К. Динамика модели популяционной кинетики с косимметрией // Мат. моделирование.—2008.—Т. 20, № 2.—С. 85–92.
22. Ковалева Е. С., Цибулин В. Г., Фришмут К. Семейство стационарных режимов в модели динамики популяций // Сиб. журн. индустр. мат.—2009.—Т. 12, № 1 (37).—С. 98–108.
23. Будянский А. В., Цибулин В. Г. Моделирование пространственно-временной миграции близкородственных популяций // Компьютерное исслед. и моделирование.—2011.—Т. 3., № 4.—С. 477–488.
24. Юдович В. И. О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики // Успехи механики.—2002.—Т. 1, № 1.—С. 61–102.
25. Юдович В. И. Глобальная разрешимость — против коллапса в динамике несжимаемой жидкости // Мат. события XX века.—М.: Фазис, 2002.—С. 519–548.
26. Yudovich V. I. Eleven great problems of mathematical hydrodynamics // Moscow Math. J.—2003.—Vol. 3, № 2.—P. 711–737. Юдович В. И. Одиннадцать великих проблем математической гидродинамики // Избранные труды.—2009.—Т. 3.—С. 54–86.

MATHEMATICAL MODELING AND NONLINEAR DYNAMICS

V. G. Tsybulin

The lectures consider several approaches to nonlinear studies and are based on the works of the famous mathematician V. I. Yudovich. Stability of solutions for differential equations, a short introduction to cosymmetry theory and references on some open problems are given.

ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА И СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ
ПОКАЗАТЕЛЕМ И КОМБИНИРОВАННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ
ФОРМУЛЫ¹

И. И. Шарапудинов²

1. Введение

Пусть E — произвольное множество, на котором задана мера Лебега $\mu(A)$ ($A \subset E$). Через $L^{p(x)}(E)$ мы обозначим множество измеримых функций $f(x)$, определенных на E и таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} \mu(dx) < \infty,$$

где $p(x)$ — неотрицательная измеримая функция, заданная на E . В случае, если E представляет собой промежуток с концами в точках a и b , где $a < b$, то мы полагаем $L^{p(x)}(a, b) = L^{p(x)}(E)$. Если $1 \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty$ при $x \in E$, то $L^{p(x)}(E)$ является [1] нормированным пространством, в котором одну из эквивалентных норм можно определить с помощью равенства

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} \mu(dx) \leq 1 \right\}. \quad (1.1)$$

Первое упоминание о пространствах $L^{p(x)}(E)$ мы находим еще в работе Орлича [2], опубликованной в 1931 г., в которой он исследовал неравенства типа Гёльдера для пространства l^{p_i} , состоящем из последовательностей $\{x_i\}$ вещественных чисел x_i , для которых $\sum_i |x_i|^{p_i} < \infty$. В качестве примера более общих, так называемых модулярных пространств, $L^{p(x)}(E)$ встречается в работах японских математиков, относящихся к пятидесятым годам (см. [3, 4]). Отметим также, что модулярные пространства функций рассматривались

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00191-а.

²Россия, Махачкала, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

в ряде работ польских математиков (см., например, [5, 6] и цитированную там литературу). В работе российского математика И. В. Ценова [7] впервые была рассмотрена задача о критерии для полинома $Q_n^*(x)$, который доставляет минимум интегралу

$$\int_a^b |f(x) - Q_n(x)|^{p(x)} dx$$

среди всех полиномов вида $Q_n(x) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$, где $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ — линейно независимая система непрерывных функций, заданных на $[a, b]$, причем $f(x)$ и $p(x)$ также непрерывны. Систематическое и целенаправленное исследование топологии пространств $L^{p(x)}(E)$ как таковых впервые было дано в работе автора [1], которая уже упоминалась выше. В работе [8] было доказано, что система Хаара является базисом пространства $L^{p(x)}(0, 1)$ тогда и только тогда, когда переменный показатель $p(x)$ при $x, y \in [0, 1]$ удовлетворяет условию Дини — Липшица

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x - y|} \leq c, \quad (1.2)$$

а в [9] было доказано, что если для 2π -периодического показателя $p(x) \geq 1$ на $[-\pi, \pi]$ выполнено условие (1.2), то некоторые семейства операторов свертки равномерно ограничены в $L^{p(x)}(-\pi, \pi)$. Сюда, в частности, относятся классические семейства операторов Фейера, Абеля — Пуассона, Стеклова и др.

Следует отметить, что в последние годы теория пространств $L^{p(x)}(E)$ получила интенсивное развитие в работах многих авторов (см. [10] и цитированную там литературу, которая уже насчитывает более 300 пунктов). При этом заметим, что наиболее важные результаты, полученные в указанных работах, связаны с условием Дини — Липшица (1.2), обнаруженным впервые в работах автора [8] и [9]. Дальнейшее существенное развитие теории и приложений пространств $L_\mu^{p(x)}(E)$ в первую очередь связано с работами российского математика Жикова [11–13] и молодого немецкого математика Ларса Дининга (Lars Diening) [14–16]. В [11–13] было показано, что пространства $L_\mu^{p(x)}(E)$ естественным образом возникают в связи с важными задачами многомерного вариационного исчисления, в которых рассматриваются интегральные функционалы с так называемым

нестандартным ростом подынтегральных выражений. Это способствовало в дальнейшем значительному росту интереса к теории дифференциальных уравнений в частных производных, начальные или граничные условия которых описываются в терминах пространств Соболева $W^{r,p(x)}(E) \subset L_\mu^{p(x)}(E)$ с переменным показателем $p(x)$, где $E \subset \mathbb{R}^n$. (Пространства Соболева $W^{r,p(x)}(E)$ с переменным показателем $p(x)$, которые мы в дальнейшем обозначаем через $W_{p(\cdot)}^r(E)$, впервые были введены в работе автора [17] в связи с задачами теории приближений в пространствах $L_\mu^{p(x)}(E)$. Они определяются точно также, как обычные пространства Соболева $W^{r,p}(E)$ с постоянным показателем p , с той лишь разницей, что вместо классических пространств Лебега $L_\mu^p(E)$, используемых при определении $W^{r,p}(E)$, фигурируют пространства $L_\mu^{p(x)}(E)$, где μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$).

В работах [14, 15] впервые были найдены условия на переменный показатель $p(x)$, соблюдение которых гарантирует ограниченность в нормированном пространстве $L^{p(x)}(E)$ ($E \in \mathbb{R}^n$) оператора максимальной функции Харди — Литлвуда. Как было показано в [14], достаточным и в определенном смысле необходимым условием ограниченности в $L^{p(x)}(E)$ максимального оператора $M = M(f)$ является уже упомянутое нами выше условие (1.2) при $x, y \in E \subset \mathbb{R}^n$. Это очень значительный результат, который позволил в дальнейшем при том же условии (1.2) доказать [15] ограниченность в $L^{p(x)}(E)$ интегральных операторов Кальдерона — Зигмунда и, в частности, ограниченность преобразования Гильберта в $L^{p(x)}(\mathbb{R})$. Опираясь на этот результат, в нашей работе [18] было доказано, что тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ является базисом пространства $L^{p(x)}(0, 2\pi)$ тогда и только тогда, когда 2π -периодическая функция $p(x) > 1$ удовлетворяет условию Дини — Липшица (1.2) при $x, y \in [0, 2\pi]$. А в другой нашей работе [19] было доказано, что система нормированных полиномов Лежандра $\{\hat{P}_n\}$ является базисом в $L^{p(x)}(-1, 1)$, если переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет на $[-1, 1]$ условию (1.2) и некоторому дополнительному условию постоянства в сколь угодно малых окрестностях точек -1 и 1 .

Через $\mathcal{P}_{2\pi}$ обозначим множество всех 2π -периодических переменных показателей $p = p(x) \geq 1$, удовлетворяющих на периоде условию

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{2\pi}{|x - y|} \leq d \quad (x, y \in [0, 2\pi]).$$

Подкласс переменных показателей $p = p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, удовлетворяющих дополнительному условию $p_- > 1$, мы обозначим $\hat{\mathcal{P}}_{2\pi}$. Отметим, что в настоящее время при условии $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$ разработана [20] теория приближения функций тригонометрическими полиномами в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$ и, в частности показано, что при доказательстве прямых и обратных теорем теории приближений снова возникает условие (1.2) на переменный показатель $p(x)$. Дело заключается в том, что результаты и методы, разработанные в [20], почти полностью базируются на свойстве равномерной ограниченности в $L^{p(x)}(0, 2\pi)$ семейства операторов В. А. Стеклова (функций Стеклова) и их сдвигов. Это свойство установлено впервые в работах автора [9] и [18] при условии, когда переменный показатель $p(x) \geq 1$ удовлетворяет условию (1.2). Более того, в [9] доказано, что условие (1.2) не только достаточно, но и в определенном смысле необходимо для равномерной ограниченности в $L^{p(x)}(0, 2\pi)$ семейства функций Стеклова $\{f_h(x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x+t)dt\}_{h>0}$. А с другой стороны, свойства модуля непрерывности $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$, используемого в [20] для доказательства прямых и обратных теорем теории приближений, опираются на равномерной ограниченности в $L^{p(x)}(0, 2\pi)$ семейства сдвигов $\{f_h(x+\tau)\}_{h>0, |\tau| \leq h^\gamma}$, где $0 < \gamma$ — произвольное число.

В связи с рассматриваемой проблемой мы отметим работы [21–26], в которых рассмотрены задачи о получении прямых и обратных теорем теории приближений в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$ при условии, когда переменный показатель $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}_{2\pi}$. Принципиальное отличие результатов, полученных в нашей работе [20] от результатов, полученных в работах [21–26] состоит в том, что при доказательстве прямой и обратной теорем теории приближений в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$ нам удалось избавиться от ограничения $p_- = \min_{x \in \mathbb{R}} p(x) > 1$ и заменить его естественным ограничением $p_- \geq 1$, где, как уже было определено выше, $p_- = \inf\{p(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Что же касается результатов, полученных в работах [21–26], то они получены при условии $p_- > 1$. Следует особо отметить, что это не случайно. Дело в том, что методы, с помощью которых в указанных работах исследованы прямые и обратные задачи теории приближений в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$ или даже в более общих весовых пространствах с переменным показателем $L_{2\pi, \rho}^{p(x)}$, непосредственно или опосредовано используют огра-

ниченность в $L_{2\pi}^{p(x)}$ максимальной функции Харди — Литлвуда $M(f)$ или ограниченность его аналогов и обобщений в весовых пространствах $L_{2\pi,\rho}^{p(x)}$. А это, как хорошо известно, возможно только при условии $p_- > 1$. Например, в работе [21] при условии $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}_{2\pi}$ доказана прямая теорема типа Джексона в $L_{2\pi}^{p(x)}$, опираясь на ограниченность в $L_{2\pi}^{p(x)}$ оператора сопряженной функции и базисность в $L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрической системы, установленных в нашей работе [18], в которой, мы, в свою очередь, пользовались ограниченностью в $L_{2\pi}^{p(x)}$ преобразования Гильберта при условии $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}_{2\pi}$, выведенной в работе [15] из теоремы об ограниченности максимальной функции, доказанной в работе [14].

Для получения прямых и обратных теорем теории приближений в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$, когда переменный показатель $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, удовлетворяющий условию Дини — Липшица (1.2), в некоторых точках может равняться 1 (т. е. $p_- = 1$), потребовалось разработать принципиально новые подходы, не опирающиеся на свойства максимальной функции $M(f)$. В работе [20] эта задача решена в части, касающейся первой теоремы Джексона. Удалось установить, что одним из инструментов доказательства в $L_{2\pi}^{p(x)}$ первой теоремы Джексона является известный оператор Джексона (тригонометрический полином порядка $4n$) $\mathcal{D}_n(f) = \mathcal{D}_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) J_n(t) dt$ ($n = 1, 2, \dots$), где $J_n(x) = \frac{3}{2n(2n^2+1)} \left(\sin \frac{nx}{2} / \sin \frac{x}{2} \right)^4$. Доказано, что $\mathcal{D}_n(f)(x)$ доставляет функции $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$ приближение порядка $O(\Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot)})$, другими словами, при $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$ для $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$ установлена оценка $\|f - \mathcal{D}_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot)}$, из которой вновь вытекает первая теорема Джексона.

В работе автора [17] было показано, что пространства Лебега и Соболева с переменным показателем могут быть использованы при оценке погрешностей квадратурных формул. Мы остановимся на этой задаче более подробно.

2. Некоторые свойства квадратурных формул

Мы приведем здесь некоторые хорошо известные [27] свойства квадратурных формул, которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть отрезок $[a, b]$, на котором задана непрерывная функция $f(x)$,

разбит на части точками

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} \leq b,$$

и пусть заданы неотрицательные числа p_k ($k = 0, \dots, m-1$). Положим

$$L(f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k). \quad (2.1)$$

Тогда приближенное равенство

$$\int_a^b f(x) dx \approx L(f) \quad (2.2)$$

называется квадратурной формулой, определяемой узлами x_k и весами p_k . Если для всех полиномов

$$P_{r-1}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{r-1} x^{r-1}$$

степени $r-1$ ($r \geq 1$) приближенное равенство (2.2) можно заменить точным, то говорят, что формула (2.1) точна для алгебраических полиномов степени $r-1$ и пишут

$$\int_a^b P_{r-1}(x) dx = L(P_{r-1}).$$

Дадим точное выражение для остаточного члена $R_r(f)$ в равенстве

$$\int_a^b f(x) dx = L(f) + R_r(f) \quad (2.3)$$

в том случае, когда $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r(M, 0, 1)$. Разложим эту функцию по формуле Тейлора:

$$f(x) = P_{r-1}(x) + R_r(x), \quad (2.4)$$

где

$$P_{r-1}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt.$$

Полагая

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1}, & \text{если } u \geq 0, \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

можем записать

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t) dt. \quad (2.6)$$

Пусть квадратурная формула $L(f)$ точна для всех полиномов степени $r-1$, тогда $L(P_{r-1}) = \int_a^b P_{r-1}(x) dx$, поэтому с учетом (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - L(f) &= \int_a^b P_{r-1}(x) dx - L(P_{r-1}) + \\ &+ \int_a^b R_r(x) dx - L(R_r) = \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b \int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t) dt dx - \\ &- \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} p_k \int_a^b K_r(x_k - t) f^{(r)}(t) dt = \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b f^{(r)}(t) \left[\int_t^b K_r(x-t) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right] dt = \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b f^{(r)}(t) \left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right] dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Полагая

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right], \quad (2.8)$$

имеем из (2.7) и (2.3)

$$R_r(f) = \int_a^b F_r(t) f^{(r)}(t) dt. \quad (2.9)$$

Следуя С. М. Никольскому [27], введем понятие усложненной квадратурной формулы. С этой целью рассмотрим квадратурную формулу (2.1) для отрезка $[0, 1]$. Тогда для узлов

$$0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} \leq 1 \quad (2.10)$$

и весов

$$p_0, p_1, \dots, p_{m-1} \quad (2.11)$$

имеем

$$L(f) = L(0, 1, f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k), \quad (2.12)$$

где f — произвольная непрерывная функция, заданная на $[0, 1]$. Рассмотрим приближенное равенство

$$\int_0^1 f(x) dx \approx L(f) \quad (2.13)$$

как квадратурную формулу, определенную узлами (2.10) и весами (2.11).

Наряду с (2.13) рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \approx L(\alpha, \beta, g) = \sum_{k=0}^{m-1} p'_k g(x'_k). \quad (2.14)$$

Будем называть квадратурную формулу (2.12) подобной формуле (2.13), если выполняются соотношения

$$x'_k = \alpha + x_k(\beta - \alpha), \quad p'_k = p_k(\beta - \alpha) \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Пусть теперь задан произвольный отрезок $[a, b]$. Разделим его на n равных частей точками

$$t_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

На каждом отрезке деления $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, \dots, n-1$) применим квадратурную формулу, подобную формуле (2.13), а именно

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x) dx \approx L(t_k, t_{k+1}, f),$$

складывая эти приближенные равенства при $k = 0, \dots, n-1$, мы получим следующую формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} L(t_k, t_{k+1}, f), \quad (2.16)$$

которая называется усложненной квадратурной формулой. Заметим, что если исходная (*каноническая*) квадратурная формула (2.12) является точной для полинома $P_{r-1}(x)$ степени $r-1$, то и усложненная формула (2.16) также точна для $P_{r-1}(x)$, т. е.

$$\int_a^b P_{r-1}(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} L(t_k, t_{k+1}, P_{r-1}). \quad (2.17)$$

Напомним, что класс Соболева $W_{p(\cdot)}^r(M, a, b)$ с переменным показателем $p(x)$ состоит из функций $f = f(x)$, заданных на $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную $f^{(r)}$ порядка r , обладающую тем свойством, что $\|f^{(r)}\|_{p(\cdot)}([a, b]) \leq M$. Впервые такие классы были введены в работе [17] в связи задачей об оценке погрешностей квадратурных формул.

Обозначим через $Q_n(f)$ остаточный член формулы (2.16) и получим для него интегральное представление в том случае, когда $f \in W_{p(\cdot)}^r(M, a, b)$. Имеем

$$\begin{aligned}
Q_n(f) &= \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(t_k, t_{k+1}, f) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x) dx - L(t_k, t_{k+1}, f) \right\} = \\
&= h \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_0^1 f(t_k + hu) du - L[f(t_k + hu)] \right\} = \\
&= h^{r+1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 F_r(u) f^{(r)}(t_k + hu) du,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где

$$F_r(u) = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} K_r(x_k - t) \right]. \tag{2.19}$$

Далее

$$\int_0^1 F_r(u) f^{(r)}(t_k + hu) du = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F_r\left(\frac{t-t_k}{h}\right) f^{(r)}(t) dt. \tag{2.20}$$

Определим функцию $\Phi(t) = \Phi_{r,n}(t)$ на $[a, b]$ следующим образом:

$$\Phi_{r,n}(t) = F_r\left(\frac{t-t_k}{h}\right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, \dots, n-1. \tag{2.21}$$

Из (2.20) и (2.21) имеем

$$h \int_0^1 F_r(u) f^{(r)}(t_k + hu) du = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_{r,n}(t) f^{(r)}(t) dt.$$

Подставим это выражение в (2.18), тогда

$$Q_n(f) = h^r \int_a^b \Phi_{r,n}(t) f^{(r)}(t) dt. \quad (2.22)$$

Это и есть искомое интегральное представление остаточного члена усложненной квадратурной формулы (2.16).

3. Оценки остаточных членов квадратурных формул для классов $W_{p(\cdot)}^r(M, a, b)$

Пусть $1 < p(x) \leq \bar{p} < \infty$ при $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$, где здесь и далее $\bar{p} = \sup_{x \in [0, 1]} p(x)$, $\underline{p} = \inf_{x \in [0, 1]} p(x)$. Рассмотрим сначала каноническую квадратурную формулу (2.12) и получим оценку остаточного члена

$$R_r[W_{p(\cdot)}^r(1, 0, 1)] = \sup_{f \in W_{p(\cdot)}^r(1, 0, 1)} R_r(f), \quad (3.1)$$

считая, что формула (2.12) точна для полиномов $P_{r-1}(x)$ степени $r-1$. С этой целью обратимся к равенству (2.9) с $a = 0$, $b = 1$. Тогда

$$R_r(f) = \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t) dt, \quad (3.2)$$

где функция $F_r(t)$ определена равенством (2.19). Из (3.2) непосредственно имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in W_{p(\cdot)}^r(1, 0, 1)} R_r(f) = \\ &= \sup_{\|f^{(r)}\|_{p(\cdot)}([0, 1]) \leq 1} \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t) dt = \|F_r\|_{p'(\cdot)}^*([0, 1]). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Сопоставляя (3.1) и (3.3), выводим

$$R_r[W_{p(\cdot)}^r(1, 0, 1)] = \|F_r\|_{p'(\cdot)}^*([0, 1]). \quad (3.4)$$

Совершенно аналогично из (2.22) выводим

$$Q_n[W_{p(\cdot)}^r(1, a, b)] = \sup_{f \in W_{p(\cdot)}^r(1, a, b)} Q_n(f) = h^r \|\Phi_{r,n}\|_{p'(\cdot)}^*([a, b]). \quad (3.5)$$

4. Классы $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M, a, b)$ и комбинированные квадратурные формулы

Мы рассмотрим здесь некоторые новые классы функций, обладающих существенно переменным поведением гладкости на заданном отрезке $[a, b]$, и получим точные оценки погрешностей введенных ниже комбинированных квадратурных формул для этих новых классов. При решении этой задачи естественным образом появляются пространства $L^{p(x)}(E)$ с переменным показателем $p(x)$ и двойственные им пространства $L^{p'(x)}(E)$, где $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$. А именно, в терминах этих пространств выражаются точные значения погрешностей комбинированных квадратурных формул, учитывающих существенно переменное поведение гладкости функций $f(x)$, подлежащих приближенному интегрированию по отрезку $[a, b]$. Это позволяет получить для функций $f(x)$, обладающих переменной гладкостью на $[a, b]$, более точные оценки погрешностей комбинированных квадратурных формул.

Перейдем к определению комбинированной квадратурной формулы для функций $f = f(x)$, обладающих существенно переменным поведением на отрезке $[a, b]$. С этой целью мы введем классы $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(a, b)$. Нам понадобится ряд обозначений. А именно, пусть s — натуральное число, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_s = b$, измеримая функция $p = p(x)$ определена на $[a, b]$ и удовлетворяет условию $1 \leq p(x) \leq \bar{p}([a, b]) < \infty$. Для $r \in \mathbb{N}$ положим $W_{p(\cdot)}^r(c, d) = \cup_{K>0} W_{p(\cdot)}^r(K, c, d)$. Далее, пусть $r_i \in \mathbb{N}$ ($i = 1, \dots, s$), $r(x) = r_i$ при $x \in (a_{i-1}, a_i)$. Через $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(a, b)$ обозначим пространство функций $f = f(x)$, заданных на $[a, b]$ и таких, что $f \in W_{p(\cdot)}^{r_i}(a_{i-1}, a_i)$ при каждом $i = 1, \dots, s$. Если $f \in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(a, b)$, то мы положим $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_s)$, $f^{\mathbf{r}}(x) = f^{(r(x))}(x)$. Подкласс функций $f \in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(a, b)$, для которых $\|f^{\mathbf{r}}\|_{p(\cdot)}([a, b]) \leq M$ обозначим через $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M, a, b)$.

Мы перейдем теперь к конструированию комбинированных квадратурных формул для $f \in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(a, b)$, учитывающих существенно переменный характер гладкости таких функций f на отрезке $[a, b]$. Итак, пусть $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{s-1} < a_s = b$, $f \in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(a, b)$. Тогда

мы имеем

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{s-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx. \quad (4.1)$$

Для приближения интеграла $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx$ мы применим усложненную квадратурную формулу [27]. При этом для каждого отрезка $[a_i, a_{i+1}]$ мы выберем свою (зависящую от i) каноническую квадратурную формулу с узлами

$$0 \leq x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,m_i-1} \leq 1$$

и весами $p_{i,j}$ ($j = 0, 1, \dots, m_i - 1$) и рассмотрим усложненную квадратурную формулу

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n_i-1} L_i(t_{i,k}, t_{i,k+1}, f), \quad (4.2)$$

где

$$L_i(t_{i,k}, t_{i,k+1}, f) = \sum_{j=0}^{m_i-1} p'_{i,j} f(x_{i,j}^k), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} p'_{i,j} &= p_{i,j} h_i, \quad x_{i,j}^k = t_{i,k} + x_{i,j} h_i \quad (j = 0, 1, \dots, m_i - 1), \\ h_i &= \frac{a_{i+1} - a_i}{n_i} \quad (i = 0, 1, \dots, s - 1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Будем считать, что при каждом i узлы $x_{i,j}$ и веса $p_{i,j}$ ($j = 0, 1, \dots, m_i - 1$) выбраны так, чтобы соответствующая каноническая квадратурная формула

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{m_i-1} p_{i,j} f(x_{i,j}) \quad (4.5)$$

была точна для всех алгебраических полиномов $P_{r_i-1}(x)$ степени не выше $r_i - 1$. Тогда тем же свойством обладает и формула (4.2). Следовательно,

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_{r_i-1}(x) dx = \sum_{k=0}^{n_i-1} L_i(t_{i,k}, t_{i,k+1}, P_{r_i-1}) \quad (i = 0, 1, \dots, s-1). \quad (4.6)$$

Пусть

$${}_iF_{r_i}(t) = \frac{1}{(r_i-1)!} \left[\frac{(1-t)^{r_i}}{r_i} - \sum_{j=0}^{m_i-1} p_{i,j} K_{r_i}(x_{i,j} - t) \right], \quad (4.7)$$

$${}_i\Phi_{r_i, n_i}(t) = {}_iF_{r_i} \left(\frac{t - t_{i,k}}{h_i} \right), \quad t \in [t_{i,k}, t_{i,k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, n_i-1, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{r_1, \dots, r_{s-1}\}, \quad \mathcal{N} = \{n_0, \dots, n_{s-1}\}, \\ \Phi(t) &= \Phi(t, \mathcal{R}, \mathcal{N}) = h^{r_i} {}_i\Phi_{r_i, n_i}(t), \\ t &\in [a_i, a_{i+1}], \quad i = 0, \dots, s-1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} {}_iQ_{n_i}(f) &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx - \sum_{k=0}^{n_i-1} L_i(t_{i,k}, t_{i,k+1}, f) = \\ &= h^{r_i} \int_{a_i}^{a_{i+1}} {}_i\Phi_{r_i, n_i}(t) f^{(r_i)}(t) dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \Phi(t, \mathcal{R}, \mathcal{N}) f^{(r_i)}(t) dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Далее положим $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_s\}$,

$$L(\mathcal{A}, \mathcal{N}, f) = \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{n_i-1} L_i(t_{i,k}, t_{i,k+1}, f). \quad (4.11)$$

Тогда приближенное равенство

$$\int_a^b f(x) dx \approx L(\mathcal{A}, \mathcal{N}, f) \quad (4.12)$$

будем называть комбинированной усложненной квадратурной формулой. Обозначим погрешность этой формулы через $Q(\mathcal{A}, \mathcal{N}, f)$, т. е.

$$Q(\mathcal{A}, \mathcal{N}, f) = \int_a^b f(x) dx - L(\mathcal{A}, \mathcal{N}, f). \quad (4.13)$$

Из (4.10), (4.11) и (4.13) мы можем записать

$$\begin{aligned} Q(\mathcal{A}, \mathcal{N}, f) &= \sum_{i=0}^{s-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \Phi(t, \mathcal{R}, \mathcal{N}) f^{(r_i)}(x) dx = \\ &= \int_a^b \Phi(x, \mathcal{R}, \mathcal{N}) f^{(r(x))}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.14) непосредственно имеем

$$\begin{aligned} Q(W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(1, a, b)) &= \sup_{f \in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(1, a, b)} Q(\mathcal{A}, \mathcal{N}, f) = \\ &= \sup_{\|f^{(r(\cdot))}\|_{p(\cdot)}([a, b]) \leq 1} \int_a^b \Phi(t, \mathcal{R}, \mathcal{N}) f^{(r(t))}(t) dt = \\ &= \|\Phi(\mathcal{R}, \mathcal{N})\|_{p'(\cdot)}^*([a, b]). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Рассмотрим одну совсем простую задачу из численного анализа, решение которой приводит к идее применения комбинированных усложненных квадратурных формул и построению классов $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M, a, b)$ с переменным показателем $p(x)$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 x^{\frac{1}{4}} dx = 0.8.$$

Для приближенного вычисления левой части этого равенства используем два способа с применением усложненной квадратурной

формулы трапеций

$$\int_a^b f(x) dx = L(f) + R(f) = \frac{h(f(a) + f(b))}{2} + h \sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh) + R_n(f),$$

где $h = (b - a)/n$. В первом случае применим эту формулу к отрезку $[0, 1]$:

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{4}} dx = L(f) + R(f) = \frac{h}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (jh)^{\frac{1}{4}} + R_n, \quad (A)$$

а во втором случае представим интеграл I в виде

$$I = \int_0^1 x^{\frac{1}{4}} dx = I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon,$$

где

$$I_1^\varepsilon = \int_0^\varepsilon x^{\frac{1}{4}} dx, \quad I_2^\varepsilon = \int_\varepsilon^1 x^{\frac{1}{4}} dx,$$

вычислим приближенно каждый из интегралов I_1^ε и I_2^ε по указанной формуле трапеций и результаты просуммируем. Тем самым мы получим комбинированную усложненную формулу

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{4}} dx = L_{n_1}(0, \varepsilon) + L_{n_2}(\varepsilon, 1) + R_{n_1, n_2}^\varepsilon, \quad (B)$$

где

$$L_{n_1}(0, \varepsilon) = \frac{h_1 \varepsilon^{\frac{1}{4}}}{2} + h_1 \sum_{j=1}^{n_1-1} (jh_1)^{\frac{1}{4}},$$

$$L_{n_2}(\varepsilon, 1) = \frac{h_2(\varepsilon^{\frac{1}{4}} + 1)}{2} + h_2 \sum_{j=1}^{n_2-1} (\varepsilon + jh_2)^{\frac{1}{4}}.$$

Приведем здесь небольшую таблицу, содержащую результат компьютерного эксперимента по приближенному вычислению интеграла $I = \int_0^1 x^{1/4} dx$ с применением квадратурных формул (A) и (B).

1. $n = n_1 + n_2$, $\varepsilon = 0.1$.

- (a) $R_{50} = 2.401888E - 03$, $R_{10,40}^\varepsilon = 1.050353E - 03$;
- (b) $R_{100} = 1.011312E - 03$, $R_{60,40}^\varepsilon = 1.562834E - 04$;
- (c) $R_{200} = 4.253387E - 04$, $R_{100,100}^\varepsilon = 6.479025E - 05$;
- (d) $R_{200} = 4.253387E - 04$, $R_{120,80}^\varepsilon = 5.722046E - 05$;
- (e) $R_{200} = 4.253387E - 04$, $R_{130,70}^\varepsilon = 5.674362E - 05$;

2. $n = n_1 + n_2$, $\varepsilon = 0.01$.

- (a) $R_{50} = 2.401888E - 03$, $R_{10,40}^\varepsilon = 4.172325E - 04$;
- (b) $R_{100} = 1.011312E - 03$, $R_{40,60}^\varepsilon = 1.761913E - 04$;
- (c) $R_{200} = 4.253387E - 04$, $R_{50,150}^\varepsilon = 3.51674E - 05$.

Из таблицы непосредственно следует, что при совпадении числа узлов формул (A) и (B) комбинированная усложненная формула трапеций (B) дает существенно более точное значение интеграла $I = \int_0^1 x^{1/4} dx$, чем обычная усложненная формула трапеций (A). Обнаруженный нами отдельный результат не является случайным. Это объясняется достаточно просто. Дело в том, что функция $x^{1/4}$ обладает высокой гладкостью на сегменте $[\varepsilon, 1]$, вследствие чего формула трапеций, будучи примененной к интегралу $I = \int_\varepsilon^1 x^{1/4} dx$, дает его значение с высокой точностью. А особая точка $x = 0$ функции $x^{1/4}$, в которой ее производная обращается в ∞ , оказывает преимущественное влияние на результат приближенного вычисления интеграла I_1^ε с помощью формулы $L_{n_1}(0, \varepsilon)$, не давая этой формуле «проявить свои хорошие вычислительные возможности». Но это отрицательное влияние особой точки функции $x^{1/4}$ компенсируется за счет выбора достаточно малой длины интервала $[0, \varepsilon]$. Комбинированные усложненные квадратурные формулы позволяют учитывать при решении задачи приближенного вычисления интегралов от функций $f \in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M, a, b)$ их локальные свойства и переменное поведение производной $f^{(r(x))}(x)$, а свойства пространств $L^{p(x)}([a, b])$ дают возможность точно выразить величину погрешности комбинированных усложненных квадратурных формул на классах $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M, a, b)$ (см. равенство (4.15)).

5. Нерешенные задачи

Мы остановимся здесь на некоторых задачах, которые возникают в связи с полученными выше результатами.

ЗАДАЧА 1. Для погрешности $R_r[W_{p(\cdot)}^r(1, 0, 1)]$ канонической квадратурной формулы (2.12) на классе Соболева $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M, 0, 1)$ нами было установлено (см. (3.4)) равенство

$$R_r[W_{p(\cdot)}^r(1, 0, 1)] = \|F_r\|_{p'(\cdot)}^*([0, 1]).$$

В связи с этим, в свою очередь, возникает важный вопрос о получении верхних и нижних границ для нормы

$$\|F_r\|_{p(\cdot)}^*([0, 1]) = \sup_{\substack{g \in L^{p'(\cdot)}([0, 1]), \\ \|g\|_{p'(\cdot)}([0, 1]) \leq 1}} \int_0^1 F_r(x)g(x) dx,$$

зависящих от конкретных выборов узлов

$$0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} \leq 1,$$

весов p_k ($k = 0, \dots, m-1$) и переменного показателя $p(x)$.

ЗАДАЧА 2. Для погрешности $Q_n[W_{p(\cdot)}^r(1, a, b)]$ усложненной квадратурной формулы (2.16) на классе Соболева $W_{p(\cdot)}^r(1, a, b)$ нами было установлено (см. (3.5)) равенство

$$Q_n[W_{p(\cdot)}^r(1, a, b)] = \sup_{f \in W_{p(\cdot)}^r(1, a, b)} Q_n(f) = h^r \|\Phi_{r,n}\|_{p'(\cdot)}^*([a, b]).$$

В связи с этим равенством возникает задача об изучении поведения величины $\|\Phi_{r,n}\|_{p'(\cdot)}^*([a, b])$ при $n \rightarrow \infty$. Требуется установить верхние и нижние границы этой величины для конкретных выборов переменного показателя $p(x)$,

ЗАДАЧА 3. Требуется решить аналогичные задачи для погрешности комбинированной квадратурной формулы, выраженной равенством (4.15).

ЗАДАЧА 4. Рассмотреть аналогичные задачи для погрешностей квадратурных формул двойных, тройных и n -мерных интегралов.

Литература

1. Шарапудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(x)}([0, 1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.
2. Orlicz W. Uber konjugierte Exponentenfolgen // Studia Math.—1931.—Vol. 3.—P. 200–212.
3. Nakano H. Modulared Semi-ordered Linear Spaces.—Tokyo.: Maruzen Co., Ltd., 1950.—288 p.
4. Nakano H. Topology of Linear Topological Spaces.—Tokyo.: Maruzen Co., Ltd., 1951.—281 p.
5. Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces.—Berlin.: Springer-Verlag, 1983.—222 p.
6. Musielak J., Orlicz W. On modular spaces // Studia Math.—1959.—Vol. 18.—P. 49–65.
7. Tsenov I. V. Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s // Uchen. Zap. Dagestan. Gos. Univ.—1961.—Vol. 7.—P. 25–37.—(Russian).
8. Шарапудинов И. И. О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб.—1986.—Vol. 130 (172), № 2 (6).—С. 275–283.
9. Шарапудинов И. И. О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки // Мат. заметки.—1996.—Т. 59, № 2.—С. 291–302.
10. Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ružička M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponent.—Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.—509 p.—(Lecture Notes in Math. Vol. 2017).
11. Zhikov V. V. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory // Math. USSR Izv.—1987.—Vol. 29, № 1.—P. 33–66. Transl.: Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.—1986.—Vol. 50, № 4.—P. 675–710.
12. Zhikov V. V. Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system // Differ. Equ.—1997.—Vol. 33, № 1.—P. 108–115. Transl.: Differ. Uravn.—1997.—Vol. 33, № 1.—P. 107–114, 143.
13. Zhikov V. V. On some variational problems // Russian J. Math. Phys.—1997.—Vol. 5, № 1.—P. 105–116.
14. Diening L. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ // Math. Inequal. Appl.—2004.—Vol. 7, № 2.—P. 245–253.
15. Diening L., Ružička M. Calderon-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems related to fluid dynamics // J. Reine Angew. Math.—2003.—Vol. 563.—P. 197–220.
16. Diening L., Hästö P., Nekvinda A. Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Proceedings of the Conf. held in Milovy.—Praha: Math. Inst. Acad. Sci., 2005.—P. 38–58.
17. Шарапудинов И. И. Приближение функций в метрике пространства $L^{p(x)}([a, b])$ и квадратурные формулы // Constructive Function Theory'81. Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory. Varna, June 1–5, 1981.—P. 189–193.
18. Шарапудинов И. И. Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}$ // Anal. Math.—2007.—Vol. 33, № 2.—P. 135–153.

19. Шарапудинов И. И. О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве Лебега $L^{p(x)}(-1, 1)$ с переменным показателем $p(x)$ // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 1.—С. 137–160.
20. Шарапудинов И. И. Некоторые вопросы теории приближения функций тригонометрическими полиномами в $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Мат. форум. Т. 5. Исследования по математическому анализу и дифференциальным уравнениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2011.—С. 108–118.—(Итоги науки. Юг России).
21. Guven A., Israfilov D. M. Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ // J. Math. Inequal.—2010.—Vol. 4, № 2.—P. 285–299.
22. Akgun R., Kokilashvili V. On converse theorems of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces // Banach J. Math. Anal.—2011.—Vol. 5, № 1.—P. 70–82.
23. Akgun R. Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth // Georgian Math. J.—2011.—Vol. 18, № 2.—P. 203–235.
24. Guven A. Trigonometric approximation by matrix transforms in $L^{p(x)}$ spaces // Anal. Appl.—2012.—Vol. 10, № 1.—P. 47–65.
25. Akgun R., Kokilashvili V. The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces // Georgian Math. J.—2011.—Vol. 18, № 3.—P. 399–423.
26. Akgun R. Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent // Ukrainian Math. J.—2011.—Vol. 63, № 1.—P. 1–26.
27. Никольский С. М. Квадратурные Формулы.—М.: Наука, 1988.—256 с.

VARIABLE EXPONENT LEBESGUE AND SOBOLEV SPACES AND COMBINED QUADRATURE FORMULAS

I. I. Sharapudinov

In present paper problem of construction of complicated quadrature formulas and combined formulas for functions from variable exponent Sobolev classes is considered. Formulas for explicit expression of quadrature formulas errors are obtained.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Секция I

Математический анализ

Т. А. Виноградова¹

В настоящее время продолжает расти спрос на методы защиты передаваемых данных. Один из подходов состоит в использовании проблемы дискретного логарифма, основанной на том, что в некоторых группах при относительно легком возведении в степень обратная операция достаточно трудоемка.

В 1986 г. Эткин (A. O. L. Atkin) предложил алгоритм поиска конечной группы, подходящей для криптографии, взяв за основу идею комплексного умножения (СМ-метод) Дойринга (M. Deuring), позволяющую построить кривую рода $g \leq 2$ с заданным порядком якобиана. Группа точек эллиптической кривой совпадает с якобианом, так что можно подобрать кривую с данным порядком группы [1].

Возникает вопрос в построении подходящего для DL-систем якобиана кривой рода 2. Здесь якобиан уже нельзя отождествить с группой точек кривой. В представленной работе рассмотрено обобщение метода Эткина и разработан общий алгоритм для случая рода $g = 2$. Используется теория Шимур — Таниямы комплексного умножения абелевых многообразий.

В [2], [3], [4] подробно рассмотрены отдельные шаги данного алгоритма.

Литература

1. Weng A. Elliptische Kurven und komplexe Multiplikation. Vorlesung am FB Mathematik (Manuscript).—Universitaet GH Essen, 2001.
2. Broeker R., Lauter K. Modular Polynomials for Genus 2.—URL: <http://eprint.iacr.org/2008/161>.
3. Freeman D., Lauter K. Computing endomorphism rings of Jacobians of genus 2 curves over finite fields.—URL: <http://www.arxiv.org/abs/math/0701305>.
4. Goren E., Lauter K. Class invariants of quartic CM fields // Ann. Inst. Fourier.—2007.—Vol. 57, № 2.—P. 457–480.

¹Россия, Воронеж, Воронежский институт МВД.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л. Х. Гадзова¹

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i} u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, $\alpha \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$; $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m$; $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $D_{0x}^{\beta} u(x)$ — оператор дробного интегро-дифференцирования порядка β в смысле Римана — Лиувилля [1, с. 9] по переменной x .

Регулярным решением уравнения (1) называем функцию $u = u(x)$ такую, что $u(x) \in L(0, 1)$, $D_{0x}^{\alpha-n} u(x) \in C^n(0, 1)$; $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1) для всех $0 < x < 1$.

ЗАДАЧА. Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ell^k u)(x) = a_k, \quad k = \overline{1, p}, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} D_{0x}^{\mu_j} u(x) = b_j, \quad j = \overline{1, q}, \quad (3)$$

где $p + q = n$ при $n \geq 2$, $\mu_j \leq 0$, a_k, b_j — заданные вещественные числа,

$$(\ell^k u)(x) = D_{0x}^{\alpha-k} u(x) - \sum_{i=1}^{M(k)} \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-k} u(x),$$

$$M(k) = \begin{cases} 0, & \alpha_i < \alpha - n + k, \\ \max \{i : \alpha_i - k \geq \alpha - n\}, & \alpha_i \geq \alpha - n + k. \end{cases}$$

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего группу младших членов с производными Римана — Лиувилля исследовалась в работе [2]. В монографии [1] даны постановки видоизмененных задач Коши и Неймана для уравнения второго порядка с дробной производной порядка $\alpha \in [1, 2]$. В работах [3] и [4] исследовалась начальная задача для

¹Россия, Нальчик, НИИ ПМА КБНЦ РАН.

уравнения (1). Краевая задача для уравнения (1) была изучена в работе [5]. В данной работе построено явное представление решения краевой задачи для уравнения (1) и найдено условие однозначной разрешимости.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. 1) Пусть $f(x) \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$ и выполнено условие

$$\Delta = \det \|A_{ij}\| \neq 0. \quad (4)$$

Тогда функция

$$u(x) = \int_0^1 f(t) Q(x, t) dt + \sum_{k=1}^p a_k \left[(-1)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} Q(x, t) \right]_{t=0} + \\ + \sum_{j=1}^q b_j \left[(-1)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{j-1} Q(x, t) \right]_{t=1} \quad (5)$$

является регулярным решением задачи (1)–(3).

2) Решение задачи (1)–(3) единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

Здесь $Q(x, t)$ — функция Грина задачи (1)–(3).

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. Нахушев А. М. Задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 234, № 2.—С. 308–311.
3. Псху А. В. К теории задачи Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2009.—Т. 11, № 1.—С. 61–65.
4. Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сборник.—2011.—Т. 200, № 4.—С. 111–122.
5. Гадзова Л. Х. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.—2011.—Т. 13, № 1.—С. 47–49.

О НЕТРИВИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ НУЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

П. А. Иванов¹

Хорошо изучены нетривиальные разложения нуля для рядов экспонент для ограниченных выпуклых областей (см., например, [1–5]).

Положим $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Пусть $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, — последовательность попарно различных точек $\mathbb{C}$ такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$ и $|\lambda_j| \leq |\lambda_{j+1}|$, $j \in \mathbb{N}$. Пусть $A(\mathbb{C})$ — пространство Фреше всех целых (в $\mathbb{C}$) функций.

Предположим, что $(e_{\lambda_j})_{j \in \mathbb{N}}$ — абсолютно представляющая система в $A(\mathbb{C})$, т. е. любая функция $f \in A(\mathbb{C})$ представляется в виде ряда $f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ ($c_j \in \mathbb{C}$), абсолютно сходящегося (к f) в $A(\mathbb{C})$.

Введем пространство Фреше числовых последовательностей

$$\Lambda(\mathbb{C}) := \left\{ c = (c_j) : \forall n \geq 1 \quad p_n(c) := \sum_j |c_j| e^{n|\lambda_j|} < \infty \right\}.$$

Естественная топология $\Lambda(\mathbb{C})$ задается семейством преднорм p_n , $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ абсолютно сходится в $A(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $c = (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Lambda(\mathbb{C})$. Следуя Ю. Ф. Коробейнику, введем оператор представления $\Pi : \Lambda(\mathbb{C}) \rightarrow A(\mathbb{C})$, $c \mapsto \sum_j c_j e_{\lambda_j}$.

Отметим, что ядро $\text{Ker } \Pi$ оператора Π бесконечномерно (см., например, [1–5]). При исследовании абсолютно представляющих систем $(e_{\lambda_j})_{j \in \mathbb{N}}$ в $A(\mathbb{C})$, операторов свертки в пространствах аналитических функций важной является задача об описании $\text{Ker } \Pi$ (т. е. нетривиальных разложений нуля по системе $(e_{\lambda_j})_{j \in \mathbb{N}}$). В настоящей заметке при некоторых дополнительных ограничениях на последовательность $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ описывается (с помощью весового пространства целых функций) $\text{Ker } \Pi$. Заметим, что реализации $\text{Ker } \Pi$ подобного рода были получены ранее в других ситуациях (см., например, [2–4]).

Пусть L — целая функция такая, что $L(\lambda_j) = 0$, $L'(\lambda_j) \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$, и нулей, отличных от λ_j у L нет (по теореме Вейерштрасса такая функция L существует). Справедлива

Теорема. Предположим, что последовательность $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет следующим условиям:

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

1. $(e_{\lambda_j})_{j \in \mathbb{N}}$ — абсолютно представляющая система в $A(\mathbb{C})$.
2. $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln j}{|\lambda_j|} = 0$.
3. Существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что круги $D_j := \{z : |z - \lambda_j| \leq e^{-m_0|\lambda_j|}\}$, $j \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются.

Следующие утверждения равносильны:

(i) $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \text{Ker } \Pi$.

(ii) Существует целая функция a такая, что $a_j = \frac{a(\lambda_j)}{L'(\lambda_j)}$, $j \in \mathbb{N}$ и

$$\forall m \exists C_m > 0 : |a(z)| \leq C_m \frac{|L(z)|}{\exp(m|z|)}, \quad z \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j. \quad (1)$$

Следствие. Пусть H — пространство целых функций a , удовлетворяющих условиям (1). Если выполняются предположения теоремы, то $\text{Ker } \Pi$ топологически изоморфно фактор-пространству $H/\text{Ker } T$, где $T : H \rightarrow \text{Ker } \Pi$ — линейный непрерывный (сюръективный) оператор, определяемый так: $T(a) : \left(\frac{a(\lambda_j)}{L'(\lambda_j)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Последовательность $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющую условиям теоремы можно построить методом В. В. Напалкова (см. [5]).

Литература

1. Абанин А. В. Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Мат. заметки.—1995.—Т. 57, № 4.—С. 483–497.
2. Коробейник Ю. Ф. Нетривиальные разложения нуля по абсолютно представляющим системам. Приложения к операторам свертки // Мат. сб.—1991.—Т. 182, № 5.—С. 661–680.
3. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы: теория и приложения.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2009.—336 с.
4. Мелихов С. Н. Нетривиальные разложения нуля и представительные подпространства // Изв. вузов. Сер. Мат.—1990.—№ 8.—С. 53–65.
5. Напалков В. В. О дискретных слабодостаточных множествах в некоторых пространствах целых функций // Изв. АН СССР. Сер. Мат.—1981.—Т. 45, № 5.—С. 1088–1099.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
С ОПЕРАТОРОМ БАРРЕТТА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Р. З. Кажарова¹

Рассмотрим следующее нагруженное дифференциальное уравнение:

$$D_{0t}^{\alpha} u(x, \eta) - \lambda u(x, t) = \sum_{j=1}^n c^j(x, t) u(x_j, t_j) + v(x, t), \quad (1)$$

где D_{0t}^{α} — оператор дробного дифференцирования порядка α [1, с. 28], $\lambda = \text{const}$, $c^j(x, t)$, $v(x, t)$ — заданные непрерывные в замкнутой области $\overline{\Omega} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq r, 0 \leq t \leq T\}$ функции независимых переменных x и t .

ЗАДАЧА. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) из пространства $L(\Omega)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-i} u(x, t) = \nu_i(x), \quad i = \overline{1, m}, \quad \alpha \in (m-1, m], \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\nu_i(x) \in C[0, r]$.

Теорема. Пусть $v(x, t) \in L[0, T]$. Тогда любое решение задачи 1 является решением нагруженного функционального уравнения

$$u(x, t) = U(\nu, v, \lambda; x, t) + \sum_{j=1}^n C^j(x, t) u(x_j, t_j), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} U(\nu, v, \lambda; x, t) &= \sum_{i=1}^m \nu_i(x) t^{\alpha-i} E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha}; \alpha - i + 1) + \\ &+ \Gamma(\alpha) D_{0t}^{-\alpha} E_{1/\alpha}[\lambda(t - \eta)^{\alpha}; \alpha] v(x, \eta), \\ C^j(x, t) &= \Gamma(\alpha) D_{0t}^{-\alpha} E_{1/\alpha}[\lambda(t - \eta)^{\alpha}; \alpha] c^j(x, \eta). \end{aligned}$$

¹Россия, Нальчик, НИИ ПМА КБНЦ РАН.

Необходимым условием разрешимости нагруженного функционального уравнения (2) является система равенств

$$\begin{aligned} [1 - C^i(x_i, t_i)] u(x_i, t_i) - \sum_{j=1}^n (1 - \delta_{ij}) C^j(x_i, t_i) u(x_j, t_j) = \\ = U(\nu, v, \lambda; x_i, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Если определитель этой системы отличен от нуля, то уравнение (2) будет иметь, и притом единственное, решение $u(x, t)$.

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.

ТЕОРЕМА РАДОНА — НИКОДИМА
ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ

З. А. Кусраева¹

Пусть E и F — векторные решетки, $1 \leq s$ — целое число. Отображение $P : E \rightarrow F$ называется *однородным полиномом степени s* (или *s -однородным полиномом*), если существует s -линейный оператор $\varphi : E^s \rightarrow F$ такой, что

$$P(x) = \varphi(x, \dots, x) \quad (x \in E).$$

При этом оператор φ называется *порождающим* для P . Говорят, что P *положителен*, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geq 0$ для любых $0 \leq x_1, \dots, x_s \in E$. Однородный полином $P : E \rightarrow F$ называют *ортгонално аддитивным*, если для любых $x, y \in E$ выполняется

$$|x| \wedge |y| = 0 \implies P(x + y) = P(x) + P(y).$$

Однородный ортгонално аддитивный полином $P : E \rightarrow F$ называется *полиномом Магарам*, если он порядково непрерывен и сохраняет порядковые отрезки, т. е. $P([0, x]) = [0, Px]$ для любого $x \in E_+$. Нужные сведения о положительных операторах в векторных решетках и об общих свойствах полиномов имеются в [1] и [2] соответственно.

Теорема 1 (Теорема Радона — Никодима для полиномов). Пусть E и F — некоторые K -пространства, а P и Q — положительные ортгонално аддитивные полиномы из E в F , причем P порядково непрерывен, а Q — полином Магарам. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- (1) $P \in \{Q\}^{\perp\perp}$;
- (2) P абсолютно непрерывен относительно Q ;
- (3) существует ортоморфизм $0 \leq \rho \in \text{Orth}^\infty(E)$ такой, что

$$P(x) = Q(\rho x) \quad (x \in \mathcal{D}(\rho));$$

(4) существует возрастающая последовательность положительных ортоморфизмов (ρ_n) , $\rho_n \in \text{Orth}(E)_+$, такая, что имеет место представление

$$P(x) = \sup_n Q(\rho_n x) \quad (x \in E_+).$$

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

Полином P называется *регулярным*, если он представим в виде разности двух положительных полиномов. Множество всех однородных ортогонально аддитивных регулярных полиномов, упорядоченный конусом положительных полиномов, является пространством Канторовича. В частности, для однородного полинома P существуют модуль $|P|$, положительная часть P^+ и отрицательная часть P^- .

Теорема 2 (Теорема Хана о разложении для полиномов). Пусть E и F — некоторые K -пространства, а $P : E \rightarrow F$ — регулярный ортогонально аддитивный однородный полином. Если $|P|$ — полином Магарам, то существует порядковый проектор π в E для которого $P^+ = |P| \circ \pi$ и $P^- = |P| \circ \pi^\perp$, где $\pi^\perp := I_E - \pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 1 и 2 выводятся из результатов о представлении полиномов, полученных в [3]. Теория операторов Магарам построена в работах Д. Магарам, см. [4]. Аналог классических теорем Радона — Никодима и Хана для линейных операторов Магарам получили В. Люксембург и А. Шеп [5]. Варианты теоремы Радона — Никодима и теоремы Хана о разложении для билинейных операторов установлены в [6].

Литература

1. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
2. Dineen S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.—543 p.
3. Кусраева З. А. О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.
4. Maharam D. On positive operators // Contemporary Math.—1984.—Vol. 26—P. 263–277.
5. Luxemburg W. A. J., Schep A. R. A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math. (N. S.).—1978.—Vol. 40, № 3.—P. 357–375.
6. Kusraev A. G. A Radon–Nikodým type theorem for orthosymmetric bilinear operators // Positivity.—2010.—Vol. 14, № 2.—P. 225–238.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ¹

М. Г. Магомед-Касумов²

Частичные суммы ряда Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 2\pi]$ порядка n определяются, как известно, следующим образом:

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt$.

Средние Валле-Пуссена вводятся как средние арифметические частичных сумм Фурье

$$V_n(f, x) = \frac{S_n(x) + S_{n+1}(x) + \dots + S_{2n-1}(x)}{n}.$$

При проведении численных экспериментов по приближению кусочно-гладких функций было замечено, что средние Валле-Пуссена дают на порядок лучшую скорость приближения, чем суммы Фурье. Данная работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств средних Валле-Пуссена для функций из класса $W_\infty^{2, \mathbb{A}}$, который определяется следующим образом.

Пусть дано конечное разбиение отрезка $[0, 2\pi]$:

$$\mathbb{A} = \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 2\pi\}.$$

Через $W_\infty^{2, \mathbb{A}}$ обозначим класс 2π -периодических функций, которые на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) имеют абсолютно непрерывную производную, а существующая почти всюду на интервале вторая производная существенно ограничена.

Прежде чем сформулировать основной результат, приведем леммы, которые были использованы при его получении.

Лемма 1. Для функций

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^p}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00191-а.

²Россия, Махачкала, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.

имеет место следующая оценка ($p \geq 1$):

$$|f(x) - V_n(f, x)| \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{n(n+1)^p}, \quad x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

Следующая лемма была доказана в работе [1].

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{K}_n(u)| du \leq C,$$

где

$$\mathcal{K}_n(u) = n \cdot \sum_{m=n}^{2n-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^2}.$$

Теорема. *Для функций $f(x)$ из класса $W_{\infty}^{2,\Delta}$ справедлива следующая оценка остатка при приближении суммами Валле-Пуссена:*

$$|f(x) - V_n(f, x)| \leq \left[\frac{4}{\pi \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} + C_0 \right] \cdot \frac{C(f)}{n^2},$$

где

$$x \in \bigcup_{i=0}^{s-1} [a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon],$$

$$C(f) = \max \left\{ \|f\|_{C(\mathfrak{D})}, \|f'\|_{C(\mathfrak{D})}, \operatorname{ess\,sup}_{[0, 2\pi]} |f''(x)| \right\},$$

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{i=0}^{s-1} (a_i, a_{i+1}) = [0, 2\pi] \setminus \{a_i\}_{i=0}^s.$$

Литература

1. Шарапудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена на классах типа Соболева с переменным показателем // Вестник ДНЦ РАН.— 2012.— № 45.— С. 5–16.

ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. Ю. Нестеров¹

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство; $v : X \rightarrow (0, \infty)$ — некоторая фиксированная функция (вес). Обозначим через $C(X)$ множество всех непрерывных комплекснозначных функций на X и рассмотрим его следующий весовой подкласс:

$$C_v(X) = \left\{ f \in C(X) : \|f\|_v = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{v(x)} < \infty \right\}.$$

Частным случаем пространства $C_v(X)$ является класс $BC(X)$ всех ограниченных непрерывных функций на X .

Проверено, что $C_v(X)$ — линейное нормированное пространство, причем его топология мажорирует топологию поточечной сходимости на X . Получено условие, при котором данное пространство является банаховым.

Теорема 1. Если вес v локально ограничен сверху на X , то пространство $C_v(X)$ полное.

Кроме того, установлены результаты, касающиеся нетривиальности пространства $C_v(X)$. Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что пространство $C_v(X)$ не исчезает в точке $x_0 \in X$, если найдется функция $f \in C_v(X)$ такая, что $f(x_0) \neq 0$.

Ясно, что пространство $C_v(X)$ нетривиально, т. е. содержит функцию, отличную от тождественного нуля, тогда и только тогда, когда оно не исчезает хотя бы в одной точке $x_0 \in X$. Доказана

Теорема 2. Для того чтобы пространство $C_v(X)$ не исчезало в точке $x_0 \in X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \inf_{\rho(x, x_0) < \delta} v(x) > 0. \quad (1)$$

Следствие 1. Пространство $C_v(X)$ нетривиально в том и только в том случае, когда существует точка $x_0 \in X$, в которой выполнено условие (1).

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Проверено также, что множество точек, в которых $C_v(X)$ не исчезает, открыто в X . Соответственно, его дополнение — совокупность точек, в которых $C_v(X)$ исчезает, — замкнуто в X .

Литература

1. Абанин А. В. Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // Математический анализ и математическое моделирование: тр. междунар. конф. молодых учен. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН.—2010. —С. 15–20.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1977.—357 с.

КРИТЕРИЙ ИЗОМОРФНОСТИ ПРОСТРАНСТВ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

П. С. Сергунин¹

Рассматривается задача об изоморфной классификации пространств ультрадифференцируемых функций, задаваемых неубывающими каноническими весовыми последовательностями (по поводу канонических весов см. [1, п. 1.3.3]). С каждой такой последовательностью $\Phi = (\varphi_n)$ свяжем пространство

$$\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : |f|_{\varphi_n} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leq n} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{\varphi_n^*(j)}} < \infty, \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

наделенное топологией пространства Фреше, задаваемой набором преднорм $(|\cdot|_{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Здесь $\varphi_n^*(s) := \sup\{ts - \varphi_n(t) : t \geq 0\}$ — функция, сопряженная с φ_n по Юнгу. $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R})$ называется пространством ультрадифференцируемых функций типа Берлинга.

Постановка задачи такова. Пусть мы имеем два пространства $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}_{(\Psi^*)}(\mathbb{R})$. Требуется найти необходимые и достаточные условия на весовые последовательности Φ и Ψ , при которых эти пространства топологически изоморфны.

Напомним, что Φ и Ψ называют эквивалентными ($\Phi \sim \Psi$), если

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, \exists C_n > 0 : \psi_n(t) \leq \varphi_m(t) + C_n, t \geq 0;$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, \exists C_n > 0 : \varphi_n(t) \leq \psi_m(t) + C_n, t \geq 0.$$

В докладе представлен следующий результат, полученный при дополнительных технических ограничениях на весовые последовательности.

Критерий изоморфности. $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{E}_{(\Psi^*)}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \Phi \sim \Psi$.

Отсюда следует, что пространства $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}_{(\Psi^*)}(\mathbb{R})$ топологически изоморфны тогда и только тогда, когда они совпадают.

Ранее в [1, п. 6.4] аналогичный результат был получен для весовых последовательностей специального вида $\Phi = (n\varphi)$ и $\Psi = (n\psi)$. Как и в [1], критерий был установлен за счет использования классического топологического инварианта — диаметальной размерности.

Литература

1. Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. — М.: Наука, 2007. — 222 с.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

НЕКОТОРЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ¹

М. С. Султанахмедов²

Функциональные преобразования, использующие полиномы Чебышева $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$), ортогональные на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ с весом

$$\mu^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(x + \beta + 1)\Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N - x)},$$

нашли применение в ряде актуальных задач обработки информации.

При обработке и сжатии сигналов разного рода наиболее часто из таких преобразований применяется преобразование Фурье — Чебышева. В силу базисности системы $\{\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)\}_{n=0}^{N-1}$ в евклидовом пространстве $l_{2,\mu}(\Omega_N)$ [1], произвольную дискретную функцию (сигнал) $f(x)$, заданную на Ω_N , мы можем разложить в ряд Фурье по полиномам $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ и записать

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \tau_k^{\alpha,\beta}(x), \quad x \in \Omega_N, \quad (1)$$

где

$$\hat{f}_k = \sum_{i=0}^{N-1} f(i) \tau_k^{\alpha,\beta}(i) \mu^{\alpha,\beta}(i) \quad (0 \leq k \leq N-1) \quad (2)$$

— коэффициенты Фурье — Чебышева функции $f(x)$.

При численной реализации преобразований (1) и (2) возникает проблема неустойчивости счета при вычислении значений самих базисных полиномов, что особенно проявляется при достаточно больших n и N .

Разработаны некоторые устойчивые методы вычисления полиномов $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ при $x, n \in \Omega_N$, основанные на использовании специальных свойств самих полиномов, таких как рекуррентные и разностные соотношения, а также представление через гипергеометрическую функцию.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00191-а.

²Россия, Махачкала, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.

Полученные методы апробированы на практике при численном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$g(x) = \int_a^b K(x, s) f(s) ds,$$

основанном на переходе от исходных функций к соответствующим одномерным и двумерным частичным суммам Фурье — Чебышева.

Кроме того, посредством преобразований (1) и (2) осуществляется аппроксимация функций двух и трех переменных, значения которых заданы в узлах целочисленной пространственной решетки. Использование предлагаемых методов дает существенный прирост точности вычисления как значений самих полиномов, так и коэффициентов Фурье — Чебышева (2).

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.—Махачкала: Изд-во ДНЦ РАН, 2004.—276 с.

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N \in E$, Λ — равномерно замкнутая f -подалгебра в идеальном центре $\mathcal{Z}(E)$. Снабдим Λ равномерной нормой. Изучение функций $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, для которых естественно можно определить $\varphi(x_1, \dots, x_N) \in E$ принято называть *функциональным исчислением*. Если образом φ служит f -подалгебра Λ , то говорим уже об *обобщенном функциональном исчислении* и обозначаем символом $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in E$. В работе приведено обобщенное функциональное исчисление в равномерно полных векторных решетках.

Существуют различные подходы к определению функционального исчисления (см. [1–4]). Мы будем следовать обозначениям из [1] и [3]. Будем говорить, что подрешетка L Λ -инвариантна, если $\pi x \in L$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Обозначим через $\text{Hom}(L)$ и $\text{H}_m(L)$ множество всех $\mathbb{R}$ -значных решеточных гомоморфизмов и множество $\mathbb{R}$ -значных мультипликативных решеточных гомоморфизмов на L .

Лемма. Пусть векторная подрешетка $L \subset E$ — Λ -инвариантна. Тогда для любого $\omega \in \text{Hom}(L)$ существует единственный $\tilde{\omega} \in \text{H}_m(\Lambda)$ такой, что $\omega(\pi x) = \tilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. При этом, $\tilde{\lambda}\omega = \tilde{\omega}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $\omega \in \text{Hom}(L)$.

Обозначим символом $\Lambda\langle x_1, \dots, x_N \rangle$ — Λ -инвариантную векторную подрешетку в E , порожденную набором $x_1, \dots, x_N$. Положим по определению

$$[\mathfrak{x}] := \{(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) \in \mathbb{R}^N : \omega \in \text{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N \rangle)\}.$$

Возьмем замкнутое коническое множество $K \subset \mathbb{R}^N$ так, чтобы $[\mathfrak{x}] \subset K$. Символом $\mathcal{H}(K, \Lambda)$ будем обозначать множество всех непрерывных положительно однородных функций из K в Λ . Можно показать, что $\mathcal{H}(K, \Lambda)$ полная векторная решетка относительно сходимости с регулятором.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Λ — замкнутая f -подалгебра в $\mathcal{Z}(E)$, $\varphi \in \mathcal{H}(K, \Lambda)$ и L —

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

наименьшая Λ -инвариантная векторная подрешетка в E , содержащая $x_1, \dots, x_N, y$. Будем говорить, что $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, если $\omega(y) = \tilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \text{Hom}(L)$.

Пусть I обозначает тождественный оператор на E . Определим функции $dt_i \in \mathcal{H}(K, \Lambda)$ ($1 \leq i \leq N$) по формуле $dt_i(t) = t_i I$, где $t \in K \subset \mathbb{R}^N$.

Теорема. Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Λ — равномерно замкнутая f -подалгебра в $\mathcal{Z}(E)$, $x_1, \dots, x_N \in E$. Тогда существует единственный Λ -модульный решеточный гомоморфизм $\hat{\mathfrak{x}}: \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ из $\mathcal{H}(K, \Lambda)$ в E такой, что $\hat{\mathfrak{x}}(dt_i) = x_i$ ($1 \leq i \leq N$). Более того, $\hat{\mathfrak{x}}(\mathcal{H}(K, \Lambda))$ совпадает с u -равномерным замыканием Λ -линейной векторной подрешетки, порожденной x_i ($1 \leq i \leq N$), т. е. $\hat{\mathfrak{x}}(\mathcal{H}(K, \Lambda)) = \overline{\Lambda \langle x_1, \dots, x_N \rangle}$, где замыкание берется равномерно в E относительно $u = |x_1| + \dots + |x_N|$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Частными случаями сформулированной теоремы являются результаты [3, теорема 2.3] ($\Lambda = \mathbb{R}^N$) и [2, теорема 3.12] ($K = \mathbb{R}^N$, $\Lambda = \mathcal{Z}(E)$).

Литература

1. Buskes G., de Pagter B., van Rooij A. Functional calculus on Riesz spaces // Indag. Math. (N.S.).—1991.—Т. 4, № 2.—Р. 423–436.
2. Haydon R., Levy M., Raynaud Y. Randomly Normed Spaces.—Paris: Hermann, 1991.—138 p.
3. Kusraev A. G. Homogeneous Functional Calculus on Vector Lattices.—Vladikavkaz: Southern Math. Inst. VSC RAS, 2008.—34 p.—(Preprint № 1).
4. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—243 p.

А. Г. Чшиев¹

Пусть X — комплексное гильбертово пространство, и $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Полугруппой операторов*, действующих в X , называется сильно непрерывная операторнозначная функция

$$T : (0, \infty) \rightarrow \text{End } X,$$

со свойством

$$T(t+s) = T(t)T(s) \text{ для всех } t, s > 0.$$

Если, кроме того, $T(0) = I$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} T(t)x = x$ для любого $x \in X$, то полугруппа T называется *полугруппой класса* (C_0) .

Классическая теорема Герхарта — Приюсса доказана [1, 2] для полугруппы операторов класса (C_0) . В данной работе теорема Герхарта — Приюсса обобщается на более широкий класс полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве, а именно, полугруппа T удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \|T(t)\|^2 dt < \infty.$$

При этом используется подход, основанный на использовании линейных отношений в качестве генераторов полугруппы [3, 4]. Определение линейного отношения, суммы, произведения линейных отношений, непрерывно обратимого линейного отношения, а также спектра, резольвентного множества и резольвенты линейного отношения дается согласно [3, 4, 7, 8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Генератор* $\mathbb{A}_c$ полугруппы T определяется как отношение на пространстве X , состоящее из пар $(x, y) \in X \times X$ со свойствами:

$$1) \lim_{t \rightarrow 0+} T(t)x = x;$$

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

2) верны равенства

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)y d\tau, \quad 0 < s \leq t < \infty.$$

Основной результат содержит

Теорема. Пусть X — гильбертово пространство и пусть полугруппа операторов T удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \|T(t)\|^2 dt < \infty.$$

Тогда условие

$$\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$$

эквивалентно одновременному выполнению условий

$$\sigma(\mathbb{A}_c) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \quad \text{и} \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, \mathbb{A}_c)\| = M_1 < \infty,$$

где $\sigma(T(1))$ — спектр оператора $T(1)$, $\mathbb{T}$ — единичная окружность, и $\sigma(\mathbb{A}_c)$ — спектр генератора $\mathbb{A}_c$, $R(\cdot, \mathbb{A}_c)$ — резольвента генератора $\mathbb{A}_c$.

Литература

1. Gearhart L. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1978.—Vol. 236.—P. 385–394.
2. Pruss J. On the spectrum of C_0 -semigroups // Trans. Amer. Math. Soc.—1984.—Vol. 284.—P. 847–857.
3. Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 11.—С. 3–42.
4. Баскаков А. Г. Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Мат. заметки.—2008.—Т. 84, № 2.—С. 175–192.
5. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы.—М: Изд-во иностр. лит., 1962.—830 с.
6. Чиниев А. Г. Теорема Герхарда — Приуса для вырожденных полугрупп.—Воронеж, 2011.—34 с.—(Препринт / Воронежский гос. ун-т; № 39).
7. Arens R. Operational calculus of linear relations // Pacific J. Math.—1961.—Vol. 11.—P. 9–23.
8. Cross R. Multivalued Linear Operators.—New York: M. Dekker, 1998.—335 p.
9. Engel K. J., Nagel R. One-Parameter Semigroups For Linear Evolution Equations.—New York: Springer-Verlag, 2000.—609 p.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ
ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНЫХ
СЕТКАХ, И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА¹

Т. И. Шарапудинов²

В этой работе мы рассмотрим предельные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на двумерной равномерной сетке $\Omega_N^2 = \Omega_N \times \Omega_N$. Рассмотрим дискретную функцию f вида $f : \Omega_N^2 \rightarrow \mathbf{R}$ и представим ее в виде ряда Фурье

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{k,l}^{\alpha,\beta} \tau_k^\alpha(x) \tau_l^\beta(y), \quad (1)$$

где $\alpha, \beta > -1$,

$$f_{k,l}^{\alpha,\beta} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mu^\alpha(i) \mu^\beta(j) f(i, j) \tau_k^\alpha(i) \tau_l^\beta(j). \quad (2)$$

Нас интересует предельное положение ряда (1) при $\alpha, \beta \rightarrow -1$. Ряд, полученный из (1) в результате почленного предельного перехода при $\alpha, \beta \rightarrow -1$ будем называть двумерным предельным рядом по полиномам Чебышева, ортогональным на сетке Ω_N^2 .

Осуществляя серию преобразований, находим

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{f(0, 0) + f(N-1, 0) + f(0, N-1) + f(N-1, N-1)}{4} + \\ & + \frac{f(N-1, 0) - f(0, 0) - f(0, N-1) + f(N-1, N-1)}{4} \left(\frac{2x}{N-1} - 1 \right) + \\ & + \frac{f(0, N-1) - f(0, 0) - f(N-1, 0) + f(N-1, N-1)}{4} \left(\frac{2y}{N-1} - 1 \right) + \\ & + \frac{f(0, 0) - f(N-1, 0) - f(0, N-1) + f(N-1, N-1)}{4} \times \\ & \times \left(\frac{2x}{N-1} - 1 \right) \left(\frac{2y}{N-1} - 1 \right) + \end{aligned}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00191-а.

²Россия, Махачкала, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.

$$\begin{aligned}
& + \frac{x(N-x-1)}{N(N-1)} \sum_{k=0}^{N-3} \left(a_k + b_k \left(\frac{2y}{N-1} - 1 \right) \right) \tau_k^1(x-1, N-2) + \\
& + \frac{y(N-y-1)}{N(N-1)} \sum_{l=0}^{N-3} \left(c_l + d_l \left(\frac{2x}{N-1} - 1 \right) \right) \tau_l^1(y-1, N-2) + \\
& + \frac{x(N-x-1)y(N-y-1)}{N^2(N-1)^2} \sum_{k=0}^{N-3} \sum_{l=0}^{N-3} \bar{f}_{k,l} \tau_k^1(x-1, N-2) \tau_l^1(y-1, N-2), \quad (3)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{8}{N-2} \sum_{i=1}^{N-2} \tau_k^1(i-1, N-2) \frac{s(i, 0) + s(i, N-1)}{2}, \\
b_k &= \frac{8}{N-2} \sum_{i=1}^{N-2} \tau_k^1(i-1, N-2) \frac{s(i, N-1) - s(i, 0)}{2}, \\
c_l &= \frac{8}{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} \tau_l^1(j-1, N-2) \frac{h(0, j) + h(N-1, j)}{2}, \\
d_l &= \frac{8}{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} \tau_l^1(j-1, N-2) \frac{h(N-1, j) - h(0, j)}{2}, \\
\bar{f}_{k,l} &= \frac{64}{(N-2)^2} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} \tau_k^1(i-1, N-2) \tau_l^1(j-1, N-2) \bar{f}(i, j).
\end{aligned}$$

Рассмотрим частичные суммы предельного ряда (3) следующего вида:

$$\begin{aligned}
S_{n,m}(f) &= S_{n,m}(f, x, y) = D(x, y) + \\
& + \frac{x(N-x-1)}{N(N-1)} \sum_{k=0}^{m-2} \left(a_k + b_k \left(\frac{2y}{N-1} - 1 \right) \right) \tau_k^1(x-1, N-2) + \\
& + \frac{y(N-y-1)}{N(N-1)} \sum_{l=0}^{m-2} \left(c_l + d_l \left(\frac{2x}{N-1} - 1 \right) \right) \tau_l^1(y-1, N-2) + \quad (4) \\
& + \frac{x(N-x-1)y(N-y-1)}{N^2(N-1)^2} \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-2} \bar{f}_{k,l} \tau_k^1(x-1, N-2) \tau_l^1(y-1, N-2),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
D(x, y) = & \frac{f(0, 0) + f(N-1, 0) + f(0, N-1) + f(N-1, N-1)}{4} + \\
& + \frac{f(N-1, 0) - f(0, 0) - f(0, N-1) + f(N-1, N-1)}{4} \left(\frac{2x}{N-1} - 1 \right) + \\
& + \frac{f(0, N-1) - f(0, 0) - f(N-1, 0) + f(N-1, N-1)}{4} \left(\frac{2y}{N-1} - 1 \right) + \quad (5) \\
& \times \frac{f(0, 0) - f(N-1, 0) - f(0, N-1) + f(N-1, N-1)}{4} \times \\
& \times \left(\frac{2x}{N-1} - 1 \right) \left(\frac{2y}{N-1} - 1 \right).
\end{aligned}$$

В ходе преобразований мы показали, что при $n \leq m$

$$S_{n,m}(f) = S_{n,m}(f, x, y) = \lim_{\beta \rightarrow -1} \lim_{\alpha \rightarrow -1} S_{n,m}^{\alpha, \beta}(f, x, y), \quad (6)$$

где $S_{n,m}^{\alpha, \beta}(f, x, y)$ — частичные суммы двойного ряда (1) (или, что то же, ряда (3)) следующего вида:

$$\begin{aligned}
S_{n,m}^{\alpha, \beta}(f, x, y) = & \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n f_{k,l}^{\alpha, \beta} \tau_k^{\alpha}(x) \tau_l^{\beta}(y) + \\
& + \sum_{k=n+1}^m \sum_{l=0}^1 f_{k,l}^{\alpha, \beta} \tau_k^{\alpha}(x) \tau_l^{\beta}(y) + \sum_{l=n+1}^m \sum_{k=0}^1 f_{k,l}^{\alpha, \beta} \tau_k^{\alpha}(x) \tau_l^{\beta}(y). \quad (7)
\end{aligned}$$

Литература

1. Шаралудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.—Махачкала: Изд-во ДНЦ РАН, 2004.—276 с.

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ В $L_{2\pi}^{p(x)}$ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ¹

Т. Н. Шах-Эмиров²

Пусть $x \in R^n$, и $p = p(x) \geq 1$ — измеримая существенно ограниченная функция на $T^n = [-\pi; \pi]^n$. Через $L_{2\pi}^{p(x)}$ обозначим пространство измеримых функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int_{T^n} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Пространство $L_{2\pi}^{p(x)}$ нормируемо, и одну из эквивалентных норм можно определить, полагая для $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_{T^n} \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Пусть для каждого $\lambda \geq 1$ задана измеримая и существенно ограниченная функция $K_\lambda = K_\lambda(x)$ ($x \in T^n$). Тогда можно определить линейный оператор

$$k_\lambda f = (k_\lambda f)(x) = \int_{T^n} f(t) K_\lambda(t - x) dt.$$

В работе рассмотрены условия равномерной ограниченности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ семейства операторов $\{k_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$.

Литература

1. Шарапудинов И. И. О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(t)}([0; 1])$ // Мат. заметки.— 1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.
2. Шарапудинов И. И. О равномерной ограниченности в $L^p(p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки // Мат. заметки.—1996.—Т. 59, № 2.—С. 291–302.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00191-а.

²Россия, Махачкала, ДНЦ РАН.

Секция II

Математическое
моделирование

ЗАГРЯЗНЕНИЕ АТМОСФЕРЫ УЛИЧНЫХ КАНЬОНОВ
ИСТОЧНИКАМИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ, РАСПОЛОЖЕННЫМИ
НА КРЫШАХ БОЛЕЕ НИЗКИХ ДОМОВ

М. В. Волик¹

Для моделирования течения воздуха в одиночных уличных каньонах с домами разной высоты по их сторонам и непосредственно над ними использовались двумерные уравнения гидродинамики в переменных вихрь ω — функция тока ψ с учетом того, что ось Y направлена перпендикулярно улице, а ось Z вертикально вверх. Коэффициент турбулентной вязкости ν_t рассчитывался по формуле $\nu_t = \sqrt{K} l$ с использованием K модели турбулентности. Использовались соответствующие значения констант и граничные условия [1]. Высота дома на подветренной стороне принималась равной 1.25 от высоты дома на наветренной стороне, ширина уличного каньона равна высоте домов на наветренной стороне.

Концентрация загрязняющих веществ определялась из уравнения диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -U_y \frac{\partial C}{\partial y} - U_z \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial C}{\partial z} \right) + Q, \quad (1)$$

где Q — интенсивность источников загрязнений, которая отличается от нуля над проезжей частью и в месте расположения дымоходов на крыше более низкого дома. Использовалось безразмерное уравнение, в котором в качестве масштаба длины принималась высота домов на наветренной стороне, масштаба скорости — скорость ветра на высоте, равной трем высотам дома на подветренной стороне, а масштаба концентрации — максимальная концентрация в расчетной области. Ширина тротуаров принималась равной 0.15 с каждой стороны от проезжей части. Дымоходы располагались на расстоянии от края крыши, равном 0.15. Высота дымоходов составляла 0.1.

На рис. 1 представлено распределение концентрации загрязняющих веществ по стенке дома на наветренной стороне улицы (а) и по ширине уличного каньона на высоте 0.15 от дна уличного каньона (б). Кривые 1 соответствуют выбросу загрязняющих веществ только автотранспортом, кривые 2 — выбросу только из дымоходов, кривые 3 — совместному влиянию обоих источников загрязнения.

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.

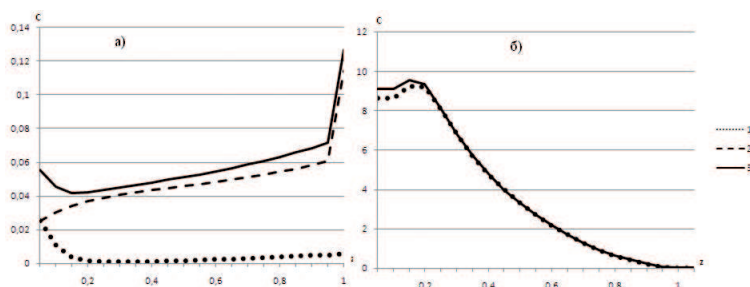


Рис. 1. Распределение концентрации загрязняющих веществ.

Из графиков на рис. 1а видно, что основной вклад в загрязнение воздуха вблизи домов на наветренной стороне оказывают дымоходы. Даже при таких узких тротуарах, которые рассматривались в задаче, автотранспорт существенно загрязняет воздух только в самой нижней части домов. При загрязнении воздуха дымоходами наибольшая концентрация наблюдается вблизи крыш, затем она резко падает и на небольшом расстоянии от крыши падение становится более плавным. Рис. 1б показывает, что вклад дымоходов в загрязнение воздуха вблизи дна уличного каньона незначителен и заметен только вблизи домов на подветренной стороне. Это объясняется сравнительно медленным затягиванием загрязняющего вещества, выброшенного дымоходами, в уличный каньон. На рис. 2 показаны точки максимальной концентрации этого загрязняющего вещества в вертикальных сечениях внутри уличного каньона.



Рис. 2. Положение точек максимальной концентрации.

Литература

1. Волик В. В. Скорость движения воздуха и энергия турбулентности в уличных каньонах с разной высотой домов по сторонам улиц // Научно-практическая конференция, посвященная дню эколога «Природа. Общество. Человек». — Владикавказ: СКГМИ (ГТУ), 2011. — С. 8–12.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНВАЗИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

Е. Д. Давыденко¹

Дирофиляриоз — инвазионное заболевание, вызываемое паразитами подотряда Filariata. В последние годы это заболевание находится в поле зрения специалистов, из-за высокого уровня заражения животных на Юге России [1]. Для изучения динамики распространения заболевания и для разработки способов борьбы с ним естественно использовать аппарат математического моделирования. Такая попытка предпринята в данной работе. Аппарат математического моделирования широко используется для исследования иных похожих заболеваний [2, 3]. Распространение дирофиляриоза происходит по следующей схеме: заражение собаки наступает в момент укуса комаром, когда паразиты проникают из хоботка насекомого в кровь хозяина. Попадая в организм собаки, паразиты разного пола начинают размножаться, локализуясь в сердце, забывая в последствии кровотока, что приводит к смерти. Зараженная собака может передавать заболевание здоровым комарам так же при укусе.

Предложена простейшая математическая модель, описывающая процессы заражения и не учитывающая пространственное распределение популяций. В качестве переменных рассматриваются общее число собак D_T и комаров M_T в ареале. M_I и D_I — численности зараженных популяций комаров и собак соответственно. Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{M}_T = \alpha - b M_T, \\ \dot{D}_T = \gamma - \delta D_T, \\ \dot{M}_I = a (M_T - M_I) D_I - b M_I, \\ \dot{D}_I = a_1 (D_T - D_I) M_I - d D_I, \end{cases}$$

здесь α и γ — параметры скорости размножения комаров и собак соответственно, a — вероятность встречи здорового комара с зараженной собакой, b и d — смертность комаров и смертность собак от болезни, a_1 — вероятность встречи зараженного комара и здоровой собаки, δ — общий коэффициент смертности, включающий смертность от болезни и другие факторы, не связанные с заражением.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

У данной системы есть нулевое и ненулевое равновесия. Первое соответствует состоянию отсутствия болезни, второе ситуации, когда уровень заболеваемости принимает постоянное значение. При определенных соотношениях параметров каждое из этих равновесий может быть устойчивым.

Для анализа влияния пространственной неоднородности рассматривается модель с распределенными в пространстве популяциями и возможностью случайных блужданий особей как собак, так и комаров. Случайные блуждания описываются диффузионными слагаемыми, где σ_1 и σ_2 — коэффициенты диффузии. Соответствующая система уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \dot{M}_T = \alpha - \beta M_T + \sigma_1 \Delta M_T, \\ \dot{D}_T = \gamma - \delta D_T + \sigma_2 \Delta D_T, \\ \dot{M}_I = a(M_T - M_I)D_I - bM_I + \sigma_1 \Delta M_I, \\ \dot{D}_I = a_1(D_T - D_I)M_I - dD_I + \sigma_2 \Delta D_I. \end{cases}$$

Эта нестационарная задача исследовалась численно для случая двумерного ареала прямоугольной формы. Для аппроксимации уравнений в частных производных применялись конечные разности. На границах ареала задавалась нулевая плотность для обеих популяций (это может выполняться на практике если граница находится в зоне, где комары уже не выживают, например, северные территории и южные территории с сухим воздухом). Источники популяций задавались в противоположных углах области, а в начальный момент в некоторой произвольной точке пространства помещались зараженные особи из одной (или обеих) популяции. Изучалась динамика распространения заболевания. Оказалось, что установившийся со временем максимум плотности зараженных особей не обязательно совпадает с максимумом плотности всей популяции.

Литература

1. *Kartashev V., Batashova I., Kartashov S. et al.* Canine and human dirofilariosis in the Rostov Region (Southern Russia) // *Veterinary Medicine International*.— 2011.— Vol. 2011. Article ID 685713.—5 p.
2. *Bowman C., Gumel A. B.* A Mathematical model for assessing control strategies against West Nile virus // *Bull. Math. Biol.*—2005.— № 67.—С. 1107–1133.
3. *Chitinis N., Hyman J.* Determining important parametres in the spread of malaria through the sensitiviry analysis of a mathematical model // *Bull. Math. Biol.*— 2008.— № 70.—С. 1272–1296.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ¹

В. В. Дударев²

Предварительные напряжения — особый вид напряжений, которые существуют в теле при отсутствии внешних механических или температурных нагрузках. Подобные напряжения возникают в результате большинства производственных процессов (литья,ковки, крутки и т. п.), также они содержатся в различных тканях живой материи [1–3]. Предварительные напряжения носят скрытый характер и играют важную роль при наложении критических нагрузок на объект, обычно приводя к преждевременному разрушению.

Представлена общая постановка задачи о колебаниях упругого тела при наличии предварительного напряженного состояния (ПНС) [4]. В качестве конкретного примера исследована задача об антиплоских колебаниях предварительно напряженного анизотропного слоя. Для упрощения задачи использовано интегральное преобразование Фурье по продольной координате. Представлены задачи нулевого, первого и второго приближения, соответствующие степеням параметра преобразования. Рассмотрение прямых задач об отыскании трансформант смещения при известном законе изменения ПНС сведено к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для численного решения этих уравнений использован метод коллокаций, основанный на составной квадратурной формуле трапеции. Дана оценка точности составленных вычислительных схем. Исследовано влияние уровня предварительных напряжений на амплитудно-частотные характеристики слоя.

Сформулированы обратные задачи об отыскании законов изменения компонент тензора предварительных напряжений в рамках акустического метода [5]. В качестве способа решения этих задач

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00194; Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № П596.

²Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет; ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

предложен метод построения итерационного процесса. Представлены необходимые соотношения для отыскания неизвестных поправок в виде интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Численное решение этих уравнений реализовано с помощью метода А. Н. Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации [6]. Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению неоднородного закона изменения ПНС в слое. Представлен анализ полученных результатов. Даны практические рекомендации по выбору частотных диапазонов и режимов нагружения для организации наиболее эффективной процедуры реконструкции.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. О. Ватульяну за предложенные пути решения представленной задачи.

Литература

1. Чернышев Г. Н., Попов А. Л., Козинцев В. М., Пономарев И. И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах.—М: Наука, 1996.—356 с.
2. Биргер И. А. Остаточные напряжения.—М.: Машгиз, 1963.—232 с.
3. Guillou A., Ogden R. W. Growth in soft biological tissue and residual stress development // *Cont. Mech. Therm.*—2007.—Vol. 19, № 5.—P. 47–62.
4. Гузь А. Н. Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений // *Прикладная механика.*—1994.—Т. 30, № 1.—С. 3–17.
5. Dudarev V. V., Vatulyan A. O. On restoring of the pre-stressed state in elastic bodies // *J. Appl. Math. Mech.*—2011.—Vol. 91, № 6.—P. 485–492.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979.—288 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ САВС ТЕЧЕНИЙ

Ю. К. Казуров¹

САВС течения являются модельными течениями сжимаемой идеальной жидкости. Такие течения принадлежат к классу спиральных течений, являющихся стационарными решениями уравнения Эйлера с постоянной функцией Бернулли. Классическим случаем таких течений является АВС (Arnold–Beltrami–Childress) течение, описывающее стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости с периодическими граничными условиями. АВС течение исследовалось в таких работах как [1–4]. В [5] был предложен к изучению класс сжимаемых спиральных течений, описываемых системой

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + W(\xi) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}, \\ v_y = \frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} - W(\xi) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}, \\ v_z = \frac{\lambda W(\xi) \Psi(x, y)}{\kappa(\xi)}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь функция Ψ — функция тока, удовлетворяющая уравнению $-\Delta \Psi = \lambda \Psi$. В работе [6] было исследовано одно из таких течений и обнаружена нетривиальная хаотическая динамика.

В данной работе рассмотрен случай, когда $\Psi(x, y) = B \cos x + C \sin y$. При этом функция $W = \alpha_1 \cos(\xi) + \alpha_2 \sin(\xi) + 1$, а $\kappa(\xi) = \frac{d\xi}{dz} = \sqrt{\alpha_1 \cos \xi + \alpha_2 \sin \xi + 1}$.

В силу периодичности правых частей системы по всем трем параметрам, система изучается на торе $T^3 : [-\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi, -\pi \leq z \leq \pi]$.

Система с трудом поддается аналитическому исследованию, и единственным способом выявить зависимость поведения системы от изменения параметров остается численное исследование. Известно, что при $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ система является интегрируемой. В этом случае фазовое пространство системы расслаивается на инвариантные торы, которые могут разделяться сепаратрисами. При изменении параметров был найден вид хаотической динамики с плотным размещением тонких и крошечных островов регулярности. Поведение решений системы очень чувствительно к изменению начальных условий и параметров. Было проведено сравнение влияния

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

возмущений двух (сжимаемое и несжимаемое) типов на динамику системы при возмущениях одинакового порядка. Кроме того, для анализа хаотической динамики были изучены показатели Ляпунова и их зависимость от типов и величин возмущений. Исследовалась динамика жидкой частицы в торе при различных значениях. Были найдены значения для возмущающих параметров, при которых наблюдалось возникновение областей хаотической динамики и их исчезновение.

Литература

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.— 472 с.
2. Arnold V., Khesin B. Topological Method in Hydrodynamics. Berlin: Springer, 1998.—391 p.
3. Constantin P., Majda A. The Beltrami spectrum for incompressible fluid flows // Commun. Math. Phys.—1988.—Vol. 115.—P. 435–456.
4. Henon M. Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier // C. R. Hebd. Seances Acad. Sci.—1966.—Vol. 262.—P. 312–314.
5. Morgulis A., Yudovich V., Zaslavsky G. Compressible helical flow // Commun. Pure Appl. Math.—1995.—Vol. 48, № 5.—P. 571–582.
6. Govorukhin V., Morgulis A., Yudovich V., Zaslavsky G. Chaotic advection in compressible helical flow // Phys. Rev. E.—1999.—Vol. 60, № 3.—P. 2788–2798.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МИГРАЦИИ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ НА НЕОДНОРОДНОМ КОЛЬЦЕВОМ АРЕАЛЕ

М. Г. Кругликов¹

Рассматривается система нелинейных параболических уравнений, моделирующая распространение потребляющих единый ресурс неантагонистических популяций на кольцевом ареале (берег озера). На основе метода прямых изучается формирование пространственно-неоднородных распределений видов при переменных по ареалу функций линейного роста и предельного насыщения. Изменение плотностей распределения M популяций описывается системой уравнений

$$\dot{w}_i = k_i w_i'' + \eta_i(x) w_i f, \quad i = 1, \dots, M, \quad f = 1 - \frac{1}{P(x)} \sum_{j=1}^M w_j(x, t),$$

$$w_i(0, t) = w_i(a, t), \quad w_i'(0, t) = w_i'(a, t), \quad i = 1, \dots, M,$$

$$w_i|_{t=0} = w_{i0}(x), \quad i = 1, \dots, M.$$

Плотности распределения популяций w_i ($i = 1, \dots, M$) зависят от пространственной переменной $x \in [0, a]$ и времени t , k_i — коэффициенты диффузии, $\eta_i(x)$ — функции линейного роста популяций на ареале. Функция f описывает уменьшение прироста при приближении суммы плотностей к предельно допустимым значениям, $P(x)$ — функция обобщенного ресурса [1–3].

Для численного исследования модели построена конечно-разностная аппроксимация по пространственной переменной, интегрирование по времени ведется методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Далее представлены результаты расчета формирования на ареале ($a = 1$) стационарных распределений для двух неантагонистических популяций w_1 , w_2 . Функции обобщенного ресурса и линейного роста задавались следующим образом: $P(x) = 1 - \mu \sin 2\pi x$, $\eta_1(x) = \eta_{10} + \eta_{11} \cos 2\pi x$, $\eta_2(x) = \eta_{20} + \eta_{21} \sin(2\pi x - \pi/2)$. Начальные распределения популяций задавались в виде $u_0 = \rho_{10} + \rho_{11} \sin 2\pi x$, $v_0 = \rho_{20} + \rho_{21} \sin 2\pi x$. Численные эксперименты показали, что в результате расчетов формируются стационарные распределения, периодических режимов найдено не было.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

В случае постоянных по ареалу параметров линейного роста ($\eta_{11} = \eta_{22} = 0$) и обобщенного ресурса ($\mu = 0$) из различных начальных распределений w_1, w_2 получаются однородные по ареалу распределения популяций. В спектре каждого стационарного решения имеется практически нулевое значение ($-3.7 \cdot 10^{-8}$). Таким образом, наблюдается сильная неединственность решений — формирование семейства распределений видов.

В случае переменной по ареалу функции обобщенного ресурса $P(x)$ ($\mu > 0$) получаются неоднородные распределения популяций по ареалу, причем сумма плотностей равна $P(x)$. С увеличением амплитуды неоднородности начального распределения одной популяции (средний уровень не меняется) происходит уменьшение плотности финального распределения данного вида.

При различных средних плотностях начальных распределений происходит гибель популяции с меньшей плотностью, например, при $\eta_{10} > \eta_{20}$ остается только популяция w_1 . При этом, чем больше отличаются значения параметров роста, тем быстрее происходит выход на стационарный режим.

В случае переменных по ареалу функций линейного роста (ненулевые η_{11}, η_{21}) установлено разрушение семейств стационарных решений. Из разных начальных данных формируется единственное стационарное распределение популяций, определяемое параметрами задачи.

Литература

1. Murray J. D. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.—New York: Springer, 2003.—811 p.
2. Duarte P., Meneses R., Hawkins A., Zhu M., Fang J., Grant J. Mathematical modelling to access the carrying capacity for multi-species culture within coastal waters // Ecol. Model.—2003.—Vol. 168.—P. 109–143.
3. Кругликов М. Г., Цибулин В. Г. Моделирование миграции неантагонистических популяций на неоднородном кольцевом ареале // Молодые ученые в решении актуальных проблем науки.—Владикавказ, 2011.—Т. 2.—С. 29–33.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СЖАТИЯ ДАННЫХ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ

А. И. Недошивина¹

Рассмотрим задачу о локализации точки относительно многоугольника на плоскости. В компьютерной графике известны геометрические способы решения этой задачи, однако все они работают только в случае многоугольника. В работе предлагается еще один алгоритм решения этой задачи для простейшего случая, когда область D является многоугольником. Однако метод может быть обобщен и на случай областей с криволинейной границей. В этих случаях вычисления несколько усложняются.

Алгоритм основан на использовании теорем Коши из теории функций комплексного переменного. Вычислим величину

$$K = \int_{\Delta} \frac{dz}{z - w},$$

где Δ — это контур многоугольника M , w — данная точка плоскости.

Тогда из теоремы и формулы Коши следует, что при $K = 0$ точка $w \notin M$, при $K = 2\pi i$ точка $w \in M$, а при $K = \infty$ точка $w \in \Delta$.

Основное содержание работы состоит в вычислении формулы для величины K при данных координатах вершин многоугольника M и точки плоскости w .

Рассмотрим пример, когда в качестве контура выбран треугольник ABC с вершинами $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$ и на плоскости задана произвольная точка с координатами $w = (x_0, y_0)$. В этом случае вычисления с помощью пакета Mathematica приводят к следующей формуле для величины K :

$$K = \left\{ \arctg\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \arctg\left(\frac{1 - y_0}{x_0}\right) + \arctg\left(\frac{x_0 - y_0 - 1}{x_0 + y_0 - 1}\right) + \right. \\ \left. + \arctg\left(\frac{x_0 - y_0 + 1}{x_0 + y_0 - 1}\right) + \arctg\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \arctg\left(\frac{1 - x_0}{y_0}\right) \right\}.$$

В результате величина K оказалась равной с точностью до множителя сумме арктангенсов, аргументы которых представляются в

¹Россия, Воронеж, Воронежский институт МВД.

виде дробей. Знаменатели дробей — это уравнения сторон данного треугольника, а числители — это уравнения перпендикуляров к каждой стороне в вершинах треугольника.

Для получения общей формулы в случае произвольного многоугольника был вычислен интеграл вдоль произвольной стороны. Он выражается через сумму трех арктангенсов, отвечающих уравнениям стороны и двух концевых перпендикуляров, а также сумму логарифмов. При суммировании по контуру многоугольника логарифмы сокращаются, и остается сумма арктангенсов.

Формула позволяет решать задачу о локализации точки относительно многоугольника аналитически при помощи вычислений. Авторам неизвестен другой подобный аналитический метод решения задачи о локализации. К числу достоинств предложенного метода можно отнести две его особенности:

1) метод работает и для криволинейных границ, составленных из кусков сплайнов, кривых Безье и т. д. Для каждой области вычисление проводится один раз, далее выполняется простая подстановка в уже полученную формулу;

2) метод выгодно применять, когда точка лежит вблизи границы области. Конкурирующие методы приводят к необходимости сравнивать практически равные числа, тогда как в данном методе сравнивать приходится существенно различающиеся по модулю величины 0 , 2π , $\approx \infty$.

Литература

1. Ласло М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++. — Москва: Бином, 1997. — 304 с.
2. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. — Москва: Мир, 1989. — 512 с.
3. Недошивина А. И. О локализации областей при видеонаблюдении // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения: тезисы докл. междунар. науч. конф. — Ростов н/Д., 2012. — С. 85–86.
4. Недошивина А. И., Ситник С. М. О применении методов теории функций комплексного переменного к задаче о локализации точки относительно многоугольника, возникающей при сжатии данных видеонаблюдения // Черноморский альманах науч. исслед. Сер. Фундам. мат. — 2009. — № 1 (8). — С. 324–339.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОНИЦАЕМОСТИ НА ИЗМЕНЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА В НИЖНЕЙ ЧАСТИ ВИБРООЖИЖЕННОГО СЛОЯ

Н. С. Орлова¹

Исследовалась двухжидкостная модель виброожижения на основе подхода Эйлера с использованием закона Дарси [1, 2]. Рассматривалось виброожижение частиц морского песка, диаметром 0,29 мм. Численные расчеты, приведенные в работе [1], плохо описывали экспериментальные данные для нижней границы виброожиженного слоя и давления газа в нижней части слоя в этом случае [3], что, возможно, объясняется сцеплением частиц песка в процессе виброожижения. Поэтому было проведено исследование влияния коэффициента проницаемости слоя частиц k на изменение положения нижней границы слоя и давления газа в его нижней части.

На рис. 1 представлены графики изменения положения нижней границы слоя частиц, толщиной 50 мм, при частоте и амплитуде колебаний полки 50 Гц и 1,42 мм соответственно.

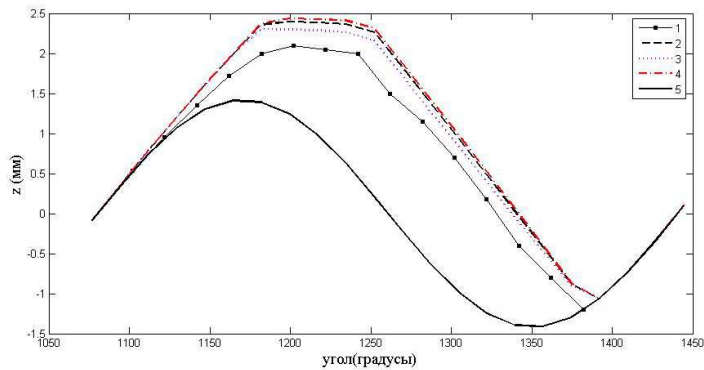


Рис. 1. Изменение положения нижней границы слоя.

Кривая 1 получена в экспериментах [3]; кривая 2 — в результате расчетов при k_0 , определяемом выражениями из работы [1];

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А.

кривая 3 — в результате расчетов при $0,5 k_0$; кривая 4 — в результате расчетов при $1,5 k_0$. Кривая 5 соответствует положению полки. На рис. 2 для этого же случая представлены графики изменения разности давления газа в нижней части слоя частиц и атмосферного давления (Р-Р_а). Обозначения кривых 1–4 соответствуют обозначениям кривых на рис. 1.

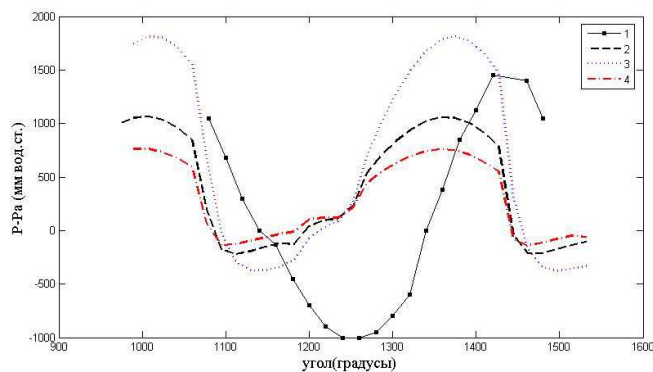


Рис. 2. Изменение разности давления газа в нижней части слоя и атмосферного давления (Р-Р_а).

Из рисунков видно, что на положение нижней границы слоя частиц коэффициент проницаемости влияет незначительно; с уменьшением значения коэффициента проницаемости слоя ($0,5 k_0$) численные расчеты лучше воспроизводят амплитуду изменения давления газа в нижней части слоя частиц. Но даже в этом случае экспериментальная кривая давления запаздывает по фазе по сравнению с расчетной и смещена в сторону более низких значений (рис. 2).

Литература

1. Орлова Н. С. Тестирование двух моделей виброожиженного слоя // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки.—2012.—№ 2.—С. 42–45.
2. Орлова Н. С. Сравнение расчетов распределения объемной доли частиц по высоте виброожиженного слоя с использованием двух моделей // Молодые ученые в решении актуальных проблем науки. Ч. 2.—2012.—С. 43–46.
3. Kroll W. Über das Verhalten von Schutttguf in lotrecht schwingenden Gefaben // Forschung.—1954.—Vol. 20, № 1.—P. 2–15.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ С ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Л. Ю. Плиева¹

В работе рассматриваются квадратурные формулы интерполяционного типа для приближенного вычисления интегралов типа Коши

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\phi(t)}{t-z} dt, \quad (1)$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{\phi(t)}{t-z} dt \quad (2)$$

на отрезке $[-1, 1]$ с весом Якоби, где z не принадлежит отрезку $[-1, 1]$ и $\phi(t)$ достаточно гладкая функция.

В интеграле (1) для построения квадратурной формулы заменим плотность $\phi(t)$ ее интерполяционным многочленом

$$L_n(\phi, t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{C_n(t)}{(t-x_j) C'_n(x_j)} \phi(x_j), \quad (3)$$

где $C_n(t) = \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ — ортогональные многочлены на отрезке $[-1, 1]$ с данной весовой функцией ($\theta = \arccos t$), $x_j = \cos \frac{(2j-1)}{2n+1}\pi$ — нули многочлена $C_n(t)$.

Воспользуемся формулой обращения [1]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_n(t)}{t-z} dt = \frac{i(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} (1 + z - \sqrt{z^2-1}),$$

где под $\sqrt{z^2-1}$ подразумевается фиксированная ветвь, однозначная в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1, 1]$ действительной оси и принимающая на $(1, \infty)$ действительные значения [3].

¹Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А.

После вычисления соответствующих коэффициентов получим следующую квадратурную формулу:

$$\Phi_1(z) \approx \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1-x_j^2}}{z-x_j} \cos \frac{2j-1}{2(2n+1)} \pi \mu_j(z) \varphi(x_j), \quad (4)$$

$$\mu_j(z) = \frac{2i(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} (1 + z - \sqrt{z^2-1}) - 2iS_n(x_j),$$

где $S_n(t) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ — ортогональные многочлены на отрезке $[-1,1]$ с весовой функцией $p(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$, а $\bar{x}_j = \cos \frac{2j}{2n+1} \pi$ — нули многочлена $S_n(t)$.

Аналогично строится квадратурная формула для интеграла (2)

$$\Phi_2(z) \approx \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1-\bar{x}_j^2}}{z-\bar{x}_j} \sin \frac{j\pi}{2n+1} \bar{\mu}_j(z) \varphi(\bar{x}_j), \quad (5)$$

$$\bar{\mu}_j(z) = \frac{2i(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}} (1 + z + \sqrt{z^2-1}) + 2iC_n(\bar{x}_j).$$

Для квадратурных формул (4), (5) была получена следующая оценка погрешности:

$$|R_n(\phi, t)| < \frac{\varepsilon}{4\rho},$$

где

$$\varepsilon = \max_{t \in [-1,1]} \frac{|\phi^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |\omega(t)|, \quad \min_{t \in [-1,1]} |t-z| > \rho.$$

Вычисления многочисленных интегралов показывают эффективность метода.

Литература

1. Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю., Бесаева З. В. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов с весовыми функциями // Владикавказ. мат. журн.—2011.—Т. 3, № 2.—С. 56–63.
2. Ахиезер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. Сер. Мат.—1945—Т. 9, № 4.—С. 275–290.
3. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши.—Новосибирск: Наука, 1980.—120 с.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ ХИЩНИКОВ И ЖЕРТВ С УЧЕТОМ НАПРАВЛЕННОЙ МИГРАЦИИ

П. А. Сикачева¹

В настоящее время математическое моделирование на основе дифференциальных уравнений в частных производных активно используется для формализации представлений о структуре и функционировании живых сообществ [1]. Большой интерес представляет анализ возможных сценариев пространственно-временной организации биологических и экологических систем.

В данной работе изучается модель динамики пространственно-неоднородных популяций «хищник — жертва». Для описания динамики системы трех популяций, распределенных по отрезку, формулируется задача в виде системы нелинейных параболических уравнений. Эта модель учитывает диффузионные потоки, межпопуляционные взаимодействия, прирост численности, а также сопротивления окружающей среды. Взаимодействия популяции жертвы и двух популяций хищников описывается системой трех уравнений в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q_0}{\partial x} + f_1, \quad q_0 = -k_0 u' + \alpha_{12} u v_1' + \alpha_{13} u v_2' + \beta u p', \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x} + f_i, \quad q_i = -k_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + \alpha_{i+1,i} v_i \frac{\partial u}{\partial x}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь $u(x, t)$, $v_i(x, t)$ — плотности популяций жертвы и хищников, $x \in [0, a]$ — пространственная переменная, $t \in R$ — время, k_1, k_2, k_3 — коэффициенты диффузии, $\alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{13}, \alpha_{31}, \beta$ — миграционные параметры, $p(x) > 0$ — обобщенный ресурс (предельная численность), q_1, q_2, q_3 — диффузионные потоки. Изменение плотности популяции жертвы ($u(x, t)$) определяется диффузией, логистическим законом роста и убылью от взаимодействия с хищником:

$$f_1 = \eta_1 u \left(1 - \frac{u}{p(x)} \right) - \mu_1 (v_1 + v_2) u.$$

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

Для популяций хищников имеется прирост от взаимодействия с жертвой и естественная убыль:

$$f_i = \mu_{i+1}uv_i - \eta_{i+1}v_i, \quad i = 2, 3.$$

Здесь η_1, η_2, η_3 — коэффициенты роста (и убыли) популяций, μ_1, μ_2, μ_3 — коэффициенты взаимодействия.

Краевые и начальные условия выглядят следующим образом:

$$u(0, t) = u(a, t) = 0, \quad v_i(0, t) = v_i(a, t) = 0, \quad i = 2, 3, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v_i(x, 0) = v_{i0}(x). \quad (4)$$

Для численного анализа задачи применяется метод прямых, а для интегрирования по времени — метод Рунге — Кутты четвертого порядка. Данная схема была эффективна использована при моделировании динамики близкородственных популяций [2].

В ходе вычислительного эксперимента было изучена динамика популяций при следующих значениях коэффициентов: $k_1 = 0.3$, $k_2 = 0.2$, $k_3 = 0.2$, $\eta_1 = 20$, $\alpha_{12} = \alpha_{13} = -1.3$, $\eta_2 = \eta_3 = 1$, $u_0 = 0.7$, $v_{10} = 0.5$, $v_{20} = 0.5$, $\alpha_{21} = 0.2$, $\alpha_{13} = -0.2$.

В зависимости от отношения параметров μ_i получены различные сценарии поведения системы. Так, при $\mu_2 = 9$, $\mu_3 = 20$ и учете реакции хищников на неравномерное распределение жертвы по ареалу популяция хищника v_1 доминирует над популяцией v_2 .

В случае размещения популяций хищников в разных концах ареала, $\mu_1 = 9$, $\mu_2 = 9$, $\mu_3 = 9$, формируются отдельные ниши для каждого вида хищника, а также небольшая зона смешения, в которой присутствуют различные виды. При возрастании коэффициента убыли жертвы ($\alpha_{12} = \alpha_{13} = 1$) хищники распространяются по ареалу более равномерно, перемешиваясь между собой, а плотность популяции жертв снижается.

Литература

1. Murray J. D. Mathematical Biology II: Spatial models and Biomedical Applications, 3rd ed.—New York: Springer-Verlag, 2003.—811 p.—(Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 18).
2. Будянский А. В., Цибулин В. Г. Моделирование пространственно-временной миграции и близкородственных популяций // Компьютерные исследования и моделирование.—2011.—Т. 3, № 4.—С. 477–488.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗВИТИЯ
ЭРИТРОЛЕЙКЕМИИ В УСЛОВИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ
И ВРЕМЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

А. А. Сорокина¹

Математическое моделирование течения заболеваний и прогнозирование эффективности лечения имеет важное значение. Для описания динамики болезней активно исследуются компьютерные модели, учитывающие пространственные эффекты [1].

Целью данной работы является численный анализ эритропоэза — процесса воспроизводства красных кровяных телец (эритроцитов) в костном мозге, при котором образование новых клеток осуществляется благодаря стволовым клеткам. Если процесс эритропоэза останавливается, то возникает эритролейкемия — болезнь, при которой эритроциты не могут правильно выполнять свои функции, т. е. доставлять кислород к органам. Математическому моделированию процесса эритропоэза посвящен ряд работ (см. [2] и список приведенных ссылок). В работе [3] представлена математическая модель эритропоэза в предположении постоянства притока здоровых клеток и проведено исследование динамики системы.

В настоящей работе рассматривается модель [3] и изучается динамика плотностей распределения здоровых и больных клеток в случае переменного по времени притока стволовых клеток. Развитие и деление клеток описывается системой уравнений типа реакция-диффузия относительно безразмерных переменных, которая в случае одной пространственной переменной имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{P} &= D_p P'' + H + (s_1 - d_1) P(P_0 - P - Q) - a_1 P; \\ \dot{Q} &= D_q Q'' + (s_2 - d_2) Q(P_0 - P - Q) - a_2 Q; \\ P(0, t) &= P(a, t) = Q(0, t) = Q(a, t) = 0; \\ P(x, 0) &= P_0(x); \quad Q(x, 0) = Q_0(x), \quad x \in [0; a].\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь P — популяция здоровых клеток, Q — популяция зараженных клеток, H — интенсивность притока здоровых клеток, s_i — коэффициент самообновления, d_i — коэффициент деления, a_i — коэффициент апоптоза, P_0 — предельная численность клеток.

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

В зависимости от параметров (1) имеет одно или два равновесия

$$P_1^* = (b_1^2/4 + H/k_1)^{1/2} - b_1/2, \quad Q_1^* = 0;$$

$$P_2^* = H/(k_1(b_1 + b_2)), \quad Q_2^* = -P_2^* + b_2.$$

Здесь $k_1 = s_1 - d_1$, $k_2 = s_2 - d_2$, $b_1 = -P_0 + a_1/k_1$, $b_2 = -P_0 + a_2/k_2$. Отсутствию зараженных клеток соответствует решение $(P_1^*, 0)$, которое всегда существует и устойчиво при $b_2 < P_1^*$, что соответствует случаю выздоровления. Для $b_2 > P_1^*$ устойчиво равновесие (P_2^*, Q_2^*) , что соответствует случаю развития лейкемии.

Был рассмотрен случай периодического по времени притока здоровых клеток $H = H_0 + H_1 \sin \omega t$, здесь H_1 — амплитуда, ω — частота. Для $P_0 = 4$, $k_1 = 1.5$, $k_2 = 3$ было получено критическое значение $H_0 = 2.89$ ($H_1 = 0$), для которого при $H_0 < 2.89$ устойчивым является равновесие (P_2^*, Q_2^*) ($b_2 > P^*$ — случай развития лейкемии), а при $H_0 > 2.89$ устойчиво равновесие $(P_1^*, 0)$ ($b_2 < P^*$ — случай выздоровления). При $H_0 = 2.89$, $H_1 = 0$ лейкемия развивается, но при периодическом притоке здоровых клеток ($H_0 = 2.89$, $H_1 = 2$) плотность зараженных клеток монотонно убывает и происходит выздоровление.

Таким образом, при периодическом по времени притоке здоровых клеток можно добиться выздоровления при меньших уровнях H_0 за счет подходящего выбора частоты.

Литература

1. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты, изд. 3-е, перераб. и доп.—М.: Наука, 1991.—300 с.
2. Demin I., Crauste F., Gandrillon O., Volpert V. A multi-scale model of erythropoiesis // J. Biol. Dyn.—2010.—Vol. 4, № 1.—P. 59–70.
3. Bessonov N., Crauste F., Demin I., Volpert V. Dynamics of erythroid progenitors and erythroleukemia // Math. Model. Nat. Phenom.—2009.—Vol. 4, №3.—P. 210–232.

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Т. М. Степанова¹

Движение идеальной жидкости в некоторых случаях может быть описано системой точечных вихрей. Исследования конфигураций точечных вихрей проводятся уже более полутора сотен лет и за это время изучены различные аспекты их динамики и устойчивости. Воспользуемся модельными системами точечных вихрей для анализа динамики мультипольных вихревых конфигураций.

Кирхгофом было показано [1], что уравнения движения в безграничной идеальной жидкости N параллельных прямолинейных вихревых нитей с интенсивностями Γ_i (системы точечных вихрей), точки пересечения которых с перпендикулярной им плоскостью имеют декартовы координаты (x_i, y_i) , можно записать в гамильтоновой форме

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < j}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2),$$

совпадающим с энергией взаимодействия вихрей.

Системой уравнений (1) описывается динамика мультиполя. Под мультиполем понимаем вращающуюся симметричную вихревую конфигурацию с нулевой общей циркуляцией, состоящую из N вихрей. Где один из вихрей является центром (его циркуляция $-\omega$), а остальные являются спутниками (их циркуляция $-\omega/(N-1)$). Подобные вихревые конфигурации наблюдаются в природе и реализуются в физических экспериментах [2]. Исследование динамики конфигураций точечных вихрей, моделирующих мультипольные вихревые структуры, может дать информацию о возможном поведении и распределенных вихревых структур.

Вычисления проводились для триполя с начальными данными: интенсивность ядра -2 , интенсивность каждого спутника -1 при расстоянии между спутником и ядром равным 3. Для квадруполя

¹Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет.

с интенсивностью ядра — 3, интенсивностью каждого спутника — -1 при расстоянии между спутником и ядром, равным 3. И для пентаполя с интенсивностью ядра — 4, интенсивностью каждого спутника равным -1 при расстоянии между спутником и ядром равным 3.

Изучались воздействия на точечные мультиполи трех видов возмущений: 1) изменение интенсивности одного из спутников в a -раз, 2) изменение интенсивности одного спутника одновременно с компенсационным изменением интенсивности других спутников, 3) смещение одного из спутников на расстояние d от ядра мультиполя.

С помощью вычислительного эксперимента показано, что при всех видах возмущений мультипольные вихревые конфигурации начинают совершать движения на плоскости. Эти движения могут быть как вращательными, так и поступательными. Трипольные и квадрупольные конфигурации сохраняют свою структуру даже при достаточно интенсивных возмущениях. В случае квадрупольной динамика может быть хаотической. Пентапольная вихревая конфигурация распадается в результате возмущений, обусловленных только вычислительной погрешностью.

Литература

1. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур.—Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2005.—368 с.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.—Москва: Мир, 1990.—512 с.
3. Kizner Z., Khvoles R. The tripole vortex: Experimental evidence and explicit solutions // Phys. Rev. E.—2004.—Vol 70, № 1 (016307)—4 p.

О РАЗЛОЖЕНИИ СИГНАЛОВ ПО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ СДВИГАМ ФУНКЦИЙ ГАУССА

А. С. Тимашов¹

Одной из основных проблем обеспечения информационной безопасности при хранении, обработке и передаче данных является уменьшение их объема, при котором однако сохраняются возможности полноценной работы с данными, не теряется их целостность и достоверность. При решении задач сжатия информации одним из основных математических подходов является использование различных алгоритмов и схем интерполяции данных. При этом хранение больших массивов данных заменяется сохранением значительно меньших их объемов новых проинтерполированных данных, допускающих восстановление первоначальной информации с небольшой допустимой погрешностью. При использовании интерполяционных алгоритмов как правило массив данных представляет собой значения некоторой функции, вместо таблицы значений которой можно хранить лишь небольшое число коэффициентов ее разложения в некоторый ряд. В традиционных алгоритмах используются широко известные ряды Тэйлора, Фурье, Уолша, разложения по ортогональным многочленам, рациональные приближения или аппроксимации Паде, дискретные преобразования Фурье или их модификации, разложения по функциям Рвачева или всплескам. Для специализированных задач интерполяции в современных методах используются многочисленные разложения других типов. В частности, в последнее время широкое распространение получил метод разложения функции по целочисленным сдвигам экспоненциальных функций Гаусса, который в ряде задач имеет свои преимущества перед другими методами. В этой статье мы рассмотрим этот метод интерполяции функций. Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений в основном и посвящена данная работа.

¹Россия, Воронеж, Воронежский институт МВД.

В работе получены теоретические результаты, касающиеся корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведен достаточно существенный объем компьютерных вычислений.

Приведем список полученных результатов.

1. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.

2. Проведено компьютерное исследование решений исследуемых конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи компьютерного пакета Mathematica при широком наборе управляющих параметров. Численно показано, что при увеличении размерности приближающих систем их решения стремятся к предельным значениям, которые следует принять за решение исходной бесконечной системы уравнений.

3. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключения режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры. Выведен большой объем графиков для аппроксимаций этих сигналов, проанализированы ошибки приближений, вычислены количественные характеристики ошибок, среднеквадратичные и равномерные.

Литература

1. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate Approximations.—Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2007.—349 p.—(Math. Surveys and Monographs, Vol. 141).
2. Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // J. Math. Sci.—2011. Vol. 173, № 2.—P. 231–241.
3. Киселев Е. А., Минин Л. А., Ситник С. М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и ее приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных.—2010.—С. 107–116.
4. Минин Л. А., Ситник С. М., Журавлев М. В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Науч. ведомости Белгор. гос. ун-та.—2009.—№ 13 (68), № 17/2.—С. 89–99.
5. Минин Л. А., Ситник С. М. О неравенствах для тета-функций Якоби // Черноземный альманах науч. исслед. Сер. Фундам. мат.—2009.—№ 1 (8).—С. 234–311.

Приложение

Профессору, доктору физико-математических наук Амурхану Хаджумаровичу Гудиеву исполнилось шестьдесят. Его жизнь, вся трудовая деятельность — вдохновляющий пример служения высокой научной истине. Первые научные результаты Амурхана Хаджумаровича относятся к теории чисел — одному из древнейших и красивейших разделов математики. Он увлекся теорией чисел еще в студенческие годы и продолжал заниматься ею в аспирантуре. Однако в конце пятидесятых годов его внимание привлекает другая область математики — функциональный анализ и его приложения. Решающее значение в творческой судьбе А. Х. Гудиева имела встреча с крупнейшим представителем анализа академиком С. Л. Соболевым в 1960 г. на третьем Всесоюзном съезде математиков в Москве. После этой встречи он переезжает в Новосибирский научный центр и навсегда связывает свою научную работу с функциональным анализом и его приложениями к теории дифференциальных уравнений.

Надо сказать, что шестидесятые годы — особый период в истории становления Новосибирского Академгородка как мирового научного центра. Дух того времени можно передать словами: молодость, энтузиазм, романтика, талант, одержимость, жажда знаний. Тот же дух был присущ молодому исследователю. Амурхан Хаджумарович вошел в новую для него область математики стремительно и ярко. В первых же своих работах он решил крупную научную проблему и заявил о себе как о тонком исследователе с большим будущим. Впоследствии он встал в один ряд с мировыми авторитетами в области теории вложения и дифференциальных уравнений.

Исключительно плодотворное десятилетие пребывания А. Х. Гудиева в Новосибирском Академгородке не может не вызвать искреннего восхищения.

В оригинальных творческих работах А. Х. Гудиева подтвердилась научная гипотеза, выдвинутая видными учеными-математиками академиками С. Л. Соболевым и С. М. Никольским. После этих работ была осознана принципиально важная роль пространств со смешанной нормой в общей теории функциональных пространств

¹Статья перепечатана из газеты «Смена» Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова за 22 июня 1992 г.

и теории дифференциальных уравнений. И вот уже более трех десятков лет в этом направлении ведутся интенсивные исследования. Современная теория пространств со смешанной нормой с многочисленными ее приложениями — труд многих математиков, работавших как в нашей стране, так и за рубежом. Но специалисты знают, что А. Х. Гудиев — один из тех, кто стоял у истоков теории. Во многом благодаря его трудам это направление обрело свой современный облик. И кафедра СОГУ, основанная и по сей день возглавляемая А. Х. Гудиевым, называется кафедрой функционального анализа и дифференциальных уравнений. Следует также отметить, что в течение нескольких лет Амурхан Хаджумарович работал ректором Северо-Осетинского госуниверситета, сочетая научную и педагогическую деятельность с напряженной работой руководителя вуза.

Хочется завершить этот короткий рассказ об ученом следующими словами. Математическое творчество Амурхана Хаджумаровича имеет не только сугубо научное значение, но содержит также и значительный нравственный заряд. В наше смутное время, в период всеобщей рыночной вакханалии и националистической истерии, необходимы нравственные ориентиры. Именно поэтому особенно важно и приятно сознавать, что рядом с нами живет и трудится человек, чей творческий путь является вдохновляющим примером служения высокой научной истине, а значит и торжеству человеческого духа и разума.

А. Г. Кусраев

Сведения об авторах

Виноградова Татьяна Анваровна
Воронеж, Воронежский институт
МВД, соискатель каф. высшей мате-
матики
E-mail: grapes1@yandex.ru

Волик Мария Владимировна
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, младший научный сотрудник
E-mail: volikmv@mail.ru

Гадзова Луиза Хамидбиевна
Нальчик, НИИ ПМА КБНЦ РАН,
младший научный сотрудник
E-mail: macaneeva@mail.ru

Давыденко Екатерина Дмитри-
евна
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, студент магистрату-
ры
E-mail: edavidenko@nm.ru

Дударев Владимир Владимиро-
вич
Ростов-на-Дону, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, младший научный сотрудник
E-mail: dudarev_vv@mail.ru

Иванов Павел Александрович
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, аспирант
E-mail: pavel_rsm@list.ru

Кажарова Рита Замудиновна
Нальчик, НИИ ПМА КБНЦ РАН,
стажер-исследователь
E-mail: kagharova_r@mail.ru

Казуров Юрий Константинович
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, студент
E-mail: kazurov_92@mail.ru

Кругликов Михаил Геннадьевич
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, аспирант
E-mail: mkruglicov@gmail.com

Кусраева Залина Анатольевна
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, младший научный сотрудник
E-mail: zali13@mail.ru

Магомед-Касумов Магомедрасул
Грозбекович
Махачкала, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, младший научный сотрудник
E-mail: rasuldev@gmail.com

Недошивина Анна Ивановна
Воронеж, Воронежский институт
МВД, соискатель каф. высшей мате-
матики
E-mail: vishechka87@mail.ru

Нестеров Никита Юрьевич
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, студент
E-mail: samson47@bk.ru

Орлова Наталья Сергеевна
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, стажер-исследователь
E-mail: norlova.umi.vnc@gmail.com

Плиева Любовь Юрьевна
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, младший научный сотрудник
E-mail: plieva-21@mail.ru

Тасоев Батрадз Ботазович
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, стажер-исследователь
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

Сергунин Павел Сергеевич
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, аспирант
E-mail: pavio188@mail.ru

Тимашов Александр Сергеевич
Воронеж, Воронежский институт
МВД, адъюнкт каф. высшей матема-
тики
E-mail: loaderrus@gmail.com

Сикачева Полина Александровна
Ростов-на-Дону, Южный феде-
ральный университет, студент
магистратуры
E-mail: SikPolina@yandex.ru

Чшиев Аслан Григорьевич
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, младший научный сотрудник
E-mail: zchaslan@mail.ru

Сорокина Анна Андреевна
Ростов-на-Дону, Южный феде-
ральный университет, студент
магистратуры
E-mail: sorokinaanna@nm.ru

Шарапуудинов Тимур Идрисович
Махачкала, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, младший научный сотрудник
E-mail: sharapudinov@gmail.com

Степанова Татьяна Михайловна
Ростов-на-Дону, Южный федераль-
ный университет, студент
E-mail: tattyana.stepanova@gmail.com

Султанахмедов Мурад Салихо-
вич
Махачкала, ЮМИ ВНЦ РАН и
РСО-А, младший научный сотрудник
E-mail: sultanakhmedov@gmail.com

Шах-Эмиров Таджидин Нурмаго-
медович
Махачкала, ДНЦ РАН, инженер-
исследователь
E-mail: Tadgius@gmail.com

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вехи жизни А. Х. Гудиева	7
Предисловие	9
Демиденко Г. В. О работах профессора А. Х. Гудиева по функциональным пространствам и дифференциальным уравнениям.....	15

ПЛЕНАРНЫЕ ЛЕКЦИИ

Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа.....	29
Демиденко Г. В. Числовые характеристики в задачах устойчивости.....	39
Каменецкий Е. С. Математическое моделирование социальных и исторических процессов.....	49
Kusraev A. G. Injective Banach lattices.....	57
Малинецкий Г. Г. Прикладная математика на рубеже XXI века.....	67
Цибулин В. Г. Математическое моделирование и методы нелинейной динамики.....	93
Шарапудинов И. И. Пространства Лебега и Соболева с переменным показателем и комбинированные квадратурные формулы.....	103

СЕКЦИЯ I МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Виноградова Т. А. Об одном алгоритме обработки информации.....	127
Гадзова Л. Х. Об одной краевой задаче для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами.....	128

Иванов П. А. О нетривиальных разложениях нуля в пространстве целых функций	130
Кажарова Р. З. Нелокальная задача для нагруженного уравнения в частных производных с оператором Барретта в главной части	132
Кусраева З. А. Теорема Радона — Никодима для однородных полиномов	134
Магомед-Касумов М. Г. Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для кусочно-гладких функций	136
Нестеров Н. Ю. Весовое пространство непрерывных функций на метрическом пространстве	138
Сергунин П. С. Критерий изоморфности пространств ультрадифференцируемых функций	140
Султанахмедов М. С. Некоторые устойчивые методы вычисления полиномов Чебышева, ортогональных на равномерной сетке, и их приложения	141
Тасоев Б. Б. Обобщенное функциональное исчисление	143
Чшиев А. Г. О теореме Герхарта — Прюсса	145
Шарапудинов Т. И. Предельные дискретные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерных сетках, и их аппроксимативные свойства	147
Шах-Эмиров Т. Н. О равномерной ограниченности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ некоторых интегральных операторов свертки	150

СЕКЦИЯ II МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Волик М. В. Загрязнение атмосферы уличных каньонов источниками загрязнения, расположенными на крышах более низких домов	153
Давыденко Е. Д. Математическая модель распространения инвазионного заболевания	155

Дударев В. В. Исследование обратной задачи об определении неоднородного предварительного напряженного состояния в анизотропном слое	157
Казуров Ю. К. Исследование САВС течений	159
Кругликов М. Г. Моделирование миграции неантагонистических популяций на неоднородном кольцевом ареале	161
Недошивина А. И. Об одном методе сжатия данных видеонаблюдения	163
Орлова Н. С. Исследование влияния коэффициента проницаемости на изменение давления газа в нижней части виброожиженного слоя	165
Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши с весовыми функциями	167
Сикачева П. А. Численный анализ динамики популяций хищников и жертв с учетом направленной миграции	169
Сорокина А. А. Моделирование процесса развития эритролейкемии в условиях пространственной и временной неоднородности	171
Степанова Т. М. Изучение динамики точечных вихрей	173
Тимашов А. С. О разложении сигналов по целочисленным сдвигам функций Гаусса	175

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сердце не стареет	179
Сведения об авторах	181

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Труды VIII региональной
школы-конференции молодых ученых
«Владикавказская молодежная
математическая школа»
(Россия, Владикавказ, 16–21 июля 2012 г.)

Редакционная коллегия:
*Г. В. Демиденко, Е. С. Каменецкий,
А. Г. Кусраев*

Зав. редакцией *В. В. Кибизова*
Компьютерная верстка *М. У. Вазагаева*

Подписано в печать 24.12.2012.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$. Усл. п. л. 10,81.
Тираж 200 экз. Заказ № 201.

ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-17-0



9 785904 695170