

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И  
НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ЮЖНО-РОССИЙСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ  
ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА  
ВОЛГОДОНСКИЙ ИНСТИТУТ СЕРВИСА

---

---

Исследования по  
современному анализу  
и математическому  
моделированию

Владикавказ  
2008

ББК 22.12  
УДК 517 + 519  
И-85

Ответственные редакторы:

доктор физико-математических наук Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК,  
доктор физико-математических наук А. Г. КУСРАЕВ

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда  
фундаментальных исследований, проект № 07-01-06094.

**Исследования по современному анализу и математическому моделированию** / отв. ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—  
Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2008.—  
384 с.

В сборник вошли доклады, прочитанные на Международной конференции «Теория операторов. Комплексный анализ. Математическое моделирование», состоявшейся в сентябре 2007 года в г. Волгодонске Ростовской области на базе Волгодонского филиала Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса.

ISBN 978-5-93000-048-1

- © Институт прикладной математики и информатики  
ВНЦ РАН, 2008
- © Южный Федеральный университет, 2008
- © Волгодонский институт сервиса ЮРГУЭС, 2008

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В сборник вошли материалы Международной конференции «Теория операторов. Комплексный анализ. Математическое моделирование», состоявшейся с 29 августа по 2 сентября 2007 года в г. Волгодонске Ростовской области на базе Волгодонского филиала Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса. Организаторами конференции выступили Институт прикладной математики и информатики Владикавказского научного центра РАН (г. Владикавказ), Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону) и Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса (г. Шахты Ростовской области). Конференция была поддержана грантом РФФИ, проект № 07-01-06094.

В сборник включены большинство секционных докладов, а также все пленарные лекции и циклы лекций. В соответствии с основными научными направлениями конференции материал разбит на четыре части.

Первая часть состоит из работ, относящихся к различным направлениям теории функций: функции регулярного роста, выпуклые характеристики роста функции, обобщенный индекс конденсации типа Леонтьева, представление аналитических функций рядами, граничные задачи. В эту часть включены пленарные лекции С. Б. Климентова о представлении классов обобщенных аналитических функций и Ю. Ф. Коробейника о свойствах гармонических и субгармонических функций и некоторых специальных операторах в них.

Вторую часть составляют исследование различных функциональных пространств (аналитические пространства Бесова, пространства ультрадифференцируемых функций и ультрасредств, решетки Орлича — Канторовича, пространства с базисом и т. п.), а также содержание пленарных лекции А. В. Абанина, в которой дается обзор различных теорий ультрасредств, и В. П. Кондакова, представляющей некоторые аспекты бесконечномерной голоморфности.

В третью часть вошли работы, относящиеся к различным направлениям теории операторов, таким как полугруппы линейных операторов, нелинейные операторные уравнения, дифференциальные операторы, и др. В пленарной лекции И. Г. Ганиева и С. С. Сададдинова

к изучению полугрупп операторов в пространствах Банаха — Канторовича применяется техника измеримых банаховых расслоений. В обзоре А. Г. Кусраева представлены важнейшие результаты о порядковых свойствах билинейных операторов в векторных решетках, полученные в последние десять лет, а в обзоре В. М. Ситника изложены основные понятия и задачи теории операторов преобразования с большим числом разнообразных приложений.

Четвертая часть посвящена математическому моделированию. Рассмотрены вопросы моделирования магнитной реакции пластин, вихревых токов на сингулярных носителях, надежности системы электроснабжения городов, налогообложения фирмы. В лекции И. Е. Васильева, Е. И. Васильева и Р. В. Ключева представлена математическая модель результирующего сопротивления в точке общего присоединения электрической системы и нелинейного потребителя, а в лекции В. С. Струкова и В. А. Родина обсуждаются стационарные траектории максимального роста в модели Неймана и оптимальное значение ставки налога в модели Солоу.

*Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев*

# Часть I

## Теория функций



# ФУНКЦИИ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ДЛЯ ХЕРМАНДЕРОВСКИХ АЛГЕБР ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕРАДИАЛЬНЫМ ВЕСОМ

**А. В. Абанин, А. В. Андреев**

В настоящей работе вводятся два определения функции регулярного роста относительно алгебры Хермандера, порожденной нерадиальной весовой функцией, и доказывается их эквивалентность.

Как известно, функции вполне регулярного роста (ф. в. р. р.), класс которых был выделен независимо друг от друга в 30-х годах прошлого столетия Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером, играют важную роль в комплексном анализе и его приложениях. Напомним классическое определение ф. в. р. р. на луче (см., например, [1, с. 182]).

Пусть  $f$  — целая функция конечного типа при порядке  $\rho > 0$ , и  $h_f$  — ее индикатор. Через  $\lambda$  обозначаем меру Лебега на прямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что  $f$  — ф. в. р. р. на луче  $\arg z = \varphi$ , если на  $[0, \infty)$  имеется такое измеримое по Лебегу множество  $E_\varphi$  нулевой относительной меры (т. е.  $m^*(E_\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda(E_\varphi \cap (0, r))}{r} = 0$ ), что

$$h_f(\varphi) = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_\varphi}} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^\rho}.$$

Недавно в работе А. С. Кривошеева [2] было сформулировано другое определение ф. в. р. р. на луче, которое оказалось полезным при исследовании разрешимости систем уравнений свертки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что  $f$  — ф. в. р. р. на луче  $\arg z = \varphi$ , если существует последовательность  $\{t_k\}_{k=1}^\infty$  такая, что  $t_k \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(t_k e^{i\varphi})|}{t_k^\rho} = h_f(\varphi).$$

Следует отметить, что эквивалентность определений 1 и 2, констатируемая в [2], может быть выведена из результатов статьи Г. Г. Брайчева [3].

Как было установлено Ю. Ф. Коробейником [4], О. В. Елифановым [5] и В. А. Ткаченко [6], полная регулярность функции роста непосредственным образом связана с разрешимостью уравнений типа свертки, теоремами деления и замкнутостью главных идеалов в пространствах целых функций. Схожая связь была обнаружена и в работе З. Момма [7], в которой рассматривались алгебры хермандеровского типа, порожденные нерадиальными весами. Именно, пусть  $u$  и  $v$  — непрерывные неотрицательные четные на  $\mathbb{R}$  функции, которые возрастают на  $[0, \infty)$ . Требуется, чтобы  $v$  была выпуклой,  $v(0) = 0$  и

$$u(t) = o(v(t)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Обозначим  $p(z) = u(\operatorname{Re} z) + v(z)$ , где  $z \in \mathbb{C}$ , и предположим, что

$$\ln(1 + |z|) = O(p(z)) \quad \text{и} \quad p(2z) = O(p(z)) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Алгебра хермандеровского типа, порожденная весом  $p$ , — пространство целых функций

$$A_p := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : |f|_k := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| e^{-kp(z)} < \infty \text{ при некотором } k \in \mathbb{N} \right\},$$

наделенное естественной топологией внутреннего индуктивного предела.

В [7] доказано, что для фиксированной, отличной от тождественного нуля функции  $F \in A_p$  эквивалентны следующие условия:

- (i) главный идеал  $FA_p$  замкнут в  $A_p$ ;
- (ii) для каждой функции  $g \in A_p$ , для которой  $f := \frac{g}{F} \in H(\mathbb{C})$ , имеем, что  $f \in A_p$ ;

(Е) существуют такие  $k \in \mathbb{N}$  и  $x_0 > 0$ , что для каждого  $x \in \mathbb{R}$  с  $|x| \geq x_0$  на отрезке  $\{t \in \mathbb{R} : |t - x| \leq kv^{-1}(u(x))\}$  имеется такая точка  $t$ , в которой  $|F(t)| \geq \exp(-ku(t))$ .

В свете вышесказанного естественно назвать функции  $F$  из  $A_p$ , удовлетворяющие условию (Е), функциями *регулярного роста относительно алгебры  $A_p$* .

Основной результат настоящей работы, который будет сейчас сформулирован, показывает, что, по аналогии с классическим случаем ф. в. р., регулярность роста функции относительно алгебры  $A_p$  определяется ее поведением на некоторой зависящей от функции последовательности точек вещественной оси.



**Теорема.** Функция  $F \in A_p \setminus \{0\}$  является функцией регулярного роста относительно алгебры  $A_p$  тогда и только тогда, когда существуют номер  $m \in \mathbb{N}$  и последовательность  $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ , состоящая из двух подпоследовательностей  $\{t_n^+\}_{n=1}^\infty$  и  $\{t_n^-\}_{n=1}^\infty$ , расположенных, соответственно, на положительной и отрицательной частях вещественной оси и удовлетворяющих следующим условиям:

- (I)  $\lim t_n^\pm = \pm\infty$ ;
- (II)  $|t_n^\pm - t_{n+1}^\pm| \leq mv^{-1}(u(t_n^\pm))$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (III)  $|F(t_n^\pm)| \geq \exp(-mu(t_n^\pm))$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

$\triangleleft (\Rightarrow)$  Пусть  $F$  является функцией регулярного роста относительно алгебры  $A_p$ , и числа  $k \in \mathbb{N}$  и  $x_0 > 0$  выбраны в соответствии с условием (E).

Учитывая, что  $v^{-1}(ku(x)) = o(|x|)$ ,  $x \rightarrow \infty$  [7], имеем, что для произвольного  $p > 0$  существует такое  $r_1 > 0$ , зависящее от  $k$  и  $p$ , что для всех  $x > r_1$

$$kv^{-1}(u(x)) \leq \frac{x}{p}. \quad (3)$$

Возьмем некоторое  $x^* > \max\{x_0, r_1\}$  и образуем последовательность  $x_n = 2nx^*$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку  $x_n > x_0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то из регулярности роста функции  $F$  следует, что при каждом  $n \in \mathbb{N}$  существует такое  $t_n^+$ , что

$$|t_n^+ - x_n| \leq kv^{-1}(u(x_n)) \quad \text{и} \quad |F(t_n^+)| \geq \exp(-ku(t_n^+)).$$

Заметим, что  $2nx^* - kv^{-1}(u(2nx^*)) \geq nx^* \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ . Следовательно,  $2nx^* - kv^{-1}(u(2nx^*)) > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  при любом  $p > 1$ . В дальнейшем будем считать, что  $p = 4$ .

Оценим  $|t_n^+ - t_{n+1}^+|$  в зависимости от расположения точек  $t_n^+$  и  $t_{n+1}^+$  относительно друг друга.

- 1)  $t_n^+ = t_{n+1}^+$ . Тогда автоматически  $|t_n^+ - t_{n+1}^+| \leq v^{-1}(u(t_n^+))$ .
- 2)  $t_n^+ < t_{n+1}^+$ . В этом случае

$$0 < t_{n+1}^+ - t_n^+ \leq 2(n+1)x^* - 2nx^* + kv^{-1}(u(2(n+1)x^*)) + kv^{-1}(u(2nx^*)).$$

Из (2) следует, что имеется такое  $C_1 > 1$ , что  $u(nx^*) \leq C_1 u\left(\frac{n}{2}x^*\right)$ , начиная с некоторого номера  $n_0$ . Используя (3), получаем, что

$$t_n^+ \geq 2nx^* - kv^{-1}(u(2nx^*)) \geq \frac{3}{2}nx^*.$$

Отсюда, в частности, следует, что  $\lim t_n^+ = +\infty$ . Учитывая вышесказанное, а также вогнутость функции  $v^{-1}$  и равенство  $v(0) = 0$ , имеем, что при  $n \geq n_0$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} t_{n+1}^+ - t_n^+ &\leq 2x^* + kv^{-1}\left(C_1^2 u\left(\frac{n+1}{2}x^*\right)\right) + kv^{-1}\left(C_1^2 u\left(\frac{n}{2}x^*\right)\right) \leq \\ &\leq 2x^* + kC_1^2\left(v^{-1}\left(u\left(\frac{n+1}{2}x^*\right)\right) + v^{-1}\left(u\left(\frac{n}{2}x^*\right)\right)\right) \leq \\ &\leq 2x^* + 2kC_1^2 v^{-1}\left(u\left(\frac{3}{2}nx^*\right)\right) \leq 2x^* + 2kC_1^2 v^{-1}(u(t_n^+)) \leq \\ &\leq \left(\frac{2x^*}{2kC_1^2 v^{-1}(u(t_{n_0}^+))} + 1\right) 2kC_1^2 v^{-1}(u(t_n^+)). \end{aligned}$$

3)  $t_n^+ > t_{n+1}^+$ . Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq t_n^+ - t_{n+1}^+ \leq 2nx^* + kv^{-1}(u(2nx^*)) - 2(n+1)x^* + \\ &+ kv^{-1}(u(2(n+1)x^*)) \leq kv^{-1}(u(2nx^*)) + kv^{-1}(u(2(n+1)x^*)) \leq \\ &\leq kC_1^2\left(v^{-1}\left(u\left(\frac{n}{2}x^*\right)\right) + v^{-1}\left(u\left(\frac{n+1}{2}x^*\right)\right)\right) \leq 2kC_1^2 v^{-1}(u(t_n^+)). \end{aligned}$$

Взяв натуральное  $m$  так, чтобы  $m \geq \left(\frac{2x^*}{2kC_1^2 v^{-1}(u(t_{n_0}^+))} + 1\right) 2kC_1^2$ , из 2) и 3) заключаем, что  $|t_n^+ - t_{n+1}^+| \leq mv^{-1}(u(t_n^+))$  для всех  $n \geq n_0$ . Отбросив, если это необходимо, первые  $n_0 - 1$  членов последовательности  $\{t_n^+\}_{n=1}^\infty$ , можно считать, что нужная нам оценка  $|t_n^+ - t_{n+1}^+|$  выполняется для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что, так как  $m \geq k$ , то

$$|F(t_n^+)| \geq \exp(-ku(t_n^+)) \geq \exp(-mu(t_n^+)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, мы установили существование последовательности  $\{t_n^+\}_{n=1}^\infty$ , удовлетворяющей условиям (I)–(III). Действуя аналогично, строим  $\{t_n^-\}_{n=1}^\infty$ , для которой (I)–(III) также выполнены. Ясно, что номер  $m$  можно при этом выбрать одним и тем же для «положительной» и «отрицательной» частей,  $\{t_n^+\}_{n=1}^\infty$  и  $\{t_n^-\}_{n=1}^\infty$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть существуют номер  $m \in \mathbb{N}$  и последовательность  $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ , удовлетворяющие условиям (I)–(III). Положим  $x_0 = \max\{t_{n_0}^+, -t_{n_0}^- + 1\}$  и рассмотрим любое  $x > x_0$ . Поскольку  $\lim t_n^+ =$

$= +\infty$ , то существует номер  $n_1 \geq n_0$  такой, что  $t_{n_1}^+ \leq x \leq t_{n_1+1}^+$ . Тогда

$$0 \leq x - t_{n_1}^+ \leq t_{n_1+1}^+ - t_{n_1}^+ \leq mv^{-1}(u(t_{n_1}^+)) \leq mv^{-1}(u(x))$$

и при этом

$$|F(t_{n_1}^+)| \geq \exp(-mu(t_{n_1}^+)).$$

Аналогично показываем, что для любого  $x < -x_0$  найдется такой номер  $n_2$ , что

$$0 \leq t_{n_2}^- - x \leq t_{n_2+1}^- - t_{n_2}^- \leq mv^{-1}(u(t_{n_2}^-)) \leq mv^{-1}(u(x))$$

и при этом

$$|F(t_{n_2}^-)| \geq \exp(-mu(t_{n_2}^-)).$$

Из приведенных оценок следует, что  $F$  является функцией регулярного роста относительно алгебры  $A_p$ .  $\triangleright$

### Литература

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
2. Кривошеев А. С. Регулярность роста системы функций и системы неоднородных уравнений свертки в выпуклых областях комплексной плоскости // Изв. РАН. Сер. мат.—2000.—Т. 64, № 5.—С. 69–132.
3. Брайчев Г. Г. Индекс лакуарности // Мат. заметки.—1993.—Т. 53, № 6.—С. 3–10.
4. Коробейник Ю. Ф. О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях // Мат. сб.—1968.—Т. 75, № 2.—С. 225–234.
5. Епифанов О. В. К вопросу об эпиморфности оператора свертки в выпуклых областях // Мат. заметки.—1974.—Т. 16, № 3.—С. 415–422.
6. Ткаченко В. А. Об операторах типа свертки в пространствах функционалов // Докл. АН СССР.—1974.—Т. 219, № 3.—С. 555–557.
7. Momm S. Closed principal ideals in nonradial Hormander algebras // Archiv Math.—1992.—V. 58.—P. 47–52.

АБАНИН АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ  
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет;  
Владикавказ, Институт прикладной математики и  
информатики ВНИЦ РАН  
E-mail: abanin@math.rsu.ru

АНДРЕЕВ АНДРЕЙ ВАЛЕРИЕВИЧ  
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
E-mail: geulder@mail.ru

К ЗАДАЧЕ О БАЗИСНОСТИ ПОЛИНОМОВ ЯКОБИ В  
ПРОСТРАНСТВЕ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ  
НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин, Ф. И. Никишин

Установлены достаточные условия на весовую последовательность, при которых полиномы Якоби составляют базис в соответствующем пространстве ультрадифференцируемых функций типа Берлинга.

## Введение

В 1961 г. Б. С. Митягин [1] в числе многих других результатов доказал абсолютную базисность полиномов Чебышева в пространстве бесконечно дифференцируемых на отрезке функций  $C^\infty[-1; 1]$ . В дальнейшем задача о базисности в  $C^\infty[-1; 1]$  различных систем специальных функций рассматривалась многими математиками. Так, М. Гийемо-Тейссье [2] показала, что полиномы Лежандра также образуют абсолютный базис в указанном пространстве. Ее результат был обобщен Х. Трибелем [3], обосновавшим абсолютную базисность в  $C^\infty[-1; 1]$  собственных функций дифференциального оператора специального вида, рассматриваемого в комплексном гильбертовом пространстве  $L_2[-1; 1]$ . Г. И. Баликов [4] установил то же самое для полиномов Якоби, обобщая, таким образом, в несколько ином направлении нежели Трибель, результаты Митягина и Гийемо-Тейссье. Позднее Баликов в [5] доказал, что утверждение об абсолютной базисности полиномов Якоби сохраняется для пространств ультрадифференцируемых функций (коротко, УДФ) типа Данжуа — Карлемана, которые определяются ограничениями на рост производных, задаваемыми с помощью некоторой бесконечной числовой матрицы.

В последнее время широкое распространение получили пространства УДФ, определяемые в рамках модифицированного подхода Берлинга — Бьорка несколько иначе, чем в [5] (см., например, [6–8]), с помощью весовых функций. Цель данной работы — получить достаточные условия на весовые функции, при выполнении которых

аналог результата Баликова имеет место для соответствующего пространства УДФ. Схема, которую мы приводим ниже (и которую использовал Баликов в [5]) восходит к работе Митягина [1]: ключевым моментом в рассуждении является получение оценок сверху норм элементов предполагаемого базиса и сопряженных норм коэффициентов функционалов. Отметим, что в рамках используемого нами подхода к определению пространств УДФ эти оценки представляют самостоятельный интерес. При этом, как показано в заключительной части работы, класс пространств, в которых базисность полиномов Якоби установлена в настоящей статье, совпадает с классом, для которого это же удается сделать, пользуясь рассуждениями из [5].

### 1. Базисность полиномов Якоби в пространстве $\mathcal{E}(\Omega)[-1; 1]$

Пусть  $\omega : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  — непрерывная неубывающая функция, удовлетворяющая условиям:

$$(\alpha) \quad \exists K \geq 1 \mid \omega(2x) \leq K(1 + \omega(x)), \quad x \geq 0;$$

$$(\beta) \quad \int_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^2} dx < \infty;$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{\omega(x)} = 0;$$

$$(\delta) \quad \varphi_\omega(x) = \omega(e^x) \text{ — выпуклая на } [0; +\infty) \text{ функция.}$$

Такая функция  $\omega$  называется *весовой функцией* или просто *весом*. Примеры весов можно найти в [6]. Всюду далее, не нарушая общности рассуждений, мы будем полагать, что  $\omega(x) = 0$  при всех  $x \in [0; 1]$ .

Набор весов  $\Omega = \{\omega_p\}_{p=1}^\infty$  будем называть *весовой последовательностью*, если выполняется условие:

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \exists C_p \mid \omega_p(x) + \ln(1+x) \leq \omega_{p+1}(x) + C_p, \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Для каждой функции  $\varphi_p(x) = \omega_p(e^x)$  определим ее сопряженную по Юнгу  $\varphi_p^* : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_p^*(x) = \sup_{t \geq 0} (xt - \varphi_p(t))$ . Отметим, что  $\varphi_p^*$

не убывает на  $[0; +\infty)$ , справедливо равенство  $\varphi_p^{**} = \varphi_p$ , и при всех  $a \geq 1$  имеет место неравенство  $\varphi_p^*(ax) \geq a\varphi_p^*(x)$ ,  $x \geq 0$ .

Далее мы будем рассматривать следующее пространство УДФ:

$$\mathcal{E}(\Omega)[-1; 1] := \left\{ f \in C^\infty[-1; 1] \mid \forall p \in \mathbb{N} \quad \|f\|_p := \sup_{j \geq 0} \sup_{|x| \leq 1} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{\varphi_p^*(j)}} < \infty \right\}.$$

Набор преднорм  $\|\cdot\|_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , задает в  $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$  топологию пространства Фреше.

Основной результат данной работы состоит в следующем.

**Теорема 1.** Пусть весовая последовательность  $\Omega = \{\omega_p\}_{p=1}^\infty$  удовлетворяет условию

$$\forall p \in \mathbb{N} \exists q \in \mathbb{N} \exists C_p \geq 0 \mid \omega_p(x^2) \leq \omega_q(x) + C_p, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

Тогда система полиномов Якоби  $J_n(x)$ ,  $n \geq 0$ , ортогональных на отрезке  $[-1; 1]$  с весом  $h(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ,  $\alpha, \beta \geq -1/2$ , образует абсолютный базис в пространстве  $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$ .

Подробное обоснование весьма громоздко, поэтому мы опустим ряд технических деталей и сосредоточимся на основных идеях. Отметим лишь, что в приведенных ниже рассуждениях важную роль играют следующие соотношения.

Во-первых, из условия  $(\beta)$  в определении весовой функции вытекает, что для любого веса  $\omega$  найдется постоянная  $C_\omega > 0$  такая, что

$$x \ln \frac{x}{e} \leq \varphi_\omega^*(x) + C_\omega, \quad x \geq 1. \quad (3)$$

Во-вторых, условие (2) можно записать в эквивалентной форме:

$$\forall p \in \mathbb{N} \exists q \in \mathbb{N} \exists C_p \geq 0 \mid \varphi_p^*(x) \geq \varphi_q^*(2x) - C_p, \quad x \geq 0. \quad (2')$$

Перейдем теперь непосредственно к схеме доказательства теоремы.

Приведем некоторые важные для наших целей свойства полиномов  $J_n(x)$  (их подробные обоснования можно найти в [9]).

А) Имеет место равномерная оценка на сегменте ортогональности:

$$|J_n(x)| \leq C_0 n^{\sigma + \frac{1}{2}}, \quad x \in [-1; 1], \quad (4)$$

где  $C_0$  и  $\sigma$  зависят лишь от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Б) Полиномы Якоби являются собственными функциями дифференциального оператора

$$(Lf)(x) = (1-x^2)f''(x) + (\beta - \alpha - (\beta + \alpha + 2)x)f'(x),$$

т. е.

$$(LJ_n)(x) = \lambda_n J_n(x), \quad (5)$$

где  $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$ ,  $n \geq 0$ .

В) Оператор  $L$ , рассматриваемый в гильбертовом пространстве  $L_h^2[-1; 1]$ , симметричен, т. е. для любых функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , дважды непрерывно дифференцируемых на  $[-1; 1]$ , справедливо равенство

$$(Lf, g) = \int_{-1}^1 h(x)(Lf)(x)g(x) dx = \int_{-1}^1 h(x)f(x)(Lg)(x) dx = (f, Lg)$$

(в этом легко убедиться с помощью интегрирования по частям).

С помощью А)–В) нетрудно доказать ряд необходимых нам вспомогательных утверждений.

**Предложение 1.** При любом  $p \in \mathbb{N}$  имеет место оценка:

$$\|J_n\|_p \leq C_0 n^{\sigma + \frac{1}{2}} e^{\omega_p(n^2)}, \quad n \geq 0. \quad (6)$$

◁ Эта оценка вытекает из неравенства Маркова для алгебраических полиномов (см., например, [1]) и свойства А). ▷

**Предложение 2.** Справедливы следующие утверждения:

1) для любого  $n \geq 0$  функционал

$$\xi_n : \mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \xi_n(f) := \int_{-1}^1 h(x)f(x)J_n(x) dx,$$

линеен и непрерывен;

2) система  $\{J_n, \xi_n\}_{n=0}^\infty$  биортогональна, т. е.  $\xi_n(J_n) = 1$  при всех  $n \geq 0$  и  $\xi_n(J_k) = 0$  при  $n \neq k$ ;

3) последовательность  $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$  тотальна на  $\mathcal{E}_{(\omega)}[-1; 1]$ , т. е. справедлива импликация: если  $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}[-1; 1]$  и  $\xi_n(f) = 0$  при всех  $n \geq 0$ , то  $f = 0$ .

◁ Линейность и непрерывность  $\xi_n$  очевидны. Биортогональность системы  $\{J_n, \xi_n\}_{n=0}^\infty$  проверяется элементарными вычислениями (см., например [9]). Тотальность  $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$  вытекает из полноты системы полиномов Якоби в весовом пространстве  $L_h^2[-1; 1]$ . ▷

**Предложение 3.** Пусть весовая последовательность  $\Omega$  удовлетворяет условию (2). Тогда имеет место оценка

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad \exists B_q > 0 \quad |\xi_n|_{-q} \leq B_q(n+1)e^{-3\omega_q(e^{-1/6}n^{1/12})}, \quad n \geq 0, \quad (7)$$

где  $|\xi_n|_{-q} := \sup \{|\xi_n(f)| : \|f\|_q \leq 1, f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]\}$ .

◁ Из свойств Б) и В) вытекают равенства

$$\xi_n(f) = \frac{1}{\lambda_n^k} \int_{-1}^1 h(x) f(x) (L^k J_n)(x) dx = \frac{1}{\lambda_n^k} \int_{-1}^1 h(x) (L^k f)(x) J_n(x) dx,$$

справедливые при всех  $k \geq 0$ . Но тогда

$$|\xi_n(f)| \leq \frac{C_1}{\lambda_n^k} \sup_{|x| \leq 1} |(L^k f)(x)|,$$

где  $C_1$  — постоянная, зависящая лишь от функции  $h$ . Далее, при любом  $k \geq 0$  выражение  $(L^k f)(x)$  можно представить в виде

$$(L^k f)(x) = \sum_{j=0}^{s_k} A_{kj} x^{a_{kj}} f^{(b_{kj})}(x),$$

где  $s_k \leq 100^k$ ,  $a_{kj} \leq 2k$ ,  $b_{kj} \leq 2k$ ,  $|A_{kj}| \leq 100^k(|\beta| + |\alpha| + 2)^k k^{2k}$ . Отсюда вытекает, что

$$\sup_{|x| \leq 1} |(L^k f)(x)| \leq \|f\|_q e^{\varphi_q^*(2k)} C_2^k k^{2k},$$

где  $q$  — любое натуральное число, а  $C_2$  — постоянная, зависящая лишь от  $\alpha$  и  $\beta$ .

В силу всего вышеизложенного, найдется постоянная  $C_3 > 0$ , зависящая лишь от  $\alpha$  и  $\beta$ , такая, что при всех  $k \geq 0$  и каждом  $q \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$|\xi_n(f)| \leq \frac{1}{n^{2k}} C_3^k k^{2k} \|f\|_q e^{\varphi_q^*(2k)}.$$

Отсюда

$$|\xi_n|_{-q} \leq \inf_{k \geq 0} \left( \frac{1}{n^{2k}} C_3^k k^{2k} e^{\varphi_q^*(2k)} \right), \quad q \geq 1.$$

Оценивая  $k^{2k}$  с помощью (3) и выбирая, с учетом (2'), подходящую постоянную  $B_q > 0$ , мы приходим к оценке (7). ▷

Теперь все готово для обоснования абсолютной базисности полиномов Якоби в рассматриваемом пространстве. Мы покажем, что любая функция  $f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$  представима (и притом единственным



образом) в виде абсолютно сходящегося по топологии  $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$  ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(f) J_n(x). \quad (8)$$

Выберем произвольное  $p \in \mathbb{N}$  и оценим сверху выражение  $|\xi_n(f)| \|J_n\|_p$ . Отметим вначале, что

$$|\xi_n(f)| = \|f\|_q \left| \xi_n \left( \frac{f}{\|f\|_q} \right) \right| \leq \|f\|_q |\xi_n|_{-q}$$

при любом  $q \in \mathbb{N}$ , а значит,

$$|\xi_n(f)| \|J_n\|_p \leq |\xi_n|_{-q} \|J_n\|_p \|f\|_q, \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Из предложений 1 и 3 вытекает, что при всех  $n, p$  и  $q$

$$|\xi_n|_{-q} \|J_n\|_p \leq B_q(n+1) n^{\sigma+1/2} e^{\omega_p(n^2) - 3\omega_q(e^{-1/6} n^{1/12})}.$$

Неоднократно применяя условие (2), убеждаемся в том, что для зафиксированного  $p$  найдутся номер  $s \in \mathbb{N}$  и постоянная  $\tilde{C}_p > 0$  такие, что будет справедливо неравенство

$$|\xi_n|_{-q} \|J_n\|_p \leq B_q \tilde{C}_p(n+1) n^{\sigma+1/2} e^{\omega_s(e^{-1/6} n^{1/12}) - 3\omega_q(e^{-1/6} n^{1/12})}.$$

Всюду в этих рассуждениях  $q$  — произвольное число. Выбрав конкретное значение  $q = s$ , мы приходим к оценке:

$$|\xi_n|_{-q} \|J_n\|_p \leq B_q \tilde{C}_p(n+1) n^{\sigma+1/2} e^{-2\omega_q(e^{-1/6} n^{1/12})}.$$

Наконец, воспользовавшись свойством  $(\gamma)$  из определения веса, можно выбрать постоянную  $D_p > 0$  таким образом, чтобы выполнялась оценка

$$|\xi_n|_{-q} \|J_n\|_p \leq D_p \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последнее неравенство, а также полнота пространства  $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$ , обеспечивают абсолютную сходимость ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(f) J_n(x)$  по топологии  $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$  к некоторой функции  $g$ .

Совпадение  $g$  с  $f$  и единственность представления  $f = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(f) J_n$  вытекает из биортогональности системы  $\{J_n, \xi_n\}_{n=0}^{\infty}$  и тотальности последовательности функционалов  $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$  на  $\mathcal{E}_{(\omega)}[-1; 1]$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частном случае, когда весовая последовательность  $\Omega$  состоит из функций  $\omega_p(x) = p\omega(x)$ ,  $p \geq 1$ , где  $\omega$  — некоторый вес, пространство  $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$  представляет собой обычное пространство УДФ типа Берлинга, изучавшееся в [6] и в [8]. Условие (2) при этом принимает вид:

$$\exists A > 0 \mid \omega(x^2) \leq A(\omega(x) + 1), \quad x \geq 0, \quad (6)$$

что согласуется с результатами работы [8]. Отметим, что известны примеры весов как подчиненных условию (6) ( $\omega(x) = \ln^\alpha(1+x)$ ,  $\alpha > 1$ ), так и не удовлетворяющих ему ( $\omega(x) = x^\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ ).

## 2. Сравнение с подходом Г. И. Баликова

Пусть  $M = \{M_{p,j}\}_{p=1,j=0}^\infty$  — матрица положительных чисел, удовлетворяющая условиям:

- (a)  $\forall p \geq 1, \forall j \geq 0 \quad M_{p,j} \leq M_{p,j+1};$
- (b)  $\forall p \geq 1, \forall j \geq 1 \quad M_{p,j}^2 \leq M_{p,j-1}M_{p,j+1};$
- (c)  $\forall p \geq 1, \exists A, H > 0 \mid \forall j \geq 0 \quad M_{p,j} \leq AH^j \min_{0 \leq q \leq j} M_{p,q}M_{p,j-q}.$

По матрице  $M$  определим пространство

$$E_{(M)}[-1; 1] = \left\{ f \in C^\infty[-1; 1] \mid \forall p \in \mathbb{N} \|f\|_p := \sup_{j \geq 0} \sup_{|x| \leq 1} \frac{|f^{(j)}(x)|}{M_{p,j}} < +\infty \right\}.$$

Применяя рассуждения, использованные в [5] для пространств несколько иного, чем  $E_{(M)}[-1; 1]$  вида, но также задаваемых числовыми матрицами, устанавливаем справедливость следующего результата.

**Теорема 2.** Если выполнены условия:

- (d)  $\forall p \geq 1 \exists q \geq 0 \mid \sup_j \frac{j^j M_{q,j}}{M_{p,j}} < +\infty;$
- (e)  $\forall p \geq 1 \exists q \geq 0 \mid \sup_j \frac{M_{q,2j}}{M_{p,j}} < +\infty,$

то система полиномов Якоби  $J_n(x)$  (при  $\alpha, \beta \geq -1/2$ ) образует абсолютный базис в пространстве  $E_{(M)}[-1; 1]$ .

Покажем, что классы пространств, выделяемые условиями теорем 1 и 2, совпадают друг с другом.

Если весовая последовательность  $\Omega$  подчинена условию (2), как в теореме 1, то соответствующее пространство  $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$  может быть

реализовано как пространство типа  $E_{(M)}[-1; 1]$  с весовой матрицей  $M$ , удовлетворяющей условиям (a)–(e). Достаточно положить  $M_{p,j} = e^{\varphi_p^*(j)}$ .

Верно и обратное: пространство  $E_{(M)}[-1; 1]$ , матрица которого, как в теореме 2, удовлетворяет условиям (a)–(e), можно реализовать как пространство типа  $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1; 1]$  с весовой последовательностью  $\Omega$ , удовлетворяющей условию (2). Именно, элементы  $\Omega$  — функции  $\omega_p(x)$  — определяются так:

$$\omega_p(x) = \sup_j \ln \frac{x^j}{M_{p,j}}, \quad x > 0,$$

$$\omega_p(0) = 0.$$

Условие (d) гарантирует нам, что функция  $\omega_p$  определена корректно. Кроме того, легко проверить, что  $\omega_p$  — непрерывная неубывающая на  $[0; +\infty)$  функция, удовлетворяющая условиям (γ) и (δ) из определения веса. Выполнение условия (α) установлено в [6]. Остается проверить выполнение условия (β).

Как известно (см., например, [10, предложение 3.2]),

$$M_{p,j} = \sup_{x \geq 1} \frac{x^j}{e^{\omega_p(x)}} = e^{\varphi_p^*(j)}.$$

А тогда условия (d) и (e) можно переписать в эквивалентной форме:

$$(d') \quad \forall p \exists q \mid \sup_{x \geq 1} (x \ln x + \varphi_q^*(x) - \varphi_p^*(x)) < +\infty;$$

$$(e') \quad \forall p \exists q \mid \sup_{x \geq 0} (\varphi_q^*(2x) - \varphi_p^*(x)) < +\infty.$$

Далее, из (d') вытекает, что

$$\omega_p(x) = O(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Условие (e') представляет собой условие (2'), которое, как мы отмечали выше, эквивалентно (2). В совокупности ограничения (9) и (2) обеспечивают выполнение условия (β) для функции  $\omega_p$ .

### Литература

1. Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук.—1961.—Т. 16, вып. 4.—С. 63–132.
2. Guillemot-Teissier M. Series des Legendre des distributions: Structures hilbertiennes // C. R. Acad. Sci. Paris.—1967.—V. 265.—P. 461–464.

3. *Triebel H.* Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes  $C^\infty(\bar{\Omega})$  durch einen elliptischen Differential operator zweiter Ordnung // *Math. Ann.*—1968.—V. 177.—P. 247–264.
4. *Balikov G. I.* About polynomial bases in space of infinitely-differentiable functions on interval // *Comp. Rend. Acad. Bul. Sci.*—1981.—V. 34.—P. 919–921.
5. *Balikov G. I.* Spaces of non-quasianalytic functions with polinomial basis // *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics.*—1992.—V. 40, № 2.—P. 81–85.
6. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // *Result.Math.*—1990.—V. 17.—P. 206–237.
7. Абанин А. В. Пространства  $\Omega$ -ультрадифференцируемых функций и  $\Omega$ -ультрасредств // *Докл. РАН.*—2005.—Т. 401, № 6.—С. 727–730.
8. Абанин А. В., Никишин Ф. И. Базисы в пространствах ультрадифференцируемых функций типа Берлинга // *Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.*—Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2004.—С. 75–76.
9. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены.—М.: Наука, 1979.—416 с.
10. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization // *Y. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA, Math.*—1973.—V. 20, № 1.—P. 25–105.

АБАНИН АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ

Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет;

Владикавказ, Институт прикладной математики и

информатики ВНИЦ РАН

E-mail: [abanin@math.rsu.ru](mailto:abanin@math.rsu.ru)

НИКИШИН ФИЛИПП ИГОРЕВИЧ

Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет

E-mail: [filipp\\_nikishin@mail.ru](mailto:filipp_nikishin@mail.ru)

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Г. Г. Брайчев

Известно, что для изучения асимптотического поведения выпуклых функций и их производных достаточно их рост сравнить с ростом выпуклых функций  $g(x)$ , удовлетворяющих условию  $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} \leq 1$ . В работе найдены точные верхние и нижние границы асимптотического роста выпуклых функций, если функции сравнения таковы, что существует  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} \in [0; 1]$ .

Во многих вопросах анализа и его приложений (назовем, к примеру, теорию целых, мероморфных, субгармонических функций, теорию вероятностей, теорию квазианалитических классов функций, и др.) важным является вопрос о поведении выпуклых характеристик роста рассматриваемых функций и их производных. При этом рост функций измеряется сравнением их с «хорошими» эталонными функциями из некоторого класса. Нахождение таких классов эталонных функций составляет известную проблему Адамара [1]. Так, для целых функций конечного порядка введены различные типы уточненных порядков [2–5]. Для множества всех целых функций В. А. Осолков [6] ввел класс  $H_1$ , состоящий из возрастающих на  $\mathbb{R}_+$ , дважды непрерывно дифференцируемых функций  $g(x)$  с  $g''(x) > 0$ , удовлетворяющих условию

$$G = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} \right\} \leq 1. \quad (1)$$

В работе [7] показано, что для любой выпуклой функции  $\varphi(x)$ , растущей быстрее линейных, можно так подобрать строго выпуклые бесконечно дифференцируемые функции  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  с условием (1), чтобы

$$0 < \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{g_1(x)} < \infty, \quad 0 < \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{g_2(x)} < \infty.$$

Из вышесказанного вытекает, что для исследования асимптотического поведения выпуклых функций и их производных достаточно изучать их сравнительный рост с функциями из класса  $H_1$ .

Основная задача настоящего исследования — указать условия на функции класса  $H_1$  (не изменяя основное условие (1)), при выполнении которых возможны точные оценки относительного роста выпуклых функций и их производных, и, в частности, найти условия эквивалентности важных во многих вопросах асимптотических соотношений  $f(x) \sim Kg(x)$ ,  $x \rightarrow \infty$  и  $f'(x) \sim Kg'(x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

В дальнейшем будем предполагать, что выпуклые функции дважды дифференцируемы на  $\mathbb{R}_+$  и растут быстрее линейных, т. е. удовлетворяют условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty. \quad (2)$$

Рост отношений функций и их производных описывается классическим правилом Бернулли — Лопиталя, его различными обобщениями и обратными теоремами тауберова типа. Мы будем опираться на следующие результаты [8].

**Теорема А.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  положительны, возрастают, выпуклы на  $\mathbb{R}_+$ , удовлетворяют условию (2) и

$$0 \leq t = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad T = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &\geq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq a_1 \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \\ \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq a_2 \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned} \quad (3)$$

в которых  $a_1$  и  $a_2$  являются корнями уравнения

$$\varphi_g(a) = \frac{t}{T} \quad (0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2)$$

и

$$\varphi_g(a) = \varphi(a) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{g(t_x) + ag'(x)(x - t_x)}{g(x)}, \quad (4)$$

$t_x = \sup \{t : g'(t) \leq ag'(x)\}$  (если множество в фигурных скобках пусто, то  $t_x := 0$ ). Далее, при любом  $\theta \in (0; 1]$  числа

$$\begin{aligned} a_1(\theta) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{g'(x)} \sup_{t < x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{t - x}, \\ a_2(\theta) &= \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{g'(x)} \inf_{t > x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{t - x} \end{aligned}$$

являются корнями уравнения  $\varphi_g(a) = \theta$ ,  $0 \leq a_1(\theta) \leq 1 \leq a_2(\theta)$ .

Под корнями уравнения  $\varphi_g(a) = \theta$  мы понимаем абсциссы пересечения границы подграфика функции  $y = \varphi_g(a)$  и функции  $y = \theta$ , иначе:

$$a_1(\theta) = \inf \{a : \varphi(a) \geq \theta\}, \quad a_2(\theta) = \sup \{a : \varphi(a) \geq \theta\}.$$

Из этой теоремы следует, что оценки (3) зависят от поведения функции  $\varphi_g(a)$ . Нетрудно подсчитать, что для  $g(x) = \exp(\rho x)$ ,  $\rho > 0$ , функция  $\varphi_g(a) = a \ln \frac{e}{a}$ . Для  $g(x) = x^\tau$ ,  $\tau > 1$ , функция  $\varphi_g(a) = \tau a + (1 - \tau)a^{\frac{\tau}{\tau-1}}$ , и такой же вид имеет эта функция и в более общем случае, когда  $g(x)$  удовлетворяет условию  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \tau$  [9].

Оказывается, что эти модельные случаи являются основными. Для того, чтобы воспользоваться теоремой А, мы вычислим в явном виде функцию  $\varphi_g(a)$  в случаях  $G = 1$ ,  $0 < G < 1$ ,  $G = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть функция  $g(x)$  положительна, возрастает и дважды дифференцируема на  $\mathbb{R}_+$ . Если  $g(x)$  логарифмически выпукла вверх, то для любого  $a > 0$  справедливо неравенство  $\varphi_g(a) \leq a \ln \frac{e}{a}$ . Если  $g(x)$  логарифмически выпукла вниз и удовлетворяет условию (1), то для любого  $a > 0$  справедливо равенство  $\varphi_g(a) = a \ln \frac{e}{a}$ .

◁ Заметим, что поскольку  $(\ln g(x))'' = \left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)^2 \left(\frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} - 1\right)$ , то для логарифмически выпуклой вверх функции условие (1) выполняется автоматически, а для функции, логарифмически выпуклой вниз, отсюда следует существование предела в (1) и равенство его единице.

Выберем  $t_x$  так, чтобы  $g'(t_x) = ag'(x)$  и обозначим  $G(x) := \frac{g(x)}{g'(x)}$ . Эта функция возрастает или убывает в силу выпуклости вверх или, соответственно, вниз функции  $\ln g(x)$ , а выпуклость  $g(x)$  влечет возрастание ассоциированной с ней функции Ньютона  $N_g(x) = x - G(x)$ . Поэтому, например, в случае выпуклости вниз функции  $\ln g(x)$  имеем

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln \frac{g'(t_x)}{g'(x)} = \ln \frac{G(x)}{G(t_x)} - \ln \frac{g(x)}{g(t_x)} = \int_x^{t_x} \frac{d(t - G(t))}{G(t)} \geq \\ &\geq \frac{1}{G(x)} \int_x^{t_x} d(t - G(t)) = \frac{1}{G(x)} [t_x - x - G(t_x) + G(x)] = \\ &= \frac{g'(x)}{g(x)} \left[ t_x - x - \frac{g(t_x)}{ag'(x)} \right] + 1 = 1 - \frac{g(t_x) + g'(t_x)(x - t_x)}{ag(x)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем  $\frac{g(t_x)+g'(t_x)(x-t_x)}{g(x)} \geq a \ln \frac{e}{a}$ , что дает  $\varphi_g(a) \geq a \ln \frac{e}{a}$ .

Ясно, что в случае выпуклости вверх функции  $\ln g(x)$  аналогичные выкладки дают противоположное неравенство.

Вернемся к случаю логарифмической выпуклости вниз функции  $g(x)$  и докажем неравенство обратного смысла. Функция  $\frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}$  имеет минимум в точке  $t = s_x > x$  и максимум в точке  $t = \hat{s}_x < x$ , причем в точках экстремума из условия равенства нулю производной имеем

$$\frac{g(t) - \theta g(x)}{t - x} = g'(t). \quad (5)$$

Поэтому из теоремы А, получаем

$$a_2(\theta) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(s_x)}{g'(x)}, \quad a_1(\theta) = \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(\hat{s}_x)}{g'(x)}.$$

Из (5), при  $t = s_x$ , получим равенство  $\frac{g'(s_x)}{g(s_x)}(s_x - x) = 1 - \theta \frac{g(x)}{g(s_x)} = 1 - \frac{\theta}{\omega_x}$ , в котором  $\omega_x := \frac{g(s_x)}{g(x)}$ . Но тогда выполняется условие  $\ln \omega_x = \ln g(s_x) - \ln g(x) \leq \frac{g'(s_x)}{g(s_x)}(s_x - x) = 1 - \frac{\theta}{\omega_x}$  или  $\omega_x \ln \frac{e}{\omega_x} \geq \theta$ . Последнее равносильно тому, что  $\omega_x \leq b_2(\theta)$ , где  $b_2(\theta)$  — наибольший корень уравнения  $b \ln \frac{e}{b} = \theta$ . Аналогично рассуждая, для величины  $\hat{\omega}_x := \frac{g(\hat{s}_x)}{g(x)}$  получим  $-\ln \hat{\omega}_x = \ln g(x) - \ln g(\hat{s}_x) \geq \frac{g'(\hat{s}_x)}{g(\hat{s}_x)}(x - \hat{s}_x) = -\left(1 - \frac{\theta}{\hat{\omega}_x}\right)$ , т. е.  $\hat{\omega}_x \ln \frac{e}{\hat{\omega}_x} \geq \theta$ , что влечет  $\hat{\omega}_x \geq b_1(\theta) > 0$ , где  $b_1(\theta)$  — наименьший корень уравнения  $b \ln \frac{e}{b} = \theta$ .

Пусть сначала  $a \geq 1$ . Последовательно оценивая, получаем

$$\begin{aligned} \ln \frac{g'(s_x)}{g(s_x)} - \ln \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} \left[ \frac{g''(\xi)g(\xi)}{g'^2(\xi)} - 1 \right] (s_x - x) \leq \\ &\leq \left[ \frac{g''(\xi)g(\xi)}{g'^2(\xi)} - 1 \right] \frac{g'(s_x)}{g(s_x)}(s_x - x) = \left[ \frac{g''(\xi)g(\xi)}{g'^2(\xi)} - 1 \right] \left( 1 - \frac{\theta}{\omega_x} \right) \leq \\ &\leq \left[ \frac{g''(\xi)g(\xi)}{g'^2(\xi)} - 1 \right] \left( 1 - \frac{\theta}{b_2(\theta)} \right) \xrightarrow{x \rightarrow b-} 0, \end{aligned}$$

где  $x < \xi < s_x$ . Поэтому  $\frac{g'(s_x)}{g(s_x)} : \frac{g'(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow b-} 1$ , т. е.  $\frac{g'(s_x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow b-} \frac{g(s_x)}{g(x)}$ .

Теперь, с учетом уже полученного, имеем

$$a_2(\theta) = \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{g'(s_x)}{g'(x)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \frac{g(s_x)}{g(x)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow b-} \omega_x \leq b_2(\theta),$$



что при любом  $a \geq 1$  равносильно условию  $\varphi_g(a) \leq a \ln \frac{e}{a}$ . Это вместе с предыдущим приводит к требуемому утверждению.

Несколько дольше доказывается аналогичный результат для  $a \in (0; 1)$ . Заметим сначала, что  $\hat{s}_x$  возрастают при возрастании  $x$ . В самом деле, если  $x_1 < x_2$ , то  $g'(\hat{s}_{x_1}) = \frac{g(\hat{s}_{x_1}) - \theta g(x_1)}{\hat{s}_{x_1} - x_1} < \frac{g(\hat{s}_{x_1}) - \theta g(x_2)}{\hat{s}_{x_1} - x_2} \leq \leq \frac{g(\hat{s}_{x_2}) - \theta g(x_2)}{\hat{s}_{x_2} - x_2} = g'(\hat{s}_{x_2})$ , и  $\hat{s}_{x_1} \leq \hat{s}_{x_2}$ . Если при возрастании  $x$  имели бы  $\hat{s}_x \rightarrow m < b$ , то из равенства  $g'(\hat{s}_x) = \frac{g(\hat{s}_x) - \theta g(x)}{\hat{s}_x - x} = \frac{\theta \frac{g(x)}{x} - \frac{g(\hat{s}_x)}{x}}{1 - \frac{\hat{s}_x}{x}}$  получили бы, что его левая часть имеет пределом число  $g'(m)$ , тогда как его правая часть эквивалентна  $\frac{g(x)}{x} \cdot \frac{\theta}{1 - \frac{m}{b}} \rightarrow \infty$ .

Теперь, как и выше, получаем с некоторыми  $\xi \in (\hat{s}_x; x)$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \ln \frac{g'(\hat{s}_x)}{g(\hat{s}_x)} - \ln \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} \left[ \frac{g''(\xi)g(\xi)}{g'^2(\xi)} - 1 \right] (\hat{s}_x - x) \geq \\ &\geq \left[ \frac{g''(\xi)g(\xi)}{g'^2(\xi)} - 1 \right] \frac{g'(x)}{g(x)} (\hat{s}_x - x). \end{aligned}$$

Умножив обе части неравенства на величину  $A_x = \frac{g'(\hat{s}_x)}{g(\hat{s}_x)} : \frac{g'(x)}{g(x)}$ , получим,

$$\begin{aligned} 0 &\geq A_x \ln A_x \geq \left[ \frac{g''(\xi)g(\xi)}{g'^2(\xi)} - 1 \right] \frac{g'(\hat{s}_x)}{g(\hat{s}_x)} (\hat{s}_x - x) = \\ &= \left[ \frac{g''(\xi)g(\xi)}{g'^2(\xi)} - 1 \right] \left( 1 - \frac{\theta}{\hat{\omega}_x} \right) \geq \left[ \frac{g''(\xi)g(\xi)}{g'^2(\xi)} - 1 \right] \left( 1 - \frac{\theta}{b_1(\theta)} \right) \xrightarrow{x \rightarrow b-} 0, \end{aligned}$$

поскольку величина в квадратных скобках стремится к нулю по условию. Отсюда следует, что выполняется условие

$$A_x \ln A_x \rightarrow 0. \quad (6)$$

Обозначим  $\varphi_g(0+) = \theta_0 = a_0 \ln \frac{e}{a_0}$  (если  $\theta_0 = 0$ , считаем  $a_0 = 0$ ; позже мы покажем, что именно случай  $\theta_0 = 0$  имеет место). Для любого  $a \in (a_0; 1)$  положим  $\theta = a \ln \frac{e}{a}$ ; тогда  $a = b_1(\theta)$  и выполняется  $\theta > \theta_0$  и  $a_1(\theta) > 0$ .

Поскольку  $\hat{\omega}_x = \frac{g(\hat{s}_x)}{g(x)} < 1$ , и по теореме А для положительного  $\epsilon < a_1(\theta)$  при всех достаточно больших  $x$  выполняется  $\frac{g'(\hat{s}_x)}{g'(x)} > > a_1(\theta) - \epsilon > 0$ , то  $A_x = \frac{g'(\hat{s}_x)}{g'(x)} \cdot \frac{1}{\hat{\omega}_x} > a_1(\theta) - \epsilon > 0$ . Из (6) извлекаем условие  $A_x \xrightarrow{x \rightarrow b-} 1$ , а это означает, что  $\frac{g'(\hat{s}_x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow b-} \frac{g(\hat{s}_x)}{g(x)}$  и

$a_1(\theta) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{g'(\hat{s}_x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{g(\hat{s}_x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b-} \omega_x \geq b_1(\theta) = a$ . В силу возрастания функции  $\varphi_g(a)$  на интервале  $(0; 1)$ , откуда получаем  $\varphi_g(a) \leq \varphi_g(a_1(\theta)) = \theta = a \ln \frac{\varepsilon}{a}$ . Таким образом, для  $a \in (a_0; 1)$  имеем равенство  $\varphi_g(a) = a \ln \frac{\varepsilon}{a}$ . Покажем теперь, что  $\theta_0 = 0$ .

Если бы это было не так, то имели бы равенство  $\varphi_g(a) \equiv \theta_0$ ,  $a \in (0; a_0)$ , в невозможности которого нетрудно убедиться. Таким образом, равенство  $\varphi_g(a) = a \ln \frac{\varepsilon}{a}$  выполняется для всех  $a \in (0; 1)$ .  $\triangleright$

В качестве следствия получаем, что справедлива

**Теорема 2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  положительны, возрастают, выпуклы на  $\mathbb{R}_+$  и удовлетворяют условию (2). Пусть, кроме того, функция  $g(x)$  дважды дифференцируема, удовлетворяет условию (1) и является логарифмически выпуклой вверх или вниз. Тогда следующие условия эквивалентны

- i)  $f(x) \sim Kg(x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ ;
- ii)  $f'(x) \sim Kg'(x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

$\triangleleft$  В самом деле, из существования предела отношений производных функций следует существование предела отношений этих функций и их равенство по правилу Бернулли — Лопиталя. Обратно, если существует предел отношений функций, то  $t = T$ , и мы имеем уравнение  $\varphi_g(a) = 1 (\geq a \ln \frac{\varepsilon}{a})$ , корнями которого в силу теоремы 1 являются числа  $a_1 = a_2 = 1$ . По теореме А это влечет цепочку неравенств

$$T = a_1 T \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq a_2 T = T,$$

из которой извлекаем, что существует  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = T = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ .  $\triangleright$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В случае, когда функция  $\ln g(x)$  вогнута, неравенство  $\varphi_g(a) \leq a \ln \frac{\varepsilon}{a}$  для  $a \in (0; 1)$  ранее доказано в работе [9]. В следующих теоремах мы уточняем этот результат и показываем, что знак неравенства здесь в рассматриваемых случаях невозможен.

**Теорема 3.** Пусть функция  $g(x)$  положительна, возрастает, выпукла, дважды дифференцируема на  $\mathbb{R}_+$  и удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} \right\} = G < 1.$$

Тогда  $\varphi_g(a) = \frac{a-Ga^{\frac{1}{G}}}{1-G}$ .

◁ Для любого  $\epsilon > 0$  найдем  $x_0$  так, чтобы

$$\left| \frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} - G \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

для всех  $x > x_0$ . Оценивая функцию  $\psi(x) = (1 - G)x - \frac{g(x)}{g'(x)}$  при  $x > \max \left\{ x_0; \frac{2|\psi(x_0)|}{\epsilon} \right\}$ , получим

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^x \psi'(x) dx \right| = \left| \int_{x_0}^x \left( \frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} - G \right) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x \left| \frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} - G \right| dx \leq \frac{\epsilon}{2} |x - x_0|. \end{aligned}$$

Таким образом,  $|\psi(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} |x - x_0| + |\psi(x_0)|$  и  $\left| (1 - G) - \frac{g(x)}{xg'(x)} \right| \leq \leq \frac{\epsilon}{2} \left| 1 - \frac{x_0}{x} \right| + \frac{|\psi(x_0)|}{x} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . Следовательно, существует  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{xg'(x)} = 1 - G$  или  $\tau = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \frac{1}{1-G}$ . Тогда, согласно [9], имеем  $\varphi_g(a) = \tau a + (1 - \tau)a^{\frac{1}{\tau-1}} = \frac{a - Ga^{\frac{1}{G}}}{1-G}$ . ▷

**Теорема 4.** Пусть функция  $g(x)$  положительна, возрастает, выпукла, дважды дифференцируема на  $\mathbb{R}_+$  и удовлетворяет условию

$$G = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} \right\} = 0.$$

Тогда  $\varphi_g(a) = a$ ,  $a \in [0; 1]$ , и, кроме того,  $a_1(\theta) = \theta$ ,  $a_2(\theta) = 1$  при любом  $\theta \in [0; 1]$ .

◁ Как показано ранее, в условиях теоремы существует  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = 1$ . Но функции, удовлетворяющие такому соотношению, обладают свойством  $g(kx) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} g(x)$  для любого  $k > 0$  [3]. Тогда, по теореме А, при любом  $\theta \in [0; 1]$ , имеем:

$$\begin{aligned} 1 \leq a_2(\theta) &= \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{g'(x)} \inf_{t > x} \frac{g(t) - \theta g(x)}{t - x} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{g'(x)} \frac{g(kx)}{kx - x} \leq \\ &\leq \frac{k}{k-1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{xg'(x)} = \frac{k}{k-1} \rightarrow 1, \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т. е.  $a_2(\theta) = 1$ ,  $\theta \in [0; 1]$ .

Вычислим теперь  $\varphi_g(a)$ . Очевидно равенство  $\varphi_g(0) = 0$ . В силу условия (2)  $g'(x) \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Поэтому, если  $a > 0$  и  $t_x$  выбрано так, что  $g'(t_x) = ag'(x)$ , то  $t_x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t_x g'(t_x)}{g(t_x)} = 1$ . А поскольку в силу выпуклости и возрастания функции  $g(x)$  для  $a \in (0; 1]$  имеем  $t_x \leq x$  и  $g(t_x) \leq g(x)$ , то

$$\begin{aligned} \varphi_g(a) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(t_x) + ag'(x)(x - t_x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{axg'(x) + g(t_x) - t_x g'(t_x)}{g(x)} = \\ &= a \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(t_x)}{g(x)} \left(1 - \frac{t_x g'(t_x)}{g(t_x)}\right) = a. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что  $a_1(\theta) = \theta$  для любого  $\theta \in [0; 1]$ .  $\triangleright$

В качестве следствия получаем такой результат.

**Теорема 5.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  положительны, возрастают, выпуклы на  $\mathbb{R}_+$  и удовлетворяют условию (2). Если функция  $g(x)$  дважды дифференцируема, удовлетворяет условию  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} \right\} = 0$ , то справедливы равенства

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Теорема 4 дает точные значения корней уравнения  $\varphi_g(a) = \theta$ . В теореме 3 явные (но трудно обозримые) выражения этих корней можно получить лишь в отдельных случаях, однако обычные итерационные методы решения уравнений дают корни с любой точностью.

Уместно отметить, что функции, фигурирующие в теоремах 1 и 4, являются предельными случаями функции из теоремы 3. Точнее, для  $a \in [0; 1]$ ,  $\lim_{G \rightarrow 0} \frac{a - Ga^{\frac{1}{G}}}{1 - G} = a$ , и для  $a \in [0; e]$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{G \rightarrow 1} \frac{a - Ga^{\frac{1}{G}}}{1 - G} &= a \lim_{G \rightarrow 1} \left[ 1 - \frac{G(a^{G^{-1}-1} - 1)}{1 - G} \right], \\ a \lim_{G \rightarrow 1} \left[ 1 - \frac{a^{G^{-1}-1} - 1}{G^{-1} - 1} \right] &= a[1 - \ln a] = a \ln \frac{e}{a}. \end{aligned}$$

### Литература

1. Брайчев Г. Г. Об одной проблеме Адамара и сглаживании выпуклых функций // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, № 3.—С. 11–25.
2. Valiron G. Lecture on the General Theory of Integral Functions.—Toulouse.—1923.—208 p.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с.
4. Adamović D. D. Sur quelques propriétés des fonctions á croissance lente de Karamata, I, II // Matematički Vesnik.—1966.—V. 3.—Р. 123–136, 161–172.
5. Таров В. А. Гладко меняющиеся функции и совершенные уточненные порядки // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, вып. 2.—С. 258–264.
6. Осколков В. А. Тезисы докладов: Современные методы теории функций и смежные проблемы.—Воронеж: ВЗМШ, 1997.—126 с.
7. Брайчев Г. Г. О сглаживании выпуклых функций. Обобщенная проблема Адамара. Актуальные проблемы математики, информатики, физики и математического образования // Юб. сб. науч. тр., посв. 70-летию каф. мат. ан. МПГУ.—2004.—С. 147–156.
8. Брайчев Г. Г. Две теоремы о сравнительном росте выпуклых функций // Труды участников Международной школы по геометрии и анализу, памяти Н. В. Ефимова.—Ростов-на-Дону, 2002.—С. 107–109.
9. Братищев А. В. Базисы Кёте, целые функции и их приложения: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1993.

Брайчев Георгий Генрихович  
Москва, Московский педагогический  
государственный университет  
E-mail: braichev@mail.ru

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ  
РЯДАМИ ИЗ КВАЗИМОНОМОВ<sup>1</sup>

О. А. Иванова, С. Н. Мелихов

Доказываются критерии существования линейного непрерывного правого обратного оператора (коротко: правого обратного) к оператору представления рядами из квазимономов функций, аналитических в ограниченной выпуклой области комплексной плоскости. Ранее аналогичные результаты были известны для операторов представления рядами экспонент и рядами из квазиполиномов.

Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$ ,  $A(G)$  — пространство всех аналитических в  $G$  функций с топологией равномерной сходимости на компактах в  $G$ . Для множества  $M \subseteq \mathbb{C}$  через  $H_M$  обозначим его опорную функцию:

$$H_M(z) := \sup_{t \in M} \operatorname{Re}(zt), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть  $K$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{C}$ . Зафиксируем целую (в  $\mathbb{C}$ ) функцию  $L$  экспоненциального типа с нулевым множеством  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ;  $m_n + 1$  — кратность нуля  $\lambda_n$ . Будем считать, что  $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Положим

$$l_n(t) := \frac{(t - \lambda_n)^{m_n+1}}{L(t)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем предполагается, что выполняются следующие условия:

- (L1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n \ln |\lambda_n|}{|\lambda_n|} = 0$ ;
- (L2)  $L$  — целая функция вполне регулярного роста с индикатором роста  $H_G + H_K$  (при показателе 1);
- (L3)  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|\lambda_n|} \left( \ln \max_{0 \leq k \leq m_n} \frac{|l_n^{(m_n-k)}(\lambda_n)|}{k!(m_n-k)!} + H_G(\lambda_n) + H_K(\lambda_n) \right) \right) \leq 0$ .

Положим  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $e_{\lambda,k}(z) := z^k e^{\lambda z}$ ,  $e_\lambda := e_{\lambda,0}$ ;  $\lambda, z \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00329-а.

Введем пространство числовых последовательностей

$$A_1 := \left\{ c = (c_{nk})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq m_n} \subseteq \mathbb{C} \mid \forall s \in \mathbb{N} \right. \\ \left. p_s(c) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_n} |c_{nk}| \exp \left( H_G(\lambda_n) - \frac{|\lambda_n|}{s} \right) < +\infty \right\}.$$

Последовательность норм  $p_s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , задает в  $A_1$  топологию пространства Фреше. Следуя Ю. Ф. Коробейнику [4], определим оператор представления

$$\Pi(c) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_n} c_{nk} e_{\lambda_n, k}, \quad c \in A_1.$$

Оператор  $\Pi$  линейно и непрерывно отображает  $A_1$  в  $A(G)$ . Из теоремы 2.5 [5] вытекает, что оператор  $\Pi : A_1 \rightarrow A(G)$  сюръективен. Настоящая работа посвящена выяснению условий, при которых оператор представления  $\Pi$  имеет правый обратный.

Далее нам понадобится следующее определение интерполирующего функционала, заданного целой функцией двух комплексных переменных.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** [3]. Пусть функция  $Q \in A(\mathbb{C}^2)$  такова, что для любого  $z \in \mathbb{C}$   $Q(\cdot, z)$  — целая в  $\mathbb{C}$  функция экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой содержится в  $G$ . Зафиксируем какую-либо точку  $t_0 \in G$ .  *$Q$ -интерполирующим функционалом* назовем функционал

$$\Omega_Q(\mu, z, f) := \exp(-zt_0) \mathcal{F}^{-1}(Q(\cdot, z))_t \left( \int_{t_0}^t f(t_0 + t - \xi) \exp(\mu \xi) d\xi \right), \\ \mu, z \in \mathbb{C}, f \in A(G).$$

Здесь  $\mathcal{F}$  — преобразование Лапласа аналитических функционалов:

$$\mathcal{F}(\varphi)(\lambda) := \varphi(e_\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \varphi \in A(G)'.$$

Кроме того, мы будем использовать следующие конструкции из [3]. Для некоторых попарно непересекающихся конечных подмножеств  $\Lambda_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , нулевого множества  $\mathcal{V}(L) = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  функции  $L$

введем конечномерные пространства

$$E_j := \text{span} \{e_{\lambda_n, p} \mid 0 \leq p \leq m_n, \lambda_n \in \Lambda_j\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

и пространство векторнозначных последовательностей

$$l_1(\mathbb{E}) := \left\{ F = (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j \in \mathbb{N}} E_j \mid \text{ряд } \sum_j f_j \text{ абсолютно сходится в } A(G) \right\}$$

с естественной топологией, индуцированной топологией пространства  $A(G)$ ,  $l_1(\mathbb{E})$  — пространство Фреше. Оператор представления

$$R(F) := \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad F \in l_1(\mathbb{E}),$$

линейно и непрерывно отображает  $l_1(\mathbb{E})$  в  $A(G)$ .

Возьмем последовательность попарно непересекающихся кругов

$$S_j := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mu_j| < r_j\} \quad (\mu_j \rightarrow \infty, r_j > 0)$$

нулевой линейной плотности со следующими свойствами:

$$\mathcal{V}(L) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j, \quad S_j \cap \mathcal{V}(L) \neq \emptyset, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

и вне  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j$  выполняется асимптотическое равенство

$$\ln |L(z)| = H_G(z) + H_K(z) + o(|z|), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Согласно [9, 10], такая последовательность кругов  $S_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , существует. Полагаем ниже  $\Lambda_j := \mathcal{V}(L) \cap S_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Следующий результат очевиден.

**Лемма 1.** Если оператор  $\Pi : A_1 \rightarrow A(G)$  имеет правый обратный, то существует правый обратный и к оператору  $R : l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ .

Основным результатом данной статьи является

**Теорема 2.** Пусть функция  $L$  удовлетворяет условиям (L1)–(L3).

- (I) Если компакт  $K$  совпадает с точкой, то оператор  $\Pi$  из  $A_1$  в  $A(G)$  не имеет правого обратного.



(II) Пусть выпуклый компакт  $K$  в  $\mathbb{C}$  отличен от точки,  $\varphi$  — конформное отображение единичного круга  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на  $G$ ,  $\psi$  — конформное отображение  $\mathbb{D}$  на  $\mathbb{C} \setminus K$  такое, что  $\psi(0) = \infty$ . Следующие утверждения равносильны:

- (i) оператор  $\Pi : A_1 \rightarrow A(G)$  имеет правый обратный;
- (ii) существует целая (в  $\mathbb{C}^2$ ) функция  $Q$  такая, что  $Q(z, z) = L(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , и для любого  $n$  существуют  $m, C > 0$  такие, что при всех  $\mu, z \in \mathbb{C}$  выполняется

$$|Q(\mu, z)| \leq C \exp \left( H_G(\mu) - \frac{|\mu|}{m} + H_K(z) + \frac{|z|}{n} \right);$$

- (iii)  $\sup_{|z|<1} |\varphi'(z)| < +\infty$  и  $\inf_{|z|<1} |\psi'(z)| > 0$ .

(III) Если функция  $Q$  такая, как в (ii), то оператор

$$T(f) := \left( \frac{1}{(m_n)!} C_{m_n}^k \left( \Omega_Q(t, t, f) \cdot l_n(t) \right)_{t^{m_n-k}}^{(m_n-k)} \Big|_{t=\lambda_n} \right)_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq m_n},$$

где  $f \in A(G)$ , является правым обратным к  $\Pi : A_1 \rightarrow A(G)$ .

◁ Приведем *схему доказательства* последней теоремы.

(I): Если оператор  $\Pi : A_1 \rightarrow A(G)$  имеет правый обратный, то по лемме 1 существует правый обратный и к  $R : l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ . По следствию 4.5 [3] в случае, когда компакт  $K$  совпадает с точкой, оператор  $R : l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$ , а, значит, и  $\Pi : A_1 \rightarrow A(G)$ , не имеет правого обратного.

(II): Равносильность утверждений (ii) и (iii) установлена в [3, теорема 4.1]. Там же показано, что если оператор  $R : l_1(\mathbb{E}) \rightarrow A(G)$  имеет правый обратный, то выполняется утверждение (ii). Отсюда и из леммы 1 вытекает справедливость импликации (i)  $\Rightarrow$  (ii).

(III) (и (ii)  $\Rightarrow$  (i)): Пусть функция  $Q \in A(\mathbb{C}^2)$  удовлетворяет условиям в (ii), и  $\Omega_Q$  —  $Q$ -интерполирующий функционал. Покажем вначале, что линейный оператор  $T$  непрерывно отображает  $A(G)$  в  $A_1$ .

Не ограничивая общности, можно считать, что  $0 \in G$ . Тогда в определении  $Q$ -интерполирующего функционала можно брать  $t_0 = 0$ . Согласно [3, лемма 3.2], для  $t, z \in \mathbb{C}$  выполняется равенство

$$\Omega_Q(t, t, e_z) = \frac{Q(z, t) - Q(t, t)}{z - t} = \frac{Q(z, t) - L(t)}{z - t}.$$

Поэтому для любых  $z \notin \mathcal{V}(L)$ ,  $0 \leq k \leq m_n$  имеем

$$\left( \Omega_q(t, t, e_z) \right)_{t^k}^{(k)} \Big|_{t=\lambda_n} = \frac{\partial^k \left( \frac{Q(z, t)}{z-t} \right)}{\partial t^k} \Big|_{t=\lambda_n}.$$

Тем самым для  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}(L)$  выполняется равенство

$$(T(e_z))_{nk} = \sum_{l=0}^{m_n-k} C(k, l) \frac{\partial^l Q(z, t)}{\partial t^l} \Big|_{t=\lambda_n} \left( \frac{l_n(t)}{z-t} \right)_{t^{m_n-l-k}}^{(m_n-l-k)} \Big|_{t=\lambda_n}, \quad (1)$$

где  $C(k, l) = \frac{1}{(m_n-k-l)!l!k!}$ .

Так как функция  $Q$  удовлетворяет условию (ii), то, применяя принцип максимума модуля аналитической функции, получим

$$\begin{aligned} \exists D > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, \exists C_1 > 0 : \\ \left| \frac{\partial^k Q}{\partial t^k}(z, t) \right| \leq C_1 \exp \left( H_G(z) - \frac{|z|}{m} + H_K(t) + \frac{|t|}{n} + kD \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $z, t \in \mathbb{C}$ .

Из неравенств (2), условий (L1) и (L3) следует, что ряд в (1) абсолютно сходится, причем

$$(\forall s \in \mathbb{N}) (\exists l \in \mathbb{N}) (\exists C_2 > 0) p_s(T(e_z)) \leq C_2 \cdot q_l(e_z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{S}_n \right), \quad (3)$$

где  $\tilde{S}_n := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda_n| < (1 + |\lambda_n|)^{-2} \right\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(p_s)_{s \in \mathbb{N}}$  — фундаментальная последовательность непрерывных преднорм в  $A_1$ , а  $(q_l)_{l \in \mathbb{N}}$  — фундаментальная последовательность непрерывных преднорм в  $A(G)$ . (Последнее неравенство означает, что оператор  $T$  «непрерывен на экспонентах  $e_z$ »). Поступая так, как в [3, доказательство леммы 3.3, с. 117], получим, что неравенство (3) выполняется для любой функции  $f \in A(G)$ , т. е.

$$(\forall s \in \mathbb{N}) (\exists m \in \mathbb{N}) (\exists C_3 > 0) p_s(T(f)) \leq C_3 \cdot q_m(f), \quad f \in A(G).$$

Пусть для  $\mu \in \mathbb{C}$  символ  $Q(\mu, D)$  обозначает оператор свертки с характеристической функцией  $Q(\mu, z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Как известно [6, 7],

оператор  $Q(\mu, D)$  линейно и непрерывно отображает  $A(G + K)$  в  $A(G)$ . При этом [3, § 2] для любых  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $p \in \mathbb{N}_0$  верно

$$Q(\mu, D)(e_{\lambda, p}) = \sum_{s=0}^p C_p^s \frac{\partial^{p-s} Q(\mu, t)}{\partial t^{p-s}} \Big|_{t=\lambda} e_{\lambda, s}.$$

Покажем, что  $\Pi(T(f)) = f$  для любого  $f \in A(G)$ . Для  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}(L)$  по теореме 2.4 из [5]

$$\begin{aligned} L(\mu)e_\mu &= Q(\mu, D)(e_\mu) = Q(\mu, D) \times \\ &\times \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_n} \frac{1}{s!} \sum_{l=s}^{m_n} \frac{L(\mu) l_n^{(m_n-l)}(\lambda_n)}{(\mu - \lambda_n)^{l-s+1} (m_n - l)!} e_{\lambda_n, s} \right). \end{aligned}$$

Поэтому для  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}(L)$  имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} L(\mu)e_\mu &= L(\mu)Q(\mu, D) \times \\ &\times \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_n} \frac{1}{s!} \sum_{l=s}^{m_n} \frac{1}{(m_n - l)!} l_n^{(m_n-l)}(\lambda_n) \frac{1}{(\mu - \lambda_n)^{l-s+1}} e_{\lambda_n, s} \right) = \\ &= L(\mu)Q(\mu, D) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_n} \frac{1}{s!(m_n - s)!} \left( \frac{l_n(t)}{\mu - t} \right)^{(m_n-s)} \Big|_{t=\lambda_n} e_{\lambda_n, s} \right) = \\ &= L(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_n} \frac{1}{s!(m_n - s)!} \left( \frac{l_n(t)}{\mu - t} \right)^{(m_n-s)} \Big|_{t=\lambda_n} \times \\ &\times \sum_{k=0}^s C_s^k \frac{\partial^{s-k} Q}{\partial t^{s-k}}(\mu, \lambda_n) e_{\lambda_n, k} = L(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_n} \sum_{s=k}^{m_n} \frac{1}{k!(m_n - s)!(s - k)!} \times \\ &\times \left( \frac{l_n(t)}{\mu - t} \right)^{(m_n-s)} \Big|_{t=\lambda_n} \frac{\partial^{s-k} Q}{\partial t^{s-k}}(\mu, \lambda_n) e_{\lambda_n, k} = \\ &= L(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_n} \sum_{l=0}^{m_n-k} \frac{1}{k!(m_n - l - k)!l!} \times \\ &\times \left( \frac{l_n(t)}{\mu - t} \right)^{(m_n-l-k)} \Big|_{t=\lambda_n} \frac{\partial^l Q}{\partial t^l}(\mu, \lambda_n) e_{\lambda_n, k}. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (1), получим:

$$L(\mu)e_\mu = L(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_n} (T(e_z))_{n,k} e_{\lambda_n, k} = L(\mu) \Pi(T(e_\mu)).$$

Таким образом,  $e_\mu = \Pi(T(\mu))$ , для любого  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}(L)$ .

Так как множество  $\{e_\mu \mid \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}(L)\}$  полно в  $A(G)$ , то  $f = \Pi(T(f))$  для всех  $f \in A(G)$ .  $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждения (i)–(iii) выполняются, если границы  $G$  и  $K$  принадлежат классу  $C^\alpha$  для некоторого  $\alpha > 1$ , и не выполняются, если  $\partial G$  и  $\partial K$  имеют хотя бы одну угловую точку [3, с. 108].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждения (I) и (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) ранее были доказаны для случая простых нулей (т. е.  $m_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) в [1, теоремы 1.9 и 4.3]. Утверждение (III) для простых нулей получено в [8, теорема 1.8]. Равносильность (ii) и (iii) доказана ранее в [3, теорема 4.1].

### Литература

1. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 1.—С. 70–84.
2. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и конформные отображения // Докл. РАН.—1992.—Т. 323, № 5.—С. 826–829.
3. Мелихов С. Н. Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов // Мат. сборник.—2000.—Т. 191, № 7.—С. 105–128.
4. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
5. Шрайфель И. С. Абсолютно-представляющие системы в пространствах аналитических функций.—Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1985.—97 с.
6. Коробейник Ю. Ф. О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях // Мат. сборник.—1968.—Т. 75, № 2.—С. 225–234.
7. Коробейник Ю. Ф. Уравнения свертки в комплексной области // Мат. сборник.—1985.—Т. 127, № 2.—С. 173–197.
8. Мелихов С. Н. О левом обратном к оператору сужения на весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2002.—Т. 14, № 1.—С. 99–133.
9. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
10. Красичков-Терновский И. Ф. Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки.—1978.—Т. 24, № 4.—С. 531–546.

---

ИВАНОВА ОЛЬГА АЛЕКСАНДРОВНА  
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
E-mail: [ivolga1981@list.ru](mailto:ivolga1981@list.ru)

МЕЛИХОВ СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ  
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет;  
Владикавказ, Институт прикладной математики и  
информатики ВНЦ РАН  
E-mail: [melih@math.rsu.ru](mailto:melih@math.rsu.ru)

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ КЛАССОВ ХАРДИ И *ВМО* ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**С. Б. Климентов**

В работе строятся различные представления второго рода для классов Харди и *ВМО* обобщенных аналитических функций. На основе полученных представлений дается простое доказательство теоремы Феффермана о двойственности  $H_1$  и *ВМО* для обобщенных аналитических функций.

## Введение. Основные определения

В предлагаемой статье, развивающей результаты автора [1–3] по аналогам классов Харди и *ВМО* обобщенных аналитических функций, получены представления для этих классов функций, которые мы, следуя [4], называем представлениями второго рода. Важность такого сорта представлений в исследованиях по обобщенным аналитическим функциям трудно переоценить [1–6]. Новизна полученных в этой статье результатов по сравнению с [1, 2, 3, 6] состоит в первую очередь в охвате классов Харди  $H_1$ , а также в привлечении новых типов операторов.

Важным следствием полученных представлений является совсем простое доказательство обобщения теоремы Феффермана о сопряженности пространства *ВМО* пространству  $H_1$  [7, с. 280–299]. Первоначально доказательство такого обобщения было получено более сложным способом и анонсировано в [8].

Обозначим  $D = \{z : |z| < 1\}$  — единичный круг комплексной  $z$ -плоскости  $E$ ,  $z = x + iy$ ,  $i^2 = -1$ ;  $\Gamma = \partial D$  — граница круга  $D$ ;  $\overline{D} = D \cup \Gamma$ ;  $A(z), B(z) \in L_s(\overline{D})$ ,  $s > 2$  (используются обозначения [4]) — заданные комплексные функции.

Рассмотрим в  $\overline{D}$  каноническую эллиптическую систему в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \quad (1)$$

где  $w = w(z) = u(z) + iv(z)$  — искомая комплексная функция,  $u$  и  $v$  — ее действительная и мнимая части,  $\partial_{\bar{z}} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$  — производная в смысле Соболева.

Решение  $w(z)$  системы (1) называют *обобщенной аналитической функцией* [4, с. 148].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Следуя [1], будем говорить, что решение системы (1) принадлежит классу  $H_p(A, B)$ ,  $p > 0$ , если оно для некоторой положительной постоянной  $M_p(w) < +\infty$  удовлетворяет условию

$$\mu(\rho, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma \leq M_p(w), \quad \forall \rho : 0 \leq \rho < 1, \quad \rho e^{i\sigma} = z \in D.$$

При  $A = B \equiv 0$  имеем обычный класс Харди  $H_p$  голоморфных функций [9, с. 57].

Множество ограниченных в  $\overline{D}$  решений системы (1) будем обозначать  $H_\infty(A, B)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что функция  $w(z) \in H_p^0(A, B)$ ,  $0 < p \leq \infty$ , если  $w(z)/z \in H_p(A, B)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вещественная функция  $\varphi \in L_1(\Gamma)$ ,  $\varphi = \varphi(e^{i\theta}) \equiv \varphi(\theta)$  называется функцией класса *ВМО* (Bounded Mean Oscillation) [9, с. 227], если

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| d\theta = \|\varphi\|_* < \infty, \quad (2)$$

где  $I \subset \Gamma$  — произвольный интервал на  $\Gamma$ ,  $|I|$  — его длина,

$$\varphi_I = \frac{1}{|I|} \int_I \varphi d\theta.$$

Для комплекснозначной функции  $\varphi \in L_1(\Gamma)$  определение аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Следуя [2], будем говорить, что решение  $w(z)$  системы (1) принадлежит классу *ВМО*( $A, B$ ), если  $w(z) \in H_2(A, B)$  и его некасательные предельные значения  $w(t)$  на  $\Gamma$  принадлежат классу *ВМО*.

При  $A = B \equiv 0$  имеем голоморфный класс *ВМОГ* [9, с. 269].

**Теорема 1** [2]. Множество  $H_p(A, B)$ ,  $p \geq 1$  ( $H_\infty(A, B)$ ), с нормой

$$\|w\|_{H_p} = \left\{ \int_\Gamma |w(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} \quad \left( \|w\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |w(z)| \right) \quad (3)$$

является действительным банаховым пространством. Здесь и всюду далее  $w(e^{i\theta}) \equiv w(t)$ ,  $t \in \Gamma$ , — некасательные предельные значения  $w(z)$  на  $\Gamma$  при  $z \rightarrow t$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество  $H_p^0(A, B) \subset H_p(A, B)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , — замкнутое подпространство.

**Теорема 2** [2]. Множество  $BMO(A, B)$  с нормой

$$\|w\|_{BMO} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |w(t)| |dt| + \|w\|_* \quad (4)$$

является действительным банаховым пространством.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, множества следов функций классов  $H_p(A, B)$ ,  $H_p^0(A, B)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $BMO(A, B)$  на  $\Gamma$  также будут банаховыми пространствами с нормами (3), (4), изометричными исходным пространствам. В связи с этим за множествами следов можно сохранить те же обозначения, что и для исходных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Через  $\operatorname{Re} H_1(A, B)$  и  $\operatorname{Re} H_1^0(A, B)$  обозначим множества действительных частей функций (и их следов на  $\Gamma$ ) из  $H_1(A, B)$  и  $H_1^0(A, B)$ .

Поскольку функции из  $H_1(A, B)$  и  $H_1^0(A, B)$  своей действительной частью определены однозначно (теоремы 3 и 5), вводя для  $\operatorname{Re} w \in \operatorname{Re} H_1(A, B)$  ( $\operatorname{Re} H_1^0(A, B)$ ) норму  $\|w\|_{H_1}$ , превращаем эти множества в банаховы пространства, изометричные  $H_1(A, B)$  и  $H_1^0(A, B)$ .

Следуя [4, с. 42, 45], обозначим

$$T_D f(z) \equiv T f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad f(z) \in L_q(\overline{D}), \quad q \geq 1. \quad (5)$$

Пусть  $\varkappa \geq 0$  — целое число. Следуя [4, с. 293], обозначим

$$T_{\varkappa} f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2\varkappa+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta} z} \right) d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (6)$$

Отметим, что при  $t \in \Gamma$   $\operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} T_{\varkappa} f(t)\} = 0$ .

Также будем рассматривать следующие операторы:

$$T_n f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D f(\zeta) \left[ \frac{1}{\zeta - z} - P(z, \zeta, z_1, \dots, z_n) \right] d\xi d\eta, \quad (7)$$



где

$$P(z, \zeta, z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(z - z_1) \dots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \dots (z - z_n)}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_n)} \frac{1}{\zeta - z_k},$$

$\zeta = \xi + i\eta$ , причем  $z_1, \dots, z_n \in \overline{D}$  и попарно различны;

$$\begin{aligned} T_{\varkappa, n} f(z) = & -\frac{1}{\pi} \iint_D \left[ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2\varkappa+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta} z} \right] d\xi d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_D \sum_{k=1}^{2\varkappa+1} P'_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta} - \overline{z}_k} d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \iint_D \sum_{k=1}^{2\varkappa+1} P''_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_k} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$P'_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) = \frac{(1 - z\overline{z}_1) \dots (1 - z\overline{z}_{k-1})(1 - z\overline{z}_{k+1}) \dots (1 - z\overline{z}_{2\varkappa+1})}{(\overline{z}_k - \overline{z}_1) \dots (\overline{z}_k - \overline{z}_{k-1})(\overline{z}_k - \overline{z}_{k+1}) \dots (\overline{z}_k - \overline{z}_{2\varkappa+1})},$$

$$P''_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) = \frac{(z - z_1) \dots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \dots (z - z_{2\varkappa+1})}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_{2\varkappa+1})},$$

$\zeta = \xi + i\eta$ , причем  $z_k, k = \overline{1, 2\varkappa+1}$ , — произвольные попарно различные точки контура  $\Gamma$ ,  $\varkappa \geq 0$  — целое число.

Отметим, что  $T_n f(z_k) = 0, k = \overline{1, n}$ , при  $z \in \Gamma \operatorname{Re}\{z^{-\varkappa} T_{\varkappa, n} f(z)\} = 0$ ;  $T_{\varkappa, n} f(z_k) = 0, k = \overline{1, 2\varkappa+1}$ .

### 1. Формулировка основных результатов

**Теорема 3.** Если  $w(z) \in H_p(A, B), 1 \leq p \leq \infty (BMO(A, B))$ , то имеет место соотношение

$$w(z) + T(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad \text{где } \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z} dt, \quad (9)$$

и функция  $\Phi(z) \in H_p(BMOG)$ .

Если  $\Phi(z)$  — произвольная голоморфная функция класса  $H_p(BMOG)$ , то соотношением (9) однозначно определяется решение  $w(z)$  системы (1) класса  $H_p(A, B)$  ( $BMO(A, B)$ ) и формула (9) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств  $H_p(A, B)$  ( $BMO(A, B)$ ) и  $H_p(BMOG)$ .

**Теорема 4.** Если  $w(z) \in H_p(A, B)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  ( $BMO(A, B)$ ), то имеет место соотношение

$$w(z) + T_n(Aw + B\bar{w})(z) = \Phi(z), \quad (10)$$

и функция  $\Phi(z) \in H_p(BMOG)$ .

Если  $\Phi(z)$  — произвольная голоморфная функция класса  $H_p(BMOG)$ , то соотношением (10) однозначно определяется решение  $w(z)$  системы (1) класса  $H_p(A, B)$  ( $BMO(A, B)$ ) и формула (10) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств  $H_p(A, B)$  ( $BMO(A, B)$ ) и  $H_p(BMOG)$ .

**Теорема 5.** Если  $w(z) \in H_p(A, B)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  ( $BMO(A, B)$ ), то имеет место соотношение

$$w(z) + T_{\kappa, n}(Aw + B\bar{w}) = \Phi(z), \quad (11)$$

где  $\Phi(z) \in H_p(BMOG)$ , и, почти всюду на  $\Gamma$ ,

$$\operatorname{Re} \{t^{-\kappa} w(t)\} = \operatorname{Re} \{t^{-\kappa} \Phi(t)\}, \quad t \in \Gamma. \quad (12)$$

Если  $\Phi(z) \in H_p(BMOG)$ , то соотношением (11) однозначно определяется функция  $w(z) \in H_p(A, B)$  ( $BMO(A, B)$ ), удовлетворяющая на  $\Gamma$  условию (12) и формула (11) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств  $H_p(A, B)$  ( $BMO(A, B)$ ) и  $H_p(BMOG)$ .

**Теорема 6.** Пространство, сопряженное к  $\operatorname{Re} H_1(A, B)$  — это  $BMO$ . Если  $F$  — вещественная  $2\pi$ -периодическая локально интегрируемая функция, то следующие условия на  $F$  эквивалентны:

1) предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} w(re^{i\theta}) F(\theta) d\theta \equiv L \operatorname{Re} w \quad (13)$$

существует для любой функции  $w \in H_1(A, B)$ , и  $L$  — линейный непрерывный функционал на  $\operatorname{Re} H_1(A, B)$ ;

2)  $F \in BMO$ .

В случае, когда  $F \in \text{ВМО}$ , норма функционала  $L$ , определенного в (13), эквивалентна норме  $\|F\|_{\text{ВМО}}$ .

## 2. Вспомогательные сведения

**Лемма 1** [4, с. 67–68]. Обозначим  $\Gamma_r = \{z : |z| = r \leq 1\}$ . Если  $f \in L_q(\overline{D})$ ,  $1 < q \leq 2$ , то  $Tf, T_{\times}f, T_n f, T_{\times,n}f \in L_{\gamma}(\Gamma_r)$  для любого  $r : 0 < r \leq 1$ , где  $\gamma$  — произвольное число, такое, что  $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$ , а также имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L_{\gamma}(\Gamma_r)} &\leq M_{q,\gamma} \|f\|_{L_q(\overline{D})}, \\ \|T_{\times}f\|_{L_{\gamma}(\Gamma_r)} &\leq M'_{q,\gamma} \|f\|_{L_q(\overline{D})}, \\ \|T_n f\|_{L_{\gamma}(\Gamma_r)} &\leq M_{n,q,\gamma} \|f\|_{L_q(\overline{D})}, \\ \|T_{\times,n}f\|_{L_{\gamma}(\Gamma_r)} &\leq M'_{n,q,\gamma} \|f\|_{L_q(\overline{D})}, \end{aligned} \quad (14)$$

где константы  $M_{q,\gamma}, M'_{q,\gamma}, M_{n,q,\gamma}, M'_{n,q,\gamma}$  от  $f$  и  $r$  не зависят.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** В [4] лемма 1 доказана для оператора  $Tf$ . В остальных случаях доказательство почти дословно повторяется.

**Лемма 2.** Если  $w(z) \in H_p(A, B)$ ,  $p > 0$ , то  $w(z) \in L_m(\overline{D})$  для любого  $m : 0 < m < 2p$ , и при  $m \geq 1, p \geq 1$  имеет место неравенство

$$\|w\|_{L_m(\overline{D})} \leq C_m \|w\|_{H_p}, \quad (15)$$

где константа  $C_m$  зависит от  $m$ , а от  $w$  не зависит.

◁ Случай  $p > 1$  рассмотрен в [3]. Рассмотрим случай  $0 < p \leq 1$ , опираясь на справедливость доказанного результата при  $p > 1$ . Имеет место представление [1]

$$w(z) = \Phi(z)e^{\omega(z)}, \quad (16)$$

где  $\Phi(z) \in H_p, \omega \in C_{\alpha}(\overline{D}), \alpha = (s-2)/s, |\omega(z)| \leq \text{const}$ , где константа от  $w$  не зависит. Пусть  $\beta(z)$  — произведение Бляшке функции  $\Phi(z)$  [9, с. 62]. Тогда  $\Phi(z)/\beta(z) = \Phi_*(z) \in H_p$  и  $\Phi_*(z) \neq 0$  в  $D$  [9, с. 62]. Отсюда  $[\Phi_*(z)]^{p/2} \in H_2$ , а следовательно,  $[\Phi_*(z)]^{p/2} \in L_{\nu}(\overline{D})$  для любого  $\nu : 0 < \nu < 4$ . Таким образом,  $\Phi_*(z) \in L_m(\overline{D})$  для любого  $m : 0 < m < 2p$ , а следовательно и  $\Phi(z) = \beta(z)\Phi_*(z) \in L_m(\overline{D})$ , откуда, с учетом (16), получаем  $w(z) \in L_m(\overline{D})$ .

Докажем оценку (15). Из (16) имеем  $\|w\|_{L_m(\overline{D})} \leq \text{const} \|\Phi\|_{L_m(\overline{D})}$ , где константа от  $w$  не зависит. Вместе с тем, если обозначим  $1 < \nu = 2m < 4$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L_m(\overline{D})} &\leq \|\Phi_*\|_{L_m(\overline{D})} = \left\{ \|[\Phi_*]^{1/2}\|_{L_\nu(\overline{D})} \right\}^2 \leq \\ &\leq \text{const} \left\{ \|[\Phi_*]^{1/2}\|_{H_2} \right\}^2 = \text{const} \|\Phi_*\|_{H_1} = \text{const} \|\Phi\|_{H_1}, \end{aligned}$$

где  $\text{const}$  от  $w$  не зависит [9, с. 62].

Из (16) очевидно, что  $\|\Phi\|_{H_1} \leq \text{const} \|w\|_{H_1}$ , откуда получаем (15).  $\triangleright$

**Теорема 7.** Если  $f \in L_p(\overline{D})$ ,  $1 < p \leq 2$ , то

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |Tf(e^{i\theta}) - Tf(re^{i\theta})|^\gamma d\theta = 0, \quad (17)$$

$$1 < \gamma < \frac{p}{2-p}.$$

Аналогичное утверждение справедливо для  $T_\varkappa f$ ,  $T_n f$ ,  $T_{\varkappa,n} f$ .

$\triangleleft$  Очевидно неравенство

$$|Tf(e^{i\theta}) - Tf(re^{i\theta})| \leq \frac{|1-r|}{\pi} \iint_D |f(\zeta)| \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - e^{i\theta}| |\zeta - re^{i\theta}|}. \quad (18)$$

Предположим сначала, что  $p < \gamma < \frac{p}{2-p}$ , и положим  $0 < 2\alpha = \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{p} + 1 < \frac{1}{q}$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Так как  $\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-p}{\gamma p} + \frac{1}{q} = 1$ , то, применяя неравенство Гельдера, получим:

$$\begin{aligned} J_1 &= \iint_D |f(\zeta)| \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - e^{i\theta}| |\zeta - re^{i\theta}|} \leq \\ &\leq \left( \iint_D |f(\zeta)|^p |\zeta - e^{i\theta}|^{-1+\alpha\gamma} |\zeta - re^{i\theta}|^{-1+\alpha\gamma} d\xi d\eta \right)^{1/\gamma} \times \\ &\times \left( \iint_D |f(\zeta)|^p d\xi d\eta \right)^{1/p-1/\gamma} \left( \iint_D |\zeta - e^{i\theta}|^{-2+q\alpha} |\zeta - re^{i\theta}|^{-2+q\alpha} d\xi d\eta \right)^{1/q}, \end{aligned} \quad (19)$$

при этом  $0 < q\alpha < 1/2$ . В силу этих неравенств, последний сомножитель в правой части (19) оценивается величиной [4, с. 55]  $\text{const} |1 - r|^{-2/q+2\alpha}$ , где константа от  $r$  не зависит.

Далее рассмотрим интеграл

$$J_2 = \int_0^{2\pi} |\zeta - e^{i\theta}|^{-1+\alpha\gamma} |\zeta - re^{i\theta}|^{-1+\alpha\gamma} d\theta.$$

Если  $\alpha\gamma \geq 1$ , то  $J_2$  ограничен равномерно по  $\zeta \in \overline{D}$  и  $r : 1/2 < r < 3/2$ .

Пусть  $\alpha\gamma < 1$ . Будем пока считать, что  $1/2 < r < 1$ .

Если  $r \leq |\zeta| \leq (1+r)/2$ , то, очевидно,

$$|\zeta - re^{i\theta}| \geq r|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|, \quad |\zeta - e^{i\theta}| \geq \frac{1}{2}|1 - r|,$$

где  $\varphi = \arg \zeta$ , и в этом случае имеем оценку

$$J_2 \leq \text{const} |1 - r|^{-1+\alpha\gamma}, \quad (20)$$

где константа от  $r$  не зависит.

Если  $(1+r)/2 \leq |\zeta| \leq 1$ , то  $|\zeta - re^{i\theta}| \geq 1/2|1 - r|$  и, с учетом равномерной по  $\zeta \in \overline{D}$  ограниченности интеграла [4, с. 68],

$$\int_0^{2\pi} |\zeta - e^{i\theta}|^{-\lambda} d\theta, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (21)$$

в этом случае также имеем оценку (20).

Если  $|\zeta| < r$ , то  $|\zeta - e^{i\theta}| \geq |1 - r|$  и, с учетом равномерной по  $\zeta \in \overline{D}$  ограниченности интеграла (21), также получаем (20).

В случае  $1 < r < 3/2$  для всякого  $\zeta \in \overline{D}$  очевидно  $|\zeta - re^{i\theta}| \geq |1 - r|$  и, аналогично предыдущему, опять получаем (20).

Сопоставляя (19) и (20), при  $\alpha\gamma < 1$  и  $1/2 < r < 3/2$  получаем

$$\int_0^{2\pi} J_1^\gamma d\theta \leq \text{const} \|f\|_{L_p(\overline{D})}^\gamma |1 - r|^{(3\alpha-2/q-1/\gamma)\gamma}, \quad (22)$$

где константа от  $r$  и  $f$  не зависит.

При  $\alpha\gamma \geq 1$  оценка (22) упрощается:

$$\int_0^{2\pi} J_1^\gamma d\theta \leq \text{const} \|f\|_{L_p(\overline{D})}^\gamma |1-r|^{(2\alpha-2/q)\gamma}, \quad (23)$$

где константа от  $r$  и  $f$  не зависит.

Итак, при  $\alpha\gamma < 1$  из (18) и (22) имеем:

$$\int_0^{2\pi} |Tf(e^{i\theta}) - Tf(re^{i\theta})|^\gamma d\theta \leq \text{const} \|f\|_{L_p(\overline{D})}^\gamma |1-r|^{\alpha\gamma}, \quad (24)$$

где константа от  $r$  и  $f$  не зависит,  $\alpha\gamma > 0$ , а при  $\alpha\gamma \geq 1$  получаем

$$\int_0^{2\pi} |Tf(e^{i\theta}) - Tf(re^{i\theta})|^\gamma d\theta \leq \text{const} \|f\|_{L_p(\overline{D})}^\gamma |1-r|, \quad (25)$$

где константа от  $r$  и  $f$  не зависит.

Из (24) и (25) получаем утверждение теоремы для  $Tf$  при  $p < \gamma < p/(2-p)$ . Очевидно, отсюда следует и утверждение теоремы при  $1 \leq \gamma \leq p$ .

Так как выражение

$$\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{zf(\overline{\zeta})}{1-\overline{\zeta}z} d\xi d\eta$$

конформным отображением второго рода  $z = 1/\overline{z}'$  переводится в  $\overline{Tf(z')}$ , случай  $T_\kappa f$  сводится к утверждению для  $Tf$ . Перенос на  $T_n f$  и  $T_{\kappa,n} f$  очевиден.  $\triangleright$

### 3. Доказательства основных результатов

$\triangleleft$  ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В случае  $p > 1$  теорема (без утверждения об изоморфизме) доказана в [1] при дополнительном условии  $p > \frac{s}{2(s-1)}$ , однако это условие в рассуждениях работы [1] излишне, поскольку  $s > 2$  всегда можно считать настолько близким к двум, что это условие будет выполнено.

Рассмотрим случай  $p = 1$ , в основном следуя рассуждениям из [1].

По лемме 2, если  $w(z) \in H_1(A, B)$ , то  $w(z) \in L_m(\overline{D})$  для любого  $m$ :  $0 < m < 2$ . Покажем, что в этом случае  $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$  при некотором  $q$ :  $1 < q \leq 2$  (достаточно установить это для  $Aw$ ).

Используя неравенство Гельдера, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \iint_D |A(z)w(z)|^q dx dy \leq \\ & \leq \left[ \iint_D |A(z)|^{q\alpha} dx dy \right]^{1/\alpha} \left[ \iint_D |w(z)|^{q\beta} dx dy \right]^{1/\beta}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $1/\alpha + 1/\beta = 1$ . Подберем  $\alpha, \beta, q$  так, чтобы  $1 < q \leq 2$  и правая часть (26) была ограничена.

Положим  $\alpha q = s$ , тогда первый сомножитель в правой части (26) конечен. Далее будем иметь  $q\beta = \frac{\alpha q}{\alpha - 1} = \frac{sq}{s - q}$ . Покажем, что можно считать  $m > \frac{s}{s-1}$ . Действительно, выражение, стоящее в правой части этого неравенства, монотонно убывает на промежутке  $[2, +\infty)$  от 2 до 1, и, если  $s > 2$ , то  $m$  можно выбрать так, что  $\frac{s}{s-1} < m < 2$ . Очевидно, зафиксировав при этом  $q$  достаточно близким к единице ( $q > 1$ ), будем иметь  $m \geq \frac{sq}{s-q} = \beta q$ , и второй сомножитель в (26) при этом будет конечен.

При зафиксированном таким образом  $q$ , по лемме 1

$$T(Aw + B\overline{w}) \in L_\gamma(\Gamma_r) \quad (27)$$

для любых  $\gamma$ :  $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$  и  $r$ :  $0 < r \leq 1$ . Поскольку  $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$ , из (1)  $\partial_{\bar{z}}w \in L_q(\overline{D})$ , и вследствие этого имеет место равенство [4, с. 50]

$$w(z) + T(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad (28)$$

где  $\Phi(z)$  — голоморфная в  $D$  функция.

Из (28)

$$\int_{\Gamma_r} |\Phi(t)| dt \leq \int_{\Gamma_r} |w(t)| dt + \int_{\Gamma_r} |T(Aw + B\overline{w})(t)| dt.$$

Отсюда, а также из (27) и лемм 1 и 2, используя неравенство Гельдера, будем иметь  $\Phi(z) \in H_1$  и

$$\|\Phi\|_{H_1} \leq \text{const} \|w\|_{H_1}, \quad (29)$$

где константа от  $\Phi$  и  $w$  не зависит.

**Лемма 3.** *Имеет место соотношение:*

$$\lim_{r \rightarrow 1} T(Aw + B\overline{w})(re^{i\theta}) = T(Aw + B\overline{w})(t), \quad (30)$$

для почти всех  $t = e^{i\theta} \in \Gamma$

△ Так как в (9)  $w(z) \in H_1(A, B)$ ,  $\Phi(z) \in H_1$ , то при  $z \rightarrow t \in \Gamma$ ,  $z \in D$ , по некасательным путям  $w(z)$  и  $\Phi(z)$  имеют пределы  $w(t)$  и  $\Phi(t)$  для почти всех  $t \in \Gamma$  [1]. Отсюда получаем, что  $T(Aw + B\overline{w})(z)$  при  $z \rightarrow t \in \Gamma$ ,  $z \in D$ , по некасательным путям имеет предел  $T^+$  для почти всех  $t \in \Gamma$ .

Поскольку  $T(Aw + B\overline{w})(z)$  в силу (17) сходится в среднем к  $T(Aw + B\overline{w})(t)$ , то поточечный предел  $T^+$  при  $z \in D$ ,  $z \rightarrow t$  почти всюду будет такой же, откуда следует (30) при  $r \rightarrow 1 - 0$ .

Рассмотрим (30) при  $r > 1$ . В силу леммы 1  $T(Aw + B\overline{w})(z)$ ,  $|z| > 1$ , есть конформный образ функции класса  $H_\gamma$ ,  $\gamma > 1$ . Отсюда получаем, что  $T(Aw + B\overline{w})(z)$  имеет предел  $T^-$  по некасательным путям при  $z \rightarrow t \in \Gamma$ ,  $|z| > 1$  для почти всех  $t \in \Gamma$ . Опять отметив, что предел в среднем в (17) почти всюду совпадает с поточечным  $T^-$ , получаем (30) при любом  $r$ . ▽

С учетом леммы 3 рассмотрим теперь (9) при  $z \in \Gamma$ . Представление функции  $\Phi(z)$  в виде интеграла типа Коши в (9) получается применением к (9) оператора

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bullet dz}{z - \zeta},$$

с учетом (27), а также теоремы Коши для функций класса  $H_1$  и того, что интеграл (5) вне  $D$  есть голоморфная функция — конформный образ функции класса  $H_1$ , равная нулю на бесконечности, а  $\Phi(z) \in H_1$  представима своим интегралом Коши [9, с. 68].

Первая часть теоремы 3 доказана.

Поскольку можно считать, что  $\frac{s}{s-1} < m < 2$ , а  $\Phi(z) \in L_m(\overline{D})$ , существование и единственность решения  $w \in L_m(\overline{D})$  уравнения (9) при известной правой части следует из рассуждений [4, с. 167–168]. То, что при этом  $w(z)$  — решение уравнения (1) — хорошо известный факт [4, с. 168–169].

Далее, из

$$\int_{\Gamma_r} |w(t)| dt \leq \int_{\Gamma_r} |\Phi(t)| dt + \int_{\Gamma_r} |T(Aw + B\overline{w})(t)| dt,$$



(27), (14) и  $\Phi(z) \in H_1$ , применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\|w\|_{H_1} \leq \|\Phi\|_{H_1} + \text{const} \|w\|_{L_\lambda(\overline{D})}$$

при некотором  $\lambda : 1 < \lambda < 2$ , где константа от  $\Phi$  и  $w$  не зависит. Так как  $\|w\|_{L_\lambda(\overline{D})} \leq \text{const} \|\Phi\|_{L_\lambda(\overline{D})}$  [4, с. 167–168], где константа от  $\Phi$  и  $w$  не зависит, отсюда и из (15) имеем  $w(z) \in H_1(A, B)$  и

$$\|w\|_{H_1} \leq \text{const} \|\Phi\|_{H_1}, \quad (31)$$

где константа от  $\Phi$  и  $w$  не зависит.

Из (29) и (31) следует утверждение об изоморфизме при  $p = 1$ . Изоморфизм при  $p > 1$  доказывается аналогично с использованием соответствующих построений из [1].

Рассмотрим случай  $p = \infty$ . Пусть  $w(z) \in H_\infty(A, B)$ , тогда имеет место (9), где  $\Phi(z) \in H_p$  при любом  $p \geq 1$ . Но в этом случае  $Aw + B\overline{w} \in L_s(\overline{D})$  и  $T(Aw + B\overline{w})(z) \in C_\alpha(\overline{D})$ ,  $\alpha = (s - 2)/s$  [4, с. 54], а следовательно  $\Phi(z) \in H_\infty$ .

Поскольку [4, с. 54]

$$\|T(Aw + B\overline{w})\|_{L_\infty} \leq \text{const} \|Aw + B\overline{w}\|_{L_s(\overline{D})} \leq \text{const} \|w\|_{H_\infty},$$

где константа от  $w$  не зависит, из (9) получаем

$$\|\Phi\|_{H_\infty} \leq \text{const} \|w\|_{H_\infty}, \quad (32)$$

где константа не зависит от  $w$  и  $\Phi$ .

Если задана  $\Phi(z) \in H_\infty$ , то из (9) однозначно определяется  $w(z) \in H_p(A, B)$  при произвольном  $p \geq 1$ . В этом случае  $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$  при некотором  $q > 2$ , а  $T(Aw + B\overline{w})(z) \in C_\beta(\overline{D})$  при некотором  $\beta : 0 < \beta < 1$  [4, с. 54], откуда получаем  $w \in H_\infty(A, B)$ .

Итак, с учетом (32), получаем, что отображение  $w \in H_\infty(A, B) \rightarrow \Phi \in H_\infty$  по формуле (9) биективно и непрерывно, а следовательно, по теореме Банаха является изоморфизмом.

Утверждение теоремы в случае  $BMO$  (без утверждения об изоморфизме) доказано в [2]. Изоморфизм непосредственно вытекает из ограниченности в  $BMO$  сингулярного интеграла и теорем 4 и 7 работы [2].  $\triangleright$

$\triangleleft$  ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.  $\triangleright$

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5 проведем для оператора  $T_{\varkappa}f$ . В случае  $T_{\varkappa,n}f$  рассуждения почти дословно повторяются.

В случае  $p > 1$  теорема доказана в [3, 6].

Рассмотрим случай  $p = 1$ . Поскольку выражение

$$\iint_D \frac{z^{2\varkappa+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} d\xi d\eta \in H_1 \quad (33)$$

голоморфно при  $|z| < 1$  (см. конец доказательства теоремы 7 и доказательство леммы 3), из (9) непосредственно следует (11), где  $\Phi(z)$  — некоторая голоморфная в  $D$  функция. Покажем, что  $\Phi(z) \in H_1$ .

Из (11) имеем:

$$\int_{\Gamma_r} |\Phi(t)| dt \leq \int_{\Gamma_r} |w(t)| dt + \int_{\Gamma_r} |T_{\varkappa}(Aw + B\bar{w})(t)| dt.$$

Функция  $Aw + B\bar{w} \in L_q(\bar{D})$  при некотором  $q : 1 < q \leq 2$  (доказательство теоремы 3). При зафиксированном таким образом  $q$ , по лемме 1

$$T_{\varkappa}(Aw + B\bar{w}) \in L_{\gamma}(\Gamma_r) \quad (34)$$

для любых  $\gamma : 1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$  и  $r : 0 < r \leq 1$ .

Отсюда, а также из лемм 1 и 2, используя неравенство Гельдера, будем иметь  $\Phi(z) \in H_1$  и

$$\|\Phi\|_{H_1} \leq \text{const} \|w\|_{H_1}, \quad (35)$$

где константа от  $\Phi$  и  $w$  не зависит.

**Лемма 4.** *Имеет место соотношение:*

$$\lim_{r \rightarrow 1} T_{\varkappa}(Aw + B\bar{w})(re^{i\theta}) = T_{\varkappa}(Aw + B\bar{w})(t) \quad (36)$$

для почти всех  $t = e^{i\theta} \in \Gamma$

◁ (36) непосредственно следует из (30), (33) и теоремы 7. ▷

В силу (36) в (11) можно положить  $z \in \Gamma$ , после чего выполнение (12) становится очевидным.

Первая часть теоремы 5 доказана.

Поскольку по лемме 2  $\Phi(z) \in L_m(\bar{D})$ , а  $\frac{s}{s-1} < m < 2$ , существование и единственность решения  $w \in L_m(\bar{D})$  уравнения (11) при

известной правой части следует из рассуждений [4, с. 293–295]. То, что при этом  $w(z)$  — решение уравнения (11) — хорошо известный факт [4, с. 168–169].

Далее, из

$$\int_{\Gamma_r} |w(t)| dt \leq \int_{\Gamma_r} |\Phi(t)| dt + \int_{\Gamma_r} |T_{\varkappa}(Aw + B\overline{w})(t)| dt,$$

(34), (14) и  $\Phi(z) \in H_1$ , применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\|w\|_{H_1} \leq \|\Phi\|_{H_1} + \text{const} \|w\|_{L_{\lambda}(\overline{D})}$$

при некотором  $\lambda : 1 < \lambda < 2$ , где константа от  $\Phi$  и  $w$  не зависит. Так как  $\|w\|_{L_{\lambda}(\overline{D})} \leq \text{const} \|\Phi\|_{L_{\lambda}(\overline{D})}$  [4, с. 293–295], где константа от  $\Phi$  и  $w$  не зависит, отсюда и из (15) имеем  $w(z) \in H_1(A, B)$  и

$$\|w\|_{H_1} \leq \text{const} \|\Phi\|_{H_1}, \quad (37)$$

где константа от  $\Phi$  и  $w$  не зависит.

Из (35) и (37) следует утверждение об изоморфизме. Из леммы 4 вытекает выполнение (12).

Случай  $H_{\infty}$  рассматривается дословным повторением соответствующих рассуждений из доказательства теоремы 3.

Случай  $BMO$  (без утверждения об изоморфизме) рассмотрен в [2]. Для доказательства изоморфизма так же, как в доказательстве теоремы 3, из (11) получим  $\|\Phi\|_{BMO} \leq \text{const} \|w\|_{BMO}$  и воспользуемся теоремой Банаха.  $\triangleright$

$\triangleleft$  ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Рассмотрим частный случай представления (11) при  $n = 1$ ,  $z_1 = 0$ ,  $\varkappa = 0$ :

$$w(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D \left[ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z \overline{f(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right] d\xi d\eta = \Phi(z), \quad (38)$$

где  $f = Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$ ,  $1 < q < 2$  (доказательство теоремы 3).

Отметим, что в (38)

$$w(0) = \Phi(0), \quad \text{Re } w(t) = \text{Re } \Phi(t), \quad t \in \Gamma. \quad (39)$$

Преобразуем теперь выражение (13):

$$\begin{aligned} L \operatorname{Re} w &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} w(re^{i\theta}) F(\theta) d\theta = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{w(re^{i\theta}) - w(0)\} F(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} w(0) F(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (40)$$

Для дальнейших преобразований нам понадобится следующая

**Лемма 5.** Если  $w(z) \in H_1(A, B)$ ,  $F(\theta) \in L_1(\Gamma)$ , то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{T_{0,1}(Aw + B\bar{w})(re^{i\theta})\} F(\theta) d\theta = 0. \quad (41)$$

◁ Рассмотрим произвольную числовую последовательность  $r_n \rightarrow 1-0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Очевидно, достаточно доказать (41) для такой последовательности. Будем пока считать  $F(\theta) \in C(\Gamma)$ . Из (38) имеем

$$\int_0^{2\pi} |T_{0,1}f(re^{i\theta})| d\theta \leq \text{const}, \quad (42)$$

где константа от  $r$  не зависит. Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . В силу (42) и непрерывности  $F(\theta)$  найдется такое  $\delta > 0$ , что на любом множестве  $e \subset [0, 2\pi]$  с мерой меньше  $\delta$ ,

$$\left| \int_e \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} F(\theta) d\theta \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \quad (43)$$

По теореме Егорова [10, с. 97] существует множество  $E \subset [0, 2\pi]$  такое, что  $\text{mes } E \geq 2\pi - \delta$  и на  $E$   $\operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , равномерно. Итак, выберем по  $\varepsilon > 0$  такое  $E$ , чтобы  $\text{mes } E \geq 2\pi - \delta$ , и такое  $N$ , чтобы для любого  $n > N$

$$\left| \int_E \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} F(\theta) d\theta \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (44)$$

Из (43) и (44) получаем (41) для  $F(\theta) \in C(\Gamma)$ .

Рассмотрим теперь усреднение  $F_\mu \in C^\infty(\Gamma)$  функции  $F$  [11, с. 39]. При  $\mu \rightarrow +0$   $\|F - F_\mu\|_{L_1} \rightarrow 0$ . В силу доказанного для  $F \in C(\Gamma)$  имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} F(\theta) d\theta = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} \{F(\theta) - F_\mu(\theta)\} d\theta. \end{aligned} \quad (45)$$

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как  $T_{0,1}f(r_n e^{i\theta}) \in C(\Gamma)$  при любом  $r_n$  [4, с. 54], аналогично предыдущему по  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что на любом множестве  $e$  с  $\operatorname{mes} e < \delta$  будем иметь для любого  $n$

$$\left| \int_e \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} \{F(\theta) - F_{\mu_n}(\theta)\} d\theta \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (46)$$

при подходящем  $\mu_n > 0$ .

Так же, по теореме Егорова найдется множество  $E \subset [0, 2\pi]$ ,  $\operatorname{mes} E \geq 2\pi - \delta$ , на котором  $T_{0,1}f(r_n e^{i\theta}) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , равномерно, откуда следует существование  $N$  при любом  $n > N$

$$\left| \int_E \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} \{F(\theta) - F_{\mu_n}(\theta)\} d\theta \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (47)$$

Из (45), (46) и (47) получаем утверждение леммы.  $\triangleright$

Продолжим преобразования, начатые в (40). С учетом (38), (39) и (41) будем иметь:

$$\begin{aligned} L \operatorname{Re} w = \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{\Phi(re^{i\theta}) - \Phi(0)\} F(\theta) d\theta + \\ + \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} w(0) F(\theta) d\theta \equiv L^0 \operatorname{Re} \{\Phi - \Phi(0)\} + L^1 \operatorname{Re} w. \end{aligned} \quad (48)$$

Предел в правой части (48) существует для любого  $\Phi \in H_1$  тогда и только тогда, когда  $F \in BMO$  [7, с. 298], и при этом  $L^0$  — непрерывный линейный функционал на  $\operatorname{Re} H_1^0$  (следах на  $\Gamma$  функций из  $H_1^0$ ). Норма этого функционала эквивалентна  $\|F\|_*$  [7, с. 298].

Так как в силу представления (38)  $\operatorname{Re} H_1^0 \equiv \operatorname{Re} H_1^0(A, B)$  (эти множества совпадают), а нормы на этих множествах в силу теоремы 5 эквивалентны, утверждение теоремы 6 теперь непосредственно следует из (48).  $\triangleright$

### Литература

1. Климентов С. Б. Классы Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов, Сев.-Кав. регион. Сер. Ест. науки.—2003.—№ 3.—С. 6–10.
2. Климентов С. Б. Классы  $BMO$  обобщенных аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 1.—С. 27–39.
3. Климентов С. Б. Теорема двойственности для классов Харди обобщенных аналитических функций // В сб.: Комплексный анализ. Теория операторов. Мат. моделирование.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006.—С. 63–73.
4. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
5. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.—Новосибирск: Наука, 1977.—424 с.
6. Климентов С. Б. Краевая задача Римана — Гильберта в классах Харди для обобщенных аналитических функций // Изв. вузов, Сев.-Кав. регион. Сер. Ест. науки.—2004.—№ 4.—С. 3–5.
7. Кусис П. Введение в теорию пространств  $H^p$ .—М.: Мир, 1984.—366 с.
8. Климентов С. Б. Теорема двойственности Фейффермана для обобщенных аналитических функций // Тр. участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, база отдыха Ростовского госуниверситета «Лиманчик», 5–11 сентября 2006 г.—Ростов-на-Дону, 2006.—С. 129–130.
9. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции.—М.: Мир, 1984.—470 с.
10. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной.—М.: Наука, 1974.—480 с.
11. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.—М.: Наука, 1969.—480 с.

КЛИМЕНТОВ СЕРГЕЙ БОРИСОВИЧ  
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет;  
Владикавказ, Институт прикладной математики и  
информатики ВНЦ РАН  
E-mail: sklimentov@pochta.ru

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ И СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю. Ф. Коробейник

В статье изучены некоторые свойства функций, гармонических или субгармонических в области  $Y$  из  $\mathbb{R}^m$ , где  $m \geq 2$ . Основное внимание уделено вопросу о том, когда оператор  $\psi(u, v)$ , где  $\psi$  — дважды непрерывно дифференцируемое отображение  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^m$ , действует из  $Hr(Y) \times Hr(Y)$  в  $Hr(Y) \times Hr(Y)$ . Здесь  $Hr(Y)$  — пространство всех функций гармонических в  $Y$ .

## 1. Постановка задачи

Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$ , и  $C^2(G)$  — множество всех отображений  $u(X) : G \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , непрерывных в  $G$  вместе со своими производными первого порядка и имеющих всюду в  $G$  частные производные вида  $\frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_k^2}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Положим для любого  $u \in C^2(G)$

$$\Delta u(X) := \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_k^2}.$$

Как известно, функция  $u(X)$  из  $C^2(G)$  называется гармонической в области  $G$ , если для любого  $X \in G$   $\Delta u(X) = 0$ , и субгармонической в  $G$ , если для любого  $X \in G$   $\Delta u(X) \geq 0$ . Множество всех гармонических (или субгармонических) в  $G$  функций обозначается далее символом  $Hr(G)$  (соответственно, символом  $SbHr(G)$ ). Ясно, что  $Hr(G)$  — линейное пространство и при любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$  и любых  $u, v \in SbHr(G)$

$$\alpha u + \beta v \in SbHr(G).$$

В настоящей статье основное внимание уделяется некоторым специальным операторам, действующим в  $Hr(G)$  и, в частности, оператору вида  $\psi(u, v)$ , где  $u, v \in C^2(G)$ , а  $\psi$  — дважды непрерывное

отображение из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^m$ . Для любой такой функции  $\psi$  и для любого  $X \in G$  имеем

$$\begin{aligned} \Delta\psi(u, v) &= \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 + \\ &+ \frac{\partial\psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v} \Delta v + 2 \frac{\partial^2\psi}{\partial u \partial v} \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1)$$

Равенство (1) позволит найти условия, при которых оператор  $\psi(u, v)$  действует из  $Hr(G) \times Hr(G)$  в себя (или в  $SbHr(G) \times SbHr(G)$ ). В §2 оператор  $\psi$  исследуется в плоских областях  $G$  (т. е. при  $m = 2$ ). Этот случай более прост и является в определенном смысле исключительным в силу хорошо известной связи между гармоническими и аналитическими в области  $G$  функциями. В этом же параграфе приводятся некоторые результаты для оператора частного дифференцирования конечного и бесконечного порядка. В §3, также при  $m = 2$ , исследуется вопрос о связи между представительными подпространствами и представляющими системами (соответствующие определения приводятся ниже) в пространстве  $Hr(G)$  и пространстве Фреше  $A(G)$  аналитических в области  $G$  функций. Заключительное замечание (§4) относится к многомерной ситуации ( $m \geq 2$ ).

## 2. Случай $m = 2$

Запишем соотношение (1) в двумерной ситуации. Имеем для любых  $u, v \in C^2(G)$ , для любого  $X = (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Delta(\psi(u, v))(X) &= \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] + \\ &+ \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2\psi}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial\psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v} \Delta v. \end{aligned} \quad (2)$$

Если же  $u, v \in Hr(G)$ , то

$$\begin{aligned} \Delta(\psi(u, v))(X) &= \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] + \\ &+ \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2\psi}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3)$$



Назовем точку  $X_0 = (x_0, y_0)$  из  $G$  особой или критической точкой функции  $u(X)$  из  $C^{(2)}(G)$ , если  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0$ , где, например,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 := \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0}.$$

Множество  $T_G(u)$  всех особых точек функции  $u(X)$  всегда замкнуто. Пусть  $R_G(u) := G \setminus T_G(u)$  — множество всех точек  $G$ , не являющихся особыми точками  $u(X)$  (будем называть их регулярными). Ясно, что  $R_G(u)$  — открытое множество, причем  $G = R_G(u) \cup T_G(u)$ . Непосредственно из равенства (3) следует

**Предложение 1.** Если  $u, v \in Hr(G)$ , то

$$\begin{aligned} \psi(u, v) \in Hr(G) &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in R_G(u), \\ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right)(X) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] &+ \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}(X) \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \\ + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}(X) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Назовем пару функций  $u, v$  из  $Hr(G)$  сопряженной гармонической парой (с. г. п.) в  $G$ , если всюду в этой области эти функции удовлетворяют системе уравнений Коши — Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Очевидно, что если  $u, v$  — с. г. п. в  $G$ , то  $T_G(u) = T_G(v)$  (и, следовательно,  $R_G(u) = R_G(v)$ ), причем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Из соотношения (4) получаем:

**Предложение 2.** Пусть  $u, v$  — с. г. п. в  $G$ . Тогда

$$\psi(u, v) \in Hr(G) \Leftrightarrow \forall X \in R_G(u), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(X) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}(X) = 0.$$

**Следствие.** Пусть  $u, v$  — с. г. п. в  $G$  и  $\psi(u, v) = f_1(u) \times f_2(v)$ , где  $f_k$  — дважды непрерывно дифференцируемые функции в  $\mathbb{R}$  ( $k = 1, 2$ ). Тогда

$$a) f_1(u) \cdot f_2(v) \in Hr(G) \Leftrightarrow \forall X \in R_G(u),$$

$$f_1''(u(X))f_2(v(X)) + f_1(u(X))f_2''(v(X)) = 0;$$

$$b) f_1(u) \cdot f_2(v) \in SbHr(G) \Leftrightarrow \forall X \in R_G(u),$$

$$f_1''(u(X))f_2(v(X)) + f_1(u(X))f_2''(v(X)) \geq 0.$$

Если, в частности, при  $k = 1, 2$   $f_k(t)$  — выпуклая (вниз) неотрицательная функция в  $\mathbb{R}$ , то  $f_1(u) \cdot f_2(v) \in SbHr(G)$  для любой с. г. п.  $u, v$  в  $G$ .

Предположим теперь, что  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(X) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}(X) = 0$  для любого  $X \in G$ . Так, например, будет, если  $\psi(u, v) = au(X)v(X) + bu(X) + cv(X)$ , где  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . В этом случае для любой с. г. п.  $u, v$  в  $G$ , по следствию предложения 2,  $\psi(u, v) \in Hr(G)$ .

Пусть теперь по-прежнему  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(X) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}(X) = 0$ , при любом  $X \in G$ , а  $u, v$  — функции из  $Hr(G)$ , не обязательно составляющие гармоническую пару. По предложению 1

$$auv + bu + cv \in Hr(G) \Leftrightarrow \forall X \in R_G(u), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Пусть функция  $v(X)$  из  $Hr(G)$  зафиксирована, а  $u(X)$  — произвольная гармоническая в  $G$  функция. Тогда, применяя, как и в п. 3 §1 статьи [1], теорию линейных уравнений первого порядка в частных производных [2], получаем такой результат:

**Предложение 3.** Пусть  $u, v \in Hr(G)$  и в  $G$  существует функция  $w(X)$ , составляющая с. г. п. в  $G$  с  $v$  (так, например, будет, если область  $G$  односвязна). Тогда

1) если  $v(X) \equiv 1$ , то при любых  $a, b, c \in \mathbb{R}$   $adu + bu + cd \in Hr(G)$ ;

2) если функция  $v$  отлична от постоянной в  $G$ , то  $auv + bu + cv \in Hr(G) \Leftrightarrow u = F(w)$ , где  $F$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция (в  $\mathbb{R}$ ).

Рассмотрим еще один частный случай, когда  $\psi(u, v) = (u \cdot v)^\alpha$ , где  $\alpha \geq 2$ , и  $v, u$  — с. г. п. в  $G$ . Тогда [1, с. 27]

$$\Delta((u \cdot v)^\alpha) = \alpha(\alpha - 1)(uv)^{\alpha-2}|h(z)|^2|h'(z)|^2,$$

где  $h(z) := u(X) + iv(X) \in A(G)$ . Покажем, что если функция  $u(X)$  (а, следовательно, и  $v(X)$ ) отлична от постоянной, то  $(v \cdot u)^\alpha \notin Hr(G)$ .

Положим  $N_G(u) := \{X \in G : u(X) = 0\}$ ,  $N_G(v) = \{x \in G : v(X) = 0\}$ . Очевидно, что оба множества  $N_G(u)$  и  $N_G(v)$  замкнуты. Положим еще  $G_2 := G \setminus D$ , где  $D = N_G(u) \cup N_G(v) \cup T_G(u)$  — замкнутое подмножество области  $G$ . Тогда  $G_2$  — непустое открытое множество, причем при любом  $X \in G_2$ ,  $\Delta((uv)^\alpha)(X) \neq 0$ . Следовательно,  $(uv)^\alpha \notin Hr(G)$ .

Заметим, что доказательство соотношения  $(uv)^\alpha \notin Hr(G)$  имеется на с. 27 (в правой ее колонке), но оно проведено некорректно. Остальные результаты пункта 4 §1 статьи [1], в котором рассмотрен случай  $\psi(u, v) = (u \cdot v)^\alpha$ ,  $\alpha \geq 2$  (в том числе предложение 7 и пример после него), на наш взгляд, доказаны корректно и потому остаются в силе. В частности, в [1, п. 7, § 1] показано, что любой линейный оператор в частных производных конечного порядка с постоянными коэффициентами действует из  $Hr(G)$  в  $Hr(G)$  и непрерывен, если пространство  $Hr(G)$  наделить топологией равномерной сходимости на каждом компакте  $G$  последовательности функций и любых их частных производных (в этой топологии  $Hr(G)$  — пространство Фреше).

Переходя к линейным операторам бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$L_\infty u(X) := \sum_{\alpha+\beta=0}^{\infty} c_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} u(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, \quad (6)$$

где  $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$  при любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ , дадим вначале такое определение. Следуя терминологии, принятой в случае операторов в пространствах аналитических или бесконечно дифференцируемых функций, будем говорить, что оператор (6) применим к  $Hr(G)$  по топологии  $Hr(G)$ , если для любой гармонической в области  $G$  функции ряд  $\sum_{\alpha+\beta=0}^{\infty} c_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} u(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$  и любой ряд, полученный его почленным дифференцированием по какой-либо переменной  $x, y$  (или по обоим, и притом какое угодно число раз), сходится равномерно на каждом компакте  $G$ . Нетрудно видеть, что если оператор  $L_\infty$  применим к  $Hr(G)$  по топологии  $Hr(G)$ , то он действует из  $Hr(G)$  в  $Hr(G)$ . Однако, в отличие от пространства  $A(G)$  аналитических в  $G$  функций, вопросы применимости по топологии  $Hr(G)$  оператора (6) практически не изучались (типичные для  $A(G)$  результаты можно найти, например, в [3, 4]).

В данной статье мы ограничимся одним (по-видимому, первым результатом) в этом направлении для пространства  $Hr(G)$ .

**Предложение 4.** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^2$  и оператор (6) удовлетворяет условию

$$\lim_{\alpha+\beta \rightarrow 0} |c_{\alpha+\beta}|^{\frac{1}{\alpha+\beta}} ((\alpha)! \beta!)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = 0. \quad (7)$$

Тогда оператор  $L_\infty$  применим к  $Hr(G)$  по топологии  $Hr(G)$ .

◁ Для доказательства рассмотрим вначале любой замкнутый кружок  $K_0$ , принадлежащий  $G$ . Из известного интегрального представления функции, гармонической внутри круга  $K_0$  и непрерывной со всеми своими частными производными в  $K_0$ , (см., например, [5]) легко выводится оценка

$$\forall X \in K_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, \left| \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(X) \right| \leq (d_0)^{\alpha+\beta} \alpha! \beta!, \quad d_0 = d_0(K_0).$$

Используя эту оценку и учитывая равенство (7), заключаем, что ряд в правой части (6), также как и ряды, полученные его почленным дифференцированием по каждой переменной любое число раз, сходится равномерно на  $K_0$ . Для завершения доказательства остается применить лемму Гейне — Бореля. ▷

Пока неизвестно, будет ли условие (7) необходимым для применимости  $L_\infty$  к  $Hr(G)$  по топологии  $Hr(G)$ .

По-видимому, наиболее интересным представителем класса операторов  $L_\infty$ , действующих в  $Hr(G)$ , является оператор

$$M_\infty^\Delta u := \sum_{\alpha=0}^{\infty} d_\alpha (\Delta u)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0, \quad d_\alpha \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Нам, однако, неизвестны работы, в которых изучалась бы применимость оператора  $M_\infty^\Delta$  к  $Hr(G)$  по топологии  $Hr(G)$  или разрешимость уравнения

$$M_\infty^\Delta u = v(x, y), \quad (9)$$

в котором  $v$  — заданная, а  $u$  — неизвестная функция из  $Hr(G)$ . По-видимому, это связано с наличием ряда принципиальных трудностей, возникающих при переходе от пространства  $A(G)$  к  $Hr(G)$  и от одномерного линейного дифференциального оператора бесконечного порядка к многомерному. Первая из них заключается в том,

что при таком переходе в пространстве  $Hr(G)$  не получается обычная (при рассмотрении подобных операторов бесконечного порядка в  $A(G)$ ) реализация сопряженного оператора как оператора умножения на символ  $C(x, y) := \sum_{\alpha+\beta=0}^{\infty} c_{\alpha,\beta} x^{\alpha} y^{\beta}$  оператора  $L_{\infty}$ .

Это прежде всего объясняется своеобразием сопряженного к  $Hr(G)$  пространства, известного еще с середины 50-х годов прошлого века [6]. Например, если  $G$  — ограниченная односвязная область в  $\mathbb{C}$ , то, согласно [6],  $(Hr(G))'$  реализуется как пространство функций, гармонических на  $CG$ , с топологией индуктивного предела  $(Hr(G))' = \text{ind}_s Hr(G_s)$ , где при любом  $s \geq 1$   $G_s$  — открытое подмножество  $CG$  с границей, состоящей из конечного числа жордановых кривых и содержащее бесконечно удаленную точку. При этом  $G_s \supset \overline{G_{s+1}}$ ,  $CG = \bigcap_{s=1}^{\infty} G_s$ . В свою очередь, топология на каждом пространстве  $Hr(G_s)$  определяется как топология равномерной сходимости на компактах  $\overline{D_{s,k}}$  (в  $\overline{\mathbb{C}}$ ) открытого множества  $G_s$  таких, что  $D_{s,k}$  — открытые множества, граница которых состоит из конечного числа жордановых кривых таких, что при любых  $s, k \geq 1$   $\overline{D_{s,k}} \subset D_{s,k+1}$  и  $G_s = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{s,k}$ . Кроме того, считаем, что если  $\infty \in G_s$  (так будет, например, если  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$ ), то при любом  $u \in Hr(G)$   $u(X) = \overline{o}(-\ln |X|)$ . Двойственность (по Тилману [6]) пространств  $Hr(G)$  и  $(Hr(G))'$  устанавливается с помощью билинейной формы

$$x^*(X) \leftrightarrow x'(\xi) = x^*[-\ln |X - \xi|],$$

где

$$x^*(X) = (x^*, X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{\partial x}{\partial n} x' - x \frac{\partial x'}{\partial n} \right) ds.$$

Здесь  $x(X) \in Hr(G)$ ,  $x^* \in (Hr(G))' = Hr(\overline{\mathbb{C}} \setminus G)$ , а  $\gamma$  — произвольный спрямляемый контур, разделяющий особенности функций  $x(\xi)$  и  $x'(\xi)$ .

Однако, описанная двойственная связь оказалась пока малоэффективной в рассматриваемом круге вопросов, так как она не позволила получить достаточно удобную для исследования реализацию сопряженного оператора.

Перед тем, как указать вторую принципиальную трудность, отметим, что уравнение (9) является частным случаем уравнения вида

$$\mathcal{L}(T)u := \sum_{k=0}^{\infty} b_k T^k u = v, \quad (10)$$

в котором  $T$  — линейный непрерывный оператор в некотором пространстве Фреше  $H$ . Такое уравнение (в различных пространствах аналитических и бесконечно дифференцируемых функций одного переменного) изучалась в ряде работ автора и его учеников (А. В. Абанина, С. Н. Мелихова и др.; см., например, работы [7–9]). При этом во всех этих работах существенно использовалось предположение о том, что при любом  $\lambda$  из  $\mathbb{C}$  каждое пространство  $E_\lambda = \{x \in H : Tx = \lambda x\}$  одномерно:  $E_\lambda = \{\alpha x_\lambda : \alpha \in \mathbb{C}, x_\lambda \neq 0\}$ , причем семейство  $\{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$  является абсолютно суммирующим в  $H$ . Последнее означает, что для любого элемента  $x$  из  $H$  найдется семейство элементов из  $H$  вида  $\{\alpha_\lambda x_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ , абсолютно суммируемое в  $H$  к  $x$ . Это определение появилось, по-видимому, в работе [10]. При этих предположениях можно ввести (так названное автором)  $X_\lambda$ -преобразование:  $\psi(x_\lambda) = g(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , рассмотренное, по-видимому, впервые в работе [11]. Это преобразование позволяет получить реализацию сопряженного к  $\mathcal{L}(T)$  оператора в виде оператора умножения на символ, что в ряде случаев дает возможность найти критерии сюръективности оператора  $\mathcal{L}(T)$  в  $H$  и описать его ядро  $\mathcal{L}(T)^{-1}(0)$ . Возможно, что такая методика применима (с определенными модификациями) и в случае, когда размерность  $r_\lambda$  каждого подпространства  $E_\lambda$  пространства  $H$  конечна, причем  $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} r_\lambda < +\infty$ . Именно такая ситуация может возникнуть для простейших линейных операторов в пространстве  $H_r(G)$ . Например, при любом  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ , функции из  $H_r(G)$ :  $g_\lambda^{(1)}(x, y) := e^{\lambda x} \sin \lambda y$ ,  $g_\lambda^{(2)}(x, y) := e^{\lambda x} \cos \lambda y$  линейно независимы в  $H_r(G)$  и являются собственными элементами линейного непрерывного в  $H_r(G)$  оператора  $D_1 u := \frac{\partial u}{\partial x}$ . Следовательно, для любого  $\lambda \neq 0$  из  $\mathbb{R}$  корневое подпространство  $(D_1 - \lambda E)^{-1}(0) \cap H_r(G)$  содержит функции  $g_\lambda^{(k)}(x, y)$ ,  $k = 1, 2$ , и потому его размерность не меньше, чем 2. Далее, функции из  $H_r(G)$   $g_\lambda^{(k)}(x, y)$  и  $h_\lambda^{(k)}(x, y)$ , где  $k = 1, 2$ ,  $h_\lambda^{(1)}(x, y) := e^{-\lambda x} \sin \lambda y$ ,  $h_\lambda^{(2)}(x, y) := e^{-\lambda x} \cos \lambda y$ , линейно независимы (при  $\lambda \neq 0$ ) и являются

собственными элементами оператора  $D_2 u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , причем размерность корневого подпространства  $(D_2 - \gamma E)^{-1}(0) \cap H_r(G)$  при  $\gamma = \lambda^2$  (для любого  $\lambda \neq 0$ ) не меньше, чем 4, и т. д. В подобной ситуации оператор  $\mathcal{L}(T)u$  даже в простейшем случае оператора конечного порядка  $\mathcal{L}_n(T)u = \sum_{k=1}^n b_k T^k u$ , насколько нам известно, вообще не исследовался.

Остается надеяться на то, что в обозримом будущем описанные трудности будут преодолены, и будет создана теория линейных операторных уравнений бесконечного порядка в  $Hr(G)$ , по крайней мере, столь же содержательная, как в случае пространства  $A(G)$  (по поводу последнего см., например, монографию [7]).

### 3. Представляющие системы в $Hr(G)$

Приведем вначале несколько общих определений, используемых в этом параграфе.

Пусть  $H$  — полное отделимое локально выпуклое пространство (ПОЛВП) и  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность некоторых его подпространств. Назовем, следуя [12], эту последовательность абсолютно представляющей системой подпространств (АПСП) в  $H$ , если для любого  $x$  из  $H$  найдется абсолютно сходящийся в  $H$  ряд вида  $\sum_{k=1}^\infty y_k$ ,  $y_k \in H_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сумма которого равна  $x$ . Если все пространства  $H_k$  одномерны, т. е.  $H_k = \{\alpha x_k : \alpha \in \Phi\}$ , где  $\Phi = \mathbb{R}$  или  $\Phi = \mathbb{C}$ , то определение АПСП в  $H$  совпадает с введенным ранее в [13] определением абсолютно представляющей системы (АПС) элементов  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  в  $H$  как некоторой последовательности ненулевых элементов  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  из  $H$  такой, что для любого  $x$  из  $H$  найдется абсолютно сходящийся в  $H$  ряд  $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ , где при любом  $k \geq 1$ ,  $a_k \in \Phi$ .

В данном параграфе приводятся пара результатов о связи АПСП и АПС в пространствах  $A(G)$  и  $Hr(G)$ , причем для простоты изложения предполагается, что область  $G$  односвязна в  $\mathbb{C}$ .

Пусть  $\Phi := \{f_k(z)\}_{k=1}^\infty$  — АПС в  $H(G)$ . Тогда при любом  $k \geq 1$ ,

$$f_k(z) = u_k(x, y) + i v_k(x, y),$$

где  $u_k, v_k \in Hr(G)$  и  $(u_k, v_k)$  — с. г. п. в  $G$ . Положим для любого

$k \geq 1$

$$\mathcal{E}_k = \{\alpha u_k + \beta v_k : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Ясно, что  $\mathcal{E}_k$  — подпространство  $Hr(G)$ . Пусть  $u(x, y)$  — произвольная функция из  $Hr(G)$  и  $v(x, y)$  — сопряженная с нею (в  $G$ ) гармоническая функция. Тогда  $f_0(z) := u(x, y) + iv(x, y) \in A(G)$  и существует абсолютно сходящийся к  $f_0(z)$  в  $A(G)$  ряд вида  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(z)$ , где при любом  $k \geq 1$   $c_k = \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C}$ . Отсюда, для любого  $z = x + iy \in G$ ,

$$\begin{aligned} u(x, y) = \operatorname{Re} f_0(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} (c_k f_k(z)) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k u_k(x, y) - \beta_k v_k(x, y)] = \sum_{k=1}^{\infty} y_k, \end{aligned}$$

где при любом  $k \geq 1$ ,  $y_k \in \mathcal{E}_k$ , и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$  сходится абсолютно в  $Hr(G)$ . Следовательно,  $\{\mathcal{E}_k\}_{k=1}^{\infty}$  — АПСП в  $Hr(G)$ .

Пусть теперь  $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$  — АПС в  $Hr(G)$ . Для каждого  $k \geq 1$  найдем сопряженную с  $u_k$  гармоническую функцию  $v_k^0$  по известной формуле

$$v_k^0(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x} dy \right). \quad (11)$$

В этой формуле фигурирует криволинейный интеграл второго рода по спрямляемой кривой в  $G$ , соединяющей произвольно зафиксированную точку  $(x_0, y_0)$  и текущую точку  $(x, y)$  области  $G$ . Функцию  $v_k^0(x, y)$ , определяемую формулой (11), будем называть канонической гармонической функцией, сопряженной с  $u_k$  в  $G$ . Из этой формулы следует, что если  $u(x, y)$  — любая функция из  $Hr(G)$  и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x, y)$ , где для каждого  $k \geq 1$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$ , сходится абсолютно

но (к  $u$ ) по топологии  $Hr(G)$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k^0(x, y)$  также сходится абсолютно по топологии  $Hr(G)$ . Пусть  $v_0(x, y)$  — его сумма. Тогда  $v_0(x, y) \in Hr(G)$  и  $u, v_0$  — с. г. п. в  $G$ . Если  $f(z)$  — произвольная функция из  $A(G)$ , то  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , где  $u, v \in Hr(G)$  и



$u, v$  — с. г. п. в  $G$ . Тогда, как известно,  $v(x, y) = v_0(x, y) + d$ , где  $d \in \mathbb{R}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} f(z) &= id + iv_0(x, y) + u(x, y) = \\ &= id + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(u_k(x, y) + iv_k^0(x, y)) = id + \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k^0(z), \end{aligned}$$

где  $f_k^0(z) := u_k(x, y) + iv_k^0(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Отсюда  $\{i; \{f_k^0(z)\}_{k=1}^{\infty}\}$  — АПС в  $A(G)$ .

Сформулируем полученные в итоге результаты.

**Предложение 5.** Пусть  $G$  — односвязная область в  $\mathbb{C}$ . Тогда

1) если  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  — АПС в  $A(G)$ ,  $f_k(z) = u_k(x, y) + iv_k(x, y)$  и  $\mathcal{E}_k := \{\alpha u_k(x, y) + \beta v_k(x, y) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то  $\{\mathcal{E}_k\}_{k=1}^{\infty}$  — АПСП в  $Hr(G)$ ;

2) если  $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$  — АПС в  $Hr(G)$  и для любого  $k \geq 1$   $v_k^0(x, y)$  — каноническая гармоническая в  $G$  функция, сопряженная с  $u_k(x, y)$  в  $G$ , а  $f_k^0(z) := u_k(x, y) + iv_k^0(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то  $A := \{i, \{f_k^0(z)\}_{k=1}^{\infty}\}$  — АПС в  $A(G)$ . При этом для любой функции  $f(z)$  из  $A(G)$  найдется сходящийся в  $A(G)$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k^0(z) + b_0 i$ , сумма которого равна  $f(z)$ , а коэффициенты  $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$  вещественнозначны.

Этот результат является, по-видимому, первым в теории АПСП и АПС в  $Hr(G)$ , которая до сих пор, насколько нам известно, в отличие от теории АПСП и АПС в  $A(G)$ , вообще не рассматривалась. И здесь уже получение даже начальных ее фактов (например, получение критериев того, что общие или конкретные последовательности подпространств являются АПСП или АПС в  $H_r(G)$ ) сталкиваются с уже знакомой трудностью — отсутствием достаточно удобной реализации пространства, сильно сопряженного к  $Hr(G)$ .

#### 4. Замечание о многомерном случае

До сих пор основное внимание уделялось случаю, когда  $m = 2$ . Однако, соотношение (1) позволяет получить ряд результатов для многомерного случая. Часть из них, соответствующая ситуации, когда  $\phi(u, v) = f(u)g(u)$ , приведена в §2 статьи [1]. Исследованию многомерного случая ( $m \geq 3$ ) предполагается посвятить отдельную статью. Здесь же мы ограничимся лишь формулировкой одного простого утверждения, непосредственно вытекающего из соотношения (1).

**Предложение 6.** Пусть  $m \geq 2$  и  $g_1(t), g_2(t)$  — дважды непрерывно дифференцируемые выпуклые (вниз) отображения из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ . Тогда оператор  $\Delta(g_1(u) + g_2(v))$  действует из  $Hr(G) \times Hr(G)$  в  $SbHr(G)$ .

### Литература

1. Коробейник Ю. Ф. О некоторых операциях с гармоническими и субгармоническими функциями // Вестник УГАТУ.—2007.—Т. 9, № 3(21).—С. 24–30.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.—М.: ГИФМЛ, 1952.—416 с.
3. Коробейник Ю. Ф. О применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 3.—С. 549–564.
4. Коробейник Ю. Ф. О применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка к некоторым классам аналитических функций // Сиб. мат. журн.—1973.—Т. 14, № 4.—С. 883–888.
5. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций.—М.: ГИТТЛ, 1950.
6. H. G. Tillman Dualität in der Potenzialtheorie // Portugal. Math.—1954.—V. 13.—Р. 55–86.
7. Коробейник Ю. Ф. О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных операторных уравнений.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2005.—244 с.
8. Абанин А. В. Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1995.—268 с.
9. Мелихов С. Н. Правые обратные к операторам представления рядами экспонент и свертки: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Уфа, 2003.—33 с.
10. Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие семейства и реализация сопряженного пространства // Изв. вузов. Математика.—1990.—№ 2.—С. 68–76.
11. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Реализация сопряженного пространства с помощью обобщенного преобразования Фурье — Бореля. Приложения // Комплексный анализ и мат. физика.—Красноярск: ИН СО РАН СССР, 1988.—С. 62–73.
12. Коробейник Ю. Ф. О представляющих системах подпространств // Мат. заметки.—1985.—Т. 38, вып. 5.—С. 741–755.
13. Коробейник Ю. Ф. Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сборн.—1975.—Т. 97, № 2, С. 193–229.

КОРОБЕЙНИК Юрий Федорович  
 Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет;  
 Владикавказ, Институт прикладной математики и  
 информатики ВНИЦ РАН  
 E-Mail: kor@math.rsu.ru

# ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ И. Н. ВЕКУА

**Е. В. Тюриков**

Изучается обобщенный геометрический аналог смешанной граничной задачи А. Л. Гольденвейзера о реализации напряженного состояния равновесия безмоментного сферического купола.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $S_\nu$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{2n})$  — строго внутренняя часть замкнутой выпуклой поверхности  $S_0$  класса регулярности  $W^{3,p}$   $p > 2$ , с кусочно-гладким краем  $L = \bigcup_{j=1}^{2n} L_j$ , состоящим из конечного числа дуг  $L_j$  класса регулярности  $C^{1,\varepsilon}$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , и содержащим  $2n$  угловых точек  $c_j$  с внутренними углами  $\nu_j \pi$  ( $0 < \nu_j < 2$ ), соответственно, образованными векторами  $\vec{s}_j^{(1)}$ ,  $\vec{s}_j^{(2)}$  с началом в точке  $c_j$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ) и задающими направления дуг, сходящихся в этой точке. Здесь точки  $c_j$  и  $c_{j+1}$  — начало и конец дуги  $L_j$  ( $j = 1, \dots, 2n-1$ ), соответственно, а началом и концом дуги  $L_{2n}$  являются точки  $c_{2n}$  и  $c_1$ . Рассмотрим следующую задачу А: существуют ли бесконечно малые (б. м.) изгибания поверхности  $S_\nu$ , совместимые с граничным условием

$$\delta k_n = \sigma_i(s) \text{ на } L_{2i-1}; \quad \delta \tau_g = \tilde{\sigma}_i(s) \text{ на } L_{2i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где  $\sigma_j(s)$ ,  $\tilde{\sigma}_i(s)$  — наперед заданные гельдеровы функции,  $s$  — натуральный параметр,  $\delta k_n$  и  $\delta \tau_g$  — вариации нормальной кривизны и геодезического кручения поверхности  $S_\nu$  в направлении края. Как это следует из [1], задача А есть обобщенный геометрический аналог смешанной граничной задачи о реализации напряженного состояния равновесия *безмоментного сферического купола*, поставленной А. Л. Гольденвейзером [2, гл. 17]. Цель работы — изучить задачу А для случая кусочно-гладкого края  $L$ , все угловые точки которого есть омбилические точки поверхности  $S_\nu$ .

Следуя [3], отображим поверхность  $S_\nu$  с помощью сопряженно изометрической системы координат  $(u', u^2)$  на ограниченную в плоскости  $(u^1, u^2)$  область  $D_\theta$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_1)$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{2n} \Gamma_j$ , содержащей угловые точки  $q_i$  с внутренними углами  $\theta_j \pi$  ( $0 < \theta_j < 2$ ,  $j = 1, \dots, 2n$ ).

Здесь набор  $\theta \equiv \theta(\nu)$  вполне определен выбором направлений  $\bar{s}_j^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) в точках  $c_j$ , причем  $m - 1 < \theta_j < m$ , если  $m - 1 < \nu_j < m$  ( $m = 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, 2n$ ). Тогда система уравнений б. м. изгибаний поверхности  $S_\nu$  в вариациях  $\delta b_{ij}$  коэффициентов второй основной формы  $b_{ij} du^i du^j$  принимает вид

$$\partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) - B(\zeta) \bar{w}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in D_\theta, \quad (2)$$

$\zeta = u^1 + iu^2$ ,  $i^2 \equiv -1$ ,  $\partial_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} + i \frac{\partial}{\partial u_2} \right)$  — оператор комплексного дифференцирования,  $w = g^{-1/2}(\delta b_{22} + i \delta b_{12})$  — функция изгибаний,  $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ ,  $g_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — коэффициенты метрической формы поверхности  $S_\nu$ ,  $B(\zeta)$  — функция класса  $L_p(D_\theta)$ ,  $p > 2$ . Внешняя связь вида (1) при б. м. изгибаниях поверхности  $S_\nu$  порождает для комплексной функции изгибания условие

$$\operatorname{Re}\{\lambda(\zeta)w(\zeta)\} = g^{-1/2}\sigma(\zeta), \quad \zeta \in \bigcup_{j=1}^{2n} \Gamma_j, \quad (3)$$

где

$$\lambda(\zeta) = \begin{cases} \left( \frac{d\zeta}{ds} \right)^2, & \zeta \in \Gamma_{2i-1}, \\ \frac{d\zeta}{ds} \frac{d\zeta}{dn}, & \zeta \in \Gamma_{2i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $d\zeta/ds \equiv s_1(\zeta) + is_2$ ,  $s_i$  ( $i = 1, 2$ ) — координаты касательного к  $\Gamma$  орта,  $d\zeta/dn \equiv n_1(\zeta) + in_2(\zeta)$ ,  $n_i$  ( $i = 1, 2$ ) — координаты орта направления на плоскости  $\zeta$ , являющегося образом направления на поверхности  $S_0$ , ортогонального направлению кривой  $L$ ,  $\sigma(\zeta)$  — заданная на  $\Gamma$  функция, допускающая разрывы первого рода в точках  $\zeta_j$  и гильбертова на каждой из замкнутых дуг  $\Gamma_j$ . При этом точки  $\zeta_j$  и  $\zeta_{j+1}$  есть начало и конец дуги  $\Gamma_j$  ( $j = 1, \dots, 2n - 1$ ) соответственно, а концом дуги  $\Gamma_{2n}$  является точка  $\zeta_1$ . Задача (2), (3) есть задача Римана — Гильберта (задача R) с коэффициентом  $\bar{\lambda}(\zeta)$  граничного условия, имеющим разрывы 1-го рода в точках  $\zeta_j$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ) комплексной плоскости  $\zeta = u^1 + iu^2$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть угловая точка  $c_j$  — омбилическая (или *сферическая*) точка поверхности  $S_\nu$ , т. е. точка, в которой нормальная кривизна поверхности не зависит от направления на поверхности в этой точке. Тогда, на основании свойства отображения поверхности  $S_\nu$  на плоскость  $(u^1, u^2)$ , задаваемого выбранной сопряженно изометрической системой координат, имеем [3, гл. 2]:

- 1)  $\theta_j = \nu_j$  в соответствующей точке  $q_j$ ;
- 2) вектор  $\bar{s} = (s_1(\zeta_j), s_2(\zeta_j))$  ортогонален вектору  $\bar{n} = (n_1(\zeta_j), n_2(\zeta_j))$ .

## 2. Вспомогательная задача Римана — Гильберта в классе ограниченных решений

Пусть  $\mu(\zeta) = \mu_1(\zeta) + i\mu_2(\zeta)$ ,  $\tau(\zeta) = \tau_1(\zeta) + i\tau_2(\zeta)$  — гельдеровы на каждой из дуг  $\Gamma_j$  функции, имеющие разрывы 1-го рода в точках  $\zeta_j$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ),  $|\mu(\zeta)| = |\tau(\zeta)| = 1$ ,  $\bar{\ell}_{(\pm j)}$  и  $\bar{t}_{(\pm j)}$  — предельные значения векторных полей  $\bar{\ell} = \{\mu_1(\zeta), \mu_2(\zeta)\}$  и  $\bar{t} = \{\tau_1(\zeta), \tau_2(\zeta)\}$  в точке  $\zeta_j$  соответственно,  $\varphi_j$  и  $\psi_j$  — величины углов  $(\bar{\ell}_{(-j)}, \bar{\ell}_{(+j)})$ ,  $(\bar{t}_{(-j)}, \bar{t}_{(+j)})$  между векторами  $\bar{\ell}_{(\pm j)}$  и  $\bar{t}_{(\pm j)}$ , соответственно,  $-\pi \leq \varphi_j, \psi_j \leq \pi$ , причем отсчет производится от  $\bar{\ell}_{(-j)}$  ( $\bar{t}_{(-j)}$ ) до  $\bar{\ell}_{(+j)}$  ( $\bar{t}_{(+j)}$ ), а угол считается положительным, если отсчет ведется против хода часов. Следуя [4], введем в рассмотрение класс векторных полей  $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}^{r, q}(\Gamma)$  ( $r + q = 2n$ ,  $\alpha = (i_1, \dots, i_r)$ ,  $\beta = (k_1, \dots, k_q)$ ), удовлетворяющих следующим условиям:

1) для любого поля  $\bar{\ell} \in \mathcal{L}_{\alpha, \beta}^{r, q}(\Gamma)$  в точках гладкости  $\Gamma$  угол между вектором  $\bar{\ell}$  и вектором  $\bar{s}$ , направленной касательной к  $\Gamma$ , удовлетворяет условию  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , причем отсчет угла производится от  $\bar{\ell}$  к  $\bar{s}$  против хода часов.

2) В угловых точках выполняются неравенства

$$0 \leq (\bar{\ell}_{(-j)}, \bar{s}_{(-j)}) \leq \pi, \quad 0 \leq (\bar{\ell}_{(+j)}, \bar{s}_{(+j)}) \leq \pi,$$

$$|\varphi_j| \neq \pi \quad (j = 1, \dots, 2n).$$

3) Если  $\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{i_r}$  — произвольно отмеченные точки ( $1 \leq i_r \leq 2n$ ,  $1 \leq r \leq 2n$ ),  $\zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_q}$  — оставшиеся точки из числа  $\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}$  ( $r + q = 2n$ ), то

$$0 \leq \varphi_j < \pi, \quad j = i_1, \dots, i_r \quad (1 \leq i_r \leq 2n);$$

$$-\pi < \varphi_j < 0, \quad j = k_1, \dots, k_q \quad (1 \leq k_n \leq 2n).$$

Рассмотрим граничную задачу Римана — Гильберта (задача R)

$$\operatorname{Re}\{\lambda(\zeta)w(\zeta)\} = 0, \quad \zeta \in \Gamma = \bigcup_{j=1}^{2n} \Gamma_j, \quad (5)$$

где

$$\lambda(\zeta) = \begin{cases} \mu^2(\zeta), & \zeta \in \Gamma_{2i-1}, \\ \mu(\zeta)\tau(\zeta), & \zeta \in \Gamma_{2i}, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (6)$$

$\mu(\zeta) = \mu_1(\zeta) + i\mu_2(\zeta)$ ,  $\tau(\zeta) = \tau_1(\zeta) + i\tau_2(\zeta)$  для уравнения (2) в области  $D_\theta$ . Будем рассматривать также задачу  $R'$  для уравнения (2) с граничным условием (5), в котором

$$\lambda(\zeta) = \begin{cases} \mu(\zeta)\tau(\zeta), & \zeta \in \Gamma_{2i-1}, \\ \mu^2(\zeta), & \zeta \in \Gamma_{2i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (6')$$

Задачу  $R'$  назовем *смещенной* к R задачей, а граничное условие (5), (6') — *смещенным* граничным условием.

Согласно [5], индекс  $\varkappa$  граничного условия (5) в классе ограниченных решений (класс  $H^0$ ) определяется соотношением

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{2n} \varkappa_j, \quad (7)$$

где  $\varkappa_j = \left[\frac{\omega_j}{2\pi}\right]$ ,  $\omega_j$  — скачок аргумента функции  $\Lambda(\zeta) = \bar{\lambda}(\zeta)/\lambda(\zeta)$  в точке разрыва  $\zeta_j$ , выбранный известным образом (см. также [6, гл. 1]) при положительном обходе контура  $\Gamma$  из точки  $c_1$  и взятый с обратным знаком,  $[a]$  — целая часть числа  $a$ .

Если для функций  $\mu(\zeta)$ ,  $\tau(\zeta)$  в точке  $\zeta_j$  векторы  $\bar{\ell}_j^+$  и  $\bar{\ell}_j$  ортогональны векторам  $\bar{t}_j^+$  и  $\bar{t}_j^-$  соответственно, то будем говорить, что пара  $(\mu, \tau)$  (или пара  $(\bar{\ell}, \bar{t})$ ) ортогональна в точке  $\zeta_j$ . Имеет место

**Лемма 1.** Если  $\bar{\ell}, \bar{t} \in \mathcal{L}_{\alpha, \beta}^{(r, q)}$ ,  $r + q = 2n$ , и пара  $(\bar{\ell}, \bar{t})$  ортогональна в точках  $\zeta_j$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ), то индекс  $\varkappa$  задачи R и индекс  $\varkappa'$  задачи  $R'$  в классе  $H^0$  находятся по формулам

$$\varkappa = -4 + \sum_{j=1}^n \Omega_{2j}^{(1)} + \sum_{j=0}^{n-1} \Omega_{2j+1}^{(2)}, \quad (8)$$

$$\varkappa' = -4 + \sum_{j=0}^{n-1} \Omega_{2j+1}^{(1)} + \sum_{j=1}^n \Omega_{2j}^{(2)}, \quad (8')$$

где

$$\Omega_j^{(k)} = \frac{2\varphi_j}{\pi} + (-1)^k \frac{1}{2} \quad (k = 1, 2, j = 1, \dots, 2n). \quad (9)$$

Для доказательства заметим, что если  $\bar{\ell}, \bar{t} \in \mathcal{L}_{\alpha, \beta}^{(r, q)}$  и пара  $(\bar{\ell}, \bar{t})$  ортогональна в точках  $\zeta_j$ , то  $\varphi_j = \psi_j$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ). Далее воспользуемся стандартной процедурой нахождения индекса граничного условия (5) [5, гл. 4]. Выбирая точку  $c_1$  за начало обхода контура  $\Gamma$  и применяя технику работы [6], получаем:

$$\begin{aligned} \varkappa &= \left[ \frac{2\varphi_1}{\pi} - \frac{3}{2} \right] + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{2\varphi_k}{\pi} - \frac{1}{2} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{2\varphi_{2k+1}}{\pi} + \frac{1}{2} \right], \\ \varkappa' &= \left[ \frac{2\varphi_1}{\pi} - \frac{5}{2} \right] + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{2\varphi_{2k}}{\pi} + \frac{1}{2} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{2\varphi_{2k+1}}{\pi} - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Если теперь за начальную точку обхода принять любую точку  $c \in \Gamma_1$  непрерывности функции  $\lambda(\zeta)$  и повторить указанную процедуру, то на основании последних равенств приходим к соотношениям (8), (8').

Пусть для пары  $(\mu(\zeta), \tau(\zeta))$  выполнены условия леммы 1. Тогда справедлива

**Лемма 2.** Каждую точку  $\zeta_j$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ) граничного условия (5) можно отнести к одному из следующих пяти типов, а именно: точка  $\zeta_j$  есть точка  $m$ -го типа, если  $3\pi/4 \leq \varphi_j < \pi$  при  $m = 1$ ;  $(5-2m)\pi/4 \leq \varphi_j < (7-2m)\pi/4$  при  $m = 2, 3, 4$ ;  $-\pi < \varphi_j < -3\pi/4$  при  $m = 5$ . При этом для точки  $\zeta_j$   $m$ -го типа выполняются неравенства

$$\begin{aligned} k\pi &\leq \Omega_j^{(k)} < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (k = 1, 2), \text{ если } m = 1, \\ (k-m+1)\pi &\leq \Omega_j^{(k)} < (k-m+2)\pi \quad (k = 1, 2), \text{ если } m = 2, 3, 4, \\ \left(k - \frac{7}{2}\right)\pi &< \Omega_j^{(k)} < (k-3)\pi \quad (k = 1, 2), \text{ если } m = 5. \end{aligned} \quad (10)$$

В справедливости леммы 2 можно убедиться непосредственно проверкой.

**Следствие.** Если  $\zeta_j$  — точка  $m$ -го типа ( $1 \leq m \leq 5$ ), то

$$\left[ \Omega_j^{(k)} \right] = k - m + 1, \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

где  $[a]$  — целая часть  $a$ .

**Лемма 3.**  $\varkappa = \varkappa'$ .

Утверждение леммы является следствием соотношений (8), (8') и (11).

Обозначим через  $N_k$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) число точек  $k$ -го типа из числа точек  $\zeta_j$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ),  $\sum_{k=1}^5 N^{(k)} = 2n$ . Имеет место

**Лемма 4.** Индекс  $\varkappa$  граничного условия (5), (6) в классе  $H^0$  вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 (5 - 2k)N^{(k)} - 4. \quad (12)$$

◁ Обозначим точку  $\zeta_j$   $m$ -го типа через  $\zeta_j^{(m)}$ . Не нарушая общности, можно считать, что точки  $\zeta_j^{(k)}$  для каждого  $k$  ( $1 \leq k \leq 5$ ) следуют друг за другом при обходе контура  $\Gamma$  в положительном направлении из точки  $\zeta_1$ . Для определенности рассмотрим случай  $N^{(k)} = 2n^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, 5$ ),  $\sum_{k=1}^5 n^{(k)} = n$ , т. е. все  $N^{(k)}$  — четные. Тогда, подставляя в правую часть равенства (8) выражения (9) для  $[\Omega_j^{(k)}]$ , получаем  $\varkappa = \sum_{k=1}^5 (5 - 2k)n^{(k)} - 4$ , откуда следует (12).

Оставшиеся два случая (только три числа или только одно число из  $N^{(1)}, \dots, N^{(5)}$  — четные) рассматриваются аналогично и приводят к выражению (12) для  $\varkappa$ . ▷

Рассмотрим теперь задачу R в классе  $h(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$  ( $1 \leq m \leq 2n$ ), где  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  — произвольно отмеченные точки из числа  $\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}$ . Для этого заметим, что точки  $\zeta_j$ , в которых величина  $\Omega_j^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) кратны  $\pi$ , есть *особенные* точки [5] граничного условия (5). В силу (10), *особенными* точками задачи B являются точки  $\zeta_j$ , в которых величина  $\varphi_j$  равна одному из чисел  $\pm \frac{\pi}{4}; \pm \frac{3\pi}{4}$ . Пусть  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  — произвольно отмеченные неособенные точки из числа  $\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}$ . Как известно [6], индекс граничного условия (5) в классе  $h(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$  определяется равенством (7), где  $\varkappa_j = \left[ \frac{\omega_j}{2\pi} \right]$  при  $j = 1, \dots, m$ , и  $\varkappa_j = \left[ \frac{\omega_j}{2\pi} \right] + 1$  при  $j = m + 1, \dots, n$ .

**Лемма 5.** Если для пары  $(\bar{\ell}, \bar{t})$  выполнены условия леммы 1, то



индекс  $\varkappa$  задачи  $R$  в классе  $h(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$  находится по формуле

$$\varkappa = 2n - m + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 (5 - 2k) N^{(k)} - 4. \quad (13)$$

Формула (13) следует из (12).

### 3. Геометрические результаты

Для формулировки результатов введем классификацию угловых точек поверхности  $S_\nu$ : точку  $c_j$  с внутренним углом  $\nu_j \pi$  назовем неособенной точкой  $k$ -го типа, если  $0 < \nu_j < 1/4$  при  $k = 1$ ;  $(2k-3)/4 < \nu_j < (2k-1)/4$  при  $k = 2, 3, 4$ ;  $7/4 < \nu_j < 2$  при  $k = 5$ . Если  $\nu_j = (2k-1)/4$  ( $1 \leq k \leq 4$ ), то точку  $c_j$  назовем особенной и будем относить к  $k$ -му типу. Следуя [7], введем в рассмотрение б. м. изгибания класса  $H(c_1, \dots, c_m)$ , а именно: будем говорить, что поверхность  $S_\nu$  допускает б. м. изгибания класса  $H(c_1, \dots, c_m)$ , ( $1 \leq m \leq 2n$ ), если на  $S_\nu \setminus \bigcup_{k=1}^{2n} c_k$  определено поле изгибаний, порожденное решением класса  $h(\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_n)$  соответствующей задачи  $R$ . Через  $H^0$  обозначим класс б. м. изгибаний, задаваемый решениями класса  $h^0$  задачи  $R$ .

**Теорема 1.** Пусть  $S_\nu$  — заданная выше поверхность класса регулярности  $W^{3,p}$   $p > 2\theta_0$ , где  $\theta_0 = \max\{1, \nu_1, \dots, \nu_{2n}\}$ , край которой содержит  $N^{(k)}$  угловых точек  $k$ -го типа соответственно ( $1 \leq k \leq 5$ ;  $\sum_{k=1}^5 N^{(k)} = 2n$ ), а  $c_1, \dots, c_m$  ( $1 \leq m \leq 2n$ ) — произвольно отмеченные точки из числа угловых точек  $c_1, \dots, c_{2n}$ . Если  $c_j$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ) — омбилические точки поверхности  $S_\nu$ , и  $\sum_{k=1}^5 (5 - 2k)n \geq 6 - 2m$ , то смешанная задача (1) для поверхности  $S_\nu$  является безусловно разрешимой в классе  $H(c_1, \dots, c_m)$ .

Пусть заданные на  $L$  равенствами (1) функции  $\sigma$  удовлетворяют дополнительному условию точечного типа  $\sigma(c_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ). Тогда имеет место

**Теорема 2.** Если  $\sum_{k=1}^5 (5 - 2k)N^{(k)} \geq 6$ , то поверхность  $S_\nu$  допускает  $(N - 3)$  — параметрическое семейство б. м. изгибаний класса  $H^0$  и непрерывных в  $\bar{D}_\theta$ , совместимых с условием (1).

Для доказательства теорем 1, 2 заметим, что при отображении поверхности  $S_\nu$  на плоскость  $(u^1, u^2)$  с помощью сопряженно изометрической параметризации, омбилической угловой точке  $c_j$  (неособенной или особенной)  $k$ -го типа ( $k = 1, \dots, 5$ ) соответствует точка  $\zeta_j$  (неособенная или особенная, соответственно)  $k$ -го типа задачи R. Далее доказательство проводится по схеме [8] с применением лемм 4, 5. Заметим, что в силу леммы 3, теоремы 1, 2 остаются справедливыми для задачи R со *смещенным* граничным условием.

### Литература

1. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек.—М.: Физматгиз, 1982.—288 с.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек.—М.: Физматгиз, 1976.—512 с.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
4. Тюриков Е. В. Краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Мат. сборник.—1977.—Т. 7, № 3.—С. 445–462.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1968.—512 с.
6. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.—Новосибирск: Наука, 1977.—420 с.
7. Тюриков Е. В. Об одном расширенном классе бесконечно малых изгибаний регулярных локально выпуклых поверхностей // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, № 1.—С. 61–66.
8. Тюриков Е. В. Об одной граничной задаче теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, № 1.—С. 62–68.

Тюриков Евгений Владимирович  
 Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет;  
 Владикавказ, Институт прикладной математики и  
 информатики ВНЦ РАН  
 E-mail: lusy@jeo.ru

# ОБОБЩЕННЫЙ ИНДЕКС КОНДЕНСАЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**В. Б. Шерстюков**

Предложено обобщение понятия индекса конденсации последовательности положительных чисел конечной верхней плотности. В терминах этого обобщения установлен результат, который можно рассматривать как решение (для четной целой функции экспоненциального типа с вещественными нулями) одной задачи А. Ф. Леонтьева.

## Введение

Упомянутая в названии характеристика в том виде, в котором она обобщается в настоящей работе, была введена А. Ф. Леонтьевым в связи с нуждами теории рядов Дирихле и нашла широкое применение в задачах интерполяции, аналитического продолжения и целом ряде других вопросов [1–3]. Некоторые сведения из истории появления на свет понятия индекса конденсации и его метаморфоз можно найти в [4].

Рассмотрим каноническое произведение Вейерштрасса

$$\mathcal{L}(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$  и последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  имеет конечную верхнюю плотность  $\Delta := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k}$ . Условие  $\Delta < +\infty$  обеспечивает хорошо известное свойство бесконечного произведения (1): последнее определяет целую функцию  $\mathcal{L}(\lambda)$  экспоненциального типа (ц. ф. э. т.), который не превосходит  $\pi\Delta$ . Величина

$$\delta(\Lambda) := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} \quad (2)$$

называется *индексом конденсации Леонтьева* последовательности  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Если шаг этой последовательности положителен, т. е.

$h(\Lambda) := \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$ , и  $\Lambda$  имеет плотность  $\Delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} < +\infty$ , то  $\delta(\Lambda) \geq 0$ . В общей ситуации последнее равенство может нарушаться, однако, как показано в диссертации А. Ю. Попова [5], всегда  $\delta(\Lambda) = 0$ . Этот факт доказан в [5, гл. I, теорема 1.1] на основании следующего утверждения.

**Теорема (А. Ю. Попов).** Пусть  $\rho(x) := \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - \lambda_k|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_{-k} := -\lambda_k$ ;  $\mathcal{L}(x) := \frac{|\mathcal{L}(x)|}{\rho(x)}$  и  $\hat{\delta}(\Lambda) := \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{\mathcal{L}(x)}$ . Тогда  $\delta(\Lambda) = \hat{\delta}(\Lambda)$ .

Из этой теоремы легко выводится оценка: для любого  $\epsilon > 0$  при всех  $|x| > x_0(\Lambda, \epsilon)$  выполняется

$$|\mathcal{L}(x)| \geq \rho(x) \exp(-(\delta(\Lambda) + \epsilon)|x|). \quad (3)$$

В заметке автора [6] с привлечением неравенства (3) было доказано, что если величина (2) обращается в нуль, а индикаторная диаграмма  $D(\mathcal{L})$  функции (1) изображается отрезком мнимой оси, то эта функция имеет вполне регулярный рост (в. р. р.) на лучах  $\arg \lambda = 0$  и  $\arg \lambda = \pi$ . Последнее вовсе не означает, что  $\Lambda$  имеет плотность. Более того, известен пример из работы [7], в котором  $\delta(\Lambda) = 0$ ,  $D(\mathcal{L}) = [-id; id]$ ,  $d > 0$ , но ни одно из  $\theta \in (0; 2\pi) \setminus \{\pi\}$  не является направлением в. р. р.  $\mathcal{L}(\lambda)$ . С другой стороны, исследования, начатые в статьях [6] и [8], показали, что при некоторых ограничениях на поведение последовательности  $\left\{ \frac{1}{\mathcal{L}'(\lambda_k)} \right\}_{k=1}^{\infty}$  уже можно гарантировать полную регулярность роста бесконечного произведения (1) или, что то же самое, существование плотности  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k}$ . Тем самым актуализируется задача поиска близких к (2) по форме характеристик локальной сгущаемости точек  $\lambda_k$ , способных точнее, чем  $\delta(\Lambda)$ , улавливать регулярность в поведении  $\mathcal{L}(\lambda)$ . Одна из таких характеристик была предложена в статье [9] и названа там индексом  $\omega$ -конденсации положительных нулей канонического произведения (1):

$$\delta(\omega, \Lambda) := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(\lambda_k)} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|},$$

где  $\omega(x) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . В предположении, что  $\omega(x)$  не убывает к  $+\infty$ , выпукла вверх,  $\ln x = o(\omega(x))$ ,  $x \rightarrow +\infty$  и  $\delta(\omega, \Lambda) \geq 0$ , в [9, теорема 1] установлено равенство

$$\delta(\omega, \Lambda) = \hat{\delta}(\omega, \Lambda) := \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega(x)} \ln \frac{1}{\mathcal{L}(x)}.$$

Из этого равенства при дополнительных условиях  $\int_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x^2} dx < +\infty$  и  $D(\mathcal{L}) = [-id; id]$ ,  $d > 0$ , в [9, теорема 2] выводится импликация

$$(\delta(\omega, \Lambda) \in [0; +\infty)) \Rightarrow (\mathcal{L}(\Lambda) - \text{функция в. р. р.}).$$

Сразу отметим, что при  $\delta(\omega, \Lambda) < 0$  указанная импликация имеет место без каких-либо предположений относительно  $D(\mathcal{L})$  и  $\omega(x)$ , лишь бы только  $\omega(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$  [8, следствие теоремы 2].

В настоящей работе модификация  $\delta(\Omega, \Lambda)$  индекса конденсации определяется через произвольную неубывающую к  $+\infty$  последовательность положительных чисел  $\Omega$ . Связанная с этим новым индексом величина  $\hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda)$  характеризует скорость убывания функции  $\mathcal{L}(x)$  вне «малых» окрестностей ее нулей. При этом мы отказываемся от условия вогнутости «весовой» функции  $\omega(x)$ , заменяя последнюю специальной кусочно-линейной функцией  $\omega_\Lambda(x)$ , что позволяет снять ограничение  $\delta(\Omega, \Lambda) \geq 0$  при выводе равенства  $\delta(\Omega, \Lambda) = \hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda)$ . Найдены также достаточные условия неотрицательности индекса  $\delta(\Omega, \Lambda)$ . Основной результат (см. п. 2 ниже), уточняющий цитированную выше теорему автора, предъясвляет новый признак полной регулярности роста канонического произведения (1) и может рассматриваться как решение подходящей версии известной задачи А. Ф. Леонтьева [10]. Доказательства опираются на идеи и методы работ [5, 9].

### 1. Индекс $\Omega$ -конденсации

Пусть  $\Omega = \{\omega_k\}_{k=1}^\infty$  — неубывающая к  $+\infty$  последовательность положительных чисел. *Индексом  $\Omega$ -конденсации* последовательности  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  положительных нулей канонического произведения (1) ( $\Lambda$  имеет конечную верхнюю плотность) назовем величину

$$\delta(\Omega, \Lambda) := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|}.$$

Простые соображения убеждают в том, что  $\delta(\Omega, \Lambda)$  может оказаться отрицательным. Например, пусть при некотором  $\ell \in (0; +\infty)$  выполняется  $|\lambda_k - k| \leq \ell$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и шаг  $h(\Lambda) > 0$ . Тогда согласно

одному результату Б. Я. Левина [11] существует  $B > 0$ , для которого  $|\mathcal{L}'(\lambda_k)| \geq B\lambda_k^{-4\ell}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Если  $0 < \ell < \frac{1}{2}$ , то добавив к  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  какую-либо точку  $0 < \lambda_0 < \lambda_1$ , получим для производной канонического произведения  $\mathcal{L}_0(\lambda) := \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right) \mathcal{L}(\lambda)$  оценку

$$|\mathcal{L}'_0(\lambda_k)| = \left|1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_0^2}\right| |\mathcal{L}'(\lambda_k)| \geq \frac{\lambda_k^2 - \lambda_0^2}{\lambda_0^2} \cdot B \cdot \lambda_k^{-4\ell} \geq A \cdot \lambda_k^\alpha$$

при всех  $k$ , где  $A > 0$  и  $\alpha = 2 - 4\ell > 0$ . Отсюда, полагая  $\Lambda_0 = \{\lambda_0\} \cup \Lambda$  и  $\Omega = \{\ln \lambda_k\}_{k=1}^\infty$ , мы легко получим

$$\delta(\Omega, \Lambda_0) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \lambda_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'_0(\lambda_k)|} \leq -\alpha < 0.$$

Другой пример последовательности с отрицательным индексом  $\Omega$ -конденсации можно извлечь из теоремы 1.2.8 [2].

Построим теперь по последовательности  $\Omega = \{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $\omega_k \nearrow +\infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ , кусочно-линейную функцию

$$\omega_\Lambda(x) = \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} (x - \lambda_k) + \omega_k, \quad x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}], \quad k = 1, 2, \dots$$

и положим

$$\hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda) := \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega_\Lambda(x)} \ln \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}(x)}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\omega_\Lambda(x)$  удовлетворяет условию

$$(a) \quad \ln x = o(\omega_\Lambda(x)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тогда  $\delta(\Omega, \Lambda) = \hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda)$ .

◁ Отметим, что  $\delta(\Omega, \Lambda) \leq \hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda)$ , так как

$$\begin{aligned} \delta(\Omega, \Lambda) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_\Lambda(\lambda_k)} \ln \frac{1}{\mathcal{L}(\lambda_k)} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega_\Lambda(x)} \ln \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}(x)} = \hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda). \end{aligned}$$

Докажем неравенство  $\hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda) \leq \delta(\Omega, \Lambda)$ . Если  $\delta(\Omega, \Lambda) = +\infty$ , то доказывать нечего. Пусть  $\delta(\Omega, \Lambda) < \gamma$ . Дальнейшие рассуждения направлены на построение последовательности  $\gamma_k \rightarrow \gamma$ ,  $k \rightarrow \infty$ , для

которой  $\ln \hat{\mathcal{L}}(x) > -\gamma_k \omega_\Lambda(x)$  на  $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$  при всех  $k \geq k_0$ . В ходе доказательства теоремы 1 [9] применением техники, развитой в [5], было показано, что при  $\lambda_{k+1} \leq 2\lambda_k$ ,  $k \geq k_0$ , выполняется

$$\begin{aligned} \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| &> -\gamma \omega_k - a_k + \ln \frac{\lambda_k \lambda_{k+1}}{4}, \\ \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| &> -\gamma \omega_{k+1} - a_k + \ln \frac{\lambda_k \lambda_{k+1}}{6}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_k := \ln(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$  и  $\mathcal{L}_k(x) := \prod_{\substack{n \neq k \\ n \neq k+1}} \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_n^2}\right)$ . Определим на

$[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$  линейную функцию  $\ell(x) := -\gamma \omega_\Lambda(x) - a_k + \ln \frac{\lambda_k \lambda_{k+1}}{6}$ . Из (4) получаем неравенства  $\ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| > \ell(\lambda_k)$  и  $\ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| > \ell(\lambda_{k+1})$ . Так как функция  $\ln |\mathcal{L}_k(x)|$  выпукла вверх на  $(\lambda_{k-1}, \lambda_{k+2})$  [5, лемма 1.2], то

$$\ln |\mathcal{L}_k(x)| > \ell(x), \quad \forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]. \quad (5)$$

Нетрудно также показать [5, доказательство теоремы 1.1], что  $\hat{\mathcal{L}}(x) \geq \frac{|\mathcal{L}_k(x)|(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{2\lambda_k \lambda_{k+1}}$  на отрезке  $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ . Отсюда и из (5) заключаем:

$$\begin{aligned} \ln \hat{\mathcal{L}}(x) &\geq \ln |\mathcal{L}_k(x)| + \ln(\lambda_{k+1} - \lambda_k) - \ln 2\lambda_k \lambda_{k+1} > \\ &> \ell(x) + a_k - \ln 2\lambda_k \lambda_{k+1} = -\gamma \omega_\Lambda(x) - \ln 12. \end{aligned}$$

Выбирая  $\gamma_k = \gamma + \frac{\ln 12}{\omega_k}$ , получим  $\gamma_k \rightarrow \gamma$ ,  $k \rightarrow \infty$ , причем

$$\begin{aligned} \ln \hat{\mathcal{L}}(x) &> -\left(\gamma_k - \frac{\ln 12}{\omega_k}\right) \omega_\Lambda(x) - \ln 12 = \\ &= -\gamma_k \omega_\Lambda(x) + \ln 12 \left(\frac{\omega_\Lambda(x)}{\omega_k} - 1\right) \geq -\gamma_k \omega_\Lambda(x), \quad \forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]. \end{aligned}$$

Итак, при  $\lambda_{k+1} \leq 2\lambda_k$  искомая последовательность  $\gamma_k$  со свойством  $\ln \hat{\mathcal{L}}(x) \geq -\gamma_k \omega_\Lambda(x)$  (на  $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ ) построена.

Разберем случай  $\lambda_{k+1} > 2\lambda_k$ . В этой ситуации [9, доказательство теоремы 1] справедливы неравенства

$$\ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| > -\gamma \omega_k \quad \text{и} \quad \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| > -\gamma \omega_{k+1} - \ln 2\lambda_{k+1}. \quad (6)$$

Вводя  $\gamma'_k = \gamma + \frac{\ln 2\lambda_{k+1}}{\omega_{k+1}} \rightarrow \gamma$  при  $k \rightarrow \infty$  (в силу (а)), получаем из (6) неравенства  $\ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| > -\gamma'_k \omega_k$  и  $\ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| > -\gamma'_k \omega_{k+1}$ .

Снова применив свойство выпуклости вверх на  $(\lambda_{k-1}, \lambda_{k+2})$  функции  $\ln |\mathcal{L}_k(x)|$ , приходим к неравенствам

$$\ln |\mathcal{L}_k(x)| > -\gamma'_k \omega_\Lambda(x), \quad \forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]. \quad (7)$$

При  $\lambda_{k+1} > 2\lambda_k$  справедлива оценка [5]:  $\hat{\mathcal{L}}(x) > \frac{|\mathcal{L}_k(x)|}{3x}$ ,  $\forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ , что позволяет привлечь (7) для получения при тех же  $x$  цепочки неравенств  $\ln \hat{\mathcal{L}}(x) > \ln |\mathcal{L}_k(x)| - \ln 3x > -\gamma'_k \omega_\Lambda(x) - \ln 3x$ .

Пусть теперь  $\gamma_k := \gamma'_k + \max_{x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]} \frac{\ln 3x}{\omega_\Lambda(x)}$ . Из условия (а) на  $\omega_\Lambda(x)$  видно, что  $\gamma_k \rightarrow \gamma$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Кроме того,  $\ln \hat{\mathcal{L}}(x) > -\gamma_k \omega_\Lambda(x)$ ,  $\forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$  (напомним, что здесь  $\lambda_{k+1} > 2\lambda_k$ ).

Таким образом, построена  $\{\gamma_k\}_{k=k_0}^\infty$ , сходящаяся к  $\gamma$ , для которой (в каждом из возможных случаев  $\lambda_{k+1} \leq 2\lambda_k$  и  $\lambda_{k+1} > 2\lambda_k$ ) имеют место неравенства  $\ln \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}(x)} < \gamma_k \omega_\Lambda(x)$  для всех  $x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ . Значит,

$$\hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega_\Lambda(x)} \ln \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}(x)} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]} \frac{1}{\omega_\Lambda(x)} \ln \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}(x)} \leq \gamma.$$

Поскольку число  $\gamma > \delta(\Omega, \Lambda)$  можно взять сколь угодно близким к  $\delta(\Omega, \Lambda)$ , то  $\hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda) \leq \delta(\Omega, \Lambda)$ . Вспоминая неравенство  $\delta(\Omega, \Lambda) \leq \hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda)$ , окончательно устанавливаем совпадение характеристик  $\delta(\Omega, \Lambda)$  и  $\hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda)$ , что завершает доказательство.  $\square$

Доказанная теорема позволяет, в частности, предъявить класс последовательностей  $\Omega$  со свойством: для любой  $\Omega$  из этого класса и произвольной возрастающей к  $+\infty$   $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$  конечной верхней плотности величина  $\delta(\Omega, \Lambda) \geq 0$ .

**Теорема 2.** Если  $\omega_\Lambda(x)$  удовлетворяет условиям (а) и

$$(b) \quad \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{\omega_\Lambda(x)}{x^2} dx = +\infty,$$

то  $\delta(\Omega, \Lambda) \geq 0$ .

$\triangleleft$  Предположим, рассуждая от противного, что  $\delta(\Omega, \Lambda) < 0$ . По теореме 1  $\hat{\delta}(\Omega_\Lambda, \Lambda) < 0$ , т. е.  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega_\Lambda(x)} \ln \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}(x)} < 0$ . В [5, лемма 1.3] А. Ю. Попов показал, что при всех  $x \geq \max\{3; \lambda_2\}$  справедливо неравенство  $\hat{\mathcal{L}}(x) \leq |\mathcal{L}(\sqrt{x^2 - 4} + 2i)|$ .



Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega_\Lambda(x)} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}(\sqrt{x^2 - 4} + 2i)|} = \\ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega_\Lambda(\sqrt{t^2 + 4})} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}(t + 2i)|} < 0. \end{aligned}$$

Пользуясь четностью канонического произведения (1), найдем  $M$ ,  $\epsilon > 0$  такие, что  $\frac{1}{|\mathcal{L}(t+2i)|} \leq M \exp(-\epsilon \omega_\Lambda(\sqrt{t^2 + 4}))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Функция  $F(z) := \frac{1}{\mathcal{L}(z)}$  голоморфна в полуплоскости  $\text{Im } z \geq 2$  и удовлетворяет оценке

$$|F(z)| \leq M \exp(-\epsilon \omega_\Lambda(|z|)), \quad \text{Im } z = 2.$$

При постоянном  $|z|$  модуль  $|\mathcal{L}(z)|$  возрастает при увеличении  $\text{Im } z$  ( $> 0$ ), поэтому  $|F(z)| \leq M \exp(-\epsilon \omega_\Lambda(|z|))$ ,  $\text{Im } z \geq 2$ .

Воспользуемся теперь следующей теоремой единственности [12, теорема 6.2, с. 361].

*Пусть функция  $f(z)$  регулярна в полуплоскости  $\text{Re } z > 0$ , непрерывна в полуплоскости  $\text{Re } z \geq 0$  и удовлетворяет неравенству  $\ln |f(z)| < -\nu(|z|)$  ( $\text{Re } z \geq 0$ ), где  $\nu(t)$  — непрерывная положительная функция при  $t \geq 0$ . Если  $\int_1^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^2} dt = +\infty$ , то  $f(z) \equiv 0$ .*

Итак, согласно приведенной теореме (переход к полуплоскости  $\text{Im } z \geq 2$  тривиален) получим из условия (b)  $F(z) \equiv 0$ , что невозможно. Следовательно,  $\delta(\Omega, \Lambda) \geq 0$ , и теорема доказана.  $\triangleright$

## 2. Признак полной регулярности роста произведения (1)

Полученная в п. 1 теорема 1 обобщает предшествующий результат А. Ю. Попова (см. Введение) и уже позволяет выписать достаточное условие наличия в. р. р. у функции  $\mathcal{L}(\lambda)$  в виде ограничений на  $\Omega$  и определяемый по ней индекс  $\delta(\Omega, \Lambda)$ . Интерес к задачам такого сорта возник после основополагающих работ А. Ф. Леонтьева по теории рядов Дирихле и ее многочисленным приложениям.

**Теорема 3.** Пусть  $\Lambda$  и  $\Omega$  — как выше, а функция  $\omega_\Lambda(x)$  удовлетворяет условию (a), но не удовлетворяет (b), т. е.  $\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{\omega_\Lambda(x)}{x^2} dx < +\infty$ .

Предположим, что индикаторная диаграмма  $D(\mathcal{L})$  канонического произведения (1) есть отрезок  $[-id; id]$ ,  $d > 0$ , и индекс  $\Omega$ -конденсации последовательности  $\Lambda$  конечен. Тогда  $\mathcal{L}(\lambda)$  является функцией в. р. р., т. е. существует плотность  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} \in (0; +\infty)$ . При  $\delta(\Omega, \Lambda) < 0$  заключение теоремы верно без дополнительных требований на индикаторную диаграмму и функцию  $\omega_\Lambda(x)$ .

$\triangleleft$  Из определения  $\delta(\Omega, \Lambda)$  вытекает неравенство  $\frac{1}{\omega_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} < \delta(\Omega, \Lambda) + \epsilon$  при любом  $k \geq k_0(\epsilon)$ , откуда в случае  $\delta(\Omega, \Lambda) < 0$  можно утверждать, что  $\frac{1}{\mathcal{L}'(\lambda_k)} = O(1)$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Такая функция  $\mathcal{L}(\lambda)$  обладает в. р. р. по теореме 2 из [8]. Гораздо сложнее доказать первую часть теоремы, к чему мы и приступаем. Пусть  $\omega_\Lambda(x)$  обладает описанными в теореме 3 свойствами. Применяя теорему 1, получим равенство  $\hat{\delta}(\omega_\Lambda, \Lambda) = \delta(\Omega, \Lambda)$ . В силу конечности  $\delta(\Omega, \Lambda)$ , при всех  $\epsilon > 0$  и  $|x| > x_0(\Lambda, \Omega, \epsilon)$  справедлива оценка (ср. с (3)):

$$|\mathcal{L}(x)| \geq \rho(x) \exp(-\omega_\Lambda(|x|)(\delta(\Omega, \Lambda) + \epsilon)). \quad (8)$$

Зафиксируем  $\epsilon \in (0; d)$  и положим  $\omega_0(|x|) := (\delta(\Omega, \Lambda) + 2\epsilon)\omega_\Lambda(|x|)$ ,  $|x| \geq \lambda_1$ . В рассмотрении нуждается только случай  $\delta(\Omega, \Lambda) \geq 0$ . Из условий на  $\omega_\Lambda(x)$  легко увидеть, что тогда  $\omega_0(x)$ ,  $x \geq \lambda_1$  — положительная неубывающая функция, причем  $\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{\omega_0(x)}{x^2} dx < +\infty$ . По известной теореме из работы [13] (см. также [14] и [15, с. 79–81]) найдется четная ц. ф. э. т. в. р. р.  $F(\lambda)$ , индикаторная диаграмма которой совпадает с отрезком  $[-i(d - \epsilon), i(d - \epsilon)]$ , и такая, что при  $|x| > x_1$   $|F(x)| \leq \exp(-\omega_0(|x|))$ . Определим теперь ц. ф. э. т.  $\varphi(\lambda)$  равенством  $\varphi(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{\mathcal{L}(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k F(\lambda_k)}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda^2 - \lambda_k^2)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Далее, известно [6], что  $\frac{1}{\rho(x)} = O(|x|)$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \in S$ , где  $S = \mathbb{R} \setminus \pm U$ ,  $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| \leq \frac{1}{k}\}$ . Отсюда и из (8) получаем при всех достаточно больших по модулю  $x \in S$  с положительными постоянными  $A$  и  $B$  следующую оценку:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq \frac{|F(x)|}{|\mathcal{L}(x)|} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \exp(-\omega_0(\lambda_k))}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{\rho(x)} \exp(-\omega_0(|x|) + \omega_\Lambda(|x|)(\delta(\Omega, \Lambda) + \epsilon)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B \sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-\omega_0(\lambda_k) + \omega_k(\delta(\Omega, \Lambda) + \epsilon)) = \\
& = A|x| \exp(-\epsilon\omega_{\Lambda}(|x|)) + B \sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-\epsilon\omega_k).
\end{aligned}$$

Поскольку  $\omega_{\Lambda}(|x|) = \alpha(|x|) \ln|x|$ , где  $\alpha(|x|) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $\Delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} < +\infty$ , то  $|x| \exp(-\epsilon\omega_{\Lambda}(|x|)) = \frac{1}{|x|^{\epsilon\alpha(|x|)-1}} \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ , и существует  $C > 0$ , для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-\epsilon\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\lambda_k^{\epsilon\alpha(\lambda_k)}} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} < +\infty.$$

Таким образом,  $|\varphi(x)|$  ограничен на  $S$ . Отсюда, приняв во внимание теорему Б. Я. Левина из [16] и свойства функции  $F(\lambda)$ , по схеме, отработанной в [6, 8, 9], выводим цепочку импликаций:  $(|\varphi(x)| \text{ ограничен на } S) \Rightarrow (|\varphi(x)| \text{ ограничен на } \mathbb{R}) \Rightarrow (\varphi(\lambda) \text{ имеет нулевой экспоненциальный тип}) \Rightarrow (\varphi(\lambda) \equiv 0)$ . В результате установлено представление

$$\frac{F(\lambda)}{\mathcal{L}(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k F(\lambda_k)}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \quad \lambda \notin \pm\Lambda,$$

правая часть которого, как показано выше, ограничена вне множества  $\pm U$ . Следовательно, существует  $D > 0$ , для которого  $|\mathcal{L}(\lambda)| \geq D|F(\lambda)|$  при любом  $\lambda \notin \pm U$ . Последнее неравенство доказывает теорему, поскольку  $U$  — множество нулевой линейной плотности,  $\epsilon > 0$  можно взять сколь угодно малым, а  $F(\lambda)$  имеет в. р. р.  $\triangleright$

### Литература

1. Мандельброт С. Примающиеся ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.—М.: ИЛ, 1955.—268 с.
2. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
3. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1983.—176 с.
4. Братищев А. В. Возникновение и развитие понятия индекса конденсации // Актуальные вопросы теории функций.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1986.—С. 50–55.
5. Попов А. Ю. Экстремальные задачи в теории целых функций: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук.—МГУ, 2005.—221 с.
6. Шерстюков В. Б. О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки.—2006.—Т. 80, № 1.—С. 119–130.

7. Братищев А. В. К одной задаче А. Ф. Леонтьева // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 270, № 2.—С. 265–267.
8. Шерстюков В. Б. Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент // Мат. заметки.—2003.—Т. 74, № 2.—С. 301–313.
9. Шерстюков В. Б. О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями // Мат. заметки.—2007.—Т. 82, № 4.—С. 621–630.
10. Леонтьев А. Ф. Об условиях разрешимости аналитических функций в ряды Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1972.—Т. 36, № 6.—С. 1282–1295.
11. Redheffer R. M. Completeness of sets of complex exponentials // Advances in Math.—1977.—V. 24.—P. 1–62.
12. Евграфов М. А. Аналитические функции.—М.: Наука, 1968.—472 с.
13. Ingham A. E. A note on Fourier transforms // J. London Math. Soc.—1934.—V. 9.—P. 29–32.
14. Levinson N. Gap and density theorems.—New York: Publ. Amer. Math. Soc., 1940.—246 p.
15. Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.—М.: Физматлит, 2005.—504 с.
16. Левин Б. Я. Почти периодические функции с ограниченным спектром // Актуальные вопросы математического анализа.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1978.—С. 112–124.

ШЕРСТЮКОВ Владимир Борисович

Москва, Московский инженерно-физический институт

E-mail: shervb73@mail.com

## Часть II

# Функциональный анализ



# УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

А. В. Абанин

Статья содержит обзор известных на сегодняшний день теорий ультрараспределений (Румье — Коматсу, Берлинга — Бьорка, Циоранеску — Жидо, Брауна — Майзе — Тейлора) и недавних результатов автора, посвященных развитию подхода А. Берлинга, в котором преобразование Фурье является первоосновой всех методов и результатов.

## 1. Теории ультрараспределений и их сравнение

В данном параграфе приводится обзор классических теорий ультрараспределений Румье — Коматсу и Берлинга — Бьорка, а также модификации последней, разработанные недавно Циоранеску — Жидо и Брауном — Майзе — Тейлором.

**1.1. О двух подходах к построению теории ультрараспределений.** Будем использовать стандартные обозначения теории распределений Л. Шварца [1]:  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  — наделенное естественной индуктивной топологией пространство всех бесконечно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^N$  функций с компактными носителями;  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  — сопряженное к  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  пространство, элементы которого называются *распределениями*;  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$  — пространство всех бесконечно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^N$  функций с топологией пространства Фреше.

Предположим, что  $\mathcal{D}_0$  — линейное подпространство в  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ , снабженное такой локально выпуклой топологией, что  $\mathcal{D}_0 \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  (здесь и далее  $\hookrightarrow$  — символ непрерывного вложения). Тогда  $\mathcal{D}'_0$  будет шире  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  в том смысле, что сужение каждого функционала из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  на  $\mathcal{D}_0$  будет принадлежать  $\mathcal{D}'_0$ . При этом, элементы  $\mathcal{D}'_0$  называют *ультрараспределениями*.

К настоящему времени сложилось два основных способа задания пространств  $\mathcal{D}_0 \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ . Исторически, первым был подход, разработанный Ш. Румье [2] спустя десять лет после выхода монографии Л. Шварца. Его можно квалифицировать как прямое развитие теории Л. Шварца, когда в качестве пробных рассматриваются функции из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ , рост производных которых оценивается с

помощью фиксированной числовой последовательности. Детальной разработке этого направления посвящены исследования Ж. Л. Лионса и Э. Мадженеса [3], Ч. Ч. Чоу [4] и Х. Коматсу [5]. На основании известного критерия неквазианалитичности класса бесконечно дифференцируемых функций эту область анализа часто называют теорией Данжуа — Карлемана.

Гораздо меньшее развитие получил подход А. Берлинга, основанный на том простом наблюдении, что изначально  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  можно определить как пространство тех функций с компактными носителями, преобразования Фурье которых убывают на бесконечности быстрее любой отрицательной степени  $(1 + |x|)^{-n} = \exp(-n \ln(1 + |x|))$ . А. Берлинг предложил [6] брать вместо  $\ln(1 + |x|)$  произвольную непрерывную субаддитивную функцию  $\omega(x)$ , подчиненную некоторым естественным ограничениям. Детальную разработку подхода А. Берлинга при этих ограничениях в середине 60-х годов прошлого века провел Г. Бьорк [7].

**1.2. Что такое теория ультрараспределений?** На самом деле упомянутые выше авторы предлагали в качестве первоосновы для построения ультрараспределений не отдельные пространства, а целые шкалы пространств. С этой точки зрения, представляет интерес понятие теории ультрараспределений, сформулированное И. Циоранеску и Л. Жидо в [8] следующим образом (в [8] рассматривались функции одной переменной, но это не имеет принципиального значения).

Пусть  $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha \in A}$  — некоторое семейство локально выпуклых пространств  $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ , каждое из которых удовлетворяет следующим условиям:

- (1)  $\mathcal{D}_\alpha$  —  $(LF)$ -пространство, т. е.  $\mathcal{D}_\alpha$  представимо в виде внутреннего индуктивного предела последовательности  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  пространств Фреше, причем  $H_n \hookrightarrow H_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ );
- (2) топология  $\mathcal{D}_\alpha$  мажорирует топологию поточечной сходимости;
- (3)  $\mathcal{D}_\alpha$  — кольцо относительно поточечного сложения и умножения функций;
- (4) для каждого компакта  $K \Subset \mathbb{R}^N$  и любой его открытой окрестности  $G$  в пространстве  $\mathcal{D}_\alpha$  имеется срезающая функция  $K$  с носителем в  $G$ , т. е. существует  $\eta \in \mathcal{D}_\alpha$ , для которой  $0 \leq \eta \leq 1$  на  $\mathbb{R}^N$ ,  $\text{supp } \eta \subset G$  и  $\eta \equiv 1$  на  $K$ ;
- (5) пространство  $A(\mathbb{R}^N)$  всех вещественно аналитических на  $\mathbb{R}^N$



функций плотно в пространстве

$$\mathcal{E}_\alpha := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) : fg \in \mathcal{D}_\alpha \text{ для любой функции } g \in \mathcal{D}_\alpha\},$$

снабженном топологией проективного предела пространств  $\mathcal{D}_\alpha$  относительно отображений  $M_\alpha : f \in \mathcal{E}_\alpha \mapsto fg \in \mathcal{D}_\alpha$ .

Тогда  $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha \in A}$  называется *теорией ультрараспределений*, а элементы пространств  $\mathcal{D}'_\alpha$  называются *ультрараспределениями*.

Если  $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha \in A}$  и  $(\mathcal{D}_\beta)_{\beta \in B}$  — две теории ультрараспределений, то говорят, что  $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha \in A}$  *шире*, чем  $(\mathcal{D}_\beta)_{\beta \in B}$ , если для каждого  $\beta \in B$  имеется такое  $\alpha \in A$ , что  $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}_\beta$ . Две теории ультрараспределений называют *эквивалентными*, если каждая из них шире другой.

**1.3. Классические теории ультрараспределений.** Как было показано в [8], семейства пространств, выделенные в упомянутых выше двух подходах, составляют теории ультрараспределений, точное описание которых мы сейчас дадим.

Обозначим через  $\mathcal{M}$  множество всех числовых последовательностей  $M = (M_n)_{n=1}^\infty$ , для которых

$$M_0 = 0; \quad M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}); \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty.$$

Для каждой функции  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ , положим

$$\|g\|_h := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \quad (h > 0),$$

образуем пространства

$$\mathcal{D}_{\{M\}}(\mathbb{R}^N) := \{g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : \|g\|_h < \infty \text{ при некотором } h > 0\},$$

$$\mathcal{D}_{\{M\}}(\mathbb{R}^N) := \{g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : \|g\|_h < \infty \text{ при всех } h > 0\},$$

и наделим их соответствующими топологиями  $(LF)$ -пространств. Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  — мультииндекс, а  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$  — его длина. Тогда семейства  $(\mathcal{D}_{\{M\}}(\mathbb{R}^N))_{M \in \mathcal{M}}$  и  $(\mathcal{D}_{(M)}(\mathbb{R}^N))_{M \in \mathcal{M}}$  образуют эквивалентные между собой теории ультрараспределений, каждую из которых естественно назвать теорией Румье — Коматсу (встречается также название — теория Данжуа — Карлемана).

Обозначим через  $\mathcal{V}$  множество всех непрерывных четных функций  $v : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , которые не убывают и вогнуты на  $[0, \infty)$  и для которых выполнены условия:

$$v(0) = 0; \quad \int_1^\infty \frac{v(t)}{t^2} < \infty; \quad \ln t = O(v(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Отметим, что каждая такая функция субаддитивна на  $\mathbb{R}$ , т. е.  $v(t + s) \leq v(t) + v(s)$  при всех  $t, s \in \mathbb{R}$ . По функции  $v \in \mathcal{V}$  образуем пространство

$$\mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N) := \left\{ g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : |g|_h := \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{g}(\xi)| e^{hv(|\xi|)} dx < \infty \quad \text{при всех } h > 0 \right\},$$

где  $\widehat{g}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} g(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$  — преобразование Фурье функции  $g$ .

Семейство  $(\mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N))_{v \in \mathcal{V}}$  представляет собой теорию ультрараспределений Берлинга — Бьорка.

**1.4. Расширения теории Берлинга — Бьорка.** В [8] было установлено, что теория Румье — Коматсу строго шире, чем теория Берлинга — Бьорка, и в связи с этим предложено следующее расширение последней в одномерном случае. Обозначим через  $\mathcal{T}$  совокупность всех последовательностей  $T = (t_k)_{k=1}^\infty$  положительных чисел, для которых  $\sum_{k=1}^\infty t_k < \infty$ , и построим по ним целые функции

минимального типа при первом порядке  $\omega_T : z \mapsto \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{iz}{t_k}\right)$ . Для  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  положим  $\|g\|_{h,n} := \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\xi)| |\omega_T(h\xi)|^n d\xi$  и определим пространства

$$\mathcal{D}_{(T)}(\mathbb{R}) := \left\{ g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \|g\|_{h,n} < \infty \quad \text{при всех } h > 0 \text{ и } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Тогда семейство  $(\mathcal{D}_{(T)}(\mathbb{R}))_{T \in \mathcal{T}}$  образует теорию ультрараспределений Циоранеску — Жидо, которая [8] эквивалентна теории Румье — Коматсу.

Несколько позже Р. Браун, Р. Майзе и Б. А. Тейлор предложили в [9] более простое по форме расширение теории Берлинга — Бьорка,

которое к тому же охватывало многомерный случай. Именно, пусть  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  — непрерывная четная неубывающая функция, для которой  $\omega(1) = 0$ , и которая удовлетворяет условиям:

$$(\alpha) \exists K \geq 1 \mid \omega(t+s) \leq K(\omega(t) + \omega(s) + 1) \quad (t, s \geq 0);$$

$$(\beta) \int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} < \infty;$$

$$(\gamma) \ln t = o(\omega(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty;$$

$$(\delta) \text{ функция } \varphi(x) := \omega(e^x) \text{ выпукла на } [0, \infty).$$

Такие функции в дальнейшем будем называть *каноническими весами*, а их совокупность обозначим через  $\mathscr{W}$ . По каждому каноническому весу  $\omega$  образуем пространства  $\mathscr{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ , как у Берлинга — Бьорка, и

$$\mathscr{D}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N) := \left\{ g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) : |g|_h < \infty \text{ при некотором } h > 0 \right\}.$$

Семейства  $(\mathscr{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N))_{\omega \in \mathscr{W}}$  и  $(\mathscr{D}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N))_{\omega \in \mathscr{W}}$  составляют теории ультрараспределений Брауна — Майзе — Тейлора, эквивалентные теориям Румье — Коматсу.

Отметим попутно, что в [10] У. Франкен построил такой канонический вес  $\omega$ , для которого не существует ни одной субаддитивной функции  $v$  с  $\int_1^\infty \frac{v(t)}{t^2} < \infty$ , мажорирующей  $\omega$ , т. е. такой, что  $\omega(t) \leq v(t)$ , при всех  $t \geq 0$ . Отсюда, в частности, следует, что теория Брауна — Майзе — Тейлора строго шире, чем теория Берлинга — Бьорка (ясно, что тоже самое вытекает опосредованно из сравнения результатов [8] и [9]). Позднее в [11] Д. А. Абанина слегка усилила результат У. Франкена, построив почти субаддитивный канонический вес с тем же самым свойством. Напомним, что функция  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  называется *почти субаддитивной*, если для любого  $p > 1$  найдется такое  $C > 0$ , что  $\omega(t+s) \leq p(\omega(t) + \omega(s)) + C$  при всех  $t, s \geq 0$ .

**1.5. Задачи.** В связи с вышеизложенным возникают следующие в некоторой степени взаимосвязанные задачи.

**Задача 1.** Существует ли теория ультрараспределений, которая строго шире теории Румье — Коматсу или, что одно и то же, теории Брауна — Майзе — Тейлора?

**Задача 2.** Найти такое минимальное (если это возможно в каком-либо разумном смысле) семейство канонических весов  $\mathscr{W}_0$ , чтобы

соответствующее ему семейство пространств  $(\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N))_{\omega \in \mathcal{W}_0}$  или  $(\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N))_{\omega \in \mathcal{W}_0}$  составляло теорию ультрараспределений, эквивалентную теории Брауна — Майзе — Тейлора.

**Задача 3.** Обозначим через  $\mathcal{W}'$  семейство всех почти субаддитивных канонических весов. Эквивалентна ли теория  $(\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N))_{\omega \in \mathcal{W}'}$  теории Брауна — Майзе — Тейлора?

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** В определении теории ультрараспределений требование 2) и вложение  $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  по теореме Гротендика о замкнутости графиков для  $(LF)$ -пространств равносильны тому, что имеют место непрерывные вложения  $\mathcal{D}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ . Поэтому в теориях ультрараспределений топология каждого из пространств  $\mathcal{D}_\alpha$  мажорирует не только топологию поточечной сходимости, но и топологию равномерной сходимости любой производной на каждом компакте.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Задача 3 фактически сводится к следующему вопросу. Существует ли такой канонический вес, который не мажорируется ни одним почти субаддитивным весом или нет? Если ответ на этот вопрос положителен, то теория Брауна — Майзе — Тейлора строго шире теории  $(\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N))_{\omega \in \mathcal{W}'}$ , а если нет, то они эквивалентны.

## 2. Преобразование Фурье и теория Берлинга — Бьорка

Пространства  $\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$  и  $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$ , составляющие теории Брауна — Майзе — Тейлора, на самом деле могут быть определены с помощью весовых оценок всех производных, входящих в них функций с помощью некоторой числовой последовательности. Например, как показано в [9, предложение 3.4], имеет место представление

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) = \left\{ g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{|g^{(\alpha)}(x)|}{e^{n\varphi^*(|\alpha|/n)}} < \infty, \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

где  $\varphi^*(y) := \sup\{xy - \varphi(x) : x \in [0, \infty)\}$  — функция, сопряженная по Юнгу с  $\varphi(x) = \omega(e^x)$ . Более того, все результаты [9] и последующих многочисленных приложений этой работы (см., например, [12–17]) получены в рамках этого представления. Таким образом, от идеи А. Берлинга осталось фактически неиспользуемое изначальное определение пространств пробных функций с помощью оценок их преобразований Фурье. В значительной степени это объясняется тем, что

не был развит соответствующий идее А. Берлинга технический аппарат. Его разработка, была недавно осуществлена автором настоящей работы. Основная цель, которая при этом ставилась, — получение такого обобщения и развития подхода А. Берлинга, в котором преобразование Фурье выступает стержнем всех методов и результатов, позволяет построить шкалу пространств, содержащую перечисленные выше, и одновременно сохраняет основополагающие результаты и принципы классической теории распределений. Отметим, что часть формулируемых ниже результатов содержится в [18], обобщает и частично усиливает аналогичные результаты из [2–9].

**2.1. Пространства пробных  $\Omega$ -ультрадифференцируемых функций и аналог теоремы Пэли — Винера.**  $N$ -весом будем называть произвольную измеримую по Лебегу локально ограниченную в  $\mathbb{R}^N$  функцию  $\omega : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ , для которой

$$a_\omega := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega(\xi)} d\xi < \infty, \quad A_\omega := \int_1^\infty \frac{\bar{\omega}(t)}{t^2} dt < \infty,$$

где  $\bar{\omega}(t) := \sup\{\omega(\xi) : \|\xi\| \leq t\}$ . Отметим, что каждый канонический вес  $\omega$  порождает  $N$ -вес  $\tilde{\omega}(x) := \omega(\|x\|)$ , где  $\|x\| := \max_{1 \leq k \leq N} |x_k|$  для  $x \in \mathbb{R}^N$ . С каждым  $N$ -весом  $\omega$  и компактом  $K$  в  $\mathbb{R}^N$  свяжем банахово пространство

$$\mathcal{D}_\omega(K) := \left\{ g \in \mathcal{C}_0(K) : \|g\|_\omega := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\hat{g}(\xi)| e^{\omega(\xi)} < \infty \right\},$$

где  $\mathcal{C}_0(K)$  — пространство всех непрерывных на  $\mathbb{R}^N$  функций с носителями в  $K$ .

Будем говорить, что  $N$ -вес  $\sigma$  *подчинен*  $N$ -весу  $\omega$  и писать  $\sigma \prec \omega$ , если имеется такая постоянная  $C$ , что  $\sigma(\xi) \leq \omega(\xi) + C$  при всех  $\xi \in \mathbb{R}^N$ . Подчиненные друг другу  $N$ -веса  $\omega$  и  $\sigma$  называются *эквивалентными*.

Обозначим через  $W_N^\uparrow$  (через  $W_N^\downarrow$ ) совокупность всех последовательностей  $N$ -весов  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ , для которых  $\omega_1 \prec \omega_2 \prec \dots$  (соответственно,  $\dots \prec \omega_2 \prec \omega_1$ ). По  $\Omega$  из  $W_N^\uparrow$  (из  $W_N^\downarrow$ ) образуем линейное пространство

$$\mathcal{D}_{(\Omega)}(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}_{\omega_n}(K) \quad \left( \mathcal{D}_{\{\Omega\}}(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{D}_{\omega_n}(K) \right),$$

которое будем рассматривать вместе с топологией проективного (соответственно, индуктивного) предела пространств  $\mathcal{D}_{\omega_n}(K)$  относительно отображений вложения. Для открытого в  $\mathbb{R}^N$  множества  $G$  определим пространство

$$\mathcal{D}_{\Omega}(G) := \bigcup_{K \in G} \mathcal{D}_{\Omega}(K),$$

и снабдим его топологией индуктивного предела пространств  $\mathcal{D}_{\Omega}(K)$  относительно отображений вложения. Здесь и далее пишем  $\Omega$  без скобок в тех случаях, когда какое-либо утверждение или обозначение касается как  $\Omega \in W_N^{\uparrow}$ , так и  $\Omega \in W_N^{\downarrow}$ , а символ  $X$  используем для обозначения компактного или открытого множества в  $\mathbb{R}^N$ . Функции из  $\mathcal{D}_{\Omega}(X)$  называются *пробными  $\Omega$ -ультрадифференцируемыми функциями на  $X$* .

Назовем весовую последовательность  $\Omega$  из  $W_N^{\uparrow}$  или из  $W_N^{\downarrow}$  *правильной*, если существует такой канонический вес  $v$ , что при всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$

$$\omega_n(\xi + \eta) + \ln(1 + \|\xi\|) \leq \omega_{n+1}(\xi) + v(\|\eta\|), \quad \text{если } \Omega \in W_N^{\uparrow},$$

или

$$\omega_{n+1}(\xi + \eta) \leq \omega_n(\xi) + v(\|\eta\|), \quad \text{если } \Omega \in W_N^{\downarrow}.$$

Класс всех правильных  $\Omega$  обозначим через  $\mathcal{W}_N^{\uparrow}$  (соответственно,  $\mathcal{W}_N^{\downarrow}$ ). Отметим, что именно для правильных весовых последовательностей удастся получить аналоги основных теорем классической теории распределений Л. Шварца — Пэли — Винера, Пэли — Винера — Шварца и о структуре ультрараспределений.

С каждым  $N$ -весом  $\omega$  свяжем его продолжение в  $\mathbb{C}^N$ , задаваемое формулой

$$P_{\omega}(\zeta) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(\xi + t\eta)}{1 + t^2} dt, \quad \zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^N.$$

При  $N = 1$ , сделав замену  $\xi + t\eta = u$ , получим

$$P_{\omega}(\xi + i\eta) = \frac{|\eta|}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(u)}{(u - \xi)^2 + \eta^2} du, \quad \xi + i\eta \in \mathbb{C}, \quad \eta \neq 0.$$

Следовательно, в одномерном случае  $P_\omega$  совпадает с интегралом Пуассона от  $\omega$  и является гармонической функцией в верхней и нижней полуплоскостях.

Обозначим через  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$  пространство всех целых в  $\mathbb{C}^N$  функций и определим по  $\omega$  и  $K \in \mathbb{R}^N$  его подпространство

$$\mathcal{H}_\omega^-(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N) : |f|_{\omega, K}^- := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) - P_\omega(\zeta)}} < \infty \right\},$$

где  $h_K(y) := \max_{x \in K} \langle x, y \rangle$  — опорная функция компакта  $K$ . Мы будем рассматривать  $\mathcal{H}_\omega^-(K)$  с нормой  $|\cdot|_{\omega, K}$ , относительно которой оно является банаховым.

Для  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$  из  $W_N^\uparrow$  (из  $W_N^\downarrow$ ) и  $K \in \mathbb{R}^N$ , положим

$$\mathcal{H}_{(\Omega)}^-(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{H}_{\omega_n}^-(K) \quad \left( \mathcal{H}_{\{\Omega\}}^-(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{H}_{\omega_n}^-(K) \right),$$

и наделим это пространство топологией проективного (индуктивного) предела банаховых пространств  $\mathcal{H}_{\omega_n}^-(K)$  относительно операций вложения. Для открытого в  $\mathbb{R}^N$  множества  $G$  образуем  $\mathcal{H}_\Omega^-(G) := \bigcup_{K \in G} \mathcal{H}_\Omega^-(K)$  и снабдим его топологией индуктивного предела пространств  $\mathcal{H}_\Omega^-(K)$  относительно отображений вложения.

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  — весовая последовательность из  $W_N^\uparrow \cup W_N^\downarrow$ ,  $X$  — открытое или компактное выпуклое подмножество в  $\mathbb{R}^N$ . Тогда преобразование Фурье — Лапласа функций

$$g \mapsto (\mathcal{F}g)(\zeta) := \widehat{g}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) e^{-i\langle x, \zeta \rangle} dx, \quad \zeta \in \mathbb{C}^N$$

является топологическим изоморфизмом между  $\mathcal{D}_\Omega(X)$  и  $\mathcal{H}_\Omega^-(X)$ .

В случае, когда  $\Omega$  — правильная весовая последовательность, а  $X$  — открытое в  $\mathbb{R}^N$  выпуклое множество, пространство  $\mathcal{H}_\Omega^-(X)$  в только что приведенном следствии можно, как и в классическом случае, описать без использования продолжения весов в  $\mathbb{C}^N$ . Для  $N$ -веса  $\omega$  и компакта  $K \subset \mathbb{R}^N$ , положим

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\omega^-(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N) : |\widetilde{f}|_{\omega, K}^- := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) - \omega(\operatorname{Re} \zeta)}} < \infty \right\}.$$

С каждой весовой последовательностью  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$  из  $W_N^\uparrow$  (из  $W_N^\downarrow$ ) свяжем пространство

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{(\Omega)}^-(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \widetilde{\mathcal{H}}_{\omega_n}^-(K) \quad \left( \widetilde{\mathcal{H}}_{\{\Omega\}}^-(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \widetilde{\mathcal{H}}_{\omega_n}^-(K) \right),$$

наделенное топологией проективного (индуктивного) предела последовательности банаховых пространств  $(\widetilde{\mathcal{H}}_{\omega_n}^-(K))_{n=1}^\infty$  относительно отображений вложения. Для открытого в  $\mathbb{R}^N$  множества  $G$  определим пространство  $\widetilde{\mathcal{H}}_\Omega^-(G) := \bigcup_{K \in G} \widetilde{\mathcal{H}}_\Omega^-(K)$  и снабдим его топологией индуктивного предела семейства пространств  $\{\widetilde{\mathcal{H}}_\Omega^-(K) : K \in G\}$  относительно операторов вложения.

**Следствие (аналог теоремы Пэли — Винера).** Для правильной весовой последовательности  $\Omega$  и открытого выпуклого в  $\mathbb{R}^N$  множества  $G$  преобразование Фурье — Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между  $\mathcal{D}_\Omega(G)$  и  $\widetilde{\mathcal{H}}_\Omega^-(G)$ .

**2.2. Структурные теоремы для  $\Omega$ -ультрараспределений.**  $\Omega$ -ультрараспределениями на компактном или открытом в  $\mathbb{R}^N$  множестве  $X$  называются линейные непрерывные функционалы на  $\mathcal{D}_\Omega(X)$  или, другими словами, элементы пространства  $\mathcal{D}'_\Omega(X)$ , топологически сопряженного с  $\mathcal{D}_\Omega(X)$ . В дальнейшем  $\Omega$ -ультрараспределения на  $\mathbb{R}^N$  будем называть просто  $\Omega$ -ультрараспределениями.

*Носитель  $\Omega$ -ультрараспределения*  $\varphi$  на открытом в  $\mathbb{R}^N$  множестве  $G$  — это множество тех  $x$  из  $G$ , для которых ограничение  $\varphi$  на любую открытую окрестность  $U_x$  точки  $x$  отлично от нулевого. Как и для функций, носитель  $\varphi$  обозначается через  $\text{supp } \varphi$ . Таким образом,  $x \in \text{supp } \varphi$  тогда и только тогда, когда для любой открытой окрестности  $U_x$  в пространстве  $\mathcal{D}_\Omega(U_x)$  найдется такая функция  $g$ , что  $\varphi(g) \neq 0$ . Или в эквивалентной форме:

$$x \notin \text{supp } \varphi \Leftrightarrow \exists U_x : \varphi(g) = 0 \quad \text{для всех } g \in \mathcal{D}_\Omega(U_x).$$

Ясно, что  $\text{supp } \varphi$  — замкнутое в  $G$  множество (в относительной топологии, индуцированной в  $G$  из  $\mathbb{R}^N$ ).

Заметим, что для правильных весовых последовательностей носитель  $\Omega$ -ультрараспределения не зависит от  $\Omega$ . Именно, если мы имеем две таких последовательности  $\Omega$  и  $\Sigma$  и если линейный функционал  $\varphi$  является одновременно  $\Omega$ - и  $\Sigma$ -ультрараспределением, то



его носитель  $\text{supp}_\Omega \varphi$  как  $\Omega$ -ультрараспределения совпадает с его носителем  $\text{supp}_\Sigma \varphi$  как  $\Sigma$ -ультрараспределения.

Обозначим через  $\mathcal{M}^N$  семейство всех мер Радона на  $\mathbb{R}^N$  и для  $N$ -веса  $\omega$  положим

$$\mathcal{M}_\omega^N := \left\{ \mu \in \mathcal{M}^N : \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega} d|\mu| < \infty \right\}.$$

По каждой правильной весовой последовательности  $\Omega$  из  $\mathcal{W}^\uparrow$  или  $\mathcal{W}^\downarrow$  образуем, соответственно, следующие семейства мер Радона на  $\mathbb{R}^N$ :

$$\mathcal{M}_{(\Omega)}^N := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{\omega_n}^N \quad \text{или} \quad \mathcal{M}_{\{\Omega\}}^N := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{\omega_n}^N.$$

**Теорема 2 (структурная теорема).** Пусть выполнено одно из следующих двух предположений:

- (i)  $X$  — компактное или открытое в  $\mathbb{R}^N$  множество и  $\Omega \in \mathcal{W}_N^\downarrow$ ;
- (ii)  $X$  — компакт в  $\mathbb{R}^N$  и  $\Omega \in \mathcal{W}_N^\uparrow$ .

Тогда каждый функционал  $\varphi \in \mathcal{D}'_\Omega(X)$  допускает представление

$$\varphi(g) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g} d\mu \quad (g \in \mathcal{D}_\Omega(X)), \quad (1)$$

где  $\mu$  — некоторая мера из  $\mathcal{M}_\Omega^N$ .

**Следствие 1.** Пусть  $G$  — открытое в  $\mathbb{R}^N$  множество и  $\Omega$  — правильная весовая последовательность из  $\mathcal{W}_N^\uparrow$ . Тогда для любого функционала  $\varphi$  из  $\mathcal{D}'_{(\Omega)}(G)$  и любого компактного или открытого относительно компактного подмножества  $X$  в  $G$  существует такая мера  $\mu \in \mathcal{M}_{(\Omega)}^N$ , что представление (1) справедливо для всех  $g \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(X)$ .

**Следствие 2.** Пусть  $G$  — открытое в  $\mathbb{R}^N$  множество и  $\Omega$  — правильная весовая последовательность из  $\mathcal{W}_N^\downarrow$ . Тогда для любого функционала  $\varphi$  из  $\mathcal{D}'_{(\Omega)}(G)$ , имеющего компактный носитель, существует такая мера  $\mu$  из  $\mathcal{M}_{(\Omega)}^N$ , что представление (1) справедливо всюду на  $\mathcal{D}_{(\Omega)}(G)$ .

**2.3. Пространства  $\Omega$ -ультрадифференцируемых функций.** Пусть  $\omega$  —  $N$ -вес. Положим

$$\mathcal{D}_\omega := \bigcup_{L \in \mathbb{R}^N} \mathcal{D}_\omega(L)$$

и образуем для любого фиксированного компакта  $K$  из  $\mathbb{R}^N$  пространство

$$\mathcal{E}_\omega(K) := \{f \in \mathcal{C}(K) : \exists g \in \mathcal{D}_\omega \text{ с } g|_K = f\},$$

снабженное нормой

$$\|f\|_{\omega,K} := \inf \{ \|g\|_\omega : g \in \mathcal{D}_\omega, g|_K = f \}.$$

Здесь и далее  $\mathcal{C}(K)$  — пространство всех непрерывных на  $K$  функций.

Для весовой последовательности  $\Omega$  из  $W_N^\uparrow$  (из  $W_N^\downarrow$ ) определим пространство

$$\mathcal{E}_\Omega(K) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\omega_n}(K) \quad \left( \mathcal{E}_{\{\Omega\}}(K) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\omega_n}(K) \right),$$

наделенное топологией, задаваемой набором норм  $(\|\cdot\|_{\omega_n,K})_{n=1}^\infty$  (соответственно топологией  $\text{ind}_n \mathcal{E}_{\omega_n}(K)$  относительно отображений вложения).

Пусть  $\Omega \in W_N^\uparrow \cup W_N^\downarrow$ ,  $G$  — открытое в  $\mathbb{R}^N$  множество. Пространство

$$\mathcal{E}_\Omega(G) := \{f \in \mathcal{C}(G) : f|_K \in \mathcal{E}_\Omega(K) \text{ для любого } K \Subset G\},$$

наделенное топологией  $\text{proj}_{K \Subset G} (\mathcal{E}_\Omega(K), \rho_K)$ , где  $\rho_K : f \mapsto f|_K$ , называется пространством  $\Omega$ -ультрадифференцируемых на  $G$  функций.

Всюду ниже  $G$  — открытое в  $\mathbb{R}^N$  множество,  $\Omega$  — правильная весовая последовательность, а  $v$  — ассоциированный с ней вес. Обозначим через  $\mathcal{Q}_\Omega$  семейство преднорм, задающее топологию в пространстве  $\mathcal{D}_\Omega(\mathbb{R}^N)$ , и напомним, что  $\mathcal{D}_{(v)}(G)$  — пространство пробных ультрадифференцируемых на множестве  $G$  функций, задаваемое весовой последовательностью  $(nv)_{n=1}^\infty$ .

Справедливы следующие две теоремы об описании пространств  $\Omega$ -ультрадифференцируемых функций, их топологий и сопряженных к ним.

**Теорема 3.** *Имеет место следующее представление пространства всех  $\Omega$ -ультрадифференцируемых функций на  $G$ :*

$$\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{R}^N) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) : f \cdot \mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}_\Omega(\mathbb{R}^N)\}.$$

При этом семейство преднорм

$$\{q(\chi f), f \in \mathcal{E}_\Omega(G) : q \in Q_\Omega, \chi \in \mathcal{D}_{(v)}(G)\},$$

задает исходную топологию в  $\mathcal{E}_\Omega(G)$ .

**Теорема 4.** Ультрараспределение  $\varphi$  из  $(\mathcal{D}_\Omega(G))'$  продолжается до элемента из  $(\mathcal{E}_\Omega(G))'$  в том и только в том случае, когда оно имеет компактный носитель.

#### 2.4. Преобразование Фурье — Лапласа функционалов.

Этот раздел посвящен различным вариантам теоремы Пэли — Винера — Шварца для пространств  $\Omega$ -ультрадифференцируемых функций.

Пусть  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^N$ . Для  $N$ -веса  $\omega$  введем банахово пространство целых в  $\mathbb{C}^N$  функций

$$\mathcal{H}_\omega^+(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N) : |f|_{\omega, K}^+ := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + P_\omega(-\zeta)}} < \infty \right\}.$$

Для  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$  из  $W_N^\uparrow$  (из  $W_N^\downarrow$ ) определим пространство

$$\mathcal{H}_\Omega^+(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{H}_{\omega_n}^+(K) \quad \left( \text{соотв. } \mathcal{H}_{\{\Omega\}}^+(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{H}_{\omega_n}^+(K) \right)$$

и наделим его топологией индуктивного предела последовательности пространств  $(\mathcal{H}_{\omega_n}^+(K))_{n=1}^\infty$  относительно отображений вложения (соотв. топологией, задаваемой набором норм  $(|\cdot|_{\omega_n, K}^+)_{n=1}^\infty$ ).

Как обычно, символом  $E'_b$  будем обозначать пространство линейных непрерывных функционалов на локально выпуклом пространстве  $E$ , наделенное топологией сильного сопряженного.

**Теорема 5.** Пусть  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Omega$  — правильная весовая последовательность из  $W_N^\uparrow$  или из  $W_N^\downarrow$ . Преобразование Фурье — Лапласа функционалов

$$\varphi \longmapsto \mathcal{F}[\varphi](\zeta) \equiv \widehat{\varphi}(\zeta) := \varphi \left( e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle} \Big|_K \right) -$$

линейный непрерывный оператор из  $(\mathcal{E}_\Omega(K))'_b$  в  $\mathcal{H}_\Omega^+(K)$ .

**Теорема 6.** Пусть  $K$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Omega$  — правильная весовая последовательность из  $W_N^\uparrow$  или из  $W_N^\downarrow$ . Для любой функции

$f$  из  $\mathcal{H}_\Omega^+(K)$  найдется  $\Omega$ -ультрараспределение с носителем в  $K$ , преобразование Фурье — Лапласа которого совпадает с  $f$ .

В случае выпуклой области из теорем 5 и 6 получаем обобщение теоремы Пэли — Винера — Шварца, причем в формулировке можно обойтись без привлечения продолжений весов в  $\mathbb{C}^N$ . Чтобы сформулировать этот результат, нам потребуются дополнительные обозначения.

Для произвольного  $N$ -веса  $\omega$  и компакта  $K$  в  $\mathbb{R}^N$  образуем банахово пространство целых функций

$$\mathcal{A}_\omega(K) := \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N) : |f|_{\omega,K}^+ := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(\operatorname{Im} \zeta) + \omega(-\operatorname{Re} \zeta)}} < \infty \right\}.$$

С каждой весовой последовательностью  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$  из  $W_N^\uparrow$  (из  $W_N^\downarrow$ ) свяжем пространство

$$\mathcal{A}_\Omega(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_{\omega_n}(K) \quad \left( \text{соотв. } \mathcal{A}_{\{\Omega\}}(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{A}_{\omega_n}(K) \right),$$

наделенное топологией индуктивного (проективного) предела последовательности банаховых пространств  $(\mathcal{A}_{\omega_n}(K))_{n=1}^\infty$  относительно отображений вложения. Для открытого в  $\mathbb{R}^N$  множества  $G$  определим пространство

$$\mathcal{A}_\Omega(G) := \bigcup_{K \Subset G} \mathcal{A}_\Omega(K)$$

и снабдим его топологией внутреннего индуктивного предела семейства пространств  $\{\mathcal{A}_\Omega(K) : K \Subset G\}$ .

**Теорема 7 (обобщение теоремы Пэли — Винера — Шварца).** Для любой выпуклой области  $G$  в  $\mathbb{R}^N$  и правильной весовой последовательности  $\Omega$  из  $\mathcal{W}_N^\uparrow$  или из  $\mathcal{W}_N^\downarrow$  преобразование Фурье — Лапласа функционалов, задаваемое для  $\varphi \in (\mathcal{E}_\Omega(G))'$  по правилу

$$\widehat{\varphi}(\zeta) := \varphi(e^{-i\langle \cdot, \zeta \rangle}) \quad (\zeta \in \mathbb{C}^N),$$

является топологическим изоморфизмом из  $(\mathcal{E}_\Omega(G))'_b$  на  $\mathcal{A}_\Omega(G)$ .

## 2.5. Продолжение ультрадифференцируемых функций.

Задачам о продолжении ультрадифференцируемых функций по Борелю — Уитни посвящено значительное число работ, перечислять

которые мы сейчас не будем, а остановимся только на одном моменте, который был недавно выявлен в [20] и непосредственным образом связан с двумя упомянутыми выше подходами к теории ультрасредствлений.

Пусть  $L$  — толстый компакт в  $\mathbb{R}^N$  (т. е.  $L$  имеет непустую внутренность, замыкание которой совпадает с  $L$ ),  $\omega$  — канонический вес, и, как прежде,  $\varphi(x) := \omega(e^x)$ . Определим банахово пространство

$$\mathcal{E}_{\varphi^*}(L) := \left\{ f \in C^\infty(L) : |f|_{\varphi^*, K} := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \sup_{x \in K} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{e^{\varphi_\omega^*(|\alpha|)}} < \infty \right\},$$

где  $\alpha$  — мультииндексы,  $|\alpha|$  — их длины. По неубывающей последовательности  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$  канонических весов и соответствующей ей последовательности  $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ , где  $\varphi_n(x) := \omega_n(e^x)$  образуем пространства Фреше

$$\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(L) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{E}_{\varphi_n^*}(L) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N) := \bigcap_{L \in \mathbb{R}^N} \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(L).$$

В первом топология задается набором преднорм  $(|\cdot|_{\varphi_n^*, L} : n \in \mathbb{N})$ , а во втором —  $(|\cdot|_{\varphi_n^*, L} : n \in \mathbb{N}; L \in \mathbb{R}^N)$ .

В предлагаемой в [20] технике исследования задачи о продолжении ультрадифференцируемых функций по Борелю — Уитни существенную роль играет предположение о совпадении пространств  $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$  и  $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$ . Отметим, что всегда  $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$ .

**2.6. Задачи.** В свете изложенных выше результатов представляют интерес следующие задачи.

**Задача 4.** Выяснить условия на вес  $\omega$ , при которых его продолжение  $P_\omega$  является плюрисубгармонической в  $\mathbb{C}^N$  функцией. Напомним, что при  $N = 1$  для канонического веса  $\omega$  функция  $P_\omega$  субгармонична во всей плоскости и гармонична в верхней и нижней полуплоскостях. Заметим, что последнее играет существенную роль в ряде задач (см., например, [9, 13, 19]).

**Задача 5.** Пусть  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$  и  $\Sigma = (\sigma_n)_{n=1}^\infty$  — весовые последовательности из  $W_N^\uparrow$  (из  $W_N^\downarrow$ ). Будем говорить, что  $\Omega$  *подчинена*  $\Sigma$ , если для любого  $n$  имеется такое  $m$ , что  $\omega_n \prec \sigma_m$  (соответственно  $\omega_m \prec \sigma_n$ ). Подчиненные друг другу последовательности  $\Omega$  и  $\Sigma$  называются *эквивалентными*. Существуют ли весовые последовательности

сти из  $W_N^\uparrow$  (из  $W_N^\downarrow$ ), которые не эквивалентны ни одной правильной последовательности из  $\mathscr{W}_N^\uparrow$  (из  $\mathscr{W}_N^\downarrow$ )?

**Задача 6.** Пусть последовательности  $\Omega$  и  $\Phi^*$  — те же, что и в п.2.5. Всегда ли  $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$ ? Если нет, то найти условия на последовательность  $\Omega$ , при которых это равенство имеет место.

### Литература

1. *Schwartz L.* Théorie des distribution I, II. —Hermann: Paris, 1950–1951.
2. *Roumieu C.* Sur quelques extensions de la notion de distribution // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3 Sér.—1960.—V. 77, № 1.—P. 41–121.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.—М.: Мир, 1971.—372 с.
4. *Chou C. C.* La transformation de Fourier complexe et l'équation de convolution // Lect. Notes Math., Springer: Berlin-Heidelberg-New York,—1973.—V. 325.—137 p.
5. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA, Math.—1973.—V. 20, No 1.—P. 25–105.
6. *Beurling A.* Quasi-analyticity and general distributions. Lectures 4 and 5.—Stanford: AMS Summer Institute, 1961.
7. *Björck G.* Linear partial differential operators and generalized distributions // Ark. Mat.—1966.—V. 6.—P. 351–407.
8. *Cioranescu I., Zsido L.*  $\omega$ -ultradistributions and their applications to operator theory // Spectral Theory.—Warsaw: Banach Center Publ., 1982.—V. 8.—P. 77–220.
9. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math.—1990.—V. 17.—P. 206–237.
10. *Franken U.* Weight functions for classes of ultradifferentiable functions // Result. Math.—1994.—V. 25, № 1–2.—P. 50–53.
11. *Абанин Д. А.* О классах весов, используемых при определении пространств ультрадифференцируемых функций // Известия вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.—2005.—№ 1.—С. 3–7.
12. *Bonet J., Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions // Studia Math.—1991.—V. 99.—P. 155–184.
13. *Franken U.* Continuous linear extension of ultradifferentiable functions of Beurling type // Math. Nachr.—1993.—V. 164.—P. 119–139.
14. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Continuous linear right inverses for partial differential operators on non - quasianalytic classes and on ultradistributions // Math. Nachr.—1996.—V. 180.—P. 213–242.
15. *Meyer T.* Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu type // Studia Math.—1997.—V. 125, № 2.—P. 101–129.
16. *Rösner T.* Surjektivität partieller Differentialoperatoren auf quasianalytischen Roumieu-Klassen: Dissertation.—Aachen: Shaker Verlag, 1997.—87 с.
17. *Bonet J., Meise R.* Ultradistributions of Roumieu type and projective descriptions // J. Math. Anal. Appl.—2001.—V. 255.—P. 122–136.

18. Абанин А. В.  $\Omega$ -ультрадифференцируемые функции и  $\Omega$ -ультрасласпределения // Изв. РАН. Сер. мат.—2008.—Т. 72, № 2.—С. 3–37.
19. Meise R., Taylor B. A. Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type // Ark. Mat.—1988.—V. 26.— P. 265–287.
20. Абанин А. В. Продолжения и следы ультрадифференцируемых функций // Вестник УГАТУ.—2007.—Т. 9, № 3.—С. 9–13.

АБАНИН АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ

Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет;

Владикавказ, Институт прикладной математики и

информатики ВНИЦ РАН

E-mail: [abanin@math.rsu.ru](mailto:abanin@math.rsu.ru)

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОШИ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДЖЕТОВ

Д. А. Абанина

В работе изучаются свойства преобразования Коши линейных непрерывных функционалов на пространствах ультраджетов, задаваемых весовой последовательностью общего вида.

## Введение

Пространства  $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$  ультраджетов на компакте  $K$ , определяемые последовательностью  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^{\infty}$  весовых функций, возникают при решении ряда задач (например, задачи о продолжении по Борелю и Уитни в пространствах ультрадифференцируемых функций [1–3]). Ранее основным используемым преобразованием функционалов из  $\mathcal{E}'_{(\Omega)}(K)$  было преобразование Фурье — Лапласа, которое, однако, малоэффективно в случае невыпуклых компактов. В настоящей работе в одномерном случае рассматривается другое преобразование — преобразование Коши.

Доказано, что преобразование Коши функционала  $\nu \in \mathcal{E}'_{(\Omega)}(K)$  представляет собой аналитическую в  $\mathbb{C} \setminus K$  функцию, и получены оценки ее роста вблизи компакта  $K$  и на бесконечности.

## 1. Пространства ультраджетов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Неквазианалитическим весом* будем называть непрерывную неубывающую функцию  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , удовлетворяющую условиям:

$$(\beta) \quad \int_1^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2} dt < \infty;$$

$$(\gamma) \quad \ln t = o(\omega(t)), \quad t \rightarrow \infty;$$

$$(\delta) \quad \varphi_{\omega}(x) := \omega(e^x) \text{ выпукла на } [0, \infty).$$

Через  $W_{\uparrow}^{nq}$  обозначим класс всех последовательностей  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^{\infty}$  неквазианалитических весовых функций, удовлетворяющих условию разделенности логарифмом

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists C_n \geq 1 : \omega_n(t) + \ln(t+1) \leq \omega_{n+1}(t) + C_n, \quad \forall t \geq 0. \quad (1)$$



Без ограничения общности можно предполагать, что  $\omega_n(1) = 0$  и  $\omega_n(t) \leq \omega_{n+1}(t)$ ,  $t \geq 1$ , при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

С последовательностью  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$  ассоциируются две последовательности  $(\varphi_n^*)_{n=1}^\infty$  и  $(\omega_n^*)_{n=1}^\infty$ , где  $\varphi_n^*(y) := \sup\{xy - \varphi_n(x) : x \geq 0\}$ ,  $y \geq 0$  — сопряженная по Юнгу к  $\varphi_n(x) := \omega_n(e^x)$ , а  $\omega_n^*(r) := \sup\{\omega_n(t) - rt : t \geq 0\}$ ,  $r > 0$ .

Пусть  $K$  — непустой компакт в  $\mathbb{R}$ , а  $J(K)$  — пространство всех джетов на компакте  $K$ , т. е. последовательностей  $f = (f^j)_{j=0}^\infty$  непрерывных на  $K$  функций. Для джета  $f = (f^j)_{j=0}^\infty$  введем «остаточные члены»

$$(R_x^m f)^k(y) := f^k(y) - \sum_{j=0}^{m-k} \frac{f^{k+j}(x)}{j!} (y-x)^j,$$

где  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 \leq k \leq m$ ,  $x, y \in K$ . Далее положим

$$|f|_{\omega_n, K} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{x \in K} \frac{|f^j(x)|}{e^{\varphi_n^*(j)}},$$

$$|f|_{\omega_n}^K := \sup_{m \in \mathbb{N}_0} \sup_{0 \leq k \leq m} \sup_{\substack{x, y \in K \\ x \neq y}} \frac{|(R_x^m f)^k(y)|(m-k+1)!}{e^{\varphi_n^*(m+1)} |x-y|^{m-k+1}}$$

и определим следующие пространства ультраджетов:

$$\mathcal{E}_{\omega_n}(K) := \{f = (f^j)_{j=0}^\infty \in J(K) : \|f\|_{\omega_n, K} := |f|_{\omega_n, K} + |f|_{\omega_n}^K < \infty\},$$

$$\mathcal{E}_{(\Omega)}(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{E}_{\omega_n}(K).$$

Элементы пространства  $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$  называются  $\Omega$ -ультраджетами Берлинга или  $(\Omega)$ -ультраджетами.

Рассмотрим джеты

$$f_z := \frac{1}{z-x} = \left( \frac{j!}{(z-x)^{j+1}} \right)_{j=0}^\infty, \quad z \in \mathbb{C} \setminus K,$$

порождаемые простейшими дробями.

**Теорема 1.** При всех  $z \in \mathbb{C} \setminus K$  справедливы следующие оценки норм джета  $f_z$  в пространстве  $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$ :

$$\|f_z\|_{\omega_n, K} \leq \begin{cases} \frac{B_n}{d(z, K)}, & d(z, K) \geq 1 \\ \frac{B_n}{d(z, K)} \exp \omega_{n+1}^* \left( \frac{2}{3e} d(z, K) \right), & 0 < d(z, K) < 1; \end{cases} \quad (2)$$

$$\|f_z\|_{\omega_n, K} \geq \begin{cases} \frac{D_n}{d(z, K)}, & d(z, K) \geq 1 \\ \frac{D_n}{d(z, K)} \exp \omega_{n-1}^*(d(z, K)), & 0 < d(z, K) < 1. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $B_n := \max \left\{ 2e^{C_n+1}, 3 \exp \left( \omega_n^* \left( \frac{2}{3e} \right) + 1 \right) \right\}$ ,  $D_n := e^{-C_{n-1}-1}$ , где  $C_k$  — константы из условия (1) разделенности логарифмом рассматриваемой весовой последовательности  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ .

◁ Поскольку доказательство этого результата достаточно громоздкое, мы приведем лишь основные его моменты.

1) Получение оценки (2).

а) Случай  $d(z, K) < 1$ . Обозначим для краткости  $d(z, K) =: d$ . Тогда

$$|f_z|_{\omega_n, K} = \frac{1}{d} \exp \sup_{j \in \mathbb{N}_0} (\ln j! - j \ln d - \varphi_n^*(j)).$$

Если  $j = 0$ , то  $\ln 0! - 0 \ln d - \varphi_n^*(0) = \omega_n(1) = 0$ . При остальных  $j$  используется оценка  $j! \leq e \left( \frac{j}{2} \right)^j$  и следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** Если  $\alpha \geq \frac{1}{e}$ , то

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} (j \ln \alpha j - \varphi_n^*(j)) \leq \omega_n^* \left( \frac{1}{e\alpha} \right).$$

На основании этого

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} (\ln j! - j \ln d - \varphi_n^*(j)) \leq 1 + \sup_{j \in \mathbb{N}} \left( j \ln \frac{j}{2d} - \varphi_n^*(j) \right) \leq 1 + \omega_n^* \left( \frac{2}{e} d \right).$$

Таким образом, в случае  $d(z, K) < 1$

$$|f_z|_{\omega_n, K} \leq \frac{e}{d(z, K)} \exp \omega_n^* \left( \frac{2}{e} d(z, K) \right). \quad (4)$$

Для оценки  $|f_z|_{\omega_n}^K$  сначала явно выписываются остаточные члены джета  $f_z$ .

**Лемма 2.** Если  $z \in \mathbb{C} \setminus K$ , то для любых  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \leq m$  и  $x, y \in K$

$$(R_x^m f_z)^0(y) = \frac{1}{z-y} \left( \frac{y-x}{z-x} \right)^{m+1}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
(R_x^m f_z)^k(y) &= \frac{d^k}{dy^k} (R_x^m f_z)^0(y) = \\
&= k! \frac{(y-x)^{m-k}}{(z-x)^{m+1}} \sum_{j=0}^k C_{m+1}^{k-j} \left( \frac{y-x}{z-y} \right)^{j+1} = k!(y-x)^{m+1-k} \times \\
&\times \frac{1}{z-y} \sum_{j=0}^k \left[ C_{m+1}^{k-j} \left( \frac{1}{z-y} - \frac{1}{z-x} \right)^j \frac{1}{(z-x)^{m+1-j}} \right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Из последнего равенства (6) легко получается, что

$$|(R_x^m f_z)^k(y)| \leq |y-x|^{m+1-k} \frac{k!}{d^{m+2}} \sum_{j=0}^k C_{m+1}^{k-j} 2^j.$$

Следовательно,

$$|f_z|_{\omega_n}^K \leq \frac{1}{d} \sup_{m \in \mathbb{N}_0} \left[ \frac{1}{d^{m+1} e^{\varphi_n^*(m+1)}} \sup_{0 \leq k \leq m} \left( k!(m+1-k)! \sum_{j=0}^k C_{m+1}^{k-j} 2^j \right) \right].$$

Проверив, что внутренний супремум достигается при  $k = m$ , будем иметь, что

$$|f_z|_{\omega_n}^K \leq \frac{3}{2d^2} \exp \sup_{m \in \mathbb{N}_0} \left( \ln m! - m \ln 3d - \varphi_n^*(m+1) \right).$$

Поступая теперь точно так же, как и для  $|f_z|_{\omega_n, K}$ , окончательно получим:

$$|f_z|_{\omega_n}^K \leq \frac{3e}{2d^2} \exp \omega_n^* \left( \frac{2}{3e} d \right).$$

От квадрата  $d$  в знаменателе избавляемся за счет следующей вспомогательной леммы, в доказательстве которой, как следует отметить, используется неравенство

$$\varphi_{n+1}^*(y+1) \leq \varphi_n^*(y) + C_n, \quad y \geq 0, \tag{7}$$

установленное в [4, лемма 1].

**Лемма 3.** Пусть  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty \in W_\uparrow^{nq}$ . Тогда при всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $r \in (0, 1)$

$$\omega_n^*(r) + \ln \frac{1}{r} \leq \omega_{n+1}^*(r) + C_n + 1,$$

где  $C_n$  — константа из условия (1).

На основании этого

$$|f_z|_{\omega_n}^K \leq \frac{e^{C_n+1}}{d(z, K)} \exp \omega_{n+1}^* \left( \frac{2}{3e} d(z, K) \right). \quad (8)$$

Объединяя оценки (4) и (8), учитывая, что  $\omega_n^* \leq \omega_{n+1}^*$  и  $\omega_{n+1}^*$  не возрастает на  $(0, +\infty)$ , получим, что в случае  $0 < d(z, K) < 1$

$$\|f_z\|_{\omega_n, K} \leq \frac{2e^{C_n+1}}{d(z, K)} \exp \omega_{n+1}^* \left( \frac{2}{3e} d(z, K) \right). \quad (9)$$

б) В случае, когда  $d(z, K) \geq 1$ , имеем, что

$$|f_z|_{\omega_n, K} = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{j!}{d^{j+1} e^{\varphi_n^*(j)}} \leq \frac{1}{d} \exp \sup_{j \in \mathbb{N}_0} (\ln j! - \varphi_n^*(j)),$$

$$\begin{aligned} |f_z|_{\omega_n}^K &\leq \frac{1}{d} \sup_{m \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{d^{m+1} e^{\varphi_n^*(m+1)}} \frac{m! 3^{m+1}}{2} \leq \\ &\leq \frac{3}{2d} \exp \sup_{m \in \mathbb{N}_0} (\ln m! + m \ln 3 - \varphi_n^*(m)). \end{aligned}$$

Применяя ту же самую оценку для  $j!$ , что и выше, а также лемму 1, получаем

$$|f_z|_{\omega_n, K} \leq \frac{\exp \left( \omega_n^* \left( \frac{2}{e} \right) + 1 \right)}{d}, \quad |f_z|_{\omega_n}^K \leq \frac{3 \exp \left( \omega_n^* \left( \frac{2}{3e} \right) + 1 \right)}{2d},$$

так что

$$\|f_z\|_{\omega_n, K} \leq \frac{3 \exp \left( \omega_n^* \left( \frac{2}{3e} \right) + 1 \right)}{d(z, K)}, \quad \text{если } d(z, K) \geq 1. \quad (10)$$

Оценки (9) и (10) дают нужную нам оценку (2).

2) Для получения оценки нормы  $\|f_z\|_{\omega_n, K}$  снизу используем неравенство

$$j! > \left( \frac{j}{e} \right)^j, \quad j \in \mathbb{N},$$

и оценку (7). Тогда в случае  $d(z, K) < 1$  получим

$$\begin{aligned} \|f_z\|_{\omega_n, K} &\geq |f_z|_{\omega_n, K} \geq \frac{1}{d} \exp \sup_{j \in \mathbb{N}} (\ln j! - j \ln d - \varphi_n^*(j)) \geq \\ &\geq \frac{1}{d} \exp \left( -C_{n-1} + \sup_{s \geq 1} (\omega_{n-1}(s) - sd) \right). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для произвольного веса  $\omega$  с  $\omega(1) = 0$  справедливо неравенство

$$\omega^*(r) \leq \sup_{t \geq 1} (\omega(t) - tr) + 1, \quad r \in (0, 1).$$

Поэтому

$$\|f_z\|_{\omega_n, K} \geq \frac{e^{-C_{n-1}-1}}{d(z, K)} \exp \omega_{n-1}^*(d(z, K)), \quad 0 < d(z, K) < 1.$$

Если  $d(z, K) \geq 1$ , то

$$\|f_z\|_{\omega_n, K} \geq |f_z|_{\omega_n, K} = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{j!}{d^{j+1} e^{\varphi_n^*(j)}} \geq \frac{0!}{d e^{\varphi_n^*(0)}} = \frac{1}{d}.$$

Тем самым установлена оценка (3).  $\triangleright$

**Следствие.** Если весовая последовательность  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$  из  $W_\uparrow^{nq}$  удовлетворяет дополнительному ограничению

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists K_n > 0 : \omega_n(2t) \leq \omega_{n+1}(t) + K_n, \quad \forall t \geq 0, \quad (11)$$

то при всех  $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_z\|_{\omega_n, K} \leq \begin{cases} \frac{\tilde{B}_n}{d(z, K)}, & d(z, K) \geq 1, \\ \frac{B_n}{d(z, K)} \exp \omega_{n+3}^*(d(z, K)), & 0 < d(z, K) < 1, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\tilde{B}_n := B_n \exp(K_{n+1} + K_{n+2})$ .

$\triangleleft$  Легко проверить, что если  $\Omega$  удовлетворяет условию (11), то

$$\omega_n^*\left(\frac{r}{2}\right) \leq \omega_{n+1}^*(r) + K_n, \quad r > 0,$$

так что

$$\omega_{n+1}^*\left(\frac{2}{3e}d\right) \leq \omega_{n+1}^*\left(\frac{d}{4}\right) \leq \omega_{n+2}^*\left(\frac{d}{2}\right) + K_{n+1} \leq \omega_{n+3}^*(d) + K_{n+1} + K_{n+2}.$$

Отсюда следует нужное.  $\triangleright$

## 2. Преобразование Коши функционалов из $\mathcal{E}'_{(\Omega)}(K)$

Из теоремы 1 следует, в частности, что  $f_z \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$  при любом  $z \in \mathbb{C} \setminus K$ . Поэтому для функционала  $\nu \in \mathcal{E}'_{(\Omega)}(K)$  можно ввести его преобразование Коши

$$\widehat{\nu}(z) := \nu(f_z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus K.$$

Так как при некотором  $n \in \mathbb{N}$

$$|\nu|_n^* := \sup \left\{ \frac{|\nu(f)|}{\|f\|_{\omega_n, K}} : f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(K), \|f\|_{\omega_n, K} \neq 0 \right\} < \infty,$$

то

$$|\widehat{\nu}(z)| \leq \begin{cases} \frac{\widetilde{B}_n |\nu|_n^*}{d(z, K)}, & d(z, K) \geq 1, \\ \frac{\widetilde{B}_n |\nu|_n^*}{d(z, K)} \exp \omega_{n+3}^*(d(z, K)), & 0 < d(z, K) < 1, \end{cases} \quad (13)$$

Из этого сразу же следует, что  $\widehat{\nu}$  исчезает в  $\infty$ , так что естественно положить  $\widehat{\nu}(\infty) := 0$ .

Для того чтобы доказать аналитичность функции  $\widehat{\nu}(z)$ , введем оператор  $\Psi$  сдвига влево в пространстве джетов  $J(K)$

$$\Psi : f = (f^j)_{j=0}^\infty \in J(K) \mapsto \Psi f := (f^{j+1})_{j=0}^\infty \in J(K),$$

соответствующий оператору дифференцирования. Нетрудно проверить, во-первых, что

$$(R_x^m \Psi f)^k(y) = (R_x^{m+1} f)^{k+1}(y), \quad f \in J(K), \quad (14)$$

а во-вторых, что  $\Psi$  непрерывно действует из  $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$  в  $\mathcal{E}_{(\Omega)}(K)$ . Далее на основании равенств (6) и (14) показывается, что

$$(R_x^m \Psi f_z)^k(y) = -\frac{\partial}{\partial z} \left( (R_x^m f_z)^k(y) \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus K. \quad (15)$$

**Теорема 2.** Преобразование Коши  $\widehat{\nu}(z)$  функционала  $\nu \in \mathcal{E}'_{(\Omega)}(K)$  представляет собой аналитическую в  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$  и исчезающую в бесконечности функцию, причем

$$\widehat{\nu}^{(k)}(z) = (-1)^k \nu(\Psi^k f_z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus K, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (16)$$

◁ Зафиксируем  $z \in \mathbb{C} \setminus K$  и покажем, что функция  $\widehat{\nu}$  дифференцируема в точке  $z$ , причем  $\widehat{\nu}'(z) = -\nu(\Psi f_z)$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{\widehat{\nu}(w) - \widehat{\nu}(z)}{w - z} + \nu(\Psi f_z) \right| &= \left| \nu \left( \frac{f_w - f_z}{w - z} + \Psi f_z \right) \right| \leq \\ &\leq |\nu|_n^* \cdot \left\| \frac{f_w - f_z}{w - z} + \Psi f_z \right\|_{\omega_n, K}. \end{aligned} \quad (17)$$

То, что

$$\left\| \frac{f_w - f_z}{w - z} + \Psi f_z \right\|_{\omega_n, K} \rightarrow 0 \text{ при } w \rightarrow z,$$

вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

**Лемма 4.** Пусть  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}$ ,  $l_K \geq 1$  таково, что  $K \subset [-l_K, l_K]$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus K$ ,  $d^- := \min \left\{ d(z, K), \frac{1}{5l_K} \right\}$ . Тогда при всех  $w$  таких, что  $0 < |w - z| < \frac{d^-}{4}$ , выполняется неравенство

$$\left\| \frac{f_w - f_z}{w - z} + \Psi f_z \right\|_{\omega_n, K} \leq \frac{100e}{(d^-)^4} \exp \omega_n^* \left( \frac{5l_K}{e} (d^-)^2 \right) \cdot |w - z|.$$

Доказательство леммы 4 основано на применении интегральной формулы Коши и проводится с помощью равенства (15), леммы 1 и формулы (6). Поэтому из (17) следует нужное. ▷

При каждом  $n$  определим банахово пространство

$$A_{\omega_n}(\overline{\mathbb{C}} \setminus K) := \left\{ g \in H_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus K) : |g|_{\omega_n, K} := \sup_{z \in \mathbb{C} \setminus K} \frac{|g(z)| d(z, K)}{\exp \omega_n^*(d(z, K))} < \infty \right\},$$

где  $H_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus K)$  — пространство всех функций, аналитических вне  $K$  и исчезающих в бесконечно удаленной точке. Положим

$$A_{(\Omega)}(\overline{\mathbb{C}} \setminus K) := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\omega_n}(\overline{\mathbb{C}} \setminus K)$$

и наделим это пространство топологией внутреннего индуктивного предела пространств  $A_{\omega_n}(\overline{\mathbb{C}} \setminus K)$ .

Из теорем 1 и 2 вытекает

**Теорема 3.** Пусть  $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^{\infty} \in W_{\uparrow}^{nq}$  удовлетворяет условию (11),  $K$  — непустой компакт в  $\mathbb{R}$ . Тогда преобразование Коши действует непрерывно из  $(\mathcal{E}_{(\Omega)}(K))'_b$  в  $A_{(\Omega)}(\overline{\mathbb{C}} \setminus K)$ .

---

**Литература**

1. Meise R., Taylor B. A. Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type // Ark. Mat.—1988.—V. 26.—P. 265–287.
2. Abanin A. V. On Whitney's extension theorem for spaces of ultradifferentiable functions // Math. Ann.—2001.—V. 320.—P. 115–126.
3. Абанина Д. А. Абсолютно представляющие системы экспонент с мнимыми показателями в пространствах ультраджетов нормального типа и продолжение функций по Уитни // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 1.—С. 3–15.
4. Абанин А. В., Филиппев И. А. Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.

АБАНИНА ДАРЬЯ АЛЕКСАНДРОВНА  
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет;  
Владикавказ, Институт прикладной математики и  
информатики ВНИЦ РАН  
E-mail: abanina@math.rsu.ru



ИЗМЕРИМЫЕ РАССЛОЕНИЯ РЕШЕТОК  
ОРЛИЧА — КАНТОРОВИЧА

Б. С. Закиров

Рассматриваются решетки Орлича — Канторовича  $L_M(B, m)$ , ассоциированные с полной булевой алгеброй  $B$ ,  $N$ -функцией  $M$  и мерой  $m$ , заданной на  $B$  и принимающей значения в алгебре всех измеримых действительных функций. Получено представление этих решеток в виде пространства измеримых банаховых расслоений классических функциональных решеток Орлича.

В связи с развитием общей теории интегрирования для векторнозначных мер естественным стал интерес к пространствам, являющимся «векторнозначным» аналогом классических функциональных пространств. Так, например, теория  $L_p$ -пространств для мер со значениями в алгебре  $L_0$ -измеримых функций стала предметом исследований многих математиков (см., например, [1, 2]). Детальное описание пространства Орлича — Канторовича  $L_M(\nabla, m)$ , ассоциированного с полной булевой алгеброй  $\nabla$ ,  $N$ -функцией  $M$ , мерой  $m$ , заданной на  $\nabla$  и принимающей значения в алгебре  $L_0$ , дано в [3, 4]. Пространства  $L_M(\nabla, m)$  являются новыми полезными примерами пространств Банаха — Канторовича, теория которых в настоящее время достаточно хорошо разработана (см., например, [2, 5]). В частности, получено представление пространства Банаха — Канторовича как пространства измеримых сечений измеримых банаховых расслоений [6]. При этом, если исходное пространство является решеткой Банаха — Канторовича, то представляющее измеримое банахово расслоение будет расслоением банаховых решеток [7]. Известно также, что решетка Банаха — Канторовича  $L_p(\nabla, m)$  представима в виде измеримого расслоения классических  $L_p$ -решеток [7]. В настоящей работе аналогичная задача решается для решеток Орлича — Канторовича  $L_M(\nabla, m)$ . Доказывается, что решетку Орлича — Канторовича  $L_M(\nabla, m)$  можно представить в виде измеримого расслоения функциональных решеток Орлича, ассоциированных с числовыми мерами.

Используются терминология и обозначения теории булевых алгебр и векторных решеток из [8, 9], теории векторного интегрирования из [1, 5], теории решеточно нормированных пространств из [2, 5], а также терминология для измеримых расслоений булевых алгебр, банаховых и метризуемых решеток из [7].

## 1. Предварительные сведения

Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство с полной  $\sigma$ -конечной мерой,  $\mathcal{M}(\Omega)$  — алгебра всех действительных измеримых функций, определенных почти всюду на  $\Omega$ ,  $\mathcal{L}_\infty(\Omega)$  — подалгебра всех существенно ограниченных функций из  $\mathcal{M}(\Omega)$ . Функции  $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$  называются *эквивалентными* (пишем  $f \sim g$ ), если они совпадают почти всюду в  $\Omega$ . Обозначим через  $f^\sim$  класс эквивалентности с представителем  $f$  и положим  $L_0 = L_0(\Omega) := L_0(\Omega, \Sigma, \mu) := \mathcal{M}(\Omega)/\sim$ . Относительно естественного порядка в  $L_0$  ( $f^\sim \leq g^\sim \Leftrightarrow f \leq g$  почти всюду) алгебра  $L_0$  является условно полной векторной решеткой со слабой единицей  $\mathbf{1}(\omega) = 1$ ,  $\omega \in \Omega$ , а множество  $\nabla(\Omega)$  всех идемпотентов в  $L_0$  образует полную булеву алгебру. Ясно также, что  $L_\infty(\Omega) = \{f^\sim : f \in \mathcal{L}_\infty(\Omega)\}$  является порядковым идеалом в  $L_0(\Omega)$ , порожденным элементом  $\mathbf{1}$ .

В дальнейшем вместо записи  $f^\sim \in L_0(\Omega)$  будет использоваться также и запись  $f \in L_0(\Omega)$ , которая подразумевает, что рассматривается класс эквивалентности с представителем  $f$ .

Для элемента  $f \in L_0(\Omega)$  через  $s(f)$  обозначается его носитель, т. е.  $s(f) = \sup_{n \geq 1} \{|f| > n^{-1}\}$ , где  $\{|f| > \lambda\}$  есть идемпотент, являющийся характеристической функцией  $\chi_{A_\lambda}$  множества  $A_\lambda = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \lambda\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ясно, что  $fs(f) = f$ , и если  $fg = 0$ , то  $s(f)g = 0$ , в частности,  $|f| \wedge |g|$  тогда и только тогда, когда  $s(f)s(g) = 0$ .

Пусть  $\nabla$  — произвольная булева алгебра, содержащая  $\nabla(\Omega)$  как правильную подалгебру,  $X(\nabla)$  — стоуновский компакт, соответствующий  $\nabla$ , и  $L_0(\nabla) := C_\infty(X(\nabla))$  — алгебра всех непрерывных функций  $x : X(\nabla) \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ , принимающих значение  $\pm\infty$  лишь на нигде неплотных множествах из  $X(\nabla)$ ,  $C(X(\nabla))$  — пространство всех непрерывных числовых функций на  $X(\nabla)$ . Ясно, что  $L_0(\Omega)$  можно отождествить с подалгеброй в  $L_0(\nabla)$ .

Пусть  $m : \nabla \rightarrow L_0(\Omega)$  — строго положительная  $L_0$ -значная мера на  $\nabla$ , обладающая свойством модульности, т. е.  $m(ge) = gm(e)$  для всех  $e \in \nabla$ ,  $g \in \nabla(\Omega)$  [5].

Обозначим через  $L_1(\nabla, m)$  пространство всех функций из  $L_0(\nabla)$ , интегрируемых по  $L_0$ -значной мере  $m$ . Для любого  $x \in L_1(\nabla, m)$  отображение  $\|x\|_1 = \int |x| dm$  определяет  $L_0$ -значную норму в  $L_1(\nabla, m)$ , относительно которой  $L_1(\nabla, m)$  является пространством Банаха — Канторовича [5, п. 6.1.10].

Для каждого  $p > 1$  положим

$$L_p(\nabla, m) := \{x \in L_0(\nabla) : |x|^p \in L_1(\nabla, m)\}.$$

Тогда, относительно  $L_0$ -нормы  $\|x\|_p := (\int |x|^p dm)^{1/p}$ ,  $L_p(\nabla, m)$  является решеткой Банаха — Канторовича над  $L_0$  [1, гл. VII, § 8.2; 2, п. 4.2.2.].

Напомним теперь определение измеримого банахова расслоения.

Пусть  $\mathcal{X}$  — банахово расслоение над  $\Omega$ , т. е. отображение  $\omega \mapsto \mathcal{X}(\omega)$  из  $\Omega$  в класс банаховых пространств. Значение  $\mathcal{X}(\omega)$  банахова расслоения называется его *слоем* в точке  $\omega \in \Omega$ . Отображение  $s$  из непустого множества  $D \subset \Omega$  в  $\mathcal{X}$  называют *сечением* расслоения  $\mathcal{X}$  над  $D$ , если  $s(\omega) \in \mathcal{X}(\omega)$  для всех  $\omega \in D$ . Через  $S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$  обозначается множество всех сечений расслоения  $\mathcal{X}$ , определенных почти всюду на  $\Omega$ . Множество сечений  $\mathcal{C} \subset S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$  называется *измеримой структурой* на  $\mathcal{X}$ , если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (а)  $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in \mathcal{C}$  для всех  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  и  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ ;
- (б) поточечная норма  $\|c\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  каждого элемента  $c \in \mathcal{C}$ , определяемая по правилу  $\|c\|(\omega) = \|c(\omega)\|_{\mathcal{X}(\omega)}$ , измерима;
- (в) множество  $\mathcal{C}$  *послойно плотно* в  $\mathcal{X}$ , т. е. множество  $\{c(\omega) : c \in \mathcal{C}\}$  плотно в пространстве  $\mathcal{X}(\omega)$  для каждого  $\omega \in \Omega$ .

Если  $\mathcal{C}$  — измеримая структура в  $\mathcal{X}$ , то пару  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  принято называть *измеримым банаховым расслоением* над  $\Omega$ . При этом вместо  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  обычно будем писать просто  $\mathcal{X}$  и иногда обозначать измеримую структуру  $\mathcal{C}$  символом  $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ .

Пусть  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  — измеримое банахово расслоение над  $\Omega$ . Сечение, совпадающее с сечением  $s$  на измеримом множестве  $A \in \Sigma$  и равное нулю на дополнении к  $A$ , обозначим символом  $[A]s$ . Сечение  $s \in S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$  называют  *$\mathcal{C}$ -ступенчатым* (или просто *ступенчатым*, если ясно о какой измеримой структуре идет речь), если

$s = \sum_{k=1}^n [A_k]c_k$  для некоторых  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathcal{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Сечение  $u \in S_{\sim}(\Omega, \mathcal{X})$  называется  $\mathcal{C}$ -измеримым (или просто *измеримым*), если для каждого  $A \in \Sigma$ ,  $\mu(A) < \infty$ , существует такая последовательность  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   $\mathcal{C}$ -ступенчатых сечений, что  $s_n(\omega) \rightarrow u(\omega)$  для почти всех  $\omega \in A$ . Множество всех  $\mathcal{C}$ -измеримых сечений расслоения  $\mathcal{X}$  обозначается символом  $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mu, \mathcal{X}/\mathcal{C})$  или, короче,  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ .

Непосредственно из определения измеримого расслоения вытекает, что если  $u, v \in S_{\sim}(\Omega, \mathcal{X})$  — измеримые сечения,  $e : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримая функция и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то сечения  $eu$  и  $\alpha u + \beta v$  измеримы. Понятно также, что функция  $\|u\|$  измерима для каждого измеримого сечения  $u$ .

Пусть  $\mathcal{X}$  — измеримое банахово расслоение над  $\Omega$ . Введем отношение эквивалентности  $\sim$  в множестве  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ , полагая  $u \sim v$ , если  $u(\omega) = v(\omega)$  для почти всех  $\omega \in \Omega$ . Класс эквивалентности, содержащий элемент  $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ , обозначается символом  $\tilde{u} := u^{\sim}$ . Фактормножество  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})/\sim$  естественным образом превращается в векторное пространство, а именно, для  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $u, v \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$  полагают по определению  $\alpha\tilde{u} + \beta\tilde{v} := (\alpha u + \beta v)^{\sim}$ .

Далее, для каждого элемента  $\tilde{u} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})/\sim$  вводится  $L_0$ -значная норма  $|\tilde{u}| := \|u\|^{\sim} \in L_0(\Omega)$ . Ясно, что пара  $(\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})/\sim, |\cdot|)$  является решеточно нормированным пространством над  $L_0(\Omega)$ ; это пространство будем обозначать символом  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$ .

**Теорема 1.1** [6]. Для любого измеримого банахова расслоения  $\mathcal{X}$  над  $\Omega$  множество  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  с введенными операциями и нормой является пространством Банаха — Канторовича над  $L_0(\Omega)$ .

Символ  $\mathcal{L}_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  обозначает множество  $\{u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X}) : \|u\| \in \mathcal{L}_{\infty}(\Omega)\}$ . Элементы  $\mathcal{L}_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  называются (существенно) ограниченными измеримыми сечениями расслоения  $\mathcal{X}$ . Множество, состоящее из классов эквивалентности существенно ограниченных сечений, обозначается символом  $L_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$ .  $L_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  является пространством Банаха Канторовича над  $L_{\infty}(\Omega)$  [6].

Пусть  $\mathcal{X}$  — измеримое банахово расслоение над  $\Omega$ . Рассмотрим лифтинг  $\rho : L_{\infty}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}_{\infty}(\Omega)$  (см., например, [5, 1.4.8]). Отображение  $l_{\mathcal{X}} : L_{\infty}(\Omega, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{L}_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  называется *векторнозначным лифтингом пространства  $L_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$*  (ассоциированным с  $\rho$ ), если для всех  $\tilde{u}, \tilde{v} \in L_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  и  $\tilde{e} \in L_{\infty}(\Omega)$  имеют место следующие условия:

- (1)  $l_{\mathcal{X}}(\tilde{u}) \in \tilde{u}$  и  $\text{dom}(l_{\mathcal{X}}(\tilde{u})) = \Omega$ , где  $\text{dom } u$  — область определения для  $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ ;
- (2)  $\|l_{\mathcal{X}}(\tilde{u})\| = \rho(|\tilde{u}|)$ ;
- (3)  $l_{\mathcal{X}}(\tilde{u} + \tilde{v}) = l_{\mathcal{X}}(\tilde{u}) + l_{\mathcal{X}}(\tilde{v})$ ;
- (4)  $l_{\mathcal{X}}(\tilde{e}\tilde{u}) = \rho(\tilde{e})l_{\mathcal{X}}(\tilde{u})$ ;
- (5) множество  $\{l_{\mathcal{X}}(\tilde{u}) : \tilde{u} \in L_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})\}$  послойно плотно в  $\mathcal{X}$ . Если существуют лифтинг пространства  $L_{\infty}(\Omega)$  и ассоциированный с ним векторнозначный лифтинг пространства  $L_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$ , то говорят, что  $\mathcal{X}$  — измеримое банахово расслоение с лифтингом.

**Теорема 1.2** [6]. Для любого пространства Банаха — Канторовича  $X$  над  $L_0(\Omega)$  существует единственное с точностью до изометрии измеримое банахово расслоение  $\mathcal{X}$  над  $\Omega$ , допускающее лифтинг, такое, что пространства Банаха — Канторовича  $X$  и  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  изометрически изоморфны.

Измеримое банахово расслоение  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  над  $\Omega$  называется измеримым расслоением банаховых решеток над  $\Omega$ , если  $\mathcal{X}(\omega)$  — банахова решетка для каждого  $\omega \in \Omega$ , и  $c_1 \vee c_2 \in \mathcal{C}$  для всех  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ . В этом случае пространство  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  относительно естественного частичного порядка ( $\tilde{u} \lesssim \tilde{v}$ , если  $u(\omega) \leq v(\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ ) становится векторной решеткой. Более того, нетрудно проверить, что, если  $\mathcal{X}$  — измеримое расслоение банаховых решеток над  $\Omega$ , то  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  является решеткой Банаха — Канторовича над  $L_0(\Omega)$  [7].

Пусть  $\mathcal{X}$  — измеримое расслоение банаховых решеток над  $\Omega$ . Если существуют лифтинг  $\rho$  пространства  $L_{\infty}(\Omega)$  и ассоциированный с ним векторнозначный лифтинг  $l_{\mathcal{X}}$  пространства  $L_{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  с дополнительным свойством

$$(6) \quad l_{\mathcal{X}}(\tilde{u} \vee \tilde{v}) = l_{\mathcal{X}}(\tilde{u}) \vee l_{\mathcal{X}}(\tilde{v}) \quad \text{для всех } \tilde{u}, \tilde{v} \in L_{\infty}(\Omega, \mathcal{X}),$$

то будем говорить, что  $\mathcal{X}$  — измеримое расслоение банаховых решеток с лифтингом.

**Теорема 1.3** [7]. Для любой решетки Банаха — Канторовича  $X$  над  $L_0(\Omega)$  существует единственное с точностью до порядкового изоморфизма измеримое расслоение банаховых решеток  $\mathcal{X}$  над  $\Omega$ , допускающее лифтинг, такое, что решетки Банаха — Канторовича  $X$  и  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  порядково изометрически изоморфны.

Пусть теперь  $\mathcal{X}$  — метрическое расслоение над  $\Omega$ , т. е. отображение  $\omega \mapsto \mathcal{X}(\omega)$  из  $\Omega$  в класс метрических пространств. Метрика элементов  $x, y$  в слое  $\mathcal{X}(\omega)$  обозначается символом  $\rho_{\omega}(x, y)$ .

Функция  $u$ , определенная почти всюду в  $\Omega$ , называется сечением расслоения  $\mathcal{X}$  над  $\Omega$ , если  $u(\omega) \in \mathcal{X}(\omega)$  для почти всех  $\omega \in \Omega$

(множество всех сечений расслоения  $\mathcal{X}$  также, как и в банаховом случае, обозначается через  $S_{\sim}(\Omega, \mathcal{X})$ ).

Пусть  $\mathcal{C} \subset S_{\sim}(\Omega, \mathcal{X})$  — некоторое множество сечений. Пара  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  называется *измеримым метрическим расслоением* над  $\Omega$ , если:

1) функция  $\omega \mapsto \rho_{\omega}(u(\omega), v(\omega))$  измерима для каждой пары элементов  $u, v \in \mathcal{C}$ ;

2) множество  $\mathcal{C}$  послойно плотно в  $\mathcal{X}$ .

Также, как и в случае измеримых банаховых расслоений, для измеримого метрического расслоения  $\mathcal{X}$  определяются пространство  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$  всех  $\mathcal{C}$ -измеримых сечений расслоения  $\mathcal{X}$  и  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  — факторизация  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$  по отношению к равенству почти всюду. Класс, содержащий  $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ , обозначим через  $\tilde{u}$ .

Для каждой пары элементов  $\tilde{u}, \tilde{v} \in L_0(\Omega, \mathcal{X})$  вводится  $L_0(\Omega)$ -значная метрика  $d(\tilde{u}, \tilde{v}) = [\rho_{\omega}(u(\omega), v(\omega))]^{\sim}$ .

Если  $\mathcal{X}$  — измеримое метрическое расслоение над  $\Omega$ , такое, что  $(\mathcal{X}(\omega), \rho_{\omega})$  — полно для всех  $\omega \in \Omega$ , то пространство  $(L_0(\Omega, \mathcal{X}), d)$  также является полным [7].

Пусть  $X$  — произвольное пространство с  $L_0(\Omega)$ -значной метрикой. Тогда существует измеримое метрическое расслоение полных пространств  $\mathcal{X}$  над  $\Omega$ , такое, что  $X$  изометрически изоморфно подпространству  $(L_0(\Omega, \mathcal{X}), d)$  [7].

Пусть теперь  $\nabla_{\omega}, \omega \in \Omega$  — полные булевы алгебры со строго положительными числовыми мерами  $m_{\omega}$ . Положим  $\rho_{\omega}(e, g) = m_{\omega}(e \Delta g)$ ,  $e, g \in \nabla_{\omega}$ . Тогда известно, что  $(\nabla_{\omega}, \rho_{\omega})$  — полные метрические пространства [8, с. 206]. Пусть  $(\nabla, \mathcal{C})$  — измеримое метрическое расслоение над  $\Omega$ , такое, что  $\nabla(\omega) = \nabla_{\omega}$  для всех  $\omega \in \Omega$ . Пара  $(\nabla, \mathcal{C})$  называется *измеримым расслоением булевых алгебр* над  $\Omega$ , порожденным семейством  $(\nabla_{\omega}, m_{\omega})_{\omega \in \Omega}$ , если:

(1)  $Ce \in \mathcal{C}$  для всех  $e \in \mathcal{C}$ , где  $Ce : \omega \in \text{dom}(e) \mapsto Ce(\omega)$ ;

(2)  $e_1 \vee e_2 \in \mathcal{C}$  для всех  $e_1, e_2 \in \mathcal{C}$ , где  $e_1 \vee e_2 : \omega \in \text{dom}(e_1) \cap \text{dom}(e_2) \mapsto e_1(\omega) \vee e_2(\omega)$ .

Пусть  $(\nabla, \mathcal{C})$  — измеримое расслоение булевых алгебр над  $\Omega$ . В пространстве  $L_0(\Omega, \nabla)$  введем отношение частичного порядка, полагая  $\tilde{e} \leq \tilde{g}$ , если  $e(\omega) \leq g(\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$  и определим отображение  $\tilde{m} : L_0(\Omega, \nabla) \mapsto L_0(\Omega)$  по формуле  $\tilde{m}(\tilde{e}) := [m_{\omega}(e(\omega))]^{\sim}$ . Тогда, относительно введенного отношения частичного порядка,  $L_0(\Omega, \nabla)$  становится полной булевой алгеброй, а  $\tilde{m}$  —  $L_0(\Omega)$ -значной строго положительной мерой на  $L_0(\Omega, \nabla)$  [7].

Каждому элементу  $e = \tilde{\chi}_A$ ,  $A \in \Sigma$  из булевой алгебры  $\nabla(\Omega)$  идемпотентов в  $L_0(\Omega)$  сопоставим элемент  $\tilde{e} \in L_0(\Omega, \nabla)$ , где

$$e(\omega) = \begin{cases} 1_\omega, & \text{если } \omega \in A, \\ 0_\omega, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Тогда  $\nabla(\Omega)$  отождествляется с правильной булевой подалгеброй в  $L_0(\Omega, \nabla)$ , т. е.  $L_0(\Omega, \nabla)$  можно считать модулем над  $\nabla(\Omega)$ , а меру  $\tilde{m}$  — модульной, т. е.  $\tilde{m}(\tilde{g}\tilde{e}) = \tilde{g}\tilde{m}(\tilde{e})$  для любых  $\tilde{e} \in L_0(\Omega, \nabla)$  и  $\tilde{g} \in \nabla(\Omega)$ .

**Теорема 1.4** [7]. Пусть  $\hat{\nabla}$  — произвольная полная булева алгебра,  $m$  — строго положительная  $L_0(\Omega)$ -значная мера на  $\hat{\nabla}$ , причем  $\nabla(\Omega)$  является правильной подалгеброй в  $\hat{\nabla}$ , и  $m(ge) = g m(e)$  для всех  $g \in \nabla(\Omega)$  и  $e \in \hat{\nabla}$ . Тогда существует такое измеримое расслоение булевых алгебр  $(\nabla, \mathcal{C})$  над  $\Omega$ , что булевы алгебры  $\hat{\nabla}$  и  $L_0(\Omega, \nabla)$  изометрически изоморфны.

Пусть  $(X_\omega, \tau_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  — метризуемые топологические векторные решетки. Пусть  $\rho_\omega$  — метрика в  $X_\omega$ , порождающая топологию  $\tau_\omega$  (без ограничения общности можно считать, что метрика  $\rho_\omega$  инвариантна относительно сдвигов, т. е.  $\rho_\omega(x, y) = \rho_\omega(x - y, 0)$  для всех  $x, y \in X_\omega$ ).

Пусть  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  — измеримое метрическое расслоение над  $\Omega$ , такое, что  $\mathcal{X}(\omega) = X_\omega$  для всех  $\omega \in \Omega$ . Пара  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  называется *измеримым расслоением метризуемых топологических векторных решеток* над  $\Omega$ , если

- 1)  $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in \mathcal{C}$  для всех  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  и  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ ;
- 2)  $c_1 \vee c_2 \in \mathcal{C}$  для всех  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ .

**Теорема 1.5** [7]. Если  $\mathcal{X}$  — измеримое расслоение полных метризуемых топологических векторных решеток, то  $(L_0(\Omega, \mathcal{X}), d)$  является полной метризуемой топологической векторной решеткой с  $L_0(\Omega)$ -значной метрикой  $d$ , при этом  $d$  обладает свойством  $d(e\tilde{u}, 0) = ed(\tilde{u}, 0)$  для всех  $\tilde{u} \in L_0(\Omega, \mathcal{X})$ ,  $e \in \nabla(\Omega)$ .

## 2. Решетки Орлича — Канторовича, ассоциированные с $L_0$ -значной мерой

В этом разделе напомним определение решетки Орлича — Канторовича, ассоциированной с  $L_0$ -значной мерой и доказывается несколько формул для вычисления нормы Орлича.

Непрерывная выпуклая четная функция  $M : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  называется *N-функцией*, если  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{M(t)}{t} = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \infty$ . Вся-

кая N-функция  $M$  имеет вид  $M(t) = \int_0^{|t|} p(s) ds$ , где  $p(t)$  — положительная при  $t > 0$ , непрерывная справа при  $t \geq 0$ , неубывающая функция, для которой  $p(0) = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty$  [10]. Положим

$q(s) := \sup \{t : p(t) \leq s\}$ ,  $s \geq 0$ . Тогда функция  $M^*(t) := \int_0^{|t|} q(s) ds$  также является N-функцией, и она называется дополнительной N-функцией к  $M$  [10].

Говорят, что N-функция  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, если существуют такие постоянные  $k > 0$ ,  $t_0 > 0$ , что  $M(2t) \leq kM(t)$  при  $t \geq t_0$ .

Пусть  $M$  — произвольная N-функция,  $x \in L_0(\nabla)$ . Множество  $G = \{t \in X(\nabla) : -\infty < x(t) < +\infty\}$  всюду плотно и открыто в  $X(\nabla)$ . Положим  $y(t) = M(x(t))$ ,  $t \in G$ . Так как  $y = y(t)$  — непрерывная функция на  $G$ , то существует единственное непрерывное продолжение функции  $y(t)$  на все  $X(\nabla)$  [9, V. 2.1]. Обозначим это продолжение через  $\bar{y}$  и положим  $M(x) = \bar{y}$ . Множество

$$L_M^0 := L_M^0(\nabla, m) := \{x \in L_0(\nabla) : M(x) \in L_1(\nabla, m)\}$$

называется  $L_0$ -классом Орлича, а линейное пространство

$$L_M := L_M(\nabla, m) := \{x \in L_0(\nabla) : xy \in L_1(\nabla, m), \forall y \in L_{M^*}^0\}$$

называется  $L_0$ -пространством Орлича, где  $M^*$  — дополнительная N-функция к  $M$ . Если  $m$  является числовой мерой (т. е.  $(L_0(\Omega) = \mathbb{R})$ ), то приведенные выше определения совпадают с известными определениями класса и пространства Орлича измеримых функций (см., например, [10]).

Имеют место следующие вложения:

$$C(X(\nabla)) \subset L_M^0(\nabla, m) \subset L_M(\nabla, m) \subset L_1(\nabla, m).$$

На  $L_M(\nabla, m)$  определим  $L_0$ -значную норму Орлича, полагая

$$\|x\|_M := \sup \left\{ \left| \int xy dm \right| : y \in A(M^*) \right\}, \quad x \in L_M(\nabla, m),$$



где  $A(M^*) = \{y \in L_{M^*}^0 : \int M^*(y) dm \leq 1\}$ ,  $1$  — единичный элемент  $L_0(\Omega)$ . Пара  $(L_M(\nabla, m), \|\cdot\|_M)$  является решеткой Банаха — Канторовича и ее естественно назвать *решеткой Орлича — Канторовича, ассоциированной с  $L_0$ -значной мерой* [3].

Как и в классических пространствах Орлича, наряду с нормой Орлича  $\|\cdot\|_M$  в  $L_M(\nabla, m)$  можно рассматривать  $L_0$ -значную норму Люксембурга:  $\|x\|_{(M)} := \inf\{\lambda \in L_0(\Omega) : \int M(\lambda^{-1}x) dm \leq 1, \lambda \text{ — обратимый положительный элемент}\}$ , при этом пара  $(L_M(\nabla, m), \|\cdot\|_{(M)})$  является решеткой Банаха — Канторовича, которую также будем называть *решеткой Орлича — Канторовича, ассоциированной с  $L_0$ -значной мерой* [4].

Обычная формула для нормы Орлича пока не позволяет производить фактическое вычисление нормы. В связи с этим возникает задача о других выражениях для нормы Орлича.

Через  $L_0^+(\Omega)$  обозначим множество всех положительных обратимых элементов из  $L_0(\Omega)$ . Положим  $\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, e_i \in \nabla, i = \overline{1, n} \right\}$ . Поскольку  $\Gamma \subset C(X(\nabla))$ , то  $\Gamma \subset L_M(\nabla, m)$ .

В следующих утверждениях предлагаются новые способы вычисления нормы Орлича  $\|x\|_M$  в случае, когда  $x \in \Gamma$ .

**Предложение 2.1** (ср. с [10, теорема 10.4]). Пусть  $p(t)$  — правая производная  $N$ -функции  $M(t)$ ,  $x \in \Gamma$ ,  $e = s(\|x\|_M)$ , и пусть существует такой элемент  $y$  из  $L_0^+(\Omega)$ , что имеет место равенство

$$\int M^*(p(y|x)) dm = e. \quad (1)$$

Тогда

$$\|x\|_M = \int p(y|x)|x| dm. \quad (2)$$

◁ В силу (1) имеем

$$\int p(y|x)|x| dm \leq \sup \left\{ \int xz dm : z \in A(M^*) \right\} = \|x\|_M.$$

С другой стороны, из неравенства Юнга [10, с. 24] для любого

$y \in L_0^+(\Omega)$  вытекает, что

$$\begin{aligned} \|x\|_M &\leq y^{-1} \sup \left\{ \left| \int yxz \, dm \right| : z \in A(M^*) \right\} \leq \\ &\leq y^{-1} \sup \left\{ \int (M(yx) + M^*(ez)) \, dm : z \in A(M^*) \right\} = \\ &= y^{-1} \left( e + \int M(yx) \, dm \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Следовательно, в силу (1) имеем

$$\|x\|_M \leq y^{-1} \left( \int M^*(p(y|x)) \, dm + \int M(yx) \, dm \right).$$

Отсюда и из известного равенства [10, с. 24]

$$|t|p(|t|) = M(t) + M^*(p(|t|))$$

получаем, что

$$\|x\|_M \leq y^{-1} \int y|x|p(y|x) \, dm = \int |x|p(y|x) \, dm. \triangleright$$

**Теорема 2.2** (ср. с [10, теорема 10.5]). Для каждого  $x \in \Gamma$  имеет место равенство

$$\|x\|_M = \inf \left\{ y^{-1} \left( e + \int M(yx) \, dm \right) : y \in L_0^+(\Omega) \right\},$$

где  $e = s(\|x\|_M)$ .

◁ Предположим сначала, что функция  $p(t)$  непрерывна. В этом случае, используя рассуждения из [10, с. 108], примененные для вычисления числовой нормы Орлича, получим, что для данного  $x \in \Gamma$  найдется такой элемент  $y \in L_0^+(\Omega)$ , что выполняется равенство (1). Поэтому, в силу доказательства предложения 2.1 получим, что

$$\|x\|_M = y^{-1} \left( e + \int M(yx) \, dm \right).$$

С другой стороны, для любого  $x \in \Gamma$  при любом  $y \in L_0^+(\Omega)$  имеем

$$\|x\|_M = y^{-1} \sup \left\{ \left| \int yxz \, dm \right| : z \in A(M^*) \right\} \leq y^{-1} \left( e + \int M(yx) \, dm \right).$$

Поэтому

$$\|x\|_M = \min \left\{ y^{-1} \left( e + \int M(yx) dm \right) : y \in L_0^+(\Omega) \right\}.$$

Освободимся теперь от предположения о непрерывности  $p(t)$ . Какова бы ни были  $N$ -функция  $M$  и  $\varepsilon > 0$ , легко построить такую  $N$ -функцию  $M_1(t)$  с непрерывной производной, что

$$M(t) < M_1(t) < M((1 + \varepsilon)t) \quad (t > 0).$$

Из этих неравенств вытекает, что  $L_M(\nabla, m) = L_{M_1}(\nabla, m)$  и

$$\|x\|_M \leq \|x\|_{M_1} \leq (e + \varepsilon \cdot \mathbf{1}) \|x\|_M. \quad (4)$$

Кроме того, из неравенств (3) и (4) получим, что

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ y^{-1} \left( e + \int M(yx) dm \right) : y \in L_0^+(\Omega) \right\} \leq \\ & \leq \inf \left\{ y^{-1} \left( e + \int M_1(yx) dm \right) : y \in L_0^+(\Omega) \right\} = \|x\|_{M_1} \leq \\ & \leq (e + \varepsilon \mathbf{1}) \|x\|_M \leq (e + \varepsilon \mathbf{1}) \inf \left\{ y^{-1} \left( e + \int M(yx) dm \right) : y \in L_0^+(\Omega) \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$(e + \varepsilon \mathbf{1})^{-1} \|x\|_{M_1} \leq \inf \left\{ y^{-1} \left( e + \int M(yx) dm \right) : y \in L_0^+(\Omega) \right\}.$$

Следовательно, в силу (4) получим, что

$$\begin{aligned} (e + \varepsilon \mathbf{1})^{-1} \|x\|_M & \leq \inf \left\{ y^{-1} \left( e + \int M(yx) dm \right) : y \in L_0^+(\Omega) \right\} \leq \\ & \leq (e + \varepsilon \mathbf{1}) \|x\|_M. \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varepsilon$ , отсюда получим равенство

$$\|x\|_M = \inf \left\{ y^{-1} \left( e + \int M(yx) dm \right) : y \in L_0^+(\Omega) \right\}. \triangleright$$

### 3. Измеримые расслоения банаховых решеток Орлича — Канторовича, ассоциированных с $L_0$ -значной мерой

Пусть  $\widehat{\nabla}$  — произвольная полная булева алгебра,  $\tilde{m}$  — строго положительная  $L_0(\Omega)$ -значная мера на  $\widehat{\nabla}$ , и  $(\widehat{\nabla}, \widehat{\rho})$  — метрическое пространство с  $L_0$ -значной метрикой  $\widehat{\rho}(e, g) = \tilde{m}(e \Delta g)$ ,  $e, g \in \widehat{\nabla}$ .

По прежнему считаем, что булева алгебра  $\nabla(\Omega)$  идемпотентов в  $L_0(\Omega)$  есть правильная подалгебра в  $\widehat{\nabla}$  и  $\tilde{m}$  обладает свойством модульности, т. е.  $\tilde{m}(ge) = g\tilde{m}(e)$  для всех  $g \in \nabla(\Omega)$  и  $e \in \widehat{\nabla}$ .

В силу теоремы 1.4 существует такое измеримое расслоение  $(\nabla, \mathcal{C})$  булевых алгебр, порожденное семейством  $(\nabla_\omega, m_\omega)_{\omega \in \Omega}$ , что булевы алгебры  $\widehat{\nabla}$  и  $\tilde{\nabla} = L_0(\Omega, \nabla)$  изометрически изоморфны. Обозначим через  $\gamma_\omega$  гомоморфизм из булевой алгебры  $\tilde{\nabla}$  в булеву алгебру  $\nabla_\omega$ , построенный при доказательстве теоремы 1.4 [7], и положим  $e(\omega) := \gamma_\omega(e)$ ,  $e \in \tilde{\nabla}$ . Покажем, что  $\nabla_\omega = \{e(\omega) : e \in \tilde{\nabla}\}$ .

Действительно, пусть  $g \in \nabla_\omega$ , и  $e_k$  — такие элементы из  $\tilde{\nabla}$ , что  $e_k(\omega) \xrightarrow{m_\omega} g$ . Тогда существует подпоследовательность  $e_{k_n}(\omega) \xrightarrow{(o)} g$ . Пусть  $r_n = \inf_{s \geq n} e_{k_s} \in \tilde{\nabla}$ . Согласно [7], получим  $r_n(\omega) = \inf_{s \geq n} (e_{k_s}(\omega))$

и  $\sup_{n \geq 1} r_n(\omega) = \sup_{n \geq 1} \left( \inf_{s \geq n} (e_{k_s}(\omega)) \right) = g$ . Если  $r = \sup_{n \geq 1} r_n$ , то  $r \in \tilde{\nabla}$  и  $r(\omega) = g$ . Это означает, что  $\gamma_\omega(\tilde{\nabla}) = \nabla_\omega$ .

Пусть  $X(\tilde{\nabla})$  и  $X(\nabla_\omega)$  — стоуновские компакты, соответствующие булевым алгебрам  $\tilde{\nabla}$  и  $\nabla_\omega$ ,  $\omega \in \Omega$ . Рассмотрим в  $L_0(\tilde{\nabla}) = C_\infty(X(\tilde{\nabla}))$   $L_0$ -значную метрику  $\tilde{\rho}(u, v) = \int \frac{|u-v|}{1+|u-v|} dm$ ,  $u, v \in L_0(\tilde{\nabla})$  и в  $L_0(\nabla_\omega) = C_\infty(X(\nabla_\omega))$  числовую метрику  $\rho_\omega(u(\omega), v(\omega)) = \int \frac{|u(\omega)-v(\omega)|}{1+|u(\omega)-v(\omega)|} dm_\omega$ ,  $u(\omega), v(\omega) \in L_0(\nabla_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ .

Как показано в [7],  $\{(L_0(\nabla_\omega), \rho_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$  порождает измеримое расслоение метризуемых топологических векторных решеток  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ , такое, что метризуемые топологические  $L_0$ -векторные решетки  $(L_0(\tilde{\nabla}), \tilde{\rho})$  и  $(L_0(\Omega, \mathcal{X}), d)$  порядково изометрически изоморфны, при этом

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, e_i \in \mathcal{M}(\Omega, \nabla), i = \overline{1, n} \right\},$$

а множество  $\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{e}_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, \tilde{e}_i \in \tilde{\nabla}, i = \overline{1, n} \right\}$  плотно в  $(L_0(\tilde{\nabla}), \tilde{\rho})$  ( $\Gamma(\omega)$  плотно в  $(L_0(\nabla_\omega), \rho_\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ ).

Пусть  $M$  —  $N$ -функция,  $M^*$  — дополнительная  $N$ -функция к  $M$ , и  $M, M^*$  удовлетворяют  $\Delta_2$ -условию при  $t_0 = 0$ , т. е.  $M(2t) \leq kM(t)$  и  $M^*(2t) \leq kM^*(t)$  для всех  $t \geq 0$  и некоторого  $k$ . Пусть  $L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  — решетка Орлича — Канторовича, ассоциированная с  $L_0$ -значной мерой  $\tilde{m}$  на  $\tilde{\nabla}$  (см. п. 2),  $L_M(\nabla_\omega, m_\omega)$  — обычные классические пространства Орлича, построенные по числовой мере  $m_\omega$  на  $\nabla_\omega$ . Через  $\|\cdot\|_M$  и  $\|\cdot\|_M^\omega$  обозначим нормы Орлича соответственно в  $L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  и  $L_M(\nabla_\omega, m_\omega)$ .

Пусть  $\mathcal{X}$  — банахово расслоение над  $\Omega$ , слоями которого являются пространства  $L_M(\nabla_\omega, m_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ . Положим

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, e_i \in \mathcal{M}(\Omega, \nabla), i = \overline{1, n} \right\}.$$

Ясно, что  $\mathcal{C}$  является множеством сечений расслоения  $\mathcal{X}$ , определенных п. в. на  $\Omega$ , т. е.  $\mathcal{C} \subset S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$ .

**Теорема 3.1.** Пара  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  является измеримым расслоением банаховых решеток над  $\Omega$ , таким, что решетки Банаха — Канторовича  $L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  и  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  порядково изометрически изоморфны.

◁ Покажем, что  $\Gamma$  плотно в  $(L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m}), \|\cdot\|_M)$ . Пусть  $x \in L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  и  $W$  — заполненная окрестность нуля в  $(L_0(\Omega), t)$ , где  $t$  — топология сходимости локально по мере в  $L_0(\Omega)$  (напомним, что  $f_n \xrightarrow{t} f$ ,  $f_n, f \in L_0(\Omega)$ , если  $f_n \chi_A \rightarrow f \chi_A$  по мере  $\mu$  для любого  $A \in \Sigma$ ,  $\mu(A) < \infty$ ; окрестность  $W$  нуля в  $(L_0(\Omega), t)$  называется заполненной, если из  $|f| \leq |g|$ ,  $f \in L_0(\Omega)$ ,  $g \in W$  следует, что  $f \in W$ ). Выберем заполненную окрестность нуля  $W_1$  в  $(L_0(\Omega), t)$  так, чтобы  $W_1 + W_1 \subset W$ . Положим  $g_n = \{|x| \geq n\} \in \tilde{\nabla}$ . Ясно, что  $g_n \downarrow 0$ , и поскольку  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то  $M(x) \in L_1(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  и, следовательно,  $\int M(x) g_n d\tilde{m} \downarrow 0$ . Отсюда вытекает, что  $\int M(x g_n) d\tilde{m} = \int M(x) g_n d\tilde{m} \in W_1$  при  $n \geq n_0$  для некоторого номера  $n_0$ .

Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы  $M(\varepsilon) \tilde{m}(\mathbf{1}) \in W_1$ . Так как  $|x|(\mathbf{1} - g_{n_0}) \leq n_0$ , то используя спектральную теорему для  $L_0(\tilde{\nabla})$  можно вы-

брать  $y_\varepsilon = \sum_{i=1}^l r_i e_i \in \Gamma \subset L_0(\tilde{\nabla})$ , где  $r_i \in \mathbb{R}$ ,  $e_i \in \tilde{\nabla}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , так, чтобы  $(\mathbf{1} - g_{n_0}) y_\varepsilon = y_\varepsilon$  и  $|x(\mathbf{1} - g_{n_0}) - y_\varepsilon| < \varepsilon \mathbf{1}$ , т. е.  $\int M(x(\mathbf{1} - g_{n_0}) - y_\varepsilon) d\tilde{m} \in W_1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int M(x - y_\varepsilon) d\tilde{m} = \\ &= \int M(x g_{n_0}) d\tilde{m} + \int M(x(\mathbf{1} - g_{n_0}) - y_\varepsilon) d\tilde{m} \in W_1 + W_1 \subset W. \end{aligned}$$

Это означает, что существует последовательность  $\{y_n\} \subset \Gamma$ , для которой  $\int M(x - y_n) d\tilde{m} \xrightarrow{t} 0$ . Отсюда в силу теоремы 3.1 [4] следует, что  $\|x - y_n\|_M \xrightarrow{t} 0$ , т. е.  $\Gamma$  плотно в  $(L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m}), \|\cdot\|_M)$ . Аналогично устанавливается, что  $\Gamma(\omega)$  плотно в  $(L_M(\nabla_\omega, m_\omega), \|\cdot\|_M^\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ .

Далее нам понадобятся следующие две леммы.

**Лемма 3.2.** Если  $x \in L_0(\tilde{\nabla})$ , то  $M(x)(\omega) = M(x(\omega))$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ .

◁ Пусть  $x \in \Gamma$ , т. е.  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{e}_i$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{e}_i \wedge \tilde{e}_j = 0$  при  $i \neq j$ .

Тогда  $M(x) = \sum_{i=1}^n M(\lambda_i \tilde{e}_i) \in \Gamma$ , и  $x(\omega) = l(x)(\omega) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_\omega(\tilde{e}_i)$ , где  $l$  — отображение из  $\Gamma$  в  $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{X})$ , построенное при доказательстве предложения 3.4 [7],  $\gamma_\omega : \tilde{\nabla} \rightarrow \nabla_\omega$  — соответствующий гомоморфизм булевых алгебр [7, теорема 1.4] (напомним, что  $\gamma_\omega(\tilde{\nabla}) = \nabla_\omega$ ). Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} M(x)(\omega) &= \left( \sum_{i=1}^n M(\lambda_i \tilde{e}_i) \right) (\omega) = l \left( \sum_{i=1}^n M(\lambda_i \tilde{e}_i) \right) (\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^n M(\lambda_i \gamma_\omega(\tilde{e}_i)) = M \left( l \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{e}_i \right) (\omega) \right) = M(x(\omega)) \end{aligned}$$

для всех  $\omega \in \Omega$ .

Если  $x$  — произвольный элемент из  $L_0(\tilde{\nabla})$ , то существует такая последовательность положительных простых элементов  $\{x_n\}$ , что  $x_n \uparrow |x|$ . Тогда  $M(x_n) \uparrow M(|x|) = M(x)$  [3, лемма 2.4]. Поскольку  $x_n(\omega) \uparrow x(\omega)$  и  $M(x_n)(\omega) \uparrow M(x)(\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$  [7, теорема 4.1], то получим, что  $M(x_n)(\omega) \rightarrow M(x)(\omega)$  и  $M(x_n(\omega)) \rightarrow M(x(\omega))$  п. в.

Следовательно,  $M(x)(\omega) = \lim_n M(x_n)(\omega) = \lim_n M(x_n(\omega)) = M(x(\omega))$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ .  $\triangleright$

**Лемма 3.3.** Пусть  $\tilde{x} \in L_0(\nabla)$  и  $\{x(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$  — представитель из класса  $\tilde{x} \in L_0(\tilde{\nabla})$ ,  $x(\omega) \in L_0(\nabla_\omega)$ . Тогда элемент  $\tilde{x} \in L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  тогда и только тогда, когда  $x(\omega) \in L_M(\nabla_\omega, m_\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ , при этом  $\|\tilde{x}\|_M = [\|x(\omega)\|_M^\omega]^\sim$ .

$\triangleleft$  Пусть  $\tilde{x} \in L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$ , и  $x(\omega) \in L_0(\nabla_\omega)$ . Поскольку  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то  $M(|\tilde{x}|) \in L_1(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$ . Тогда в силу теоремы 3.3 [7],  $M(\tilde{x})(\omega) \in L_1(\nabla_\omega, m_\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ . Отсюда, используя лемму 3.2, получим, что  $M(x(\omega)) \in L_1(\nabla_\omega, m_\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ . Это означает, что  $x(\omega) \in L_M(\nabla_\omega, m_\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ .

Обратно, пусть  $\tilde{x} \in L_0(\nabla)$  и  $\{x(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$  — представитель из класса  $\tilde{x}$ , причем  $x(\omega) \in L_M(\nabla_\omega, m_\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ . Тогда  $M(x(\omega)) \in L_1(\nabla_\omega, m_\omega)$ , т. е.  $M(\tilde{x})(\omega) \in L_1(\nabla_\omega, m_\omega)$  (см. лемму 3.2) для п. в.  $\omega \in \Omega$ . Отсюда  $M(\tilde{x}) \in L_1(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  [7], т. е.  $\tilde{x} \in L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$ .

Таким образом, для  $\tilde{x} = \{x(\omega)\}_{\omega \in \Omega} \in L_0(\tilde{\nabla})$  элемент  $\tilde{x} \in L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  тогда и только тогда, когда  $x(\omega) \in L_M(\nabla_\omega, m_\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ . Остается показать равенство  $\|\tilde{x}\|_M = [\|x(\omega)\|_M^\omega]^\sim$ .

Так как  $L_0(\Omega)$  имеет счетный тип (т. е. любое семейство ненулевых попарно дизъюнктивных идемпотентов из  $L_0(\Omega)$  не более, чем счетно), то, согласно [9], найдется такая возрастающая последовательность  $0 \leq y_n \in A(M^*)$ , что  $\|x\|_M = \sup_{n \geq 1} \left\{ \int |x| y_n d\tilde{m} \right\}$ . Отсюда и из теоремы 4.1 [7] получим, что

$$\|x\|_M(\omega) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \int |x| y_n d\tilde{m} \right\}(\omega) = \sup_{n \geq 1} \left[ \left( \int |x| y_n dm \right)(\omega) \right] \leq \|x(\omega)\|_M^\omega$$

для п. в.  $\omega \in \Omega$ .

С другой стороны, если  $\tilde{x} \in \Gamma$ , то, используя опять счетность типа  $L_0(\Omega)$  и теорему 2.2, находим последовательность  $\{y_n\} \in L_0^+(\Omega)$  такую, что

$$\|\tilde{x}\|_M = \inf \left\{ y_n^{-1} \left( e + \int M(y_n \tilde{x}) d\tilde{m} \right) \right\}.$$

Следовательно, для п. в.  $\omega \in \{\|x\|_M(\omega) > 0\}$  имеем, что [7, теоре-

ма 4.1]

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}\|_M(\omega) &= \inf_{n \geq 1} \left\{ [y_n(\omega)]^{-1} \left( e(\omega) + \int M(y_n(\omega)) \tilde{x}(\omega) dm_\omega \right) \right\} \geq \\ &\geq \inf_{\lambda > 0} \left\{ \lambda^{-1} \left( 1 + \int M(\lambda \tilde{x}(\omega)) dm_\omega \right) \right\} = \|x(\omega)\|_M^\omega \end{aligned}$$

[10, теорема 10.5].

Таким образом, для любого  $x \in \Gamma$

$$\|\tilde{x}\|_M(\omega) = \|x(\omega)\|_M^\omega \text{ для п. в. } \omega \in \Omega.$$

Пусть  $0 \leq \tilde{x} \in L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$ . Тогда существует  $0 \leq \tilde{x}_n \in \Gamma$ , что  $\tilde{x}_n \uparrow \tilde{x}$ , т. е.  $\tilde{x} - \tilde{x}_n \downarrow 0$ . Следовательно, в силу леммы 2.4 [3]  $M(\tilde{x} - \tilde{x}_n) \downarrow 0$ . Поэтому последовательность  $x_n$  сходится в среднем к элементу  $x$ . Отсюда в силу теоремы 3.1 [4] следует, что  $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_M \xrightarrow{\text{п. в.}} 0$ . Поскольку  $|\|\tilde{x}_n\|_M - \|\tilde{x}\|_M| \leq \|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_M$ , то  $\|\tilde{x}_n\|_M \xrightarrow{\text{п. в.}} \|\tilde{x}\|_M$ . Следовательно,  $\|x_n(\omega)\|_M^\omega = \|\tilde{x}_n\|_M(\omega) \rightarrow \|\tilde{x}\|_M(\omega)$  п. в., т. е.  $\|\tilde{x}\|_M(\omega) \stackrel{\text{п. в.}}{=} \lim \|x_n(\omega)\|_M^\omega$ .

Так как  $\tilde{x}_n \uparrow \tilde{x}$ , то  $x_n(\omega) \uparrow x(\omega)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ . Следовательно,  $\|x_n(\omega)\|_M^\omega \uparrow \|x(\omega)\|_M^\omega$  (свойство нормы Орлича). Это означает, что

$$\|x(\omega)\|_M^\omega = \|\tilde{x}\|_M(\omega) \text{ для п. в. } \omega \in \Omega.$$

Если  $\tilde{x}$  — произвольный элемент из  $L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$ , то для п. в.  $\omega \in \Omega$

$$\|x\|_M(\omega) = \| |x| \|_M(\omega) = \| |x|(\omega) \|_M^\omega = \|x(\omega)\|_M^\omega. \triangleright$$

Продолжаем доказательство теоремы.

Из леммы 3.3 и предыдущих рассуждений следует, что множество сечений  $\mathcal{C}$  является измеримой структурой в  $\mathcal{X}$ , т. е. пара  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  есть измеримое банахово расслоение над  $\Omega$ .

Так как  $((L_M(\nabla_\omega, m_\omega), \|\cdot\|_M^\omega))$  — банахова решетка для каждого  $\omega \in \Omega$ , и  $c_1 \vee c_2 \in \mathcal{C}$  для всех  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ , то пара  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  является измеримым расслоением банаховых решеток над  $\Omega$ .

Рассмотрим решетку Банаха — Канторовича  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  над  $L_0(\Omega)$  (см. теорему 1.3) и покажем, что  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  изометрически порядково изоморфно решетке Орлича — Канторовича  $L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$ .



Пусть  $\tilde{u} \in L_0(\Omega, \mathcal{X})$ , где  $u \in \mathcal{C}$ , т. е.  $u(\omega) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ .

Зададим отображение  $\Phi_0 : \tilde{\mathcal{C}} \mapsto L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$ , полагая  $\Phi_0(\tilde{u}) = \tilde{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{e}_i$ . Тогда, используя лемму 3.3, получим

$$\|\Phi_0(\tilde{u})\|_M = \|\tilde{v}\|_M = [\|v(\omega)\|_M^\omega]^\sim = \left[ \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(\omega) \right\|_M^\omega \right]^\sim = \|\tilde{u}\|_M.$$

Это означает, что  $\Phi_0 : \tilde{\mathcal{C}} \mapsto L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  является изометрией. Очевидно, что  $\Phi_0$  линейно,  $\Phi_0(e\tilde{u}) = e\Phi_0(\tilde{u})$  для всех  $e \in \nabla(\Omega)$  и  $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Кроме того,  $\Phi_0(\tilde{u}) \geq 0$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{u} \geq 0$ . Ясно также, что множество ступенчатых сечений для  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  совпадает с  $\mathcal{C}$ .

Пусть  $\tilde{u} \in L_0(\Omega, \mathcal{X})$ , где  $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ . Существует такая последовательность  $\{u_n\} \subset \mathcal{C}$ , что  $u_n(\omega) \rightarrow u(\omega)$  п. в. по норме Орлича  $\|\cdot\|_M^\omega$ . Следовательно,  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  по норме  $\|\cdot\|$ , т. е.  $\tilde{\mathcal{C}} - (bo)$ -плотно в  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$ . С другой стороны,  $\Phi_0(\tilde{\mathcal{C}}) = \Gamma - (bo)$ -плотно в  $L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$ . Отсюда, в силу предложения 3.1 [7], получим, что  $\Phi_0$  продолжается до порядково изометрического изоморфизма решетки Банаха — Канторовича  $L_0(\Omega, \mathcal{X})$  на  $L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$ .  $\triangleright$

Отметим, что из теоремы 3.1 вытекает, что если  $\tilde{\nabla}$  — полная булева алгебра со строго положительной  $L_0$ -значной мерой, обладающей свойством модульности, то решетка Орлича — Канторовича  $L_M(\tilde{\nabla}, \tilde{m})$  разлагается в измеримое расслоение  $\{L_M(\nabla_\omega, m_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$  обычных классических пространств Орлича.

## Литература

1. Сарымсаков Т. А. Топологические полуполя и их приложения.—Ташкент: Фан, 1989.—192 с.
2. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
3. Закиров Б. С. Решетки Орлича — Канторовича, ассоциированные с  $L_0$ -значной мерой // Узб. мат. журн.—2007.—№ 4.—С. 18–34.
4. Закиров Б. С. Норма Люксембурга в решетке Орлича — Канторовича // Узб. мат. журн.—2007.—№ 2.—С. 32–44.
5. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
6. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.

7. Ганиев И. Г. Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу и его приложениям.—М.: Наука, 2006.—С. 9–49.
8. Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—319 с.
9. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.
10. Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича.—М.: Физматгиз, 1958.—272 с.

Закиров Ботир Савитович  
Ташкент, Институт математики и  
информационных технологий АН РУз;  
Ташкентский институт инженеров  
железнодорожного транспорта  
E-mail: [botirzakirov@list.ru](mailto:botirzakirov@list.ru)

# ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ВЕСОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА НА ЕДИНИЧНОМ ДИСКЕ<sup>1</sup>

**Ф. Д. Кодзоева**

В настоящей работе приводятся результаты о двойственности и интерполяции весовых пространств Бесова  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ ,  $1 < p < \infty$ , на единичном диске  $\mathbb{D}$  комплексной плоскости.

## Введение

Пусть  $\mathbb{D}$  — единичный диск в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Для  $0 < p < \infty$ ,  $-1 < \lambda < \infty$  определим весовое пространство Бесова  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$  как множество аналитических на  $\mathbb{D}$  функций, для которых

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{Np-2} |f^{(N)}(z)|^p d\mu_\lambda(z) < \infty,$$

где

$$d\mu_\lambda(z) = (\lambda + 1)(1 - |z|^2)^\lambda d\mu(z), \quad d\mu(z) = \frac{1}{\pi} dx dy,$$

а  $N$  — фиксированное натуральное число, удовлетворяющее условию  $N > \frac{1-\lambda}{p}$ .

Безвесовое пространство Бесова на случай неограниченной симметричной области было описано в работах [1, 2, 3]. В работах [7] и [8] приведена характеристика функций из весового пространства Бесова  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$  в терминах весового проектора Бергмана, средней осцилляции функции  $f$  в метрике Бергмана и др.

В настоящей работе приводятся результаты о двойственности и интерполяции весовых пространств Бесова  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ .

---

<sup>1</sup>Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 04-01-00862-А.

## 1. Вспомогательные сведения

Формулы и утверждения, приведенные ниже, взяты из [4] и [5]. Пусть  $dm$  — дифференциал весовой меры Лебега. Пространство  $L^p(\mathbb{D}, dm)$  состоит из измеримых на  $\mathbb{D}$  функций  $f$ , удовлетворяющих условию  $\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dm(z) < \infty$ . Пусть  $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$  обозначает весовое пространство Бергмана на  $\mathbb{D}$ , состоящее из аналитических на  $\mathbb{D}$  функций, принадлежащих весовому пространству  $L^2(\mathbb{D}, d\mu_\lambda)$ ,  $-1 < \lambda < \infty$ .

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения:

$$d\nu(z) = \frac{d\mu(z)}{(1 - |z|^2)^2}, \quad d\nu_\lambda(z) = (\lambda + 1)(1 - |z|^2)^\lambda d\nu(z).$$

Следующие два утверждения, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем, для краткости изложения приведем без доказательства.

**Теорема 1.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $-1 < \lambda < \infty$ ,  $1 + \alpha$  не является отрицательным целым числом и функция  $f$  аналитична на  $\mathbb{D}$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$ ;
- 2) функция  $(1 - |z|^2)^t R^{\alpha, t} f(z)$  принадлежит пространству  $L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$  для некоторого положительного  $t > \frac{1-\lambda}{p}$ , где  $1 + \alpha + t$  не является целым отрицательным числом;
- 3) функция  $(1 - |z|^2)^t R^{\alpha, t} f(z)$  принадлежит пространству  $L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$  для всех положительных  $t > \frac{1-\lambda}{p}$ , где  $1 + \alpha + t$  не является целым отрицательным числом.

**Следствие 1.** Пусть  $0 < p < \infty$ ,  $t$  — такое положительное число, что  $t > \frac{1-\lambda}{p}$  и  $2 + \alpha$  не является целым отрицательным числом. Тогда  $R^{\alpha, t}$  есть ограниченный обратимый оператор, действующий из  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$  в  $\mathcal{A}_{pt-2+\lambda}^p(\mathbb{D})$ .

## 2. Интерполяция пространств Бесова

Пусть  $[B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D}), B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})]_\theta$  обозначает интерполяционное пространство, полученное методом комплексной интерполяции.

**Теорема 2.** Пусть  $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ . Если  $\theta \in (0, 1)$  и  $-1 < \lambda < \infty$ , то

$$[B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D}), B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})]_\theta = B_p^\lambda(\mathbb{D}), \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

с точностью до эквивалентности норм.

◁ Пусть  $\|f\|_{*,B_p^\lambda(\mathbb{D})} = \inf\{\|\varphi\|_{L^p(d\nu_\lambda)} : P_{\mathbb{D}}^\lambda \varphi = f\}$  — фактор-норма в пространстве  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ .

Если  $f \in B_p^\lambda(\mathbb{D})$ , то согласно теореме 3.3 из [8] существует функция  $g \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$  такая, что  $f = P_{\mathbb{D}}^\lambda g$  и  $\|g\|_{L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)} \leq C_1 \|f\|_{*,B_p^\lambda(\mathbb{D})}$ , где  $C_1 = C_1(p)$  — постоянная, не зависящая от  $f$ .

Для любого комплексного числа  $\xi$  такого, что  $0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 1$  введем обозначение

$$g_\xi(z) = \frac{g(z)}{|g(z)|} |g(z)|^{p\left(\frac{1-\xi}{p_0} + \frac{\xi}{p_1}\right)}, \quad z \in \mathbb{D},$$

и пусть  $f_\xi = P_{\mathbb{D}}^\lambda g_\xi$ . Легко заметить, что  $f_\xi \in B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D})$  для  $\operatorname{Re} \xi = 0$  и  $f_\xi \in B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})$  для  $\operatorname{Re} \xi = 1$ .

Согласно теореме 3.3 из [8] для всех  $\xi$  таких, что  $\operatorname{Re} \xi = 0$ , справедливо неравенство

$$\|f_\xi\|_{*,B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D})}^{p_0} \leq C_2 \|f\|_{*,B_p^\lambda(\mathbb{D})}^p,$$

и, аналогично, для всех  $\xi$  таких, что  $\operatorname{Re} \xi = 1$ , выполняется

$$\|f_\xi\|_{*,B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})}^{p_1} \leq C_2 \|f\|_{*,B_p^\lambda(\mathbb{D})}^p,$$

где  $C_2 = C_2(p)$  — постоянная, не зависящая от  $f$ .

Поскольку  $f_\theta = f$ , то  $f \in [B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D}), B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})]_\theta$ , причем

$$\|f\|_{[B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D}), B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})]_\theta} \leq C \|f\|_{*,B_p^\lambda(\mathbb{D})}.$$

С другой стороны, если  $f \in [B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D}), B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})]_\theta$ , то существует функция  $f_\xi$ , где  $\operatorname{Re} \xi \in [0, 1]$  такая, что  $f_\xi \in B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D})$ , когда  $\operatorname{Re} \xi = 0$ ,  $f_\xi \in B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})$ , когда  $\operatorname{Re} \xi = 1$ , и  $f_\theta = f$ .

Обозначим

$$g_\xi = C(1 - |z|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{f_\xi(w)}{(1 - z\bar{w})^{4+\lambda}} d\mu_\lambda(w), \quad 0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Согласно теореме 1 имеем  $g_\xi \in L^{p_0}(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$  для  $\operatorname{Re} \xi = 0$ , причем,

$$\|g_\xi\|_{L^{p_0}(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)} \geq \|f_\xi\|_{*,B_{p_0}^\lambda(\mathbb{D})},$$

и  $g_\xi \in L^{p_1}(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$  для  $\operatorname{Re} \xi = 1$ , причем,

$$\|g_\xi\|_{L^{p_1}(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)} \geq \|f_\xi\|_{*, B_{p_1}^\lambda(\mathbb{D})}.$$

По свойствам комплексной интерполяции в  $L^p$ -пространствах мы получим, что  $g_\theta \in L^p(\mathbb{D}, d\nu_\lambda)$ , а это, согласно теореме 3.3 из [8], означает, что  $f = f_\theta = P_{\mathbb{D}}^\lambda g_\theta$  принадлежит пространству  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ , что и завершает доказательство теоремы.  $\triangleright$

### 3. Двойственность пространств Бесова

Введем обозначение

$$V^\lambda f(z) = 3(1 - |z|^2)^2 R^{\lambda, 2} f(z), \quad f \in H(\mathbb{D}). \quad (1)$$

**Лемма 1.** Пусть  $f$  и  $g$  — ограниченные аналитические функции на  $\mathbb{D}$ , тогда справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} d\mu_\lambda(z) = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{V^\lambda g(z)} d\mu_\lambda(z).$$

**Теорема 3.** Пусть  $1 < p < \infty$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $-1 < \lambda < \infty$  и

$$\langle f, g \rangle_\lambda^* = \int_{\mathbb{D}} V^\lambda f(z) \overline{V^\lambda g(z)} d\nu_\lambda(z), \quad f \in B_p^\lambda(\mathbb{D}), \quad g \in B_q^\lambda(\mathbb{D}). \quad (2)$$

Тогда  $(B_p^\lambda(\mathbb{D}))^* \cong B_q^\lambda(\mathbb{D})$  с точностью до эквивалентности норм.

$\triangleleft$  Каждая из функций  $g \in B_q^\lambda(\mathbb{D})$  посредством скалярного произведения (2) порождает ограниченный линейный функционал на  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$ .

Чтобы показать, что каждый ограниченный линейный функционал  $F$  на  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$  возникает таким образом, напомним, что согласно следствию 1 оператор  $R^{\lambda, 2}$  является ограниченным обратимым оператором, действующим из  $B_p^\lambda(\mathbb{D})$  в  $\mathcal{A}_{2(p-1)+\lambda}^p$ .

Таким образом, условие  $F \in (B_p^\lambda(\mathbb{D}))^*$  равносильно тому, что  $F \circ R_{\lambda, 2} \in (\mathcal{A}_{2(p-1)+\lambda}^p(\mathbb{D}))^*$ , что, согласно теореме 2.12 из [5], эквивалентно существованию функции  $\varphi \in \mathcal{A}_{2(p-1)+\lambda}^q$  такой, что

$$F \circ R_{\lambda, 2}(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{\varphi(z)} (1 - |z|^2)^{2(p-1)} d\mu_\lambda(z)$$

для всех функций  $f \in \mathcal{A}_{2(p-1)+\lambda}^p(\mathbb{D})$ .

Пусть

$$g(z) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)(1 - |w|^2)^{2(p-1)}}{(1 - z\bar{w})^{2+\lambda}} d\mu_\lambda(z).$$

Поскольку  $\varphi \in \mathcal{A}_{2(p-1)+\lambda}^q$ , то, очевидно,

$$\varphi(w)(1 - |w|^2)^{2p-2} \in L^q(\mathbb{D}, d\nu_\lambda).$$

Тогда, согласно теореме 3.3 из [8], функция  $g(z) = P_{\mathbb{D}}^\lambda[\varphi(w)(1 - |w|^2)^{2p-2}]$  принадлежит пространству  $B_q^\lambda(\mathbb{D})$ . По теореме Фубини

$$F \circ R_{\lambda,2}(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} d\mu_\lambda(z), \quad f \in \mathcal{A}_{2(p-1)+\lambda}^p(\mathbb{D}).$$

Тогда

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} R^{\lambda,2} f(z) \overline{g(z)} d\mu_\lambda(z), \quad f \in B_p^\lambda(\mathbb{D}).$$

По лемме 1 имеем

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} R^{\lambda,2} f(z) \overline{V^\lambda g(z)} d\mu_\lambda(z),$$

или, что то же самое,

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} V^\lambda f(z) \overline{V^\lambda g(z)} d\nu_\lambda(z). \triangleright$$

Аналогично доказывается и следующая теорема о двойственности.

**Теорема 4.** Пусть  $1 < p < \infty$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $-1 < \lambda < \infty$  и

$$\langle f, g \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{D}} f'(z) \overline{g'(z)} d\mu_\lambda(z), \quad f \in B_p^\lambda(\mathbb{D}), \quad g \in B_q^\lambda(\mathbb{D}).$$

Тогда  $(B_p^\lambda(\mathbb{D}))^* \cong B_q^\lambda(\mathbb{D})$  с точностью до эквивалентности норм.

**Литература**

1. *Zhu K.* Analytic Besov spaces // J. of Math. Analysis and Applications.—1991.—V. 157.—P. 318–336.
2. *Zhu K.* Holomorphic Besov spaces on bounded symmetric domains // Quarterly J. Math. Oxford (2).—1995.—V. 46.—P. 239–256.
3. *Zhu K.* Holomorphic Besov spaces on bounded symmetric domains, II // Indiana Univ. Math. J.—1995.—V. 44, № 4.—P. 1017–1031.
4. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman spaces.—New York: Springer-Verlag, 2000.—289 p.
5. *Zhu K.* Spaces of holomorphic functions in the unit ball. Graduate texts in Mathematics.—Berlin etc.: Springer, 2004.—273 p.
6. *Krantz S.* Function theory of several complex variables.—New-York: John Wiley & Sons, 1982.—321 p.
7. *Karapetyants A. N., Kodzoeva F. D.* Analytic weighted Besov spaces on the unit ball // Proc. A. Razmadze Math. Inst.—2005.—V. 139.—P. 33–39.
8. *Карапетыянц А. Н., Кодзоева Ф. Д.* Характеризация функций из весового аналитического пространства Бесова на единичном диске. Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2006.—347 с.
9. *Садовничий В. А.* Теория операторов.—М: МГУ, 1980.—367 с.

КОДЗОЕВА ФЕРДОС ДЖАБРАИЛОВНА

Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет

E-mail: [ferdos@mail.ru](mailto:ferdos@mail.ru)



БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ ГОЛОМОРФНОСТЬ  
И СУПЕРАНАЛИЗ<sup>1</sup>

В. П. Кондаков

Статья представляет собой обзор некоторых наиболее значимых результатов по бесконечномерной голоморфности, связанных с базисами в пространствах голоморфных функций. Среди них замечания о представлении пространств голоморфных функций на ядерных пространствах Кёте, о базисности системы мономов в аналогичных пространствах на монтелевских пространствах Кёте, а также идеи построения борнологических пространств голоморфных функций и определения алгебр типа Грассмана, исходя из представлений пространств голоморфных функций в виде пространств Кёте.

Под бесконечномерной голоморфностью понимают исследование вопросов, связанных с голоморфными по Гато отображениями между бесконечномерными пространствами при различных дополнительных ограничениях, обусловленных наличием топологий в пространствах и спецификой вопросов [12, 15–20, 23, 24]. Эти дополнительные ограничения позволяют в ряде случаев установить характер сходимости тейлоровских разложений и, иногда, базисность системы мономов, определенной при наличии базиса в исходном пространстве для комплекснозначных голоморфных функций.

В настоящем обзоре приводится некоторая часть результатов по бесконечномерной голоморфности, связанных с базисами в этих пространствах. Автору обзора принадлежат замечания о представлении пространств голоморфных функций на ядерных пространствах Кёте, о базисности системы мономов в аналогичных пространствах на монтелевских пространствах Кёте и идеи построения борнологических пространств голоморфных функций и определения алгебр типа Грассмана, исходя из представлений пространств голоморфных функций в виде пространств Кёте.

В общем случае естественно определять пространства голоморфных функций путем замыкания в различных топологиях равномерной сходимости (или борнологиях) линейной оболочки пространств  $n$ -однородных полиномов (определение напомним ниже) при всех  $n$ .

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00329-а.

В первой части работы обсуждаются реализации пространств голоморфных функций на ядерных пространствах Кёте, а также вопрос базисности системы мономов при более слабых ограничениях.

После того, как в ряде задач квантовой теории назрела необходимость использования функций от антикоммутирующих переменных, соответствующий анализ таких функций (сначала физики) стали называть *суперанализом*, а более общие теории в совокупности — *суперматематикой*.

Это объясняется тем, что для пространства, в котором координаты могут как коммутировать, так и антикоммутировать, принято название *суперпространства*, также как для алгебр и групп Ли с антикоммутирующими параметрами — название *супералгебр* и *супергрупп* Ли.

Во второй части работы описывается переход от реализации пространств голоморфных функций, в которых система мономов образует базис, к алгебрам типа Грассмана.

Алгебры Грассмана и их обобщения уже давно интенсивно изучаются в суперанализе, и для полученных с их использованием суперпространств построена достаточно обширная теория пространств обобщенных функций и дифференциальных операторов [1, 2, 4, 13].

Идея использования понятия суперпространства появилась в работах Ф. А. Березина, а математически строгое определение было дано несколько позже в работах В. С. Владимирова и И. В. Воловича в 1984 г. Основные факты, известные к настоящему моменту изложены в [13].

## 1. Пространства голоморфных функций и их отдельные свойства

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Подмножество  $\mathcal{D}$  действительного (или комплексного) линейного пространства  $X$  называют *конечномерно открытым*, если при каждом выборе элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в  $X$  их линейные комбинации вида

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k,$$

принадлежащие  $\mathcal{D}$ , образуют множество, соответствующее открытому подмножеству пространства  $\mathbb{R}^n$  (или  $\mathbb{C}^n$ ) с векторами  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Так как всякая линейная топология пространства  $X$  индуцирует на каждом конечномерном подпространстве топологию эвклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  (или  $\mathbb{C}^n$ ), то определение конечномерно открытого подмножества в линейном топологическом пространстве эквивалентно следующему.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'.** Подмножество  $\mathcal{D}$  линейного топологического пространства  $X$  называют *конечномерно открытым*, если любое пересечение  $\mathcal{D}$  с конечномерным подпространством в  $X$  является относительно открытым множеством.

Очевидно, любое открытое множество конечномерно открыто. Примером конечномерно открытого, но не открытого множества, может служить дополнение в линейном топологическом пространстве  $X$  к счетному множеству  $(x_n)_{n=1}^\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $x_0 \neq x_n$  для любого  $n$ ,  $x_n$  линейно независимы.

Действительно,  $\mathcal{D} = X \setminus \{x_n\} \ni x_0$ , а потому не будет открыто, и пересечение любого конечномерного подпространства с  $\mathcal{D}$  может быть дополнением в этом подпространстве к конечному множеству точек из последовательности  $\{x_n\}$  (а значит дополнение к замкнутому множеству).

Если взять в качестве базы топологии в линейном пространстве  $X$  совокупность всех конечномерно открытых множеств, то полученную топологию называют *тонкой*. Тонкая топология индуцирует естественную эвклидову топологию на каждом конечномерном пространстве, однако, тонкая топология не всегда будет линейной топологией. Косвенно отсюда следует также, что непрерывности алгебраических операций сложения и умножения на число во всех конечномерных подпространствах недостаточно, вообще говоря, для того, чтобы они были непрерывны и топология была линейной. В случае счетной размерности  $X$  Какутани и Кли в [22] показали, что тонкая топология в  $X$  будет линейной.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Множество  $V^*(x_0)$  называют *звездным* относительно точки  $x_0$ , если

$$V^*(x_0) = x_0 + G,$$

где  $G$  — уравновешенное множество, т. е. для любого  $g \in G$  и  $\lambda : |\lambda| \leq 1$  множество  $G$  содержит  $\lambda g$ .

Очевидно, если область  $\mathcal{D}$  конечномерно открыта и содержит  $x_0$ ,

то  $\mathcal{D}$  содержит и некоторое звездное множество

$$V^*(x_0) = \{x_0 + g \in V^*(x_0) \Rightarrow x_0 + \lambda g \in V^*(x_0), \quad \forall \lambda : |\lambda| \leq 1\}.$$

Обозначим

$$\rho(x, h) = \sup\{\rho > 0 : |\lambda| \leq \rho \Rightarrow x + \lambda h \in \mathcal{D}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть функция (отображение)  $y = f(x)$  из  $X$  в  $Y$  (линейные пространства) определена в конечномерно открытой области  $\mathcal{D}$ . Предположим, что для каждого  $x \in \mathcal{D}$  и  $h \in X$  выражение

$$\frac{1}{z}[f(x + zh) - f(x)], \quad 0 \leq |z| < \rho(x, h)$$

стремится к единственному пределу в  $Y$  при  $z \rightarrow 0$ . В этом случае говорят, что  $f(x)$  дифференцируема по Гато (( $G$ )-дифференцируема) и

$$\delta f(x, h) = \delta_x^h f = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(x + zh) - f(x)}{z}$$

есть первая вариация  $F(x)$  по направлению  $h$ .

Другими словами,  $f(x)$  обладает Гато-дифференциалом в  $\mathcal{D}$ .

Легко заметить, что  $\delta f(x; \lambda h) = \lambda \delta f(x; h)$ , т. е.  $\delta f(x, h)$  однородна порядка 1 по  $h$ . Линейная комбинация ( $G$ )-дифференцируемых функций  $f$  и  $g$  есть снова ( $G$ )-дифференцируемая функция и

$$\delta_x^h[\alpha f + \beta g] = \alpha \delta_x^h f + \beta \delta_x^h g.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция (отображение)  $f(x)$  из  $X$  в  $Y$  (нормированные пространства) называется однородной порядка  $n$ , если  $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$ .

Такую функцию (отображение) называют ограниченной, если существует такое  $\mathcal{M} > 0$ , что

$$\|f(x)\|_Y \leq \mathcal{M} \|x\|_X^n, \quad \forall x \in X.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть  $X, Y$  — нормированные пространства и  $y = f(x)$  определена в открытой области  $\mathcal{D}$ . Говорят, что  $f(x)$  ( $F$ )-дифференцируема и обладает дифференциалом по Фреше (тотальным дифференциалом) в  $\mathcal{D}$ , если:

1)  $\delta f(x; h)$  существует как ограниченная однородная функция порядка 1 по  $h$ ;

2)

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \delta(x;h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

**Предложение 1** [20].  $f(x)$   $(G)$ -дифференцируема в конечно-мерно открытом множестве  $\mathcal{D}$  в том и только том случае, когда для каждой  $x \in \mathcal{D}$  и  $h \in X$ ,  $f(x+zh)$  — голоморфная функция от  $z$  при  $|z| < \rho(x, h)$ .

◁ Утверждение следует сразу из определения

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dz} f[x + (z_0 + z)h] \right|_{z=0} = \\ & = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f[(x + z_0h) + zh] - f(x + z_0h)}{z} = \delta f(x + z_0h, h). \end{aligned}$$

Если  $f(x)$   $(G)$ -дифференцируема в конечномерно открытом множестве  $\mathcal{D}$  и  $x \in \mathcal{D}$ , то можно определить  $n$ -ю вариацию  $\delta^n f(x; h)$  от  $f(x)$  по направлению  $h$ , как

$$\delta^n f(x; h) = \left[ \frac{d^n}{dz^n} f(x + zh) \right]_{z=0}.$$

Ясно, что  $\delta^n f(x; h)$  однородна порядка (степени)  $n$  по  $h$ .

Позже будет показано, что  $\delta^n f(x; h)$  однородный полином порядка (степени)  $n$  по  $h$ . ▷

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** Функция (отображение)  $y = P(x)$  из  $X$  в  $Y$  (нормированные или локально выпуклые пространства) называется *полиномом* от  $x$  порядка (степени)  $m$ , если для всех  $a, h \in X$  и всех комплексных  $\alpha$

$$P(a + \alpha h) = \sum_{i=0}^m P_i(a, h) \alpha^i,$$

где  $P_i(a, h)$  не зависят от  $\alpha$ ,  $m$  — точный порядок (степень), если  $P_m(a, h) \neq 0$ .

$P(x)$  есть степень или однородный полином порядка  $n$ , если это полином и  $P(\alpha x) = \alpha^n P(x)$  для всех  $x \in X$  и  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Рассмотрим тейлоровское разложение функции  $f(x+zh)$ , которое имеет место для  $|z| < \rho(x, h)$ :

$$f(x + zh) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{d^n}{d\varsigma^n} f(x + \varsigma h) \right|_{\varsigma=0} \frac{z^n}{n!}.$$

В терминах вариаций имеем:

$$f(x + zh) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n f(x, h) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n(x, zh).$$

**Предложение 2** [20]. Пусть  $f(x)$   $(G)$ -дифференцируема в конечномерной открытой области  $\mathcal{D}$ . Тогда для  $x \in \mathcal{D}$  и  $x + h$  из звездного относительно  $x$  подмножества  $\mathcal{D}$  имеем

$$f(x + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n f(x; h).$$

Это следует из предыдущей формулы, если заменить  $zh$  на  $h$ .

В качестве следствия предложения 1 получается следующее утверждение.

**Предложение 3** [20].  $f(x)$  есть  $(G)$ -дифференцируемая функция в конечномерном открытом множестве  $\mathcal{D}$  в том и только том случае, когда для каждого  $x \in \mathcal{D}$  и  $h_1, \dots, h_n \in X$  функция  $f(x + z_1 h_1 + z_2 h_2 + \dots + z_n h_n)$  имеет частные производные всех порядков по  $z_1, z_2, \dots, z_n$  в открытом подмножестве пространства  $Z_n$ , которому соответствуют точки  $x + z_1 h_1 + \dots + z_n h_n$  из  $\mathcal{D}$ .

В определении голоморфного отображения достаточно предполагать, что оно действует в линейных и одновременно топологических пространствах, в каждом из которых алгебраические операции сложения векторов и умножения их на числа были непрерывны на всех конечномерных подпространствах. Такие пространства будем называть *допустимыми* (линейными с допустимыми топологиями).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.** Пусть  $E$  — допустимое пространство над полем комплексных чисел. Функцию  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  называют *голоморфной по Гато*, если она голоморфна на каждом конечномерном подпространстве в  $E$ , что, в силу теоремы Хартогса, эквивалентно условию обычной аналитичности всех композиций  $\varphi$  с линейными функциями, как функций одного комплексного переменного, т. е. аналитичности  $\varphi_{x_1 x_2}(z) \equiv \varphi(x_1 + z x_2)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  при любых  $x_i \in E$ ,  $i = 1, 2$ .

Пространство голоморфных функций по Гато на  $E$  будем обозначать  $\mathcal{H}(E)$ .

В таком же ключе можно определить голоморфные отображения  $f : E \rightarrow F$ , где  $E$  и  $F$  — допустимые пространства, как отображения, для которых голоморфны по Гато все композиции  $f$  с голоморфными

$\mathbb{C}$ -значными функциями на  $F$ , т. е. для любой функции  $\varphi \in \mathcal{H}(F)$ ,  $f_{\varphi, x_1 x_2}(z) \equiv \varphi(f(x_1 + zx_2))$  — аналитическая функция одного переменного для любых  $x_1, x_2 \in E$ . В частном случае локально выпуклого пространства  $F$  можно рассматривать в качестве  $\varphi$  элементы сопряженного  $F'$  (линейный непрерывный функционал на  $F$ ).

Пусть  $E$  — локально выпуклое пространство и  $\mathcal{D} \neq \{0\}$  — открытое подмножество  $E$ . Функцию  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  называют:

- а) *голоморфной*, если  $f$  дифференцируема по Гато и непрерывна на  $\mathcal{D}$ ;
- б) *гипоаналитической*, если  $f$  дифференцируема по Гато и непрерывна на каждом компактном подмножестве в  $\mathcal{D}$ .

В случае, когда  $\mathcal{D}$  — открытое подмножество пространства Фреше  $E$ , т. е. полного метризуемого локально выпуклого пространства, то а) эквивалентно б) и понятия голоморфной и гипоаналитической функций совпадают.

**Лемма 1** [7, 24]. Каждое метризуемое локально выпуклое пространство  $E$  допускает представление в виде индуктивного предела нормированных пространств

$$E_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA, \quad \|e\|_A = \inf\{\lambda > 0 : e \in \lambda A\},$$

относительно тождественных вложений  $J_A : E_A \rightarrow E$ , где  $A$  пробегает всю совокупность  $\mathcal{K}$  замкнутых абсолютно выпуклых предкомпактных множеств из  $E$ .

◁ Будем обозначать индуктивный предел из формулировки леммы через

$$G = \operatorname{ind} \lim_{A \in \mathcal{K}} E_A.$$

Так как тождественные вложения  $J_A : E_A \rightarrow E$  непрерывны в исходной топологии на  $E$ , согласно определению топологии индуктивного предела (сильнейшей локально выпуклой топологии, при которой эти вложения непрерывны), тождественное отображение  $G \rightarrow E$  — непрерывно. Покажем, что и тождественное отображение  $E \rightarrow G$  тоже непрерывно.

Поскольку  $E$  метризуемо и борнологично (пространство Макки), достаточно убедиться, что любая последовательность  $(x_n) \subset E$ , которая сходится к нулю в исходной топологии  $E$ , сходится к нулю и в  $G$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  и топология  $E$  задается системой полунорм

$(\|\cdot\|_r)_{r=1}^\infty$ ,  $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_{r+1}$ , то  $\|x_n\|_r \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) для любого  $r \in \mathbb{N}$ . Выберем последовательность  $(r(n))_{n=1}^\infty$ ,  $r(n) \rightarrow \infty$ , так что  $\|x_n\|_{r(n)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и положим

$$\lambda_n = \sqrt{\|x_n\|_{r(n)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим замкнутую абсолютно выпуклую оболочку  $L$  последовательности  $(\lambda_n^{-1}x_n)_{n=1}^\infty$ . Тогда  $L$  предкомпактно и  $\|x_n\|_L \leq \lambda_n$ , так как  $\|\lambda_n^{-1}x_n\|_L \leq 1$ . Следовательно, последовательность  $(x_n)$  сходится в топологии индуктивного предела  $G$ . Тожественное отображение  $E \rightarrow G$  поэтому является ограниченным (ограниченные в  $E$  множества будут ограничены и в  $G$ ), а значит (ввиду борнологичности), и непрерывным.  $\triangleright$

В частности, из леммы следует, что функция, которая непрерывна на каждом компактном подмножестве пространства Фреше, будет непрерывна и на всем пространстве, т. е. в этом случае гипотеза совпадает с голоморфностью. Очевидно, эти понятия равносильны и в том случае, когда рассматриваются голоморфные функции на открытых подмножествах сопряженных пространств к монтелевским пространствам при наделении этих сопряженных топологиями индуктивных пределов банаховых пространств с полярными ограниченными множествами в качестве единичных шаров.

Примеры несовпадения пространств голоморфных и гипотезических функций, определенных на индуктивных пределах локально выпуклых пространств, можно найти в [17].

В пространстве голоморфных функций на открытом множестве  $U$ , локально выпуклого пространства  $E$ , рассматривают чаще всего топологию  $\tau_0$  равномерной сходимости на всех предкомпактных или компактных подмножествах  $U$ .

Упомянем еще две топологии  $\tau_\omega$  и  $\tau_\delta$ , которые используются для топологизации  $\mathcal{H}(U)$  в ряде работ, где исследовались и соотношения между ними [17].

Топология Нахбина  $\tau_\omega$  определяется всеми полунормами на  $\mathcal{H}(U)$ , которые поддерживаются (ported) компактными подмножествами  $U$ . Полунорму  $p$  на  $\mathcal{H}(U)$  называют *поддерживаемой* компактным множеством  $K$ , если всякий раз, когда  $V$  открыто и  $K \subset V \subset U$ , существует константа  $C_V > 0$  такая, что  $p(f) \leq C_V |f|_V$  для всех  $f \in \mathcal{H}(U)$  (здесь  $V$  предполагается абсолютно выпуклым и  $|\cdot|_V$  — функционал Минковского для  $V$ ).



Топология  $\tau_\delta$  есть топология, определяемая всеми полунормами  $p$  на  $\mathcal{H}(U)$ , со следующим свойством: если  $(U_n)$  есть счетное возрастающее открытое покрытие  $U$ , то существуют  $C > 0$  и  $U_{n(0)}$  такие, что  $p(f) \leq C|f|_{U_{n(0)}}$  для всех  $f \in \mathcal{H}(U)$ .

Сравнение этих топологий в разных ситуациях проводилось, кроме [17], и в других приведенных работах по бесконечномерной голоморфности. Ниже используется исключительно топология  $\tau_0$  или сходные топологии  $\sigma$ -сходимости.

## 2. Предварительные сведения о борнологиях в пространствах Кёте

Пусть  $X$  — некоторое множество и  $S(X)$  — множество всех его подмножеств. Если  $\mathcal{B}$  система подмножеств  $X$ , т. е.  $\mathcal{B} \subset S(X)$ , то говорят, что эта система определяет борнологию на  $X$ , если  $\mathcal{B}$  имеет свойства:

- 1)  $A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{B}$  влечет  $A \cup B \in \mathcal{B}$ ;
- 2)  $A \subset B, B \in \mathcal{B}$  влечет  $A \in \mathcal{B}$ ;
- 3) все одноточечные множества вида  $\{x\}$  принадлежат  $\mathcal{B}$ .

Множество  $X$  с заданной на нем борнологией называют *борнологическим множеством* и обозначают  $(X, \mathcal{B})$ . При этом подмножества борнологии  $\mathcal{B}$  называются *ограниченными*.

Система всех ограниченных множеств линейного топологического пространства  $X$  задает на этом пространстве борнологию, которую называют *борнологией фон Неймана*.

Если  $X$  — линейное (векторное) пространство над полем  $K$  и алгебраические операции — сложения векторов  $(x, y) \rightarrow x + y$  ( $X \times X \rightarrow X$ ) и умножения векторов на элементы из  $K$   $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ , ( $K \times X \rightarrow X$ ) — ограниченные множества переводят в ограниченные (борнологии  $\mathcal{B}$ ), то говорят, что  $\mathcal{B}$  — линейная (векторная) борнология, и она согласуется со структурой линейного пространства.

Легко видеть, что в случае, когда  $X$  — пространство Фреше, борнология фон Неймана будет линейной (векторной) борнологией.

Систему подмножеств  $\mathcal{B}_0$  борнологии  $\mathcal{B}$  на  $X$  называют *базой борнологии* (фундаментальной системой ограниченных множеств), если каждое множество из  $\mathcal{B}$  содержится в некотором множестве из  $\mathcal{B}_0$ .

Базу линейной борнологии можно всегда выбирать с некоторыми дополнительными свойствами из следующего известного утверждения [21].

**Лемма 2.** Всякая линейная борнология на линейном пространстве  $X$  обладает базой ограниченных множеств  $\mathcal{B}_0$  со следующими свойствами:

- $B_1)$  множества из  $\mathcal{B}_0$  уравновешены;
- $B_2)$  для любых  $A, B \in \mathcal{B}_0$  найдется такое  $C \in \mathcal{B}_0$ , что  $A + B \subset C$ ;
- $B_3)$   $\lambda A \in \mathcal{B}_0$  для любых  $A \in \mathcal{B}_0$  и  $\lambda \in K$ ;
- $B_4)$   $\bigcup_{A \in \mathcal{B}_0} A = X$ , т. е.  $\mathcal{B}_0$  образует покрытие  $X$ .

$\triangleleft$  Выберем в  $X$  какую-нибудь базу  $\mathcal{D}$  борнологии  $\mathcal{B}$ . Рассмотрим теперь базу  $\mathcal{D}_1$ , состоящую из уравновешенных оболочек множеств из  $\mathcal{D}$ , которую еще расширим, в случае необходимости, присоединением всех множеств вида  $\lambda A$ ,  $A \in \mathcal{D}_1$ . В результате получим базу борнологии  $\mathcal{B}_0$  с требуемыми свойствами, поскольку алгебраические операции ограничены, а  $B_2)$  выполняется автоматически.  $\triangleright$

Отметим, что верно и обратное утверждение: система множеств  $\mathcal{B}_0$  в линейном пространстве  $X$ , имеющая свойства  $B_1)$ – $B_4)$  является базой линейной борнологии, состоящей из всех подмножеств множеств из  $\mathcal{B}_0$ . Подробнее о линейных борнологиях и выборе их базы можно прочесть, например, в [21] (аналогичный выбор ограниченных множеств в [7, 10, 12]).

Напомним, что последовательность элементов  $(e_n)_{n=0}^\infty$  в локально выпуклом пространстве  $E$  называют (топологическим) базисом, если каждому элементу  $e \in E$  можно и притом единственным образом сопоставить такую последовательность чисел  $(c_n)_{n=0}^\infty$ , что

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_i e_i.$$

В этом случае соответствие  $e \rightarrow c_n$  определяет линейный функционал  $e'_n$  на  $E$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Если все функционалы  $e'_n$  непрерывны, то базис  $(e_n)_{n=0}^\infty$  называют базисом Шaudера.

Базис  $(e_n)_{n=0}^\infty$  называют  $p$ -абсолютным ( $0 < p < \infty$ ), если для каждой непрерывной полунормы  $\|\cdot\|$  на  $E$  существует непрерывная полунорма  $\|\cdot\|$  такая, что

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} |e'_i(e)|^p \|e_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|e\|, \quad \forall e \in E, \text{ если } p < \infty,$$

$$\sup_n |e'_n(e)| \|e_n\| \leq \|e\|, \quad \forall e \in E, \text{ если } p = \infty.$$

В случае  $p = \infty$  базис  $(e_n)_{n=0}^\infty$  называют также *равностепенно непрерывным*. Очевидно, если базис является  $p$ -абсолютным с любым фиксированным  $p$ , то он равностепенно непрерывен, и любой равностепенно непрерывный базис ядерного пространства абсолютен [9].

Пусть заданы  $0 < p \leq \infty$  и матрица неотрицательных чисел  $[a_r(i)]_{i \in I, r \in \mathcal{R}}$  такая, что для каждого  $i \in I$  можно указать  $r(i) \in \mathcal{R}$ :  $a_{r(i)}(i) > 0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Пространством Кёте* называют пространство числовых последовательностей

$$E = l_p[a_r(i)]_{i \in I, r \in \mathcal{R}} = \left\{ \xi = (\xi_i)_{i \in I} : |\xi|_r^p \doteq \sum_{i \in I} |\xi_i|^p a_r^p(i) < \infty, \forall r \in \mathcal{R} \right\} \quad (p < \infty)$$

или

$$E = l_\infty[a_r(i)]_{i \in I, r \in \mathcal{R}} = \left\{ \xi = (\xi_i)_{i \in I} : |\xi|_r = \sup_i |\xi_i| a_r(i) < \infty, \forall r \in \mathcal{R} \right\}$$

с топологией, задаваемой совокупностью всех функционалов  $\{|\cdot|_r, r \in \mathcal{R}\}$ .

При  $p \geq 1$  пространство Кёте будет локально выпуклым, а если множество  $\mathcal{R}$  будет счетным, то имеем пространство Кёте — Фреше, топология которого может быть задана монотонной системой полунорм

$$|\cdot|_1 \leq \dots \leq |\cdot|_r \leq |\cdot|_{r+1} \leq \dots,$$

определяемой матрицей с монотонностью по строкам  $0 \leq a_r(i) \leq a_{r+1}(i)$  для любых  $i \in I$  и  $r \in \mathbb{N}$ . Будем рассматривать случай, когда  $I$  и  $\mathcal{R}$  счетные множества. При  $1 \leq p < \infty$  в этом случае система ортов  $(e_n)$  является  $p$ -абсолютным базисом.

Заметим, что систему полунорм  $(|\cdot|_r)$ , определяющую топологию в  $E$ , всегда можно предполагать выбранной так, что

$$|e|_r \leq \frac{1}{2^r} |e|_{r+1}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad e \in E.$$

С использованием такого выбора системы полунорм в [8] показано, что в монтелевском пространстве Кёте  $E = l_p[a_r(n)]$ ,  $p \geq 1$ , любое предкомпактное множество содержится в  $p$ -эллипсоиде вида

$$K_a = \left\{ e = (e'_k(e)) : \sum_{k=1}^{\infty} |e'_k(e)|^p \frac{1}{a_k^p} \leq 1 \right\},$$

где  $(a_k)$  удовлетворяет условию:

$$\exists (r(n))_{n=1}^{\infty}, \quad r(n) \rightarrow \infty$$

при  $n \rightarrow \infty$  ( $r(n) \in \mathbb{N}$ ) и

$$a_n < \frac{1}{a_{r(n)}(n)}, \quad n > N.$$

Поэтому базу борнологии компактных множеств в пространстве  $l_p[a_r(n)]$  можно считать состоящих из  $p$ -эллипсоидов указанного вида. Кроме того, если  $K_a$  — компактный  $p$ -эллипсоид, то

$$a = b\alpha, \quad a_n = 2^{r(n)} a_n \frac{1}{2^{r(n)}} = b_n \alpha_n,$$

где  $K_b$  снова компактный  $p$ -эллипсоид, а

$$\alpha_n = \frac{1}{2^{r(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ ввиду } a_n < \frac{1}{a_{r(n)}(n)} \leq \frac{1}{2^{r(n)} a_{r(n)-1}(n)},$$

$n > N$ . За счет умножения множеств  $K_a$  или  $K_b$  на подходящие константы, можно добиться, чтобы указанные неравенства были справедливы для всех  $n$  и  $r(n) \geq 1$ .

### 3. Замечания о строении пространств голоморфных функций, определенных на пространствах Фреше

Перейдем к рассмотрению отображений локально выпуклых пространств. В классической теории функций нескольких комплексных переменных есть два способа введения голоморфности на открытом множестве. Первый предполагает исходное положение о дифференцируемости в смысле комплексного анализа в каждой точке, а второй — возможности представления функции в виде суммы степенного ряда, сходящегося к функции в окрестности каждой точки этого открытого множества [11, 14].

При введении голоморфности функций, определенных на бесконечномерных пространствах, ситуация несколько отлична от случая функций конечного числа переменных. Как видно из предыдущего материала, дифференцируемость функции по Гато в области довольно слабо связана с топологией пространства. Точнее сказать, связана

лишь с наличием свойства «тонкости», которое присутствует у всех линейных топологий и не только у них.

Обычно к свойству дифференцируемости по Гато ( $G$ -дифференцируемости) добавляют либо условие непрерывности во всем пространстве, как в [19, 23], либо условие ограниченности на ограниченных множествах (как в случае функций, определенных на банаховых пространствах в [24]), либо другие аналогичные условия ограниченности функций на каких-либо системах ограниченных множеств. В общем случае при таком подходе можно ввести борнологическую голоморфность  $f : E \rightarrow F$ , где  $E$  и  $F$  — борнологические пространства, наличием двух свойств:

- 1) дифференцируемость по Гато (аналитичность на каждом конечномерном подпространстве);
- 2) ограниченность в смысле борнологий, т. е. функция переводит ограниченные множества одного пространства в ограниченные множества другого пространства.

В случае линейных топологических пространств  $E$  и  $F$  в них могут рассматриваться борнологии фон Неймана.

При другом пути определения содержательного понятия бесконечномерной голоморфности дополнительно к условию 1) накладывается ограничение на характер сходимости тейлоровских разложений функций (по аналогии с подходом [12] и др.) с учетом топологий или борнологий в  $E$  и  $F$ .

Пусть  $E, F$  — локально выпуклые пространства. Рассмотрим в линейном пространстве  $F^E$  (произведение множества  $\text{card } E$  экземпляров  $F$ ), представляющем собой семейство всех отображений  $E$  в  $F$ , счетный набор подпространств  $P^n(E, F)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , которые определяются следующим образом:  $P^0(E, F)$  есть множество отображений, при которых все  $E$  переходит в один элемент из  $F$  (ясно, что это пространство можно отождествить с  $F$ ),  $P^1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$  — пространство непрерывных линейных отображений из  $E$  в  $F$ ; при  $n \geq 2$   $P^n(E, F)$  обозначает пространство непрерывных  $n$ -однородных полиномов из  $E$  в  $F$ . Напомним, что под полиномами подразумеваются конечные суммы однородных полиномов, а  $n$ -однородным полиномом на  $E$  называют отображение вида  $P = L \circ \Delta$ , где  $\Delta : E \rightarrow E^n$  — диагональное отображение, т. е.  $\Delta(e) = (\underbrace{e, \dots, e}_n)$ , а  $L$  есть  $n$ -

линейное отображение из  $E^n$  в  $F$ . Путем замыкания части ( $n \in \nu$ ) или всего набора подпространств  $P^n(E, F)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , в различных топологиях, используемых в пространствах непрерывных отображений, могут быть получены пространства гладких (по Фреше) и

голоморфных функций. Чаще всего во всех указанных подпространствах выбираются так называемые  $\sigma$ -топологии, в которых в качестве определяющего семейства  $\sigma$  множеств в  $E$  берется какая-нибудь борнология (или базис борнологии), например, семейство всех абсолютно выпуклых предкомпактных множеств.

Окрестности в соответствующем подпространстве  $F^E$  определяются парами  $(S, V)$ , где  $S \in \sigma$  и  $V$  принадлежит базису  $\mathcal{V}$  окрестностей нуля в  $F$ , как

$$\mathcal{M}(S, V) = \{T : E \rightarrow F : T(S) \subset V\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Отображение  $T : E \rightarrow F$  называют  $\sigma$ -голоморфным (при условии выбора  $\sigma$ -топологии), если существует последовательность  $P_n \in P(^n E \rightarrow F)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , такая, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n e$  сходится к  $T(e)$  при любом  $e \in E$  равномерно на множествах  $S \in \sigma$ , т. е. в топологии, определяемой базисом окрестностей  $\mathcal{M}(S, V)$ ,  $S \in \sigma$ ,  $V \in \mathcal{V}$ . Разложение

$$T(e) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n e$$

называют *разложением в ряд Тэйлора*.

Заметим, что в случае  $\mathbb{C}$ -значных голоморфных функций определение целиком зависит от выбора борнологии  $\sigma$ . К примеру, если в качестве  $\sigma$  берется система абсолютно выпуклых предкомпактных множеств, то соответствующие голоморфные функции будут непрерывны, а, значит, и ограничены на предкомпактных множествах.

Легко построить пример голоморфной, в указанном смысле,  $\mathbb{C}$ -значной функции (дифференцируемой по Гато), которая будет неограниченной на компактном множестве и не будет  $\sigma$ -голоморфной, где  $\sigma$  — любая борнология, содержащая все предкомпактные множества.

Пусть на пространстве Кёте

$$E = l_1[a_r(n)] = \left\{ \xi = (\xi_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| a_r(n) \doteq |\xi|_r < +\infty, \quad \forall r \in \mathbb{N} \right\}$$

с топологией, задаваемой системой полунорм  $(|\cdot|_r)$  (можно предполагать  $0 \leq a_r(n) \leq a_{r+1}(n)$  для любых  $r, n \in \mathbb{N}$  и тогда  $|\cdot|_r \leq |\cdot|_{r+1}$

для любого  $r$ ), рассматривается  $\mathbb{C}$ -значная функция

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\xi_n - b_n^{-1}(1 + \alpha_n)},$$

где  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\alpha_n \neq 0$ ,  $b_n = na_n(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

На компактном множестве

$$B = \left\{ \xi = (\xi_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| b_n \leq 1 \right\}$$

эта функция аналитична как сумма дробно-линейных функций, равномерно сходящаяся на конечномерных пространствах, но не будет ограничена на подмножестве  $B$ , состоящем из точек  $(0, \dots, 0, b_n^{-1}, 0, \dots)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Этот пример еще показывает, что голоморфные функции не обязательно непрерывны и ограничены даже на компактных множествах. При изучении строения пространств голоморфных функций, определенных на пространствах Фреше, т. е. полных метризуемых локально выпуклых пространствах, часто дополнительно к голоморфности накладывается требование непрерывности отображения в каждой точке.

В случае, когда рассматриваются  $\sigma$ -голоморфные отображения, определенные на метризуемом локально выпуклом пространстве с борнологией  $\sigma$ , содержащей все абсолютно выпуклые предкомпактные множества, требование непрерывности излишне, поскольку оно автоматически вытекает из условия  $\sigma$ -голоморфности и следующего утверждения.

Очевидно, что  $\sigma$ -голоморфное отображение метризуемого локально выпуклого пространства  $E$  будет непрерывно на предкомпактных подмножествах, которые все входят в  $\sigma$ , а значит, в силу леммы 1, и на всем  $E$ .

Перейдем к рассмотрению пространств  $\mathcal{H}_{\sigma}(E)$   $\sigma$ -голоморфных комплекснозначных функций как подпространств  $\mathcal{H}(E)$  голоморфных по Гато функций.

Для удобства проведения стандартных конечномерных рассуждений обычно используют следующие обозначения для  $f \in \mathcal{H}(E)$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$f_{e;u}(z) \equiv f(e + z_1 u_1 + \dots + z_n u_n),$$

где  $u = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  и  $e \in E$ . Простейшие свойства пространства  $\mathcal{H}(E)$  такие, как замкнутость относительно сдвига, умножения на функцию из  $\mathcal{H}(E)$ , а также частного дифференцирования в том смысле, что для любого  $u \in E$

$$\partial_u f(e) \equiv \frac{d}{dz} f_{e;u}(0),$$

и функция  $\partial_u f : E \rightarrow \mathbb{C}$  принадлежит  $\mathcal{H}(E)$  легко получаются привлечением простых соображений [20, гл. 3]. Для любого  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$  и любого мультииндекса  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$  производная  $\partial_u^m f$  удовлетворяет равенству  $\partial_u^m f(e) = \partial^m f_{e;u}(0)$ . Поскольку порядок дифференцирования не играет роли при каждом  $e_0 \in E$ , отображение

$$e = (e_1, e_2, \dots, e_n) \rightarrow \partial_e f(e_0) = \partial_{e_1, \dots, e_n}^{(1, \dots, 1)} f(e_0)$$

является симметрической  $n$ -линейной формой, а значит,  $\partial_{e, e, \dots, e}^n f(e_0)$  есть однородный полином степени  $n$ . Как известно, любая функция  $f \in \mathcal{H}(E)$  разлагается в аналог степенного ряда

$$f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_{(\cdot)}^n f(0), \quad (1)$$

сходящийся поточечно. Такое представление единственно, т. е. когда  $f \in \mathcal{H}(E)$  и

$$f(e) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(e),$$

где  $P_n \in \mathcal{P}(^n E, \mathbb{C}) = \mathcal{P}(^n E)$ , то

$$P_n(e) = \frac{1}{n!} \partial_e^n f(0).$$

Это получается, как и в классическом комплексном анализе, из замечания о том, что

$$f(ze) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(e) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_e^n f(0) z^n$$

для всех  $e \in E$  и  $z \in \mathbb{C}$  [20, гл. 3; 26].



Далее нам потребуется формула Коши:

$$\partial_u^m f(e) = \frac{m!}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_k} \frac{f(e + \zeta_1 u_1 + \dots + \zeta_n u_n)}{\zeta_1^{m_1+1} \dots \zeta_n^{m_n+1}} d\zeta, \quad e \in E,$$

где  $u = (u_k)_{k=1}^n \in E^n$ ,  $m = (m_k)_{k=1}^n \in \mathbb{N}^n$ , а  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , могут быть гладкие кривые, например, окружности, обходящие вокруг начала координат в комплексной плоскости.

Пусть теперь в линейном пространстве  $E$  задана линейная борнология  $\sigma$ , содержащая абсолютно выпуклые множества, удовлетворяющие также свойствам, перечисленным в лемме 3. При рассмотрении естественных борнологий в локально выпуклых пространствах (например, борнологий фон-Неймана или борнологий выпуклых множеств в нормированных пространствах) эти свойства обусловлены согласованием борнологий с линейной структурой и абсолютной выпуклостью множеств канонического базиса окрестностей нуля.

Пространство  $\mathcal{H}_\sigma(E)$   $\mathbb{C}$ -значных  $\sigma$ -голоморфных функций наделяется топологией равномерной сходимости на множествах борнологии  $\sigma$ , т. е. определяется полунормами

$$\|f\|_A = \sup_{e \in A} |f(e)|, \quad A \in \sigma.$$

Согласно сделанному выше замечанию о единственности аналога разложения в степенной ряд, для  $\sigma$ -голоморфных функций справедливо представление (1), которое сходится уже равномерно на всех множествах из  $\sigma$ . Можно утверждать большее, если принять во внимание однородность полиномов, входящих в разложение (1). В теореме, приведенной ниже,  $E$  может быть локально выпуклым пространством или просто линейным пространством с выделенной борнологией.

**Теорема 1** [12]. Пусть  $E$  — линейное пространство, в котором определена линейная выпуклая борнология  $\sigma$ , т. е. выделена система абсолютно выпуклых множеств со свойствами, описанными в лемме 3. Тогда  $\mathcal{H}_\sigma(E)$  является полным локально выпуклым пространством, а именно, проективным пределом

$$\mathcal{H}_\sigma(E) = \text{proj} \lim_{A \in \sigma} \mathcal{H}_A(E) = \bigcap_{A \in \sigma} \mathcal{H}_A(E),$$

где  $\mathcal{H}_A(E)$  есть пространство всех аналитических функций, ограниченных на  $A$ , относительно естественных тождественных вложений.

Кроме того, для любой функции  $f \in \mathcal{H}_\sigma(E)$  имеем  $\partial_{(\cdot)}^n f(0) \in \mathcal{H}_\sigma(E)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , и разложение (1) (аналог ряда Тэйлора) сходится абсолютно в  $\mathcal{H}_\sigma(E)$ .

◁ Описанная выше операция дифференцирования не выводит из пространства  $\mathcal{H}_\sigma(E)$ , что непосредственно вытекает из формулы Коши

$$\begin{aligned} \sup_{e \in A} |\partial_u f(e)| &= \sup_{e \in A} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(e + (\exp i\theta)u) \exp(-i\theta) d\theta \right| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{e \in A, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |f(e + (\exp i\theta)u)| = \|f\|_{\tilde{A}}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{A} = A + \cup\{(\exp i\theta)u : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Так как борнология  $\sigma$  содержит множество  $A_1 \supset \tilde{A}$ , имеем, что для любого  $A \in \sigma$  существует  $A_1 \in \sigma$  такой, что  $\|\partial_u f\|_A \leq \|f\|_{A_1}$  и отображение  $\partial_u(\cdot) : f \rightarrow \partial_u f$  непрерывно в  $\mathcal{H}_\sigma(E)$ . Пусть теперь  $A \in \sigma$  и  $r > 1$ . Так как  $A$  абсолютно выпукло, имеем  $rA \supseteq A$  и, согласно формуле Коши, получаем неравенства

$$|\partial_e^n f(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{rA}, \quad e \in A.$$

Это означает непрерывность отображения

$$\partial_{(\cdot)}^n : f \rightarrow \partial_{(\cdot)}^n f(0) \in \mathcal{H}_\sigma(E)$$

с оценкой: для любого  $A$  существует  $\tilde{A}$  такой, что

$$\|\partial_{(\cdot)}^n f(0)\|_A \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\tilde{A}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \tilde{A} = rA.$$

Абсолютная сходимость разложения (1) следует теперь из соединения этих оценок

$$\sum_n \frac{1}{n!} \|\partial_{(\cdot)}^n f(0)\|_A \leq \|f\|_{rA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{r}{(r-1)} \|f\|_{rA} < +\infty.$$

Заметим, что для суммы однородных полиномов  $\sum_n P_n$  ( $P_n \in \mathcal{P}({}^n E)$ ) условие:

$$\sum_n \|P_n\|_A < +\infty$$

для любого  $A \in \sigma$  сильнее условия равномерной сходимости  $\sum_n P_n$  на каждом ограниченном множестве  $A \in \sigma$  (т. е. условия, при котором  $\sum_n P_n = f \in \mathcal{H}_\sigma(E)$ ).  $\triangleright$

Из характера сходимости разложения (1) (в ряд Тэйлора) можно судить о блочном строении пространств голоморфных функций. Блоками являются пространства  $n$ -однородных полиномов  $\mathcal{P}({}^n E)$ , которые исследуются и самостоятельно [18]. В случае, когда в качестве  $E$  берутся пространства Кёте числовых последовательностей, все пространства  $\mathcal{P}({}^n E)$  могут иметь безусловный базис, и тогда безусловный базис существует в соответствующем пространстве голоморфных функций.

Наличие одного только разложения (1) в ряд Тэйлора позволяет для пространств голоморфных функций на довольно общих пространствах (с выделенной борнологией) без предположения о наличии в них базиса получить ряд утверждений, аналогичных отдельным классическим фактам, как например, частичный аналог теоремы Пэли — Винера — Шварца [12]. Вместо базиса при этом подходе использовались биортгональные системы, а «глобальные» результаты получались за счет некоторых «размерностно-инвариантных» соображений [12, лемма 4.12].

В работах [16–19, 23, 24] исследовались пространства голоморфных отображений между локально выпуклыми пространствами. *Совершенно ядерными (fully nuclear) пространствами* в [16] называют локально выпуклые пространства  $E$ , которые вместе с сильными сопряженными  $E'_\beta$  одновременно являются полными рефлексивными ядерными пространствами. Для пространств Фреше и сильных сопряженных к ним это условие равносильно обычной ядерности.

Сначала в [16] было показано, что в пространствах  $\mathbb{C}$ -значных голоморфных функций на совершенно ядерных пространствах с базисом система мономов  $(z^m)$  образует абсолютный базис (относительно компактно-открытой топологии). Затем в [19] для пространства голоморфных функций на монтелевском пространстве  $E$  получены некоторые результаты в противоположном направлении, т. е. из абсолютной базисности системы мономов выводилось свойство ядерности пространства  $E$  (и  $E'_\beta$ ).

В [24] показано, в частности, что система мономов образует равностепенно непрерывный безусловный базис (Шаудера) в пространстве голоморфных функций на пространстве  $l_1$  (относительно топологии  $\tau_0$  равномерной сходимости на компактных множествах).

Ниже рассматриваются пространства  $H(E, \tau_0)$   $\mathbb{C}$ -значных голоморфных функций на пространствах Кёте — Фреше и для этих пространств, при условии ядерности пространства Кёте  $E$ , приводится реализация  $H(E, \tau_0)$  в виде пространства Кёте с матрицей Кёте, элементы которой выражаются через элементы аналогичной матрицы представления для  $E$ . В доказательстве совершенствуется техника работ [16, 19, 24]. В частности, уточняются и снабжаются более доступными ссылками оценки мономиальных разложений из [6, 24].

Заметим, что случай  $p = \infty$ , частично рассмотренный в [24], исследуется с привлечением более тонких, по сравнению с [24], оценок норм случайных тригонометрических полиномов из [5].

Рассмотрим теперь локально выпуклое пространство  $E$  с базисом  $(e_n)_{n=1}^\infty$ . Символ  $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$  будет обозначать ниже множество финитных последовательностей целых чисел, т. е.  $m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$  означает, что  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n, \dots)$  и  $m_i = 0$  для всех  $i > i_m$ .

Мономом  $z^m$  (относительно базиса  $(e_n)_{n=1}^\infty$ ) называют отображение

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n e_n \longrightarrow z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \dots \cdot z_n^{m_n} \cdot \dots,$$

где подразумевается  $a^0 = 1$  для любого  $a \in \mathbb{R}$ . Каждый моном определяет элемент  $\mathcal{P}(|m|E)$ , где  $|m| = \sum_i |m_i|$ .

С использованием полиномов можно получить разложение в ряд голоморфной функции (аналог разложения в степенной ряд Тейлора).

Отображение  $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$  голоморфно тогда и только тогда, когда для каждого  $u \in U$  существует последовательность  $(P_{n,u})_{n=0}^\infty$ ,  $P_{n,u} \in \mathcal{P}({}^n E)$  для всех  $n$ , такая, что

$$f(u + z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,u}(z) \quad (2)$$

для всех  $z$  из некоторой окрестности нуля, и ряд сходится равномерно к  $f$  в некоторой окрестности нуля. Представление (2) есть разложение  $f$  в ряд Тейлора в точке  $u$ . Согласно интегральной формуле Коши (размерности 1),

$$P_{n,u} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\delta} \frac{f(u + \lambda z)}{\lambda^{n+1}} d\lambda = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(u)$$

для всех  $u \in U$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in E$  и достаточно малом  $\delta = \delta(u)$ .

Естественной областью сходимости (2) является уравновешенное подмножество  $E$ , и когда  $U$  само уравновешенно, тейлоровское разложение в нуле сходится к функции во всех точках  $U$ .

В частности, если  $E$  — пространство Фреше,  $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$  — последовательность в  $E'$ , то

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^n \in H(E)$$

тогда и только тогда, когда  $\varphi_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на компактных подмножествах  $E$ . В этом случае  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^n$  — разложение в ряд Тэйлора функции  $f$  в нуле.

#### 4. Базисы в пространствах голоморфных функций, определенных на пространствах Кёте

Если  $E$  — локально выпуклое пространство с базисом  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  и  $f \in H(E)$ , то для каждого  $m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$  определяются по  $f$  мономиальные коэффициенты  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}}$ , как и в конечномерном случае, по формулам

$$a_m = \frac{1}{(2\pi i)^r} \int \underbrace{\dots}_T \int \frac{f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r, 0, \dots)}{\eta_1^{m_1+1} \eta_2^{m_2+1} \dots \eta_r^{m_r+1}} d\eta_1 \dots d\eta_r = \frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(0),$$

где  $r = r(m)$  такой, что  $m_i = 0$  для  $i > r$ ,

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^r \eta_i e_i; |\eta_i| = \alpha_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \right\}$$

и  $d\eta_1 \dots d\eta_r$  — мера Лебега на  $T$ . Коэффициенты  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}}$  не зависят от  $r$  и положительных чисел  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Таким образом, получается мономиальное разложение  $f$

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} a_m z^m. \quad (3)$$

Так как множество индексов в сумме (3) неупорядочено, приходится сначала рассматривать ее безусловную или абсолютную сходимость. При рассмотрении мономиальных разложений вводятся несколько видов сходимостей и топологий на пространствах голоморфных

функций. Наиболее часто используется компактно открытая топология  $\tau_0$ .

Для мономиальных разложений обычно предполагается либо безусловная, либо абсолютная сходимость. Естественной областью такого разложения является полидиск.

Пусть  $E$  — ядерное пространство Фреше с базисом Шаудера. Тогда  $E$  изоморфно пространству Кёте с абсолютным базисом ортов. Можно сразу считать  $E = l_1[a_r(n)]$  и предполагать условие ядерности в виде [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} < \infty.$$

Для элементов  $E$  введем новые обозначения:

$$\|(z_n)_{n=1}^{\infty}\|_r = \sum_n |z_n| a_r(n), \quad z = (z_n) \in E.$$

Пусть  $V$  — открытый полидиск в  $E$ , т. е.

$$V = \left\{ (z_n)_{n=1}^{\infty} \in E : \sup_n |z_n| a(n) < 1 \right\},$$

где  $(a(n))_{n=1}^{\infty}$  — последовательность неотрицательных чисел с оценками для некоторых  $c > 0$  и  $r(0) \in \mathbb{N}$ ,

$$a(n) \geq c a_{r(0)}(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если  $K$  — компактное подмножество  $V$ , то, согласно сказанному во втором разделе, можно указать последовательность положительных чисел  $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ , таких, что

$$K \subset \tilde{K} = \left\{ (z_n)_{n=1}^{\infty} \in E : \sup_n |z_n| \alpha_n \leq 1 \right\},$$

где  $\tilde{K}$  — компактный полидиск в  $V$ .

Известно [16], что если  $V$  — открытый полидиск в ядерном пространстве Кёте  $E = l_1[a_r(n)]$ , то мономы образуют абсолютный базис Кёте в  $(H(V), \tau_0)$ . В частности, в пространстве  $(H(E), \tau_0)$  мономы образуют абсолютный базис Кёте, если  $E$  — ядерное пространство Фреше с базисом.

Используя условие ядерности, можно найти последовательность положительных чисел  $(\delta_n)_{n=1}^\infty$  таких, что  $\delta_n > 1$  для всех  $n$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n} < \infty, \text{ причем } \delta\tilde{K} = \left\{ (\delta_n z_n)_{n=1}^\infty : (z_n)_{n=1}^\infty \in \tilde{K} \right\}$$

также компактное подмножество  $V$ . Пусть  $f \in H(V)$  имеет разложение

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} a_m z^m.$$

Согласно интегральной формуле Коши,

$$\|a_m z^m\|_K \leq \|a_m z^m\|_{\tilde{K}} = \frac{1}{\delta^m} \|a_m z^m\|_{\delta\tilde{K}} \leq \frac{1}{\delta^m} \|f\|_{\delta\tilde{K}}.$$

Суммируя эти оценки, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} \|a_m z^m\|_K &\leq \left( \sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} \frac{1}{\delta^m} \right) \|f\|_{\delta\tilde{K}} = \\ &= \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{\delta_n})} \right] \|f\|_{\delta\tilde{K}} \doteq C \|f\|_{\delta\tilde{K}}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом оцениваем

$$\left\| f - \sum_{m \in L} a_m z^m \right\|_K \leq \left[ \sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \setminus L} \left( \frac{1}{\delta} \right)^m \right] \|f\|_{\delta\tilde{K}}$$

для любого конечного  $L \subset \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$  и отсюда следует, что мономиальное разложение голоморфной функции на открытом полидиске сходится к функции в топологии  $\tau_0$ . Кроме того, приведенными выкладками показано, что мономы образуют абсолютный базис для  $(H(V), \tau_0)$ . Выше было показано, что если  $V$  — открытый полидиск в ядерном пространстве Кёте  $E = l_1[a_r(n)]$ , то мономы образуют абсолютный базис Кёте в  $(H(V), \tau_0)$ . В частности, в пространстве  $(H(E), \tau_0)$  мономы образуют абсолютный базис Кёте, если  $E$  — ядерное пространство Фреше с базисом. Докажем некоторое обобщение результата из [6].

**Теорема 2.** В пространстве  $(H(X), \tau_0)$  голоморфных функций, заданных на пространстве Кёте  $X = l_p[a_r(n)]$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , система мономов  $(z^m)_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}}$  является абсолютным базисом Кёте в том

и только том случае, когда пространство  $X$  ядерно. Пространство  $(H(X), \tau_0)$  в этих случаях изоморфно пространству Кёте

$$l_1[a(m, (r(n)))]_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, (r(n)) \in S} = \left[ \frac{1}{a_{r(1)}^{m_1}(1) \dots a_{r(k(m))}^{m_{k(m)}}(k(m))} \right]_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, (r(n)) \in S},$$

где  $S$  — совокупность всех последовательностей натуральных чисел  $r(n)$  с  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$ .

◁ Чтобы получить представление пространства аналитических функций, определенных на пространстве Кёте  $E = l_p[a_r(n)]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , в виде пространства Кёте, подсчитаем нормы элементов базиса (мономов). Для этого воспользуемся свойствами фундаментальных систем ограниченных и компактных множеств. Предположим в  $E$  наличие монотонной системы полунорм  $|\cdot|_r \leq \frac{1}{2^r} |\cdot|_{r+1}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , и тогда каждое ограниченное множество содержится в ограниченном  $p$ -эллипсоиде вида

$$C \left\{ z = (z_n)_{n=1}^\infty : \sum_n |z_n|^p \frac{1}{\lambda_n^p} \leq 1 \right\}, \quad C > 0,$$

где  $\lambda_n$  описаны выше как  $\lambda_{\alpha n}$ , а каждое компактное множество — в компактном  $p$ -эллипсоиде ( $p = 1$ )

$$K_{(r(n))} = C \left\{ z = (z_n)_{n=1}^\infty : \sum_n |z_n|^p a_{r(n)}^p(n) \leq 1 \right\},$$

где  $C > 0$ ,  $(r(n))$  — последовательность натуральных индексов с  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$ . Соответствующие компактным  $p$ -эллипсоидам нормы будем обозначать

$$|z|_{(r(n))}^p = \sum_n |z_n|^p a_{r(n)}^p(n),$$

$$\|f\|_{(r(n))} = \sup \{ |f(z)| : z \in K_{(r(n))} \}.$$

Матрицу Кёте пространства  $(H(U), \tau_0)$  образуют нормы мономов  $\|z^m\|_{(r(n))}$ , где  $m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$  и индекс  $(r(n))$  пробегает все последовательности натуральных чисел с  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$ . Для подсчета указанных



норм мономов воспользуемся известным неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим

$$a_1^{p_1} \cdot \dots \cdot a_n^{p_n} \leq \left( \frac{p_1 a_1 + \dots + p_n a_n}{p_1 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + \dots + p_n},$$

где  $a_i \geq 0$ ,  $p_k \geq 0$ , причем равенство будет только в том случае, когда все  $a_i$  равны. Это неравенство в эквивалентной форме прямо следует из неравенства Иенсена для выпуклой функции. Применение неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим дает оценку

$$\begin{aligned} \frac{|z|^{pm} a_{r(1)}^{pm_1}(1) \cdot \dots \cdot a_{r(k(m))}^{pm_{k(m)}}(k(m))}{m^m} &= \prod_{i=1}^{k(m)} \left[ \frac{|z_i|^p a_{r(i)}^p(i)}{m_i} \right]^{m_i} \leq \\ &\leq \left[ \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p a_{r(i)}^p(i)}{|m|} \right]^{|m|} = \frac{|z|_{(r(n))}^{p|m|}}{|m|^{|m|}}. \end{aligned}$$

Здесь для финитной последовательности  $m = (m_1, \dots, m_{k(m)})$  из  $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$  считаем  $k(m)$  максимальным индексом, для которого  $m_{k(m)} \neq 0$ , а среди  $m_i$ ,  $i < k(m)$ , могут быть и равные нулю. Вводя обозначение

$$a^{-1}(m, (r(n))) = a_{r(1)}^{m_1}(1) a_{r(2)}^{m_2}(2) \dots a_{r(k(m))}^{m_{k(m)}}(k(m)),$$

перепишем полученную оценку для нормы монома

$$\|z^{(m)}\|_{(r(n))} = \sup \{ |z^m| : |z|_{(r(n))} \leq 1 \} \leq \left( \frac{m^m}{|m|^{|m|}} \right)^{\frac{1}{p}} a(m, (r(n))).$$

С другой стороны, подсчитывая значение монома на элементе

$$z_0 = \sum_{i=1}^{k(m)} \frac{m_i^{\frac{1}{p}}}{|m|^{\frac{1}{p}} a_{r(i)}(i)} e_i,$$

где  $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , с

$$|z_0|_{(r(n))} = \left( \sum_{i=1}^{k(m)} \frac{m_i}{|m|} \frac{a_{r(i)}^p(i)}{a_{r(i)}^p(i)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{i=1}^{k(m)} \frac{m_i}{|m|} \right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

получим

$$z_0^m = \prod_{i=1}^{k(m)} \frac{m_i^{m_i \frac{1}{p}}}{|m|^{m_i \frac{1}{p}} a_{r(i)}^{m_i}(i)} = \frac{m^{m \frac{1}{p}}}{|m|^{m \frac{1}{p}}} a(m, (r(n))),$$

а значит,

$$\|z^m\|_{(r(n))} = \left( \frac{m^m}{|m||m|} \right)^{\frac{1}{p}} a(m, (r(n))), \quad m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}.$$

Таким образом, с точностью до «диагонального» преобразования, искомая матрица Кёте имеет вид

$$\begin{aligned} [a(m, (r(n)))]_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, (r(n)) \in S} = \\ = \left[ \frac{1}{a_{r(1)}^{m_1}(1) \dots a_{r(k(m))}^{m_{k(m)}}(k(m))} \right]_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, (r(n)) \in S}, \end{aligned}$$

где  $S$  — совокупность всех последовательностей натуральных чисел  $r(n)$  с  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$ .

Рассмотрим теперь пространство  $H(E)$  аналитических функций на пространстве Кёте  $E = l_1[a_r(n)]$  и будем предполагать, что система мономов образует в нем абсолютный базис, более точно,  $p$ -абсолютный базис Кёте ( $p = 1$ ). Это значит, что для любого абсолютно выпуклого компактного множества  $K$  существует константа  $C > 0$  и компактное абсолютно выпуклое множество  $\tilde{K}$  такие, что

$$\sum_{m \in L} |c_m| \sup_{z \in K} |z^m| \leq C \sup_{z \in \tilde{K}} \left| \sum_{m \in L} c_m z^m \right| \quad (4)$$

для любого набора чисел  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}}$  и каждого конечного множества  $L \subset \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ .

Считаем систему полунорм  $(|\cdot|_r)$ , определяющую топологию  $E$ , монотонной с неравенствами  $|\cdot|_r \leq \frac{1}{2^r} |\cdot|_{r+1}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . В этом случае, можно рассматривать равномерную сходимость в  $H(E)$  только на компактных множествах вида

$$K_{(r(n))} = C \left\{ z = (z_n) : |z|_{(r(n))}^p \doteq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p a_{r(n)}^p(n) \leq 1 \right\},$$

где  $C > 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$ .

С учетом найденных выше значений  $\|z^m\|_{(r(n))}$  перепишем (4) в следующем виде:

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} |c_m| \frac{m^m}{|m|^{|m|}} a(m, (r(n))) \leq \\ \leq C \sup \left\{ \left| \sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} c_m a(m, (s(n))) w^m \right| : \|w\|_{l_p} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^p \leq 1 \right\},$$

где  $(c_m)_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}}$  может быть любым набором коэффициентов мономиального разложения функции  $f \in H(E)$ . Обозначив  $c_m a(m, (s(n))) = d_m$ ,  $m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ , приходим к виду

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} |d_m| \frac{a(m, (r(n))) m^m}{a(m, (s(n))) |m|^{|m|}} \leq C \sup \left\{ \left| \sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} d_m w^m \right| : \|w\|_{l_p} \leq 1 \right\}.$$

Так как (4) справедливо для полиномов, в частности,  $n$ -однородных полиномов, посредством рассмотрения в приведенных неравенствах конечных сумм с  $|m| = 2$  покажем ядерность пространства Кёте — Фреше  $E$ .

Рассмотрение конечных сумм в (4) с  $|m| = 2$  и оценками  $\frac{1}{4} \leq \frac{m^m}{|m|^{|m|}} \leq 1$  для этого случая приводит к условию

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \frac{a_{s(i)}^{m_i}(i) a_{s(j)}^{m_j}(j)}{a_{r(i)}^{m_i}(i) a_{r(j)}^{m_j}(j)} \leq \tilde{C} \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \eta_i \eta_j \right| : \max_{i \leq n} |\eta_i| \right\}$$

( $\tilde{C} = 4C$ ,  $m_i + m_j = 2$ ) для любой симметрической матрицы  $((a_{ij}))_{i,j=1}^n$  с  $|a_{ij}| \leq 1$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ .

Для оценки правой части последнего неравенства воспользуемся следующим следствием теоремы 3 главы VI из [5].

**Лемма 3** [5, теорема 4]. *Если заданы комплексные числа  $a_{ij}$ ,  $|a_{ij}| \leq 1$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , то существует такой набор знаков  $+$  и  $-$ , что*

$$\left| \sup_{t_1, t_2, \dots, t_n} \sum_{k,j=1}^n \pm a_{k,j} e^{i(k t_k + j t_j)} \right| < C \left( n \sum_{k,j=1}^n |a_{k,j}|^2 \log 2n \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq C n^{\frac{3}{2}} \log 2n,$$

где  $C$  — некоторая абсолютная постоянная.

Соединяя последние неравенства, получаем

$$\left( n \min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_{s(i)}(i)}{a_{r(i)}(i)} \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_{s(i)}(i)}{a_{r(i)}(i)} \right)^2 \leq \tilde{C} C n^{\frac{3}{2}} \log 2n,$$

т. е.

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_{s(i)}(i)}{a_{r(i)}(i)} \leq D \frac{\log 2n}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

Можно повторить достаточное число  $k > 5$  раз процедуру выбора для последовательности  $(s(n))_{n=1}^{\infty}$  последовательности  $(\tilde{s}(n))_{n=1}^{\infty}$  в условии (4) и проведенные оценки, чтобы получить сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{\tilde{s}(n)}(n)}{a_{r(n)}(n)} \leq \tilde{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log 2n)^5}{n^{\frac{5}{4}}} < +\infty.$$

Но найти для любой последовательности  $(r(n))_{n=1}^{\infty}$  с  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$  другую такую последовательность  $(\tilde{s}(n))_{n=1}^{\infty}$  с  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}(n) = \infty$ , чтобы сходилась указанный ряд, можно лишь в случае, когда для  $E$  справедливо упоминавшееся условие ядерности Гротендика — Пича: для любого  $r$  существует  $s(r)$  такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} < +\infty.$$

Предположим, что условие ядерности  $E$  не выполняется, т. е. существует  $r(0) \in \mathbb{N}$  такое, что при любом  $s \in \mathbb{N}$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{r(0)}(n)}{a_s(n)}$$

расходится. Тогда, выбрав, согласно расходимости соответствующих рядов, последовательность натуральных индексов

$$(n_k)_{k=1}^{\infty} : \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{a_{r(0)}(n)}{a_{r(0)+k}(n)} \geq 2^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

построим последовательность  $(r(n))_{n=1}^{\infty}$  следующим образом:

$$r(n) = r(0), \quad n \leq n_1, \quad r(n) = r(0) + k, \quad n_k < n \leq n_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Теперь для любой последовательности  $(\tilde{s}(n))$ , у которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}(n) = 0$ , с некоторого номера  $m$  будет  $\tilde{s}(n) \geq r(0)$  и для  $n_k > M$  имеем

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{a_{\tilde{s}(n)}(n)}{a_{r(0)+k}(n)} \geq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{a_{r(0)}(n)}{a_{r(0)+k}(n)} \geq 2^k,$$

так, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{\tilde{s}(n)}(n)}{a_{r(n)}(n)}$$

расходится. Полученное противоречие означает, что условие ядерности для пространства Кёте  $E = l_1[a_r(n)]$  должно быть выполнено, если мономы образуют абсолютный базис Кёте в  $H(E)$ . Оставшаяся часть утверждения теоремы 2 следует из приведенных выше результатов [16].

По сравнению с результатом [19] здесь не накладывается требование монтелевости  $E$  и добавлен случай  $p \neq 1$ .

Было бы интересно исследовать характер базисности мономов в случае пространств аналитических функций на пространствах Кёте без условия ядерности. Приведенные оценки норм мономов и часть рассуждений остаются справедливыми и в этом случае.

Еще раньше были известны и некоторые другие реализации пространств целых и голоморфных функций на открытых множествах сопряженного пространства [19, 20 и др.]. Параллельно изучались пространства голоморфных функций на банаховых пространствах. В работе [14], в частности, доказано, что система мономов  $\{z^m : m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}\}$  является равностепенно непрерывным безусловным базисом Шаудера для пространства  $\mathbb{C}$ -значных голоморфных функций на  $l_1$  с топологией равномерной сходимости на компактных множествах, т. е. в  $\mathcal{H}_\sigma(l_1)$ , где  $\sigma$  — борнология абсолютно выпуклых компактных множеств в  $l_1$ .

Если  $E$  — допустимое пространство (пространство с допустимой топологией, при которой алгебраические операции непрерывны на всех конечномерных подпространствах),  $n \in \mathbb{N}$ , пространство всех непрерывных  $n$ -однородных полиномов, действующих из  $E$  в  $\mathbb{C}$ , обозначают обычно  $P(^n E)$ . Это подпространство в  $\mathcal{H}_\sigma(E)$  и наделяется индуцированной топологией. Ниже предполагаем, что  $\sigma$  — совокупность всех предкомпактных подмножеств в  $E$ .

**Теорема 3.** Пусть  $E$  — пространство Фреше — Кёте и  $n = 2$ . Если в пространстве  $(^2E)$  система 2-однородных мономов является  $p$ -абсолютным базисом с каким-нибудь  $p \in [1, \frac{4}{3})$ , то пространство  $E$  — ядерно.

То же утверждение влечет и более сильное условие.

**Теорема 3'.** Пусть  $E$  и  $\sigma$  удовлетворяют тем же ограничениям. Если система мономов является  $p$ -абсолютным базисом при каком-нибудь  $p \in [1, \frac{4}{3})$ , то пространство  $E$  — ядерно.

Можно предположить, что граница  $\frac{4}{3}$  появилась из-за грубости применяемого метода доказательства и что более тонкий подход снимет это ограничение. Интересно было бы разобрать случай  $p = 2$ .

Приведем результат о базисности системы мономов, который можно рассматривать как развитие и обобщение отдельных утверждений [6, 24].

Предварительно напомним, что *монтелевским пространством* называют отделимое бочечное пространство, каждое замкнутое ограниченное подмножество которого компактно. Пространство Кёте  $l_p[a_r(n)]$ ,  $p \geq 1$ , — монтелевское, если выполнено условие: для любого  $r$  существует  $s(r) \in \mathbb{N}$  такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} = 0.$$

**Теорема 4.** Система мономов  $\{z^m : m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}\}$  является равностепенно непрерывным безусловным базисом в  $\mathcal{H}_\sigma(l_1[a_r(n)])$ , где  $\sigma$  — борнология абсолютно выпуклых ограниченных подмножеств в монтелевском пространстве Кёте  $E = l_1[a_r(n)]$ .

◁ Предварительно заметим, что систему полунорм  $(|\cdot|_r)$ , определяющую топологию в  $E$ , всегда можно предполагать выбранной так, что

$$|e|_r = \sum_{n=1}^{\infty} |e'_n(e)| a_r(n) \leq \frac{1}{2^r} |e|_{r+1}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad e \in E,$$

где  $e'_n(\cdot)$  — координатные функционалы базиса ортов  $(e_n)$ .

С использованием такого выбора системы полунорм в [21] показано, что в монтелевском пространстве Кёте  $E = l_p[a_r(n)]$ ,  $p \geq 1$ , любое предкомпактное множество содержится в  $p$ -эллипсоиде вида

$$K_a = \left\{ e = (e'_k(e)) : \sum_{k=1}^{\infty} |e'_k(e)|^p \frac{1}{a_k^p} \leq 1 \right\},$$

где  $(a_k)$  удовлетворяет условию: существует  $(r(n))_{n=1}^{\infty}$ ,  $r(n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $r(n) \in \mathbb{N}$ ) такой, что

$$a_n < \frac{1}{a_{r(n)}(n)}, \quad n > N.$$

Поэтому базу борнологии компактных множеств в пространстве  $l_p[a_r(n)]$  можно считать состоящих из  $p$ -эллипсоидов указанного вида. Кроме того, если  $K_a$  — компактный  $p$ -эллипсоид, то

$$a = b\alpha, \quad a_n = 2^{r(n)} a_n \frac{1}{2^{r(n)}} = b_n \alpha_n,$$

где  $K_b$  снова компактный  $p$ -эллипсоид, а  $\alpha_n = \frac{1}{2^{r(n)}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ввиду

$$a_n < \frac{1}{a_{r(n)}(n)} \leq \frac{1}{2^{r(n)} a_{r(n)-1}(n)}, \quad n > N.$$

За счет умножения множеств  $K_a$  или  $K_b$  на подходящие константы, можно добиться, чтобы указанные неравенства были справедливы для всех  $n$  и  $r(n) \geq 1$ . Нам потребуются еще модификации оценок норм мономов.

**Лемма 4** [6, 24]. В пространстве  $l_p(a^{-1})$  нормы мономов равны

$$\|z^m\| = \left( \frac{m^m}{|m|!} \right)^{\frac{1}{p}} a^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})},$$

где  $\|f\| = \sup \{|f(z)| : z \in l_p, \|z\| \leq 1\}$ .

Пусть  $f \in \mathcal{H}(l_1[a_r(n)])$ ,  $f \neq 0$ ,  $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} c_m z^m$  — мономиальное разложение  $f$  и  $\|f\|_{K_a} = \sup\{|f(z)| : z \in K_a\}$  — полунорма, определяемая компактным эллипсоидом  $K_a \subset l_1[a_r(n)]$ . Для выбранного произвольно  $\varepsilon > 0$  и фиксированного  $q > 0$ , считая для  $a = (a_n)$  ( $a_n \rightarrow 0$ ) выполненными условия, описанные перед леммой, найдем сначала  $n_0 \in \mathbb{N}$  такой, что

$$\frac{1}{2^{r(n)}} < \frac{\varepsilon q}{(1+q)\|f\|_{K_b}}, \quad n > n_0, \quad (b_k = 2^{r(k)} e(1+q)a_k),$$

а затем  $n_1$  такой, что

$$\left( \sup_k \frac{1}{2^{r(k)}} \right)^n < \frac{\varepsilon q}{(1+q)\|f\|_{K_b}}, \quad n > n_1.$$

В мономиальном разложении  $f$  выделим конечное множество

$$J_0 = \{m \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} : |m| \leq n_1 \text{ и } m_j = 0, j > n_0\}.$$

Если теперь  $m \notin J_0$ , то либо существует  $j_0 > n_0$  с  $m_{j_0} \geq 1$  и

$$\begin{aligned} \prod_j \frac{1}{2^{m_j r(j)}} &= \frac{1}{2^{m_{j_0} r(j_0)}} \prod_{j \neq j_0} \frac{1}{2^{m_j r(j)}} < \\ &< \left( \frac{\varepsilon q}{(1+q)\|f\|_{K_b}} \right)^{m_{j_0}} \leq \frac{\varepsilon q}{(1+q)\|f\|_{K_b}}, \end{aligned}$$

либо  $|m| > n_1$ , и тогда

$$\prod_j \frac{1}{2^{m_j r(j)}} \leq \prod_j \left( \sup_k \frac{1}{2^{r(k)}} \right)^{m_j} \leq \left( \sup_k \frac{1}{2^{r(k)}} \right)^{|m|} < \frac{\varepsilon q}{(1+q)\|f\|_{K_b}}.$$

Наконец, возьмем произвольное конечное множество  $J \subset \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \setminus J_0$  и оценим соответствующую часть разложения  $f$  с использованием указанного выбора индексов и с привлечением оценок полунорм, получающихся из интегральной формулы Коши для коэффициентов [14, 24]:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m \in J} c_m z^m \right\|_{K_a} &\leq \frac{1+q}{q} \sup \left\{ |c_m| \frac{m^m}{|m|^{|m|}} [e(1+q)a]^m : m \in J \right\} \leq \\ &\leq \frac{1+q}{q} \sup \left\{ |c_m| \frac{m^m}{|m|^{|m|}} b^m \alpha^m : m \in J \right\} \leq \\ &\leq \frac{1+q}{q} \|f\|_{K_b} \sup_{m \in J} \prod_j \frac{1}{2^{m_j r(j)}} < \varepsilon, \quad (\alpha_j = 1/2^{r(j)}). \end{aligned}$$

Из этих оценок следует безусловная сходимость мономиального разложения в топологии компактной сходимости. Так как выбор  $b$  (зависит только от  $a$  и  $q$ ) не зависит от множества  $J$ , то отсюда следует равностепенная непрерывность базиса мономов.  $\triangleright$

Заметим, что пространства голоморфных функций даже на бесконечномерных пространствах Банаха с топологией  $\tau_0$  не являются бочечными и борнологическими.

Приведенные рассуждения допускают обобщения на случай пространств  $l_p[a_r(n)]$ ,  $p > 1$ , с использованием леммы 3 и технических



приемов из [6, 24]. Для получения других свойств базиса мономов в рассматриваемых пространствах потребуется дополнительное исследование характера сходимости мономиальных разложений в пространствах  $m$ -однородных полиномов.

### 5. Построение алгебр типа Грассмана с бесконечным числом образующих в пространствах голоморфных функций и соответствующих суперпространств

Напомним определение суперпространства над коммутативной банаховой супералгеброй [13].

Линейное пространство  $L$  называется  $Z_2$ -градуированным, если оно представлено в виде прямой суммы двух пространств  $L = L_0 \oplus L_1$ . Элементы пространств  $L_0$  и  $L_1$  называются *однородными*.

В градуированном пространстве  $L = L_0 \oplus L_1$  задана четность, если дополнительно сказано, что элементы одного из этих пространств называются *четными*, другого — *нечетными*. В дальнейшем будем предполагать, что  $L_0$  — это подпространство, состоящее из четных элементов, а  $L_1$  — подпространство, состоящее из нечетных элементов. Для элемента  $f \in L = L_0 \oplus L_1$  символами  $f^0$  и  $f^1$  обозначим его четную и нечетную составляющие, символами  $\pi_0$  и  $\pi_1$  обозначим проекторы на  $L_0$  и  $L_1$ .

На  $Z_2$ -градуированном пространстве  $L = L_0 \oplus L_1$  введем:

- 1) функцию четности  $|a| = 0$ , если  $a \in L_0$ , и  $|a| = 1$ , если  $a \in L_1$ ;
- 2) автоморфизм четности  $\sigma : L \rightarrow L$ , положив для однородных элементов  $\sigma(f) = (-1)^{|f|}f$ . Заметим, что  $\sigma^2 = 1$  и  $\sigma(f) = f$  тогда и только тогда, когда  $f \in L_0$ .

*Супералгеброй* называется  $Z_2$ -градуированное пространство  $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ , на котором введена структура ассоциативной алгебры с единицей  $e$  и четной операцией умножения (т. е. произведение двух четных или двух нечетных элементов — четный элемент, а произведение четного на нечетный — нечетный элемент:  $|ab| = |a| + |b| \pmod{2}$ ). В частности, подпространство  $\Lambda_0$  — подалгебра алгебры  $\Lambda$ .

В дальнейшем, линейные пространства будем рассматривать над полем  $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ .

*Суперкоммутатор*  $[a, b]$  однородных элементов  $a$  и  $b$  из супералгебры  $\Lambda$  определяется равенством

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba.$$

На неоднородные элементы суперкоммутатор продолжается по линейности.

Супералгебра  $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$  называется (*супер*)*коммутативной*, если для произвольных однородных элементов  $a, b \in \Lambda$  имеем  $[a, b] = 0$ . Введем аннулятор множества нечетных элементов ( $\Lambda_1$ -аннулятор), полагая

$${}^\perp \Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \Lambda_1 = 0\}.$$

Рассмотрим типичный пример супералгебры.

Конечномерная грасманова алгебра (внешняя алгебра) — это коммутативная супералгебра  $G_n = G_n(g_1, \dots, g_n)$ , элементы которой имеют вид

$$f = f_0 e + \sum_{k=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} g_{i_1} \dots g_{i_k}, \quad (5)$$

где  $e = 1$  — единица,  $g_1, \dots, g_n$  — антикоммутирующие образующие:  $g_i g_j = -g_j g_i$  (и, в частности,  $g_i^2 = 0$ ), коэффициенты  $f_{i_1 \dots i_k} \in K$ .

Мономы  $e_0 = 1$ ,  $e_i = g_{i_1} \dots g_{i_k}$ ,  $i = (i_1 < \dots < i_k)$ , образуют базис в алгебре  $G_n$ ,  $\dim G_n = 2^n$ . Базис четного подпространства  $G_{n,0}$  состоит из четных мономов; базис нечетного подпространства  $G_{n,1}$  — из нечетных мономов (функция четности определяется равенством  $|g_{i_1} \dots g_{i_k}| \bmod 2$ ;  $G_n = G_{n,0} \oplus G_{n,1}$ ). Из антикоммутативности образующих  $g_i$  следует, что четные мономы, а следовательно, и элементы подалгебры  $G_{n,0}$  коммутируют со всеми элементами алгебры  $G_n$ ; нечетные мономы, а следовательно, и элементы  $G_{n,1}$  антикоммутируют между собой.

Аннулятор нечетного подпространства  ${}^\perp G_{n,1} = K g_1 \dots g_n$ .

С помощью соответствия  $g_j \mapsto dx_j$  ( $g_j g_i \mapsto dx_i \wedge dx_j$ ) грасманова алгебра  $G_n$  реализуется как внешняя алгебра  $\wedge^n K$ .

В дальнейшем, роль координат на суперпространстве будут играть не числовые коэффициенты  $f_0, \dots, f_{1\dots n}$  в разложении (5) по базису, а четная и нечетная составляющие переменной  $f = f^0 \oplus f^1$ ,  $f^0 \in G_{n,0}$ ,  $f^1 \in G_{n,1}$ .

В случае, когда система мономов  $(z^m)$  образует абсолютный базис, каждая функция  $\mathcal{H}_\sigma(E)$  разлагается в бесконечный абсолютно сходящийся ряд

$$f(z) = \alpha \cdot 1 + \sum_i \alpha_i z_i + \sum_{i,j} \alpha_{ij} z_i z_j + \dots$$

Во множестве всех функций из  $\mathcal{H}_\sigma(E)$  рассмотрим двусторонний идеал  $A_0$ , который порождается элементами вида  $f \cdot f (= f(z) \cdot f(z))$ , когда  $f$  пробегает множество всех  $f \in \mathcal{H}_\sigma(E)$ . Идеалу  $A_0$  принадлежат и элементы вида

$$(f + g)(f + g) - f \cdot f - g \cdot g = f \cdot g + g \cdot f.$$

Тогда факторпространство  $\Lambda = \mathcal{H}_\sigma(E)/A_0$  изоморфно алгебре типа Грассмана. Единицы в ней уже не будет, так как  $1 \cdot 1 = 1$ , но формально можно единицу ввести искусственно и, в результате, проверка показывает, что характерные свойства алгебры Грассмана у  $\mathcal{H}_\sigma/A_0$  имеются.

Точно также, как описано выше, для конечномерной грассмановой алгебры можно ввести функцию четности и получить разложение  $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ . Это обозначение можно использовать и не только для банаховых алгебр, но и для локально выпуклых алгебр, топологии которых определяются счетным или даже несчетным набором весовых полунорм, определяемым по абсолютному мономимальному базису ядерного пространства голоморфных функций.

Следуя известным определениям [13], можно ввести понятие суперпространства над коммутативной супералгеброй  $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ , как линейное (над каким-либо полем) пространство  $K_{\Lambda}^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ .

При этом естественно такое суперпространство наделять локально выпуклой топологией, определяемой весовыми полунормами исходного пространства голоморфных функций.

Наличие бесконечного числа образующих вносит некоторые трудности при построении соответствующего суперанализа (например, при определении аннуляторов), однако обобщение уже имеющегося опыта в этом направлении (обзоры в [2, 13]) имеет интерес для приложений, и темами следующих публикаций естественно ожидать построение (аналогов) супердифференцируемости и суперголоморфности ( $S$ -дифференцируемости и  $S$ -аналитичности в терминологии [13]) и всего того, что составляет суперанализ на указанных суперпространствах.

## Литература

1. Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С., Ус Г. Ф. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных // В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах.—Новосибирск: Наука, 1977.—С. 20–41.

2. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.—М.: Наука, 1986.—320 с.
3. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра.—М.: Наука, 1976.—648 с.
4. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика.—М.: Наука, 1986.—496 с.
5. Кахан Ж. П. Случайные функциональные ряды.—М.: Мир, 1973.—302 с.
6. Кондаков В. П. О представлении в виде пространств Кёте пространств голоморфных функций // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 4.—С. 22–29.
7. Кондаков В. П. О дифференцируемости отображений и строении пространств голоморфных функций на бесконечномерных пространствах // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 2.—С. 9–21.
8. Кондаков В. П. Вопросы геометрии ненормируемых пространств.—РГУ: Ростов-на-Дону, 1983.—72 с.
9. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1967.—256 с.
10. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
11. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.—М.: Мир, 1968.—279 с.
12. Хренников А. Ю., Петерсон Х. Теорема Пэли — Винера для обобщенных целых функций на бесконечномерных пространствах // Изв. РАН. Сер. мат.—2001.—Т. 65, № 2.—С. 201–224.
13. Хренников Ф. Ю. Суперанализ.—М.: Физматлит, 2005.—288 с.
14. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ.—М.: Наука, 1969.—576 с.
15. Borgens J., Meise R., Vogt D. Entire functions on nuclear sequence spaces // J. Reine Angew. Math.—1981.—V. 322.—P. 196–220.
16. Boland P. J., Dineen S. Holomorphic functions on fully nuclear spaces // Bull. Soc. Math. France.—1978.—V. 106.—P. 311–336.
17. Boland P. J., Dineen S. Holomorphy on spaces of distribution // Hfcific J. of Math.—1981.—V. 92, № 1.—P. 27–34.
18. Defant A., Kalton N. Unconditionality in spaces of m-homogeneous polynomials // Quart. J. Math.—2005.—V. 56.—P. 53–64.
19. Dineen S., Timoney R. M. Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr // Studia Math.—1989.—V. 84.—P. 227–234.
20. Hille E., Phillips R. S. Functional Analysis and Semi-Groups.—Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1951.—796 p.
21. Hogbe-Nlend H. Theorie des bornologies et applications.—Berlin etc.: Springer, 1971.—142 p.
22. Kakutani S., Klee V. L. Jr. The finite topology of a linear space // Arch. Math.—1963.—V. 14.—P. 55–58.
23. Meise R., Vogt D. Structure of spaces of functions on infinite-dimensional polydiscs // Studia Math.—1983.—V. 75.—P. 235–252.
24. Ryan R. A. Holomorphic mappings on  $l_1$  // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—V. 302.—P. 797–811.

Кондаков Владимир Петрович

Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет;

Владикавказ, Институт прикладной математики и

информатики ВНИЦ РАН

E-mail: kond@math.rsu.ru

## Часть III

### Теория операторов



# СИЛЬНО И РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА — КАНТОРОВИЧА

**И. Г. Ганиев, С. С. Сададдинова**

Статья посвящена изучению полугруппы ограниченных линейных операторов, действующих в пространствах Банаха — Канторовича.

## Введение

Одним из важных разделов в теории ограниченных линейных операторов является теория полугрупп операторов в банаховых и локально выпуклых пространствах, решающая важные задачи дифференциальных уравнений в этих пространствах. Аналитическая теория полугрупп операторов, действующих в банаховых и локально выпуклых пространствах, подробно изложено в монографиях Э. Хилле, Р. С.Филлипса [1] и К. Иосиды [2].

Исследование мажорируемых операторов было начато в 30-х годах XX века в работах Л. В. Канторовича. Дальнейшему существенному развитию теории мажорируемых операторов посвящены работы А. Г. Кусраева (см. например [3], [4]).

В связи с развитием общей теории мажорируемых операторов в пространствах Банаха — Канторовича над кольцом измеримых функций, естественно возникают задачи теории полугрупп операторов в пространствах Банаха — Канторовича. Известно [3, 5], что всякое пространство Банаха — Канторовича можно представить в виде измеримого расслоения банаховых пространств.

В работах [6, 7] было доказано, что всякий линейный циклически компактный оператор можно представить как измеримое расслоение линейных компактных операторов и получен векторный аналог теоремы Банаха об обратном операторе для операторов, действующих в расширенных пространствах Банаха — Канторовича. В работе [8] был получен векторный вариант принципа равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза для операторов в расширенных пространствах Банаха — Канторовича.

Настоящая работа посвящена изучению полугруппы ограниченных линейных операторов, действующих в пространствах Банаха — Канторовича. Используется терминология и обозначения теории пространств Банаха — Канторовича из [3] и теории измеримых расслоений из [3, 5].

### 1. Предварительные сведения

Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство с полной конечной мерой, и  $L_0 = L_0(\Omega)$  — упорядоченная алгебра всех комплексных измеримых функций на  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  (равные почти всюду функции отождествляются). Рассмотрим векторное пространство  $E$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ .

Отображение  $\|\cdot\| : E \rightarrow L_0$  называется векторной или  $L_0$ -значной нормой на  $E$ , если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\|x\| \geq 0$  для всех  $x \in E$ ;  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
- 2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  для каждого  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $x \in E$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  при всех  $x, y \in E$ .

Пара  $(E, \|\cdot\|)$  называется решеточно-нормированным пространством (РНП) над  $L_0$ .

Говорят, что РНП  $E$  — дизъюнктно разложимо или, кратко,  $d$  — разложимо, если в нем выполняется аксиома разложимости: для любого  $x \in E$  и для дизъюнктных элементов  $e_1, e_2 \in L_0$ , удовлетворяющих соотношению  $\|x\| = e_1 + e_2$ , существуют  $x_1, x_2 \in E$  такие, что  $x = x_1 + x_2$  и  $\|x_1\| = e_1$  и  $\|x_2\| = e_2$ .

Сеть  $\{x_\alpha\}$  элементов из  $E$  называется  $(bo)$ -сходящейся к элементу  $x \in E$ , если сеть  $\{\|x_\alpha - x\|\}$   $(o)$ -сходится к нулю в  $L_0$ . Говорят, что РНП  $(bo)$ -полно, если любая  $(bo)$ -фундаментальная сеть  $\{x_\alpha\}$  в нем  $(bo)$ -сходится к некоторому элементу этого пространства.  $d$ -разложимое  $(bo)$ -полное РНП над  $L_0$  называется *пространством Банаха — Канторовича* (ПБК) над  $L_0$  [3].

Всякое ПБК  $E$  над  $L_0$  является модулем над  $L_0$  и  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  для всех  $\lambda \in L_0$  и  $x \in E$  [3, 4].

Пусть  $X$  — отображение, ставящее в соответствие каждой точке  $\omega \in \Omega$  некоторое банахово пространство  $(X(\omega), \|\cdot\|_{X(\omega)})$ , где  $X(\omega) \neq 0$  для всех  $\omega \in \Omega$ . *Сечением*  $X$  называется функция  $u$ , определенная почти всюду в  $\Omega$  и принимающая значения  $u(\omega) \in X(\omega)$  для всех  $\omega \in \text{dom } u$ , где  $\text{dom } u$  есть область определения  $u$ .

Пусть  $L$  — некоторое множество сечений  $X$ .



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [5]. Пара  $(X, L)$  называется *измеримым банаховым расслоением* (ИБР) над  $\Omega$ , если

а)  $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$  для всех  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  и  $c_1, c_2 \in L$ , где  $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \text{dom } c_1 \cap \text{dom } c_2 \rightarrow \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$ ;

б) функция  $\|c\| : \omega \in \text{dom } c \rightarrow \|c(\omega)\|_{X(\omega)}$  измерима при всех  $c \in L$ ;

в) для каждой точки  $\omega \in \Omega$  множество  $\{c(\omega) : c \in L, \omega \in \text{dom } c\}$  плотно в  $X(\omega)$ .

В дальнейшем вместо  $(X, L)$  будем писать  $X$ .

Сечение  $s$  называется *ступенчатым*, если  $s(\omega) = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(\omega) c_i(\omega)$ ,

где  $c_i \in L, A_i \in \Sigma, i = \overline{1, n}, \chi_{A_i}(\omega)$  — характеристическая функция множества  $A_i$ . Сечение  $u$  называется *измеримым*, если найдется такая последовательность  $\{s_n\}$  ступенчатых сечений, что  $\|s_n(\omega) - u(\omega)\|_{X(\omega)} \rightarrow 0$  для почти всех  $\omega \in \Omega$ .

Пусть  $M(\Omega, X)$  — множество всех измеримых сечений. Символом  $L_0(\Omega, X)$  обозначим факторизацию множества  $M(\Omega, X)$  по отношению равенства почти всюду. Через  $\hat{u}$  обозначим класс из  $L_0(\Omega, X)$ , содержащий измеримое сечение  $u$ . Отметим, что функция  $\omega \rightarrow \|u(\omega)\|_{X(\omega)}$  измерима для любого  $u \in M(\Omega, X)$ . Класс эквивалентности в  $L_0$ , содержащий функцию  $\|u(\omega)\|_{X(\omega)}$ , обозначим через  $\|\hat{u}\|$ . В дальнейшем мы иногда отождествляем сечение  $u \in M(\Omega, X)$  и соответствующий класс эквивалентности  $\hat{u} \in L_0(\Omega, X)$ .

В работе [5, стр. 144] доказано, что  $(L_0(\Omega, X), \|\cdot\|)$  является ПБК над  $L_0$ .

Пусть  $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$  — множество ограниченных измеримых функций на  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $L^\infty(\Omega)$  — упорядоченная алгебра, полученная факторизацией  $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$  по отношению равенства почти всюду. Пусть  $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X) = \{u \in M(\Omega, X) : \|u(\omega)\|_{X(\omega)} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\}$ . Элементы из  $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$  называются *ограниченными измеримыми сечениями*. Через  $L^\infty(\Omega, X)$  обозначим множество классов эквивалентности ограниченных измеримых сечений.

Рассмотрим произвольный лифтинг  $p : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [5]. Отображение  $\rho_X : L^\infty(\Omega, X) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$  называется *векторнозначным лифтингом*, ассоциированным с лифтингом  $p$ , если выполняются следующие условия:

а) для всех  $\hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)$  выполнено  $\rho_X(\hat{u}) \in \hat{u}$ ,  $\text{dom } \rho_X(\hat{u}) = \Omega$ ;

б)  $\|\rho_X(\hat{u})(\omega)\|_{X(\omega)} = p(\|\hat{u}\|)(\omega)$  для всех  $\hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)$ ,  $\omega \in \Omega$ ;

в) Если  $\hat{u}, \hat{v} \in L^\infty(\Omega, X)$ , то  $\rho_X(\hat{u} + \hat{v}) = \rho_X(\hat{u}) + \rho_X(\hat{v})$ ;

г) Если  $\hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)$  и  $e \in L^\infty(\Omega)$ , то  $\rho_X(e\hat{u}) = p(e)\rho_X(\hat{u})$ ;

е) Множество  $\{\rho_X(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$  плотно в  $X(\omega)$  для всех  $\omega \in \Omega$ .

Из [5, теорема 4.4.1 и теорема 4.4.8] следует, что для всякого ПБК  $E$  над  $L_0$  существует измеримое банахово расслоение  $(X, L)$  такое, что  $E$  изометрически изоморфно  $L_0(\Omega, X)$  и на  $L^\infty(\Omega, X)$  существует векторнозначный лифтинг.

Далее везде  $X$  — измеримое банахово расслоение над  $\Omega$  с векторнозначным лифтингом. Множество  $B \subset L_0(\Omega, X)$  называется (*ограниченным по норме*), если множество  $\{\|x\| : x \in B\}$  порядково ограничено в  $L_0$ .

Оператор  $T : L_0(\Omega, X) \rightarrow L_0(\Omega, X)$  называется  $L_0$ -линейным, если  $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$  для всех  $\alpha, \beta \in L_0$ ,  $x, y \in L_0(\Omega, X)$ .  $L_0$ -линейный оператор  $T$  называется  $L_0$ -ограниченным, если для всякого ограниченного множества  $B$  в  $L_0(\Omega, X)$ , множество  $T(B)$  ограничено в  $L_0(\Omega, X)$ . Для  $L_0$ -ограниченного оператора  $T$  положим

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\},$$

где  $1$  — единичный элемент в  $L_0$ .

Пусть  $\{T(\omega) : X(\omega) \rightarrow X(\omega)\}$  — семейство ограниченных линейных операторов. Если  $T(\omega)x(\omega) \in M(\Omega, X)$  для любого  $x \in M(\Omega, X)$ , то  $L_0$ -линейный оператор  $T : L_0(\Omega, X) \rightarrow L_0(\Omega, X)$ , определенный равенством  $T\hat{u} = \widehat{T(\omega)u(\omega)}$  является  $L_0$ -ограниченным [6].

Обратно, для всякого  $L_0$ -ограниченного  $L_0$ -линейного оператора  $T : L_0(\Omega, X) \rightarrow L_0(\Omega, X)$  существует семейство ограниченных операторов  $\{T(\omega) : X(\omega) \rightarrow X(\omega)\}$  такое, что для всякого  $x \in L_0(\Omega, X)$  справедливо равенство  $(T(x))(\omega) = T(\omega)(x(\omega))$  для почти всех  $\omega \in \Omega$ ; при этом, если  $\|T\| \in L^\infty(\Omega)$ , то  $\rho_X(T(x))(\omega) = T(\omega)(\rho_X(x)(\omega))$  для всех  $x \in L^\infty(\Omega, X)$  и  $\omega \in \Omega$ .

## 2. Полугруппа операторов в пространствах Банаха — Канторовича

Пусть  $T_t : L_0(\Omega, X) \rightarrow L_0(\Omega, X)$  семейство  $L_0$ -линейных  $L_0$ -ограниченных операторов, где  $t \in [0; +\infty)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Семейство  $\{T_t\}_{t \in [0; +\infty)}$  назовем *полугруппой* в  $L_0(\Omega, X)$ , если выполняются следующие условия

$$T_0 = I \quad \text{и} \quad T_{t+s} = T_t T_s,$$

при всех  $t, s \in [0; +\infty)$ , где  $I$  — тождественный оператор в  $L_0(\Omega, X)$ .

Если существует  $C \in L^\infty(\Omega)$  такое, что  $\|T_t\| \leq C$  при всех  $t \in [0; +\infty)$ , то полугруппу  $\{T_t\}$  назовем *ограниченной*. Если  $C = 1$ , то полугруппа  $\{T_t\}$  называется *сжимающей*.

Пусть  $\{T_t(\omega) : X(\omega) \rightarrow X(\omega)\}$  — полугруппа ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве  $X(\omega)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Семейство  $\{T_t(\omega)\}_{t \in [0; +\infty)}$  назовем *измеримым расслоением полугруппы* операторов, если для каждого  $t \in [0; +\infty)$  имеет место  $T_t(\omega)x(\omega) \in M(\Omega, X)$  при всех  $x \in M(\Omega, X)$ .

Если  $\{T_t(\omega)\}_{t \in [0; +\infty)}$  — измеримое расслоение ограниченных линейных операторов, то линейный оператор  $T_t : L_0(\Omega, X) \rightarrow L_0(\Omega, X)$ , определенный равенством  $T_t x = \widehat{T_t(\omega)x(\omega)}$  служит  $L_0$ -линейным  $L_0$ -ограниченным оператором.

**Теорема 1.** Если  $\{T_t(\omega)\}_{t \in [0; +\infty)}$  — измеримое расслоение полугрупп операторов, то  $\{T_t\}_{t \in [0; +\infty)}$  является полугруппой  $L_0$ -линейных  $L_0$ -ограниченных операторов в  $L_0(\Omega, X)$ .

**Теорема 2.** Если  $T_t : L_0(\Omega, X) \rightarrow L_0(\Omega, X)$  — ограниченная полугруппа  $L_0$ -линейных  $L_0$ -ограниченных операторов, то существует измеримое расслоение ограниченных полугрупп линейных операторов  $T_t(\omega) : X(\omega) \rightarrow X(\omega)$  такое, что  $\rho_X(T_t x)(\omega) = T_t(\omega)\rho_X(x)(\omega)$  для всех  $x \in L^\infty(\Omega, X)$  и  $\omega \in \Omega$ .

◁ Фиксируем  $t \in [0; +\infty)$  и  $\omega \in \Omega$ . Поскольку  $\|T_t\| \leq C$ , то  $\|T_t x\| \leq C\|x\|$  для всех  $x \in L_0(\Omega, X)$ . Поэтому  $T_t$  отображает  $L^\infty(\Omega, X)$  в себя. Определим линейный оператор  $T_t(\omega)$  в  $X(\omega)$  равенством  $T_t(\omega)\rho_X(x)(\omega) = \rho_X(T_t x)(\omega)$  для всех  $x \in L^\infty(\Omega, X)$ . Покажем, что  $\{T_t(\omega)\}$  — полугруппа операторов.

1) Пусть  $x \in L^\infty(\Omega, X)$ . Имеем

$$T_0(\omega)(\rho_X(x)(\omega)) = \rho_X(T_0(x))(\omega) = \rho_X(I(x))(\omega) = \rho_X(x)(\omega).$$

Отсюда  $T_0(\omega) = I(\omega)$  для всех  $\omega \in \Omega$ .

2) Пусть  $t, s \in [0; +\infty)$ . Тогда

$$\begin{aligned} T_{t+s}(\omega)(\rho_X(x)(\omega)) &= \rho_X(T_{t+s}(x))(\omega) = \rho_X(T_t T_s(x))(\omega) \\ &= T_t(\omega)(\rho_X(T_s(x))(\omega)) = T_t(\omega)T_s(\omega)\rho_X(x)(\omega), \end{aligned}$$

т. е.  $T_{t+s}(\omega) = T_t(\omega)T_s(\omega)$  для всех  $\omega \in \Omega$ .

3) Теперь покажем, что  $\{T_t(\omega)\}$  — ограниченная полугруппа операторов. Из соотношения

$$\begin{aligned} \|T_t(\omega)\rho_X(x)(\omega)\|_{X(\omega)} &= \|\rho_X(T_t x)(\omega)\|_{X(\omega)} \\ &= p(\|T_t x\|)(\omega) \leq p(C\|x\|)(\omega) = p(C)(\omega)p(\|x\|)(\omega) \\ &= p(C)(\omega)\|\rho_X(x)(\omega)\|_{X(\omega)} \end{aligned}$$

выводим  $\|T_t(\omega)\| \leq p(C)(\omega)$ . Поскольку  $\|T_t(\omega)\| \leq p(C)(\omega) \leq \|p(C)\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|C\|_{L^\infty(\Omega)}$ , то полугруппа  $\{T_t(\omega)\}$  ограничена для всех  $\omega \in \Omega$ . В силу условия е) из определения 2,  $T_t(\omega)$  продолжается до ограниченного линейного оператора на  $X(\omega)$  (это продолжение также обозначим через  $T_t(\omega)$ ). Из определения  $\{T_t(\omega)\}$  следует, что  $\rho_X(T_t x)(\omega) = T_t(\omega)\rho_X(x)(\omega)$  для всех  $x \in L^\infty(\Omega, X)$  и  $\omega \in \Omega$ .  $\triangleright$

**Следствие.** Если  $T_t : L_0(\Omega, X) \rightarrow L_0(\Omega, X)$  — сжимающая полугруппа  $L_0$ -линейных  $L_0$ -ограниченных операторов, то существует измеримое расслоение полугруппы сжимающих операторов  $T_t(\omega) : X(\omega) \rightarrow X(\omega)$  такое, что  $\rho_X(T_t x)(\omega) = T_t(\omega)\rho_X(x)(\omega)$  для всех  $x \in L^\infty(\Omega, X)$  и  $\omega \in \Omega$ .

$\triangleleft$  Так как  $\|T_t\| \leq 1$ , то из теоремы 2 следует, что существует измеримое расслоение ограниченных полугрупп операторов  $T_t(\omega) : X(\omega) \rightarrow X(\omega)$  такое, что  $\rho_X(T_t x)(\omega) = T_t(\omega)\rho_X(x)(\omega)$  для всех  $x \in L^\infty(\Omega, X)$  и  $\omega \in \Omega$ . Поскольку  $\|T_t\| \leq 1$ , то  $\|T_t(\omega)\| \leq 1$ , т. е.  $\{T_t(\omega)\}$  сжатия.  $\triangleright$

### 3. Сильно и равномерно непрерывные полугруппы операторов в пространствах Банаха — Канторовича

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Полугруппу операторов  $\{T_t\}$  в  $L_0(\Omega, X)$  назовем *сильно непрерывной*, если  $\|T_t x - x\|$  ( $o$ )-сходится к нулю при  $t \rightarrow 0$  для каждого  $x \in L_0(\Omega, X)$ .

**ПРИМЕР 1.** Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ , тогда  $L_0 = \mathbb{C}^2$ . Рассмотрим векторное пространство  $E = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$  с покомпонентными алгебраическими операциями и для каждого  $u = (a, (b, c)) \in E$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$  положим  $(\alpha_1, \alpha_2)u = (\alpha_1 a, (\alpha_2 b, \alpha_2 c))$ . Относительно  $L_0$ -нормы

$$\|u\| = (|a|, \max(|b|, |c|)) \in \mathbb{C}^2$$

$E$  становится пространством Банаха — Канторовича над  $\mathbb{C}^2$ .

Рассмотрим семейство линейных операторов  $T_t : E \rightarrow E$  ( $t \in [0; +\infty)$ ) определенное равенством

$$T_t x = ((t+1)x_1, (t+1)x_2, (t+1)x_3).$$

Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ . Из равенств

$$\begin{aligned} T_t(\alpha x) &= T_t(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_2 x_3) \\ &= ((t+1)\alpha_1 x_1, (t+1)\alpha_2 x_2, (t+1)\alpha_2 x_3) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2)((t+1)x_1, (t+1)x_2, (t+1)x_3) = \alpha T_t x \end{aligned}$$

следует, что  $T_t$  является  $\mathbb{C}^2$ -линейным. Из равенства  $\|T_t x\| = (t+1)\|x\|$  имеем, что оператор  $T_t$  является  $L_0$ -ограниченным при каждом  $t \in [0; +\infty)$ .

Теперь покажем, что  $T_t$  — полугруппа операторов. Ясно, что  $T_0 x = x$ , т. е.  $T_0 = I$ . Из равенства  $T_{t+s} x = ((t+s+1)x_1, (t+s+1)x_2, (t+s+1)x_3) = T_t((s+1)x_1, (s+1)x_2, (s+1)x_3) = T_t T_s x$  вытекает, что  $T_{t+s} = T_t T_s$ .

Поскольку

$$\|T_t x - x\| = t\|x\| \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow 0$ , то полугруппа  $T_t$  является сильно непрерывной.

**ПРИМЕР 2.** Пусть  $X$  — банахово пространство и  $L_0([0; +\infty), X)$  — пространство измеримых по Бохнеру  $X$ -значных функции на  $[0; +\infty)$ .

Определим отображение  $\|\cdot\| : L_0([0; +\infty), X) \rightarrow L_0([0; +\infty))$  равенством  $\|\widehat{f}\| = \|\widehat{f(t)}\|_X \in L_0([0; +\infty))$ . Тогда  $L_0([0; +\infty), X)$  — ПБК над  $L_0$  [3, стр. 95].

Пусть  $T_t : L_0([0; +\infty), X) \rightarrow L_0([0; +\infty), X)$  — семейство операторов, определенное равенством  $T_t f(s) = (t+1)f(s)$ ,  $t \in [0; +\infty)$ . Ясно, что оператор  $T_t$  является  $L_0$ -ограниченным при каждом  $t \in [0; +\infty)$ . Из равенства  $T_t(\alpha f) = (t+1)\alpha f = \alpha(t+1)f = \alpha T_t f$  следует, что  $T_t$  является  $L_0$ -линейным, при всех  $t \in [0; +\infty)$ .

Покажем, что  $\{T_t\}$  — полугруппа операторов в  $L_0([0; +\infty), X)$ . Так как  $T_0 f(s) = f(s)$ , то  $T_0 = I$ . Поскольку

$$T_{t_1+t_2} f(s) = f(s+t_1+t_2) = T_{t_1} f(s+t_2) = T_{t_1} T_{t_2} f(s),$$

то  $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} T_{t_2}$ . Так как

$$\|\widehat{T_t f - f}\| = t\|\widehat{f}\| \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow 0$ , то полугруппа  $T_t$  является сильно непрерывной.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим семейство операторов  $T_t : L_0([0; +\infty), X) \rightarrow L_0([0; +\infty), X)$ , определенное равенством  $T_t f(s) = f(s + t)$ . Покажем, что  $\{T_t\}$  — полугруппа операторов в  $L_0([0; +\infty), X)$ .

Так как  $T_0 f(s) = f(s + 0) = f(s)$ , то  $T_0 = I$ . Поскольку  $T_{t_1+t_2} f(s) = f(s + t_1 + t_2) = T_{t_1} f(s + t_2) = T_{t_1} T_{t_2} f(s)$ , то  $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} T_{t_2}$ . Легко видеть, что семейство операторов  $\{T_t\}$  не является  $L_0$ -линейным.

ПРИМЕР 4. Пусть  $L_1[0, +\infty)$  — банахово пространство классов интегрируемых по Лебегу функции на  $[0, +\infty)$ .

Обозначим через  $L_0[L_1]$  множество всех измеримых  $K(\omega, \tau)$  функций на  $\Omega \times [0, +\infty)$  удовлетворяющих следующим условиям:

а) класс эквивалентности функций  $\tau \rightarrow K(\omega, \tau)$  входит в  $L_1[0, +\infty)$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ ;

б) функция  $\omega \rightarrow \|K(\omega, \tau)\|_{L_1[0, +\infty)}$  измерима и ее класс эквивалентности  $\|K\|$  входит  $L_0$ .

Известно [3, стр. 96], что  $(L_0[L_1], \|\cdot\|)$  — пространство Банаха — Канторовича над  $L_0$ .

Рассмотрим семейство линейных операторов  $\{T_t : t \in [0; +\infty)\}$  в  $L_0[L_1]$ , определенное равенством

$$(T_t K)(\omega, \tau) = K(\omega, \tau + t).$$

Поскольку  $\|T_t K\| = \|K\|$ , имеем, что оператор  $T_t$   $L_0$ -ограничен при каждом  $t \in [0; +\infty)$ . Из равенства  $(T_t(\alpha K))(\omega, \tau) = T_t(\alpha(\omega)K(\omega, \tau)) = \alpha(\omega)K(\omega, \tau + t) = \alpha(\omega)(T_t K)(\omega, \tau) = (\alpha T_t K)(\omega, \tau)$  следует, что  $T_t(\alpha K) = \alpha T_t(K)$  для любого  $\alpha \in L_0$ , т. е.  $T_t$  является  $L_0$ -линейным. Проверим аксиомы полугрупп.

1) Поскольку,  $(T_0 K)(\omega, \tau) = T_0 K(\omega, \tau) = K(\omega, \tau)$ , то  $T_0 = I$ .

2) Так как  $(T_{t+s} K)(\omega, \tau) = T_{t+s} K(\omega, \tau) = K(\omega, \tau + s + t) = T_t K(\omega, \tau + s) = T_t T_s K(\omega, \tau) = (T_t T_s(K))(\omega, \tau)$ , то  $T_{t+s} = T_t T_s$ .

Таким образом,  $\{T_t\}$  — полугруппа  $L_0$ -линейных  $L_0$ -ограниченных операторов в  $L_0[L_1]$ .

ПРИМЕР 5. Рассмотрим пространство  $l^\infty([0, +\infty), L_0)$ , состоящее из отображений  $f : [0, +\infty) \rightarrow L_0$ , для которых определен элемент

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, +\infty)\} \in L_0.$$

Относительно этой нормы  $l^\infty([0, +\infty), L_0)$  является пространством Банаха — Канторовича [4 стр. 168].

Определим семейство линейных операторов  $\{T_t : t \in [0; +\infty)\}$  в  $l^\infty([0, +\infty), L_0)$  равенством  $T_t f(x) = f(x+t)$ . Легко, как и выше, проверить, что  $\{T_t : t \in [0; +\infty)\}$  является полугруппой  $L_0$ -линейных  $L_0$ -ограниченных операторов в ПБК  $l^\infty([0, +\infty), L_0)$ .

Пусть  $\|T_t\| \leq C \in L^\infty(\Omega)$  для всех  $t \in [0; +\infty)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** Если  $\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \|T_t x - x\| \right\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$  для каждого  $x \in L^\infty(\Omega, X)$ , то полугруппу  $\{T_t\}$  назовем *сильно  $L^\infty(\Omega)$ -непрерывной*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.** Измеримое расслоения полугрупп операторов  $\{T_t(\omega)\}$  назовем *равномерно сильно непрерывной*, если  $\|T_t(\omega)\| \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  и для любого  $x \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$  имеет место  $\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} \|T_t(\omega)x(\omega) - x(\omega)\|_{X(\omega)} = 0$ .

Пусть  $\pi : \mathcal{L}^\infty(\Omega, X) \rightarrow L^\infty(\Omega, X)$  каноническое отображение, ставящее каждому элементу  $u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$  содержащий его класс  $\hat{u}$ .

**Теорема 3.** а) Если полугруппа  $\{T_t\}$  — сильно  $L^\infty(\Omega)$ -непрерывна, то измеримые расслоения полугрупп  $\{T_t(\omega)\}$ , определенные равенством

$$T_t(\omega)\rho_X(x)(\omega) = \rho_X(T_t x)(\omega),$$

являются равномерно сильно непрерывными.

б) Если  $\{T_t(\omega)\}$  — равномерно сильно непрерывная ограниченная полугруппа операторов для всех  $\omega \in \Omega$ , то семейство линейных операторов  $T_t : L^\infty(\Omega, X) \rightarrow L^\infty(\Omega, X)$ , определенных равенством  $T_t \hat{x} = \pi(T_t(\omega)x(\omega))$ , является сильно  $L^\infty(\Omega)$ -непрерывной ограниченной полугруппой.

◁ а) Ясно, что  $\|T_t(\omega)x(\omega)\|_{X(\omega)} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  для любого  $x \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ . Из соотношения

$$\begin{aligned} & \|T_t(\omega)\rho_X(x)(\omega)\|_{X(\omega)} = p(\|T_t x\|)(\omega) \\ & \leq p(C)(\omega)\|\rho_X(x)(\omega)\|_{X(\omega)} \leq \|p(C)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\rho_X(x)(\omega)\|_{X(\omega)} \end{aligned}$$

следует, что  $\|T_t(\omega)\| \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  и  $\{T_t(\omega)\}$  — ограничена для всех  $\omega \in \Omega$ . Поскольку,

$$\begin{aligned} & \|T_t(\omega)x(\omega) - x(\omega)\|_{X(\omega)} = \|\rho_X(T_t x)(\omega) - \rho_X(x)(\omega)\|_{X(\omega)} \\ & = p(\|T_t x - x\|)(\omega) \leq \|p(\|T_t x - x\|)\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \left\| \|T_t x - x\| \right\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

для всех  $\omega \in \Omega$  и  $\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \|T_t x - x\| \right\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ , то  $\limsup_{t \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} \|T_t(\omega)x(\omega) - x(\omega)\|_{X(\omega)} = 0$ .

Таким образом, полугруппа операторов  $\{T_t(\omega)\}$  — равномерно сильно непрерывна.

б) Сначала покажем, что  $\{T_t\}$  — ограниченная полугруппа. Имеем

$$\begin{aligned} \|T_t \hat{x}\|_{L^\infty(\Omega, X)} &= \|\pi(T_t(\omega)x(\omega))\|_{L^\infty(\Omega, X)} \leq \|T_t(\omega)x(\omega)\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)} \\ &= \sup_{\omega \in \Omega} \|T_t(\omega)x(\omega)\|_{X(\omega)} \leq \sup_{\omega \in \Omega} \|T_t(\omega)\| \|x(\omega)\|_{X(\omega)} \leq C \|\hat{x}\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Из следующих соотношений видно, что  $\{T_t\}$  — полугруппа.

$$\begin{aligned} T_0 \hat{x} &= \pi(T_0(\omega)x(\omega)) = \pi(I(\omega)x(\omega)) = \pi(x(\omega)) = \hat{x} \text{ т. е. } T_0 = I; \\ T_{t+s} \hat{x} &= \pi(T_{t+s}(\omega)x(\omega)) = T_t(\pi(T_s(\omega)x(\omega))) = T_t T_s \hat{x} \text{ т. е. } T_{t+s} = T_t T_s. \end{aligned}$$

Ясно, что  $T_t$  —  $L^\infty(\Omega)$ -линейный оператор. Поскольку  $\left\| \|T_t x - x\| \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sup_{\omega \in \Omega} \|T_t(\omega)x(\omega) - x(\omega)\|_{X(\omega)}$  и  $\limsup_{t \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} \|T_t(\omega)x(\omega) - x(\omega)\|_{X(\omega)} = 0$ , то имеем  $\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \|T_t x - x\| \right\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ , т. е.  $\{T_t\}$  — сильно  $L^\infty(\Omega)$ -непрерывная ограниченная полугруппа. ▸

Пусть опять  $\|T_t\| \leq C \in L^\infty(\Omega)$  для всех  $t \in [0; +\infty)$  и  $B(X(\omega))$  — банахово пространство всех ограниченных линейных операторов в  $X(\omega)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.** Полугруппу операторов  $\{T_t\}_{t \in [0; +\infty)}$  в  $L^\infty(\Omega, X)$  назовем *равномерно  $L^\infty$ -непрерывной*, если

$$\left\| \|T_t - I\| \right\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow 0$ . Измеримое расслоение полугруппы  $\{T_t(\omega)\}_{t \in [0; +\infty)}$  назовем *равномерно непрерывным*, если  $\|T_t(\omega)\|_{B(X(\omega))} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$  и  $\limsup_{t \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} \|T_t(\omega) - I(\omega)\|_{B(X(\omega))} = 0$ .

**Теорема 4.** а) Если  $\{T_t\}_{t \in [0; +\infty)}$  — равномерно  $L^\infty$ -непрерывная полугруппа операторов в  $L^\infty(\Omega, X)$ , то полугруппа  $\{T_t(\omega)\}_{t \in [0; +\infty)}$  — равномерно непрерывна в  $X(\omega)$ .



б) Если  $\{T_t(\omega)\}_{t \in [0; +\infty)}$  — равномерно непрерывная полугруппа, то семейство линейных операторов  $T_t : L^\infty(\Omega, X) \rightarrow L^\infty(\Omega, X)$ , определенных равенством  $T_t \hat{x} = \pi(T_t(\omega)x(\omega))$ , является равномерно  $L^\infty$ -непрерывной полугруппой.

◁ а) Поскольку

$$\sup_{\omega \in \Omega} \|T_t(\omega) - I(\omega)\| \leq \|T_t - I\|_{L^\infty(\Omega)},$$

то  $\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} \|T_t(\omega) - I(\omega)\|_{B(X(\omega))} = 0$ .

б) доказывается так же, как и в доказательстве теоремы 3. ▷

### Литература

1. Хилле Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы.—Москва: ИЛ., 1962.—829 с.
2. Иосида К. Функциональный анализ.—Москва: Мир, 1967.—624 с.
3. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—Москва: Наука, 2003.—619 с.
4. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
5. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Тр. Ин-та мат. СО РАН.—Новосибирск: Изд-во Ин-та мат. 1995.—Т. 29: Линейные операторы, согласованные с порядком.—С. 63–211.
6. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Теорема Банаха об обратном операторе в пространствах Банаха —Канторовича // Владикавказ. мат. журнал, 2004.—№ 3.—с. 21–25.
7. Ganiev I. G., Kudaybergenov K. K. Measurable bundles of compact operators // Methods Functional Analysis and Topology.—2001.—V. 3.—p. 1–5.
8. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К.К. Принцип равномерной ограниченности Банаха-Штейнгауза для операторов в расширенных пространствах Банаха — Канторовича над  $L^0$  // Мат. труды.—2006.—Т. 9, № 1.—с. 21–33.

Ганиев Иномжон Гуламджанович  
Ташкент, Ташкентский институт инженеров  
железнодорожного транспорта;  
Национальный университет Узбекистана;  
E-mail: [ganiev1@rambler.ru](mailto:ganiev1@rambler.ru)

Сададдинова Сановар Сададдиновна  
Национальный университет Узбекистана

ОРТОСИММЕТРИЧНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ  
ОПЕРАТОРЫ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХА. Г. Кусраев<sup>1</sup>

Статья представляет собой обзор результатов о порядковом строении ортосимметричных билинейных операторов в векторных решетках.

## Введение

Исследование порядковых свойств билинейных операторов в векторных решетках начато более полувека тому назад. Первая публикация в этом направлении появилась в 1953 году и принадлежала Х. Накано [78]. Однако эта работа не привлекала внимания специалистов и новые продвижения были достигнуты лишь в 1970-х годах в работах Д. Фремлина [55, 56], Г. Виттстока [88, 89], Р. Кристеску [52] и А. Г. Кусраева [5]. Затем вновь в течение почти двадцати лет билинейные операторы как самостоятельный объект исследования выпали из круга активно разрабатываемых разделов теории операторов в векторных решетках. Впрочем, стоит отметить, что различные частные случаи (как, например, билинейные функционалы, умножение в решеточно упорядоченной алгебре, различные тензорные произведения) время от времени изучались равными авторами, см., например, [82, 83]. Подробнее история этого вопроса и состояние предмета отражены в обзорах [40, 41, 42].

С начала 2000-х годов наблюдается возрастающий интерес к порядковым свойствам билинейных операторов. В этот период появились новые задачи и методы исследования, а также новые взаимосвязи с другими разделами теории векторных решеток и положительных операторов. Этот всплеск начался с серии работ Х. Баскеса и А. ван Ройя [46, 48, 49, 50, 51] и продолжается по сей день [10, 13, 16–18, 30, 37, 38, 39, 42, 44, 57, 64–66, 68, 79].

В работе Г. Баскеса и А. ван Ройя [46] был введен интересный класс *ортосимметричных* билинейных операторов, интенсивно разрабатываемых в последующие годы [10, 13, 35, 38, 44, 47, 48, 57].

---

<sup>1</sup> Поддержан грантом Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00622, и грантом Президента РФ, проект НШ-5813.2006.1.

Неразделимой спутницей ортосимметричных операторов оказалась конструкция *квадрата* архимедовой векторной решетки, предложенной теми же авторами в другой работе [48]. Разные подходы к этой конструкции представлены в [35, 48].

Как было отмечено в [13, 44], квадрат векторной решетки играет столь же важную роль в теории положительных ортосимметричных билинейных операторов, какая принадлежит тензорному произведению по Фремлину [55] в теории положительных билинейных операторов. Обе конструкции обладают следующим универсальным свойством: множества положительных билинейных операторов, определенных на декартовом произведении двух архимедовых векторных решеток, и положительных ортосимметричных билинейных операторов, определенных на декартовом квадрате архимедовой векторной решетки, принимающих значения из равномерно полной векторной решетки, биективны соответственно с множествами положительных линейных операторов на тензорном произведении по Фремлину рассматриваемых векторных решеток и на квадрате данной векторной решетки. Эти биекции будем называть *линеаризацией посредством тензорного произведения по Фремлину* и *линеаризацией посредством квадрата*, соответственно. В то же время имеется существенное различие: линеаризация посредством тензорного произведения по Фремлину не сохраняет порядковую непрерывность оператора, а линеаризация посредством квадрата — сохраняет. Тем самым, квадрат векторной решетки можно использовать для перевода известных результатов о порядково непрерывных линейных операторах в аналогичные результаты о порядково непрерывных орторегулярных билинейных операторах. Это обстоятельство является ключевым и, в частности, обеспечивает справедливости теоремы Радона — Никодима для ортосимметричных билинейных операторов.

Цель настоящей статьи — дать обзор основных фактов о порядковом строении ортосимметричных билинейных операторов, включая в частности, вопросы представления и продолжения, неравенства типа Гёльдера и Минковского, теорему типа Радона — Никодима и теорему Хана о разложении для орторегулярных билинейных операторов.

Статья организована следующим образом. Первая глава фиксирует обозначения и терминологию, а также содержит короткий обзор необходимых для дальнейшего изложения сведений об общих билинейных и ортосимметричных билинейных операторах в векторных решетках. Кроме того здесь обсуждается проблема продолжения орторегулярных билинейных операторов.

Во второй главе рассматривается взаимодействие между кон-

струкцией квадрата векторной решетки и однородного функционального исчисления в векторных решетках. Здесь же собраны полезные сведения об однородном функциональном исчислении, которые, несмотря на свою простоту, не представлены компактно в литературе. Далее, изложены неравенства типа Гёльдера и Минковского для ортосимметричных билинейных операторов.

Третья глава посвящена ортосимметричным билинейным операторам, сохраняющим порядковые отрезки. Здесь рассматриваются некоторые свойства квадрата векторной решетки, позволяющие установить, что порядково непрерывный ортосимметричный оператор сохраняет порядковые отрезки в том и только в том случае, когда его линеаризация посредством квадрата является линейным оператором Магарам. Этот факт лежит в основе теоремы Радона — Никодима, теоремы Хана о разложении и критерия дизъюнктивности Накано для ортосимметричных билинейных операторов, сохраняющих порядковые отрезки.

Четвертая глава посвящена ортосимметричным билинейным операторам, сохраняющим дизъюнктивность. Вначале рассматривается билинейный вариант проблемы Викстеда: *в каких расширенных векторных решетках все раздельно нерасширяющие билинейные операторы симметричны или порядково ограничены?* Затем дается описание орторегулярных операторов, представимых в виде суммы или разности симметричных решеточных гомоморфизмов, а также мультипликативное представление общих ортосимметричных билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктивность.

Необходимые сведения из теории векторных решеток и положительных операторов можно найти в книгах [7] и [33]. Все рассматриваемые в этой статье векторные решетки предполагаются вещественными и архимедовыми. Символ  $:=$  используется в тех случаях, когда равенство понимается как определение;  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{R}$  обозначаем множества натуральных и вещественных чисел, соответственно. Векторную решетку, полную относительно сходимости с регулятором, будем называть для краткости *равномерно полной*.

## Глава 1. Билинейные операторы в векторных решетках

В этой главе вводятся терминология и обозначения, а также дается краткий обзор необходимых для дальнейшего важнейших фактов. Параграф 1.1 посвящен общим билинейным операторам, определенным на произведении векторных решеток, тогда как в параграф 1.2 вводится класс ортосимметричных билинейных операторов — основной объект изучения в настоящем обзоре. В параграфе 1.3 коротко рассмотрена задача о продолжении ортосимметричных билинейных операторов.

### 1.1. Классы билинейных операторов

В этом параграфе вводятся классы билинейных операторов, выделяемые разными порядковыми свойствами и формулируются некоторые полезные в дальнейшем факты. Подробнее этот предмет представлен в обзоре [42].

**1.1.1.** Пусть  $E$ ,  $F$  и  $G$  — векторные решетки. Билинейный оператор  $b : E \times F \rightarrow G$  называют *положительным*, если  $b(x, y) \geq 0$  для всех  $x \in E_+$  и  $y \in F_+$ , и *регулярным*, если его можно представить в виде разности двух положительных билинейных операторов. Обозначим символами  $BL_r(E, F; G)$  и  $BL_+(E, F; G)$  соответственно множества всех регулярных и положительных билинейных операторов из  $E \times F$  в  $G$ . Для произвольного положительного оператора  $b$  выполняется  $|b(x, y)| \leq b(|x|, |y|)$  ( $x \in E$ ,  $y \in F$ ).

**1.1.2.** Обозначим символом  $\text{Prt}(x)$  множество всех *разбиений* элемента  $x \in E_+$ , т. е. множество всех конечных последовательностей  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , элементов  $E_+$  таких, что  $x_1 + \dots + x_n = x$ . Будем говорить, что  $b : E \times F \rightarrow G$  — билинейный оператор *порядково ограниченной вариации*, если для любых  $x \in E_+$  и  $y \in F_+$  множество  $\Sigma b[x; y]$  всех сумм вида  $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m |b(x_k, y_l)|$ , где  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Prt}(x)$  и  $(y_1, \dots, y_m) \in \text{Prt}(y)$ , порядково ограничено в  $G$ . Множество всех билинейных операторов порядково ограниченной вариации из  $E \times F$  в  $G$ , обозначаемое символом  $BL_{bv}(E, F; G)$ , представляет собой упорядоченное векторное пространство с положительным конусом  $BL_+(E, F; G)$ , т. е.  $b_1 \geq b_2$  означает, что оператор  $b_1 - b_2$  положителен. Очевидно, что  $BL_r(E, F; G) \subset BL_{bv}(E, F; G)$ , но обратное включение

может нарушаться. Пространство  $BL_r(E, F; G)$  всегда рассматривается с индуцированным порядком. Билинейные операторы порядково ограниченной вариации были введены в [78], а затем исследованы в [51], см. также обзор [42].

Если  $G$  — пространство Канторвича, то  $BL_r(E, F; G) = BL_{bv}(E, F; G)$  и это упорядоченное векторное пространство также есть пространство Канторвича [51]. В частности, каждый регулярный билинейный оператор  $b \in BL_r(E, F; G)$  имеет модуль  $|b|$ , причем

$$|b|(x, y) = \sup \Sigma b[x; y] \quad (0 \leq x \in E, 0 \leq y \in F),$$

$$|b(x, y)| \leq |b|(|x|, |y|) \quad (x \in E, y \in F).$$

В случае функционалов ( $G = \mathbb{R}$ ) эта формула приведена в [56, 1П]. Другие формулы *порядкового исчисления* регулярных билинейных операторов см. в [16].

**1.1.3.** Билинейный оператор  $b : E \times F \rightarrow G$  называют *решеточным биморфизмом*, если операторы  $b(e, \cdot) : y \mapsto b(e, y)$  ( $y \in F$ ) и  $b(\cdot, f) : x \mapsto b(x, f)$  ( $x \in E$ ) являются решеточными гомоморфизмами для любых  $e \in E_+$  и  $f \in F_+$  [55]. Очевидно, что решеточный биморфизм положителен. Следующая характеристика решеточных биморфизмов получена в [82].

Для положительного билинейного оператора  $b$  равносильны утверждения:

- (1)  $b$  — решеточный биморфизм;
- (2)  $|b(x, y)| = b(|x|, |y|)$  для всех  $x \in E$  и  $y \in F$ ;
- (3) если для  $0 \leq x, u \in E$  и  $0 \leq y, v \in F$  выполнены условия  $x \wedge u = 0$  и  $y \wedge v = 0$ , то  $b(x, y) \wedge b(u, v) = 0$ .

Следующий фундаментальный результат установлен Д. Фремлиным в [55, теорема 4.2]. (Различные подходы к этому результату см. [58, 82].)

**1.1.4. Теорема.** Пусть  $E$  и  $F$  — векторные решетки. Существует и притом единственная, с точностью до изоморфизма, векторная решетка  $E \bar{\otimes} F$ , а также решеточный биморфизм  $\phi : E \times F \rightarrow E \bar{\otimes} F$ , такие, что:

- (1) для векторной решетки  $G$  и решеточного биморфизма  $\psi : E \times F \rightarrow G$  существует единственный решеточный гомоморфизм  $T : E \bar{\otimes} F \rightarrow G$ , для которого  $T \circ \phi = \psi$ ;
- (2)  $\phi$  индуцирует вложение алгебраического тензорного произведения  $E \otimes F$  в  $E \bar{\otimes} F$ ;

(3)  $E \otimes F$  плотно в  $E \bar{\otimes} F$  в том смысле, что для любого  $v \in E \bar{\otimes} F$  можно подобрать такие  $x_0 \in E$  и  $y_0 \in F$ , что для произвольного  $\varepsilon > 0$  существует  $u \in E \otimes F$ , удовлетворяющий неравенству  $|v - u| \leq \varepsilon x_0 \otimes y_0$ ;

(4) если  $0 < v \in E \bar{\otimes} F$ , то существуют такие  $x \in E_+$  и  $y \in F_+$ , что  $0 < x \otimes y \leq v$ .

Решеточный биморфизм  $\phi$  обозначают символом  $\otimes$ , а алгебраическое тензорное произведение  $E \otimes F$  считают фактически вложенным в  $E \bar{\otimes} F$ .

**1.1.5.** Пусть  $\psi$  и  $T$  — те же, что и в 1.1.4 (1). Предположим, что для любых  $x \in E_+$  и  $y \in E_+$  из равенства  $\psi(x, y) = 0$  вытекает либо  $x = 0$ , либо  $y = 0$ . В этом случае  $T$  инъективен и, следовательно, отображает  $E \bar{\otimes} F$  изоморфно на векторную подрешетку  $G$ , порожденную множеством  $\text{im } \psi := \psi(E \times F)$ . В частности, если  $E_0$  и  $F_0$  — векторные подрешетки  $E$  и  $F$  соответственно, то тензорное произведение  $E_0 \bar{\otimes} F_0$  изоморфно векторной подрешетке в  $E \bar{\otimes} F$ , порожденной множеством  $E_0 \otimes F_0$ . Тем самым  $E_0 \bar{\otimes} F_0$  можно считать векторной подрешеткой в  $E \bar{\otimes} F$  [55, следствия 4.4 и 4.5].

Д. Фремлин [55, теорема 5.3] доказал также следующее важное универсальное свойство тензорного произведения  $E \bar{\otimes} F$ : если  $G$  — равномерно полная векторная решетка, то для любого положительного билинейного оператора  $b : E \times F \rightarrow G$  существует единственный положительный линейный оператор  $T : E \bar{\otimes} F \rightarrow G$  такой, что  $b = T \otimes$ .

Пусть  $L_r(H, G)$  и  $L^\sim(H, G)$  обозначают пространства соответственно всех линейных регулярных операторов и всех линейных порядково ограниченных операторов из  $H$  в  $G$ .

**1.1.6. Теорема.** Пусть  $E, F$  и  $G$  — векторные решетки, причем  $G$  равномерно полно. Тогда отображение  $T \mapsto T \otimes$  представляет собой изоморфизм следующих упорядоченных векторных пространств:

- (1)  $L_r(E \bar{\otimes} F, G)$  и  $BL_r(E, F; G)$ ;
- (2)  $L^\sim(E \bar{\otimes} F, G)$  и  $BL_{bv}(E, F; G)$ .

Первое утверждение немедленно следует из упомянутого в 1.1.5 универсального свойства тензорного произведения; второе утверждение было установлено в [51].

Итак, фремлиновское тензорное произведение векторных решеток позволяет некоторые известные результаты о регулярных или порядково ограниченных линейных операторах переводить в новые

результаты о регулярных билинейных операторах или же билинейных операторах порядково ограниченной вариации соответственно. Этот и некоторые другие аспекты теории билинейных операторов в векторных решетках см. в [42]. Относительно мажорируемых билинейных операторов в решеточно нормированных пространствах, а также подходящей конструкции тензорного произведения см. [18].

**1.1.7.** Билинейный оператор  $b : E \times F \rightarrow G$  называют *раздельно  $o$ -непрерывным*, если  $b(e, \cdot)$  и  $b(\cdot, f)$  являются  $o$ -непрерывными операторами для всех  $e \in E$  и  $f \in F$ . *Порядковая непрерывность* ( *$o$ -непрерывность*)  $b$  означает, что сеть  $(b(x_\alpha, y_\beta))$   $o$ -сходится к  $b(x, y)$  в  $G$ , если  $(x_\alpha)$   $o$ -сходится к  $x$  в  $E$  и  $(y_\beta)$   $o$ -сходится к  $y$  в  $F$ . Как было отмечено в [30], регулярный билинейный оператор  $b$  раздельно  $o$ -непрерывен в том и только в том случае, когда он  $o$ -непрерывен. Множество всех порядково непрерывных регулярных билинейных операторов из  $E \times F$  в  $G$  с линейными операциями и порядком, индуцированными из  $BL_r(E, F; G)$ , обозначается символом  $BL_n(E, F; G)$ .

Оператор  $b \in BL_r(E, F; G)$  называют *порядково сингулярным*, если он обращается в ноль на некотором фундаменте  $E \times F$ . Скажем, что  $b$  *суперсингулярен*, если  $b$  обращается в ноль на фундаменте вида  $E_0 \times F$  или  $E \times F_0$ , где  $E_0$  и  $F_0$  — фундаменты в  $E$  и  $F$  соответственно. Множества всех порядково сингулярных и порядково непрерывных регулярных билинейных операторов образуют дизъюнктные порядковые идеалы в  $BL_r(E, F; G)$ . Следующий факт был установлен в [5, предложение 4] и [30, теорема 1].

**1.1.8.** Пусть  $E, F$  и  $G$  — векторные решетки, причем  $G$  порядково полна. Для произвольного регулярного билинейного оператора  $b : E \times F \rightarrow G$  равносильны следующие утверждения:

- (1)  $b$  порядково непрерывен;
- (2)  $b$  раздельно  $o$ -непрерывен;
- (3)  $b$  дизъюнктен всем сингулярным  $b' \in BL_r(E, F; G)$ ;
- (4)  $b$  дизъюнктен всем суперсингулярным  $b' \in BL_r(E, F; G)$ .

В частности,  $BL_n(E, F; G)$  — полоса в  $BL_r(E, F; G)$ .

**1.1.9.** Несмотря на упомянутое выше универсальное, тензорное произведение по Фремлину имеет существенный недостаток: изоморфизмы из 1.1.6 не сохраняют порядковую непрерывность. Для порядково непрерывного  $T \in L_r(E \bar{\otimes} F, G)$  билинейный оператор  $T \otimes \in BL_r(E, F; G)$  будет, разумеется, порядково непрерывным, но обратное утверждение неверно. Соответствующий контрпример можно извлечь из [56], см. [66].



## 1.2. Ортосимметричные билинейные операторы

В этом параграфе вводится основной объект настоящего обзора. Формулируются некоторые важные свойства ортосимметричных билинейных операторов. Подробности можно найти в [42, 44, 46].

**1.2.1.** Билинейный оператор  $b : E \times E \rightarrow G$  называют *ортосимметричным*, если  $x \wedge y = 0$  влечет  $b(x, y) = 0$ , каковы бы ни были  $x, y \in E$  [46]. Разность двух положительных ортосимметричных билинейных операторов называют *ортотрегулярным* [13, 44]. Обозначим символом  $BL_{or}(E; G)$  пространство всех ортотрегулярных билинейных операторов из  $E \times E$  в  $G$ , упорядоченное конусом положительных ортосимметричных билинейных операторов. Напомним, что оператор  $b$  называют *симметричным* (*антисимметричным*), если  $b(x, y) = b(y, x)$  ( $b(x, y) = -b(y, x)$ ) для всех  $x, y \in E$ , *положительно полуопределенным*, если  $b(x, x) \geq 0$  для любого  $x \in E$  и *положительно определенным*, если он положительно полуопределен и  $b(x, x) = 0$  влечет  $x = 0$ .

В качестве примера ортосимметричного билинейного оператора укажем умножение  $(x, y) \mapsto xy$  ( $x, y \in A$ ) почти  $f$ -алгебры  $A$ , так как по определению *почти  $f$ -алгебра* — решеточно упорядоченная алгебра, в которой операция умножения представляет собой ортосимметричный билинейный оператор [2]. Обзор различных аспектов теории  $f$ -алгебр [40, 41].

**1.2.2.** Обозначим символом  $BL_{\sim}(E; G)$  упорядоченное векторное пространство всех ортосимметричных порядково ограниченных билинейных операторов из  $E \times E$  в  $G$ . Тогда  $BL_{or}(E; G) \subset BL_{bv}(E; G) \subset BL_{\sim}(E; G)$ . Если  $G$  порядково полна, то эти три пространства совпадают и служат полосой в  $BL_r(E, E; G)$ . Тем самым, каждый положительный билинейный оператор  $b : E \times E \rightarrow G$  допускает единственное разложение  $b = c + d$ , где  $c$  ортосимметричен и нет ненулевого ортосимметричного положительного билинейного оператора, мажорируемого оператором  $d$ . В случае билинейных функционалов (т. е.  $G = \mathbb{R}$ ) формулу для вычисления ортосимметричного осколка  $c$  оператора  $b$  была получена в [57, теорема 3.2]; та же формула сохраняется и в общем случае.

Следующее важное свойство ортосимметричных билинейных операторов было установлено в [46, следствие 2].

**1.2.3. Теорема.** Пусть  $E$  и  $F$  — векторные решетки. Любой ортосимметричный положительный билинейный оператор из  $E \times E$  в  $F$  является симметричным.

В частности, всякая архимедова почти  $f$ -алгебра коммутативна [46]. Легко видеть, что ортосимметричный положительный билинейный оператор положительно полуопределен [57]. Для решеточных биморфизмов верно также и обратное [44]:

**1.2.4.** Если  $E$  и  $F$  — векторные решетки, то для любого решеточного биморфизма  $b : E \times E \rightarrow F$  равносильны следующие утверждения:

- (1)  $b$  симметричен;
- (2)  $b$  ортосимметричен;
- (3)  $b$  положительно полуопределен.

Сформулируем теперь важное структурное свойство орторегулярных операторов, полученное в [13].

**1.2.5. Теорема.** Пусть  $E$ ,  $F$  и  $G$  — векторные решетки, причем  $G$  равномерно полна. Пусть  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow F$  — положительно определенный решеточный биморфизм и  $F_0$  — векторная подрешетка в  $F$ , порожденная множеством  $\{\langle x, y \rangle : x, y \in E\}$ . Тогда для любого орторегулярного билинейного оператора  $b : E \times E \rightarrow G$  существует единственный регулярный линейный оператор  $\Phi_b : F_0 \rightarrow G$  такой, что

$$b(x, y) = \Phi_b(\langle x, y \rangle) \quad (x, y \in E).$$

Соответствие  $b \mapsto \Phi_b$  осуществляет изоморфизм упорядоченных векторных пространств  $BL_{or}(E, G)$  и  $L_r(F_0, G)$ .

**1.2.6.** Пусть  $E$  — векторная решетка. Пару  $(E^\odot, \odot)$  (или же  $E^\odot$  для краткости) называют *квадратом*  $E$ , если  $E^\odot$  — векторная решетка,  $\odot : E \times E \rightarrow E^\odot$  — симметричный решеточный биморфизм (называемый *каноническим биморфизмом* квадрата) и для любого симметричного решеточного биморфизма  $\phi : E \times E \rightarrow F$  со значениями в произвольной векторной решетке  $F$  существует единственный решеточный гомоморфизм  $\Phi_\phi : E^\odot \rightarrow F$  такой что  $\Phi_\phi \circ \odot = \phi$ . Это определение введено в [48]. Там же установлен следующий результат.

**1.2.7. Теорема.** Для произвольной векторной решетки  $E$  существует квадрат  $(E^\odot, \odot)$ , который единственен с точностью до изоморфизма в следующем смысле: если для некоторой векторной решетки  $E^\odot$  и симметричного решеточного биморфизма  $\odot : E \times E \rightarrow E^\odot$  пара  $(E^\odot, \odot)$  служит квадратом  $E$ , то существует решеточный изоморфизм  $i$  из  $E^\odot$  на  $E^\odot$  такой, что  $i \odot = \odot$  (и, разумеется,  $i^{-1} \odot = \odot$ ).

Нетрудно видеть, что канонический биморфизм является положительно определенным [44, теорема 2.1 (3)]. Поэтому можно в 1.2.5

взять  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \odot$ , откуда получим следующий результат, ср. [48, теорема 9] и [44, теорема 3.1].

**1.2.8. Теорема.** Пусть  $E$  и  $G$  — те же, что и в 1.2.7. Тогда для любого орторегулярного билинейного оператора  $b : E \times E \rightarrow G$  существует единственный регулярный линейный оператор  $\Phi_b : E^\odot \rightarrow G$  такой, что

$$b(x, y) = \Phi_b(x \odot y) \quad (x, y \in E).$$

При этом соответствие  $b \mapsto \Phi_b$  (называемый *линеаризацией посредством квадрата*) осуществляет изоморфизм упорядоченных векторных пространств  $BL_{or}(E, G)$  и  $L_r(E^\odot, G)$ .

**1.2.9.** По аналогии с 1.2.6 можно ввести понятие  $s$ -ой степени векторной решетки, используя решеточные  $s$ -морфизмы вместо решеточных биморфизмов (2-морфизмы), см. [38].

При этом имеют место варианты теорем 1.2.7 и 1.2.8 для  $s$ -линейных операторов [37, 38, 42].

### 1.3. Продолжение орторегулярных билинейных операторов

Здесь приведем некоторые результаты из статьи [44].

**1.3.1.** Положительный билинейный оператор, определенный на декартовом произведении мажорируемых подрешеток двух векторных решеток и принимающий значения из пространства Канторовича, допускает продолжение до положительного билинейного оператора, определенного на декартовом произведении объемлющих векторных решеток. Этот факт впервые был получен в [5, теорема 3], а затем в [58] (см. также [18, 42]). Если же данный оператор ортосимметричен, то возникает вопрос о возможности его продолжения до положительного ортосимметричного билинейного оператора.

Положительное решение было получено в [44]. Достаточно применить теорему 1.2.7 и следующее простое следствие теоремы 1.2.5: Если  $E_0$  — подрешетка  $E$ , то ее квадрат  $E_0^\odot$  и канонический биморфизм  $\odot$  можно рассматривать соответственно как подрешетку  $E^\odot$  и ограничение  $\odot$  на  $E_0 \times E_0$ ; более того, если  $E_0$  — мажорируемая подрешетка  $E$ , то и  $E_0^\odot$  — мажорируемая подрешетка  $E^\odot$ .

**1.3.2. Теорема.** Пусть  $E_0$  — мажорируемая подрешетка в векторной решетке  $E$  и  $G$  — порядково полная векторная решетка. Тогда всякий положительный ортосимметричный билинейный опера-

тор  $b_0 : E_0 \times E_0 \rightarrow G$  допускает положительное ортосимметричное билинейное продолжение  $b : E \times E \rightarrow G$ .

**1.3.3.** Для формулировки следующего результата нам необходимо следующее утверждение: Если  $E_0$  — мажорируемая подрешетка векторной решетки  $E$  и  $G$  — порядково полная векторная решетка, то существует порядково непрерывный решеточный гомоморфизм  $\varepsilon'$  из  $L_r(E_0, G)$  в  $L_r(E, G)$  такой, что  $\varrho' \circ \varepsilon'$  — тождественный оператор на  $L_r(E_0, G)$ , где  $\rho' : L_r(E, G) \rightarrow L_r(E_0, G)$  — оператор ограничения  $S \mapsto S|_{E_0}$ .

Этот факт, утверждающий существование порядково непрерывного «одновременного продолжения» линейных регулярных операторов с мажорируемой подрешетки на всю векторную решетку, была установлена в [5, теорема 3], см. также [7, теорема 3.4.11].

**1.3.4. Теорема.** Пусть  $E_0, E$  и  $G$  — те же, что и в 1.3.1. Тогда существует «одновременное продолжение» орторегулярных билинейных операторов с  $E_0$  на все  $E$ , т. е. существует порядково непрерывный решеточный гомоморфизм  $\varepsilon : BL_{or}(E_0, G) \rightarrow BL_{or}(E, G)$  такой, что  $\rho \circ \varepsilon$  — тождественный оператор на  $BL_{or}(E_0, G)$ , где  $\rho : BL_{or}(E, G) \rightarrow BL_{or}(E_0, G)$  обозначает оператор ограничения  $b \mapsto b|_{E_0 \times E_0}$ .

**1.3.5.** Справедливость этого утверждения сразу видна из диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 L_r(E_0, G) & \xrightarrow{\varepsilon'} & L_r(E, G) & \xrightarrow{\rho'} & L_r(E_0, G) \\
 \uparrow \psi_0^{-1} & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi_0 \\
 BL_{or}(E_0, G) & \xrightarrow{\varepsilon} & BL_{or}(E, G) & \xrightarrow{\rho} & BL_{or}(E_0, G)
 \end{array}$$

где  $\varepsilon' : L_r(E_0, G) \rightarrow L_r(E, G)$  — оператор одновременного продолжения из 1.3.3,  $\psi_0 : S_0 \mapsto S_0 \odot$  ( $S_0 \in L_r(E_0, G)$ ) и  $\psi : S \mapsto S \odot$  ( $S \in L_r(E, G)$ ). В самом деле, правый квадрат диаграммы коммутативен, а с оператором  $\varepsilon := \psi \circ \varepsilon' \circ \psi_0^{-1}$  коммутативна вся диаграмма. В частности,  $\rho \circ \varepsilon = Id$ , где  $Id$  — тождественный оператор в  $BL_{or}(E_0, G)$ .

Обозначим символами  $\varepsilon^+(b)$  и  $\varepsilon^+(\Phi_b)$  соответственно множества всех положительных ортосимметричных билинейных продолжений

$b$  на все  $E \times E$  и множество всех положительных линейных продолжений  $\Phi_b$  на все  $E^\circ$ . Отображение  $b \mapsto \Phi_b$  из 1.2.8 служит аффинной биекцией из  $\epsilon^+(b)$  на  $\epsilon^+(\Phi_b)$ , следовательно, сохраняет крайние точки. Однако крайние точки множества  $\epsilon^+(\Phi_b)$  являются решеточными гомоморфизмами [45], см. также [7, теорема 3.3.9 (3)], следовательно, крайние точки множества  $\epsilon^+(b)$  — симметричные решеточные биморфизмы. Тем самым, приходим к результату.

**1.3.6. Теорема.** *Если  $E_0$  — мажорируемая подрешетка векторной решетки  $E$  и  $G$  — пространство Канторовича, то каждый симметричный решеточный биморфизм  $b_0 : E_0 \times E_0 \rightarrow G$  допускает продолжение до симметричного решеточного биморфизма  $b : E \times E \rightarrow G$ .*

**1.3.7.** В [5, теорема 4] было установлено, что регулярный порядково непрерывный билинейный оператор  $b$ , определенный на декартовом произведении векторных решеток  $E$  и  $F$ , принимающий значения в пространстве Канторовича, допускает и притом единственное регулярное порядково непрерывное билинейное продолжение  $\hat{b}$  на декартово произведение порядковых пополнений  $\hat{E}$  и  $\hat{F}$  (см. также [66, приложение]). Легко понять, что если  $E = F$  и  $b$  ортосимметричен, то и  $\hat{b}$  будет ортосимметричным.

## Глава 2. Неравенства типа Гёльдера для ортосимметричных билинейных операторов

В этой главе изложены результаты из [65, 66]. В параграфе 2.1 вводится однородное функциональное исчисление в равномерное полных векторных решетках. В параграфе 2.2 представлены неравенства типа Гёльдера для ортосимметричных билинейных операторов. В параграфе 2.3 даны дальнейшие неравенства типа Гёльдера, содержащие однородные выражения вида  $|x_1|^{p_1} \cdot \dots \cdot |x_N|^{p_N}$ , где  $0 \leq p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}$  и  $p_1 + \dots + p_N = 1$ .

### 2.1. Однородное функциональное исчисление в векторных решетках

Однородное функциональное исчисление в равномерно полной векторной решетке можно вводить по-разному [27, 43, 63, 71, 85, 86]. Мы следуем подходу [43, 48], восходящему к Г. Я. Лозановскому [27].

**2.1.1.** Обозначим символом  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  векторную решетку всех непрерывных положительно однородных функций  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . В

соответствие с [43] скажем, что  $f(x_1, \dots, x_N)$  существует в  $E$  и напомним  $y = f(x_1, \dots, x_N)$ , если существует такой элемент  $y \in E$ , что  $\omega(y) = f(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))$  для любого  $\mathbb{R}$ -значного решеточного гомоморфизма  $\omega$  на векторной подрешетке  $E$ , порожденной элементами  $\{x_1, \dots, x_N, y\}$ . Это определение корректно в том смысле, что если  $L$  — векторная подрешетка  $E$ , содержащая  $\{x_1, \dots, x_N, y\}$  и  $\omega(y) = f(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))$  ( $\omega \in \Omega$ ) для некоторого разделяющего множества  $\Omega$   $\mathbb{R}$ -значных решеточных гомоморфизмов на  $L$ , то  $y = f(x_1, \dots, x_N)$ . Непосредственно из определения следует, что  $f(x, \dots, x) = xf(1, \dots, 1)$  для любого  $0 \leq x \in E$ . Определим  $dt_j \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  формулой  $dt_j(t_1, \dots, t_N) = t_j$  ( $j := 1, \dots, N$ ). Однородное функциональное исчисление можно распространить на положительно однородные функции, определенные на конических подмножествах  $\mathbb{R}^N$ . Это сделано в работе [67]. Там же показано, что расширенное однородное функциональное исчисление позволяет перенести классическую двойственность Миньковского в векторную решетку, порождая в ней абстрактную выпуклость в духе [21, 81].

**2.1.2. Теорема.** Пусть  $E$  равномерно полная векторная решетка и  $x_1, \dots, x_N \in E$ . Тогда  $f(x_1, \dots, x_N)$  существует для каждого  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  и отображение

$$f \mapsto f(x_1, \dots, x_N) \quad (f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N))$$

представляет собой единственный решеточный гомоморфизм из  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  в  $E$ , для которого  $dt_j(x_1, \dots, x_N) = x_j$  ( $j := 1, \dots, N$ ).

В частности, если  $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  и  $f \leq g$ , то  $f(x_1, \dots, x_N) \leq g(x_1, \dots, x_N)$  для всех  $(x_1, \dots, x_N) \in E^N$ . Более того, имеет место неравенство:

$$|f(x_1, \dots, x_N)| \leq \|f\| \bigvee_{j=1}^N |x_j|,$$

где  $\|f\| := \sup\{f(t_1, \dots, t_N) : (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N, \max_j |t_j| = 1\}$ .

**2.1.3.** Пусть  $K, M, N \in \mathbb{N}$  и рассмотрим положительно однородные функции  $f_1, \dots, f_M \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  и  $g_1, \dots, g_K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^M)$ . Обозначим  $f := (f_1, \dots, f_M)$  и  $g := (g_1, \dots, g_K)$ . Тогда  $g_1 \circ f, \dots, g_K \circ f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  и для  $x = (x_1, \dots, x_N) \in E^N$  и  $y = (y_1, \dots, y_M) \in E^M$ , элементы  $f(x) := (f_1(x), \dots, f_M(x)) \in E^M$  и  $g(y) := (g_1(y), \dots, g_K(y)) \in E^K$  корректно определены. Более того,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x = (x_1, \dots, x_N) \in E^N).$$

В частности, если  $N = M = K$  и  $g = f^{-1}$ , то

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (x, y \in E^N).$$

**2.1.4.** Пусть  $E$  и  $F$  — равномерно полные векторные решетки,  $h : E \rightarrow F$  — решеточный гомоморфизм,  $x_1, \dots, x_N \in E$  и  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ . Тогда

$$h(f(x_1, \dots, x_N)) = f(h(x_1), \dots, h(x_N)).$$

В частности, если  $E$  — равномерно полная векторная подрешетка в  $F$  содержащая  $x_1, \dots, x_N \in F$  и  $h$  — тождественное вложение  $E \hookrightarrow F$ , то элемент  $f(x_1, \dots, x_N)$  относительно  $F$  содержится в  $E$  и имеет тот же смысл, что и относительно  $E$ .

**2.1.5.** Предположим, что  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  и для некоторого фиксированного номера  $1 \leq k \leq N$  имеем  $f(t_1, \dots, t_{k-1}, 0, t_{k+1}, \dots, t_N) = 0$ , каковы бы ни были  $t_j \in \mathbb{R}$ ,  $j \neq k$ . Тогда для любых  $x_1, \dots, x_N \in E$  будет  $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) \in \{x_k\}^{\perp\perp}$ . Тем самым для любой полосы  $L \subset E$  выполняется  $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) \in L$  как только  $x_k \in L$ . Если  $L$  допускает порядковый проектор  $\pi$ , то для любых  $x_1, \dots, x_N \in E$  верно

$$\pi f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, \pi x_k, x_{k+1}, \dots, x_N).$$

В дальнейшем нам потребуются следующие примеры положительно однородных функций.

**2.1.6.** Рассмотрим три функции  $\sigma_{\alpha, N}, \sigma'_{\alpha, N} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  и  $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемые формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha, N}(t_1, \dots, t_N) &:= \theta_{\alpha}^{-1}(\theta_{\alpha}(t_1) + \dots + \theta_{\alpha}(t_N)), \\ \sigma'_{\alpha, N}(t_1, \dots, t_N) &:= \theta_{\alpha}(\theta_{\alpha}^{-1}(t_1) + \dots + \theta_{\alpha}^{-1}(t_N)), \\ J(r, s) &:= \theta_2^{-1}(rs) \quad (r, s, t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

где  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ , а  $\theta_{\alpha} : t \mapsto \operatorname{sgn}(t)t^{\alpha}$  — строго возрастающая биекция  $\mathbb{R}$ . Очевидно, что  $\sigma_{\alpha, N}, \sigma'_{\alpha, N}$  входят в  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  и  $J$  входит в  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ , следовательно,  $\sigma_{\alpha, N}(x_1, \dots, x_N)$ ,  $\sigma'_{\alpha, N}(x_1, \dots, x_N)$  и  $J(x, y)$  корректно определены в равномерно полной векторной решетке  $E$ , каковы бы ни были  $x, y, x_1, \dots, x_N \in E$ . Следующая импликация означает, что для дизъюнктивных пар значения функций  $\sigma_{\alpha, 2}$  и  $\sigma'_{\alpha, 2}$  совпадают со сложением:

$$(\forall x, y \in E) |x| \wedge |y| = 0 \Rightarrow \sigma_{\alpha, 2}(x, y) = \sigma'_{\alpha, 2}(x, y) = x + y,$$

Она легко следует из определений, поскольку справедлива для вещественных чисел. Для краткости обозначим  $\theta := \theta_2$ ,  $\sigma = \sigma_{2,2}$  и  $\sigma' = \sigma'_{2,2}$ .

Для данных равномерно полной векторной решетки  $E := (E, +, \cdot, \leq)$  и числа  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$  вводится  $\alpha$ -*овыпукление*  $E^{(\alpha)}$  как то же самое несущее множество  $E$  снабженное тем же самым отношением порядка и алгебраическими операциями, определяемыми следующим образом:

$$\begin{aligned} x \tilde{+} y &:= \sigma'_{\alpha,2}(x, y) := (x^{1/\alpha} + y^{1/\alpha})^\alpha \quad (x, y \in E), \\ \lambda * x &:= \theta_\alpha(\lambda) \cdot x := \lambda^\alpha \cdot x \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in E), \end{aligned}$$

так что  $E^{(\alpha)} := (E, \tilde{+}, *, \leq)$ . Тогда  $E^{(\alpha)}$  — равномерно полная векторная решетка. Более того,  $E^{(1)} = E$ ,  $(E^{(\alpha)})^{(\beta)} = E^{(\alpha\beta)}$  и  $(E^{(\alpha)})^{(1/\alpha)} = E$ , где равенства понимаются в смысле алгебраического и решеточного изоморфизма [86, предложение 4.8]. О применениях этой конструкции см., например, [71, 86].

**2.1.7.** Скажем, что функция  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  *мультипликативна*, если  $f(s_1 t_1, \dots, s_N t_N) = f(s_1, \dots, s_N) f(t_1, \dots, t_N)$  и *сохраняет модуль*, если  $f(|t_1|, \dots, |t_N|) = |f(t_1, \dots, t_N)|$  для всех  $s_1, t_1, \dots, s_N, t_N \in \mathbb{R}$ . Общий вид отличной от нуля положительно однородной мультипликативной функции, сохраняющей модуль, дается формулой

$$\begin{aligned} t_1 t_2 \cdot \dots \cdot t_N = 0 &\Rightarrow f(t_1, t_2, \dots, t_N) = 0; \\ f(t_1, \dots, t_N) &= f(|t_1|, \dots, |t_N|) \operatorname{sgn} f(t_1, \dots, t_N), \\ f(|t_1|, \dots, |t_N|) &= \exp(g_1(\ln |t_1|)) \cdot \dots \cdot \exp(g_N(\ln |t_N|)), \end{aligned}$$

где  $g_1, \dots, g_N$  — некоторые аддитивные функции в  $\mathbb{R}$  (т. е. решения функционального уравнения Коши [1], причем  $\sum_{i=1}^N g_i = I_{\mathbb{R}}$ ). В случае непрерывных  $g_1, \dots, g_N$  получается функция типа Кобба — Дугласа, и если, сверх того,  $f$  неотрицательна, то  $f(t_1, \dots, t_N) = c |t_1^{p_1}| \cdot \dots \cdot |t_N^{p_N}|$  где  $0 \leq c, p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}$  и  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Таким образом, выражение  $|x_1|^{p_1} \cdot \dots \cdot |x_N|^{p_N}$  корректно определено в  $E$ . При этом имеет место оценка

$$|x_1|^{p_1} \cdot \dots \cdot |x_N|^{p_N} \leq p_1 |x_1| + \dots + p_N |x_N|$$

в силу известного неравенства между взвешенными арифметическим и геометрическим средними для вещественных чисел.



## 2.2. Калибры и неравенства типа Гёльдера

В этом параграфе дадим некоторые неравенства для ортосимметричных билинейных операторов. Всюду ниже  $E$  — равномерно полная векторная решетка.

**2.2.1.** *Калибром* называют неотрицательную сублинейную функцию определенную на выпуклом конусе, содержащемся в  $\mathbb{R}^N$ . *Поляра*  $k^\circ$  калибра  $k$ , определяется формулой

$$k^\circ(t) := \inf\{\lambda > 0 : (\forall s \in \mathbb{R}^N) \langle s, t \rangle \leq \lambda k(s)\} \quad (t \in \mathbb{R}^N),$$

также является калибром. (Здесь и в дальнейшем  $\langle s, t \rangle := s_1 t_1 + \dots + s_N t_N$ ). Более того,  $k^{\circ\circ} := (k^\circ)^\circ = k$  в том и только в том случае, если  $k$  полунепрерывен снизу (подробности см. в [80]).

Калибр  $k : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  называют *строго положительным*, если  $k(s) > 0$  для всех  $s \neq 0$ . В этой работе рассматриваются только строго положительные калибры, определенные на всем  $\mathbb{R}^N$ . Множество таких калибров обозначим символом  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^N)$ . Калибр из  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^N)$  является непрерывным. Поляра калибра  $k \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^N)$  также входит в  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^N)$  и его можно посчитать по формуле

$$k^\circ(t) = \sup_{0 \neq s \in \mathbb{R}^N} \frac{\langle s, t \rangle}{k(s)} = \sup\{\langle s, t \rangle : s \in \mathbb{R}^N, k(s) \leq 1\} \quad (t \in \mathbb{R}^N).$$

Так как  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ , то для любых  $x_1, \dots, x_N \in E$  существуют  $k(x_1, \dots, x_N) \in E$  и  $k^\circ(x_1, \dots, x_N) \in E$ . При этом отображение  $(x_1, \dots, x_N) \mapsto k(x_1, \dots, x_N)$  представляет собой сублинейный оператор из  $E^N$  в  $E$ , причем

$$|k(x_1, \dots, x_N) - k(y_1, \dots, y_N)| \leq \|p\| \bigvee_{i=1}^N |x_i - y_i|.$$

**2.2.2.** Если  $k \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^N)$  и  $x_1, \dots, x_N \in E$ , то имеет место представление

$$k^\circ(x_1, \dots, x_N) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N, k(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \leq 1 \right\}.$$

Более того,  $k^\circ(x_1, \dots, x_N)$  является  $r$ -пределом возрастающей последовательности, составленной из конечных супремумов линейных комбинаций вида  $\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$ , где  $k(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \leq 1$ .

◁ Заметим, что множество  $U := \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i : k(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \leq 1 \right\}$

вполне ограничено по норме в  $AM$ -спэце  $E_u$ ,  $u := |x_1| \vee \dots \vee |x_N|$ , так как служит образом компактного множества  $\{\lambda \in \mathbb{R}^N : k(\lambda) \leq 1\}$

относительно отображения  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \mapsto \sum_{k=1}^N \lambda_i x_i$ . Обозна-

чим символом  $U^\vee$  подмножество  $E$ , состоящее из супремумов конечных подмножеств множества  $U$ . По лемме Кренгеля (см. [33, теорема 12.29] или [32, лемма 3.13]) в  $E_u$  существует  $y := \sup U$  и принадлежит замыканию по норме  $\overline{U^\vee}$  множества  $U^\vee$ . Так как  $U^\vee$  направлено вверх, то  $U^\vee$  сходится по норме к  $y$ . Таким образом, для любого  $\mathbb{R}$ -значного решеточного гомоморфизма  $\omega$  на  $E_u$  имеем

$$\begin{aligned} \omega(y) &= \lim_{u \in U^\vee} \omega(u) = \sup\{\omega(u) : u \in U^\vee\} \\ &= \sup\{\omega(u) : u \in U\} = k^\circ(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)). \end{aligned}$$

Следовательно,  $y = k^\circ(x_1, \dots, x_N)$  в силу [43, Следствие 3.4]. ▷

**2.2.3.** Возьмем калибр  $k_{p,N} : (t_1, \dots, t_N) \mapsto \left( \sum_{i=1}^N |t_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ . Для соответствующего отображения из  $E^N$  в  $E$  используется более выразительное обозначение [71, 85, 86]:

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} := k_{p,N}(x_1, \dots, x_N) \quad (x_1, \dots, x_N \in E).$$

При  $p = \infty$  полагают  $k_{p,N}(t_1, \dots, t_N) = \max\{|t_i| : i := 1, \dots, N\}$  и, как видно,  $k_{p,N}(x_1, \dots, x_N) = |x_1| \vee \dots \vee |x_N|$ . Разумеется, отображение  $(x_1, \dots, x_N) \mapsto k_{p,N}(x_1, \dots, x_N) \in E$  корректно определено и для  $0 < p < 1$ , поскольку по-прежнему  $k_{p,N} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ , но в этом случае  $k_{p,N} \notin \mathcal{G}(\mathbb{R}^N)$  и соответствующее отображение не будет сублинейным.

**2.2.4.** Легко видеть, что следующее свойство калибров

$$\langle s, t \rangle \leq k(s)k^\circ(t) \quad (s = (s_1, \dots, s_N), t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N),$$

вытекающее из указанной в 2.2.1 формулы для вычисления полярны, равносильно неравенству (см. 2.1.6),

$$\sigma_{2,N}(J(s_1, t_1), \dots, J(s_N, t_N)) \leq J(k(s_1, \dots, s_N), k^\circ(t_1, \dots, t_N)).$$

Комбинируя это с 2.1.3 и 2.1.6, приходим к следующему: Для любых  $k \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^N)$  и  $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N \in E$  имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^N x_i \odot y_i \leq k(x_1, \dots, x_N) \odot k^\circ(y_1, \dots, y_N).$$

В том частном случае, когда  $k := k_{p,N}$  и  $k^\circ = k_{q,N}$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $1/p + 1/q = 1$ , получаем

$$\sum_{i=1}^N |x_i \odot y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \odot \left( \sum_{i=1}^N |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**2.2.5.** Возьмем положительный ортосимметричный билинейный оператор  $b : E \times E \rightarrow G$ . Тогда  $b = \Phi_b \odot$  для положительного линейного оператора  $\Phi_b$  из  $E^\odot$  в  $G$ , см. 1.2.7. Если применить  $\Phi_b$  к неравенству из 2.2.4 и использовать 1.2.7, то приходим к утверждению: Для любых  $x_i, y_i \in E$ ,  $i := 1, \dots, N$ , справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^N |b(x_k, y_k)| \leq b(k(x_1, \dots, x_N), k^\circ(y_1, \dots, y_N)).$$

И вновь, если  $k := k_p$ , где  $1 \leq p, q \leq \infty$  и  $1/p + 1/q = 1$ , то

$$\sum_{k=1}^N |b(x_k, y_k)| \leq b \left( \left( \sum_{k=1}^N |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \left( \sum_{k=1}^N |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

**2.2.6.** Пусть  $E, G, b$  и  $\Phi_b$  — те же что и в 2.2.5. Тогда для  $x_1, y_1, \dots, x_N, y_N \in E$  и  $k \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^N)$  справедливо неравенство

$$k(b(x_1, y_1), \dots, b(x_N, y_N)) \leq \Phi_b(k(x_1 \odot y_1, \dots, x_N \odot y_N)).$$

Равенство выполняется, если  $b$  — решеточный биморфизм.

В частном случае  $k := k_p$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ , будет

$$\left( \sum_{i=1}^N |b(x_i, y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \Phi_b \left( \left( \sum_{i=1}^N |x_i \odot y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right),$$

причем имеет место равенство в случае решеточного биморфизма  $b$ .

**2.2.7.** Для доказательства 2.2.6 нужно заметить, что если  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$  и  $k^\circ(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \leq 1$ , то в силу 2.2.2 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i b(x_i, y_i) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi_b(x_i \odot y_i) = \Phi_b \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i \odot y_i \right) \\ &\leq \Phi_b(k(x_1 \odot y_1, \dots, x_N \odot y_N)), \end{aligned}$$

а затем вновь применить 2.2.2. Этот способ доказательства неравенств называют *методом квазилинеаризации*, см. [3].

Метод квазилинеаризации работает не только для сублинейных функций (см. 2.2.1), но и для суперлинейных функций, с той разницей, что в 2.2.2 вместо sup-представления будет inf-представление. Подробности см. в [67].

### 2.3.Обобщенные неравенства Гёльдера и Миньковского

Теперь рассмотрим несколько неравенств, содержащих однородные выражения вида  $|x_1|^{p_1} \cdot \dots \cdot |x_N|^{p_N}$ , где  $p_1 + \dots + p_N = 1$ , см. 2.1.7. Используя обозначения из 2.1.6, мультипликативность  $f$  можно записать в виде  $f \circ (J \times \dots \times J) = J \circ (f \times f)$ . В то же время,  $f$  сохраняют модуль в том и только в том случае, когда  $\theta(f(s_1, \dots, s_N)) = f(\theta(s_1), \dots, \theta(s_N))$ . Тем самым приходим к следующему утверждению.

**2.3.1.** Допустим, что функция  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$  мультипликативна и сохраняет модуль. Тогда для произвольных  $x_1, y_1, \dots, x_N, y_N \in E$  будет

$$f(x_1 \odot y_1, \dots, x_N \odot y_N) = f(x_1, \dots, x_N) \odot f(y_1, \dots, y_N).$$

В частности, если  $0 \leq p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}$ ,  $p_1 + \dots + p_N = 1$ , то

$$\prod_{i=1}^N |x_i \odot y_i|^{p_i} = \left( \prod_{i=1}^N |x_i|^{p_i} \right) \odot \left( \prod_{i=1}^N |y_i|^{p_i} \right).$$

**2.3.1.** Для вывода обобщенных неравенств Гёльдера и Миньковского применим метод квазилинеаризации, см. 2.2.7. С этой целью отметим, что справедливы inf-представления

$$x^p y^{1-p} = \inf \{ p \lambda^{1/p} x + (1-p) \lambda^{-1/(1-p)} y : 0 < \lambda \in \mathbb{Q} \},$$

$$(x^p + y^p)^{1/p} = \inf\{\lambda^{-1/p}x + (1-\lambda)^{-1/p}y : 0 < \lambda < 1, \lambda \in \mathbb{Q}\},$$

из которых выводятся следующие два утверждения.

**2.3.3. Теорема (Обобщенное неравенство Гёльдера).** Предположим, что  $E$  и  $G$  — равномерно полные векторные решетки. Если отображение  $f : E_+ \rightarrow G$  возрастает и сублинейно ( $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ ,  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ;  $x, y \in E$ ,  $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ ), то

$$f\left(\prod_{i=1}^N |x_i|^{p_i}\right) \leq \prod_{i=1}^N f(|x_i|)^{p_i}$$

для всех  $x_1, \dots, x_N \in E$  и таких  $0 \leq p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}$ , что  $p_1 + \dots + p_N = 1$ . Равенство выполняется если  $f : E \rightarrow G$  — решеточный гомоморфизм.

**2.3.4. Теорема (Обобщенное неравенство Минковского).** Предположим, что  $E$ ,  $G$ ,  $f$  и  $x_1, \dots, x_N$  — те же, что и в 2.3.3, и  $0 < p < 1$ . Тогда выполнено неравенство:

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{1/p}\right) \leq \left(\sum_{i=1}^N (f(|x_i|))^p\right)^{1/p}.$$

Равенство выполняется, если  $f : E \rightarrow G$  — решеточный гомоморфизм.

**2.3.5.** Мы можем взять произвольный возрастающий калибр  $k \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^M)$ ,  $M \in \mathbb{N}$ , и в 2.3.3 рассмотреть вместо  $f$  соответствующий сублинейный оператор из  $E^M$  в  $E$ . Предположим, что для каждого  $j := 1, \dots, M$  задана конечная последовательность  $(x_{1j}, \dots, x_{Nj}) \in E^M$ . Заменив  $f$ , например, на  $k_{p,M}$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), мы приходим к следующему варианту неравенства Гёльдера:

$$\left(\sum_{j=1}^M \left(|x_{1j}|^{p_1} \dots |x_{Nj}|^{p_N}\right)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^M |x_{1j}|^p\right)^{p_1/p} \dots \left(\sum_{j=1}^M |x_{Nj}|^p\right)^{p_N/p}.$$

**2.3.6.** Пусть  $E$  и  $F$  — равномерно полные векторные решетки и  $G$  — порядково полная векторная решетка. Допустим, что  $f, g : E_+ \rightarrow F$  — возрастающие сублинейные операторы,  $b_1, \dots, b_N : F \times F \rightarrow G$  — положительные ортосимметричные билинейные операторы и  $b := b_1^{p_1} \dots b_N^{p_N}$ . Тогда

$$b\left(f\left(\prod_{i=1}^N |x_i|^{p_i}\right), g\left(\prod_{i=1}^N |y_i|^{p_i}\right)\right) \leq \prod_{i=1}^N b_i(f(|x_i|), g(|y_i|))^{p_i}$$

для всех  $x_1, y_1, \dots, x_N, y_N \in E$  и таких  $0 \leq p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}$ , что  $p_1 + \dots + p_N = 1$ . Равенство выполняется если  $f, g: E \rightarrow F$  — решеточные гомоморфизмы и  $b$  — симметричный решеточный биморфизм.

**2.3.7.** Обобщенные неравенства Гёльдера 2.3.3 и Минковского 2.3.4 получены в [66, теорема 5.2] и [65, теоремы 4.2 и 4.3], более общие результаты см. [67]. В случае операторов, действующих в пространствах измеримых функций, 2.2.3 и 2.2.4 установлены в работе М. Хаасе [62, замечания 1.2 (5,6)]. В работах Р. Дрновчека и А. Перперко [53] и [54] представлены некоторые интересные оценки для взвешенного геометрического среднего по Адамару положительных интегральных операторов в банаховом функциональном пространстве. В подобных исследованиях могут быть полезны указанные выше неравенства. Так, например, неравенства (1) из [54, теорема 2.1] и (4) из [54, теорема 2.2] являются следствиями соответственно 2.3.3 ( $f(k) := \|K\|$ ) и 2.3.6 ( $b(H, K) := H \cdot K$ ,  $f(h) := H$ ,  $g(k) := K$ ). Другие приложения см. в [62]. Теорема 2.3.6 выводится из обобщенного неравенства Гёльдера 2.2.3 привлекая 1.2.8 и [67, теорема 5.3].

### Глава 3. Операторы, сохраняющие порядковые отрезки

В этой главе рассматриваются ортосимметричные билинейные операторы, обладающие свойством Магарам или, другими словами, сохраняющие порядковые отрезки. Параграф 3.1 содержит новые сведения о структуре квадрата векторной решетки. В параграфе 3.2 обсуждается вопрос о сохранении порядковой непрерывности и свойства Магарам при линеаризации посредством квадрата векторной решетки. Теорема Радона — Никодима и теорема Хана о разложении для билинейных ортосимметричных операторов обсуждаются в параграфе 3.3.

#### 3.1. Квадраты векторных решеток

В этом параграфе представлены некоторые результаты из [48] и [66] о строении квадрата равномерно полной векторной решетки.

**3.1.1.** Применим процедуру  $p$ -овыпуклениия из 2.1.6 к равномерно полной векторной решетке  $E$  с  $p = 1/2$ , [66] ( $p = 2$  и обозначениях [71, 86]). Введем сложение  $\tilde{+}$  и умножение на скаляры  $*$  в  $E$  формулами

$$x \tilde{+} y := \sigma(x, y), \quad \lambda * x := \theta^{-1}(\lambda)x \quad (\lambda \in \mathbb{R}; x, y \in E)$$

и положим  $E^\bullet := (E, \tilde{+}, *, \leq)$ , где  $\leq$  — исходный порядок на  $E$ . Как показано в [48, теорема 9 (iii)], положительно однородная непрерывная функция  $J$  из 2.1.6 является симметричным решеточным биморфизмом из  $E \times E$  в  $E^\bullet$ , а пара  $(E^\bullet, J)$  служит квадратом  $E$ . Согласно 1.2.7 квадрат  $(E^\odot, \odot)$  единственен с точностью до изоморфизма, стало быть,  $j \circ J = \odot$  для некоторого решеточного изоморфизма  $j : E^\bullet \rightarrow E^\odot$ . Обозначим буквой  $\iota$  решеточный гомоморфизм  $j$ , рассматриваемый как биекцию между  $E$  и  $E^\odot$ . В соответствие с 2.1.6  $x \perp y$  влечет  $x + y = x \tilde{+} y$  и, следовательно,  $\iota(x + y) = j(x \tilde{+} y) = j(x) + j(y) = \iota(x) + \iota(y)$ ; поэтому приходим к заключению об ортогональной аддитивности  $\iota$ . Поскольку  $J$  — ортосимметричный биморфизм, имеем  $J(x, |x|) = J(x^+, x^+) - J(x^-, x^-) = (x^+ - x^-)J(1, 1) = x$  и, значит,  $\iota(x) = x \odot |x|$ . Далее, если билинейный оператор  $b : E \times E \rightarrow F$  порядково ограничен и ортосимметричен, то в соответствие с [48, теорема 9],  $x \mapsto \Phi_b^\bullet(x) := b(x, |x|)$  ( $x \in E^\bullet$ ) есть порядково ограниченный линейный оператор и  $b = \Phi_b^\bullet \circ J$ . Как видно,  $\Phi_b := \Phi_b^\bullet \circ \iota^{-1}$  — линейный порядково непрерывный оператор и  $(\Phi_b \circ \iota)(x) := b(x, |x|)$  для любого  $x \in E$ . Следующая теорема является перефразировкой [48, теорема 9].

**3.1.2. Теорема.** Пусть  $E$  — равномерно полная векторная решетка. Тогда отображение  $\iota : x \mapsto x \odot |x|$  представляет собой ортогонально аддитивный порядковый изоморфизм  $E$  на  $E^\odot$ , сохраняющий модуль. Более того, для любого порядково ограниченного ортосимметричного билинейного оператора  $b$  из  $E \times E$  в какую-либо векторную решетку  $F$  формула

$$(\Phi_b \circ \iota)(x) := b(x, |x|) \quad (x \in E)$$

определяет единственный порядково ограниченный линейный оператор  $\Phi_b$  из  $E^\odot$  в  $F$  такой, что  $b = \Phi_b \circ \odot$ .

**3.1.3.** Итак,  $E^\bullet$  представляет квадрат  $E$  с каноническим биморфизмом  $J$ . Более того,  $E$  и  $E^\bullet$  совпадают как упорядоченные множества и структура векторной решетки на  $E^\bullet$  переносится из  $E^\odot$  с помощью  $\iota$ . Модуль элемента, противоположный элемент и отношение дизъюнктивности имеют один и тот же смысл в  $E$  и  $E^\bullet$ , поскольку  $(-1)*x = (-1)x$  для каждого  $x \in E$ . Из-за ортогональной аддитивности отображения  $\iota$  сумма двух дизъюнктивных элементов имеет одно и то же значение в  $E$  и  $E^\bullet$ . Так как операция сложения  $\tilde{+}$  непрерывна относительно  $r$ -сходимости, то  $r$ -сходящиеся сети и последовательности одни и те же в  $E$  и  $E^\bullet$ . Тем самым мы приходим к следующему выводу [48, следствия 10 и 11].

Если векторная решетка равномерно полна (латерально полна, порядково полна, порядково  $\sigma$ -полна), то таким же будет и ее квадрат.

**3.1.4.** Обозначим символом  $BL_o^\sim(E; F)$  пространство порядково ограниченных ортосимметричных билинейных операторов из  $E \times E$  в  $F$ , упорядоченное конусом положительных билинейных операторов. (Напомним, что если  $F$  порядково полна, то  $BL_o^\sim(E; F)$  и  $BL_{or}(E; F)$  совпадают.) Следующее утверждение вытекает немедленно из 3.1.2, ср. 1.2.8.

**Теорема.** Пусть  $E$  и  $F$  — векторные решетки, причем  $E$  равномерно полна. Соответствие  $b \mapsto \Phi_b$  из 3.1.2 является изоморфизмом упорядоченных векторных пространств  $BL_o^\sim(E; F)$  и  $L^\sim(E^\circ, F)$ . При этом,  $b$  — решеточный биморфизм в том и только в том случае, когда  $\Phi_b$  — решеточный гомоморфизм.

**3.1.5.** Справедлива также теорема, обратная к 3.1.2. Чтобы в этом убедиться определим в  $F$  сложение  $\dot{+}$  и умножение на скаляры  $\star$  формулами (см. 2.1.6)

$$x \dot{+} y := \sigma'(x, y), \quad \lambda \star x := \theta(\lambda)x \quad (\lambda \in \mathbb{R}; x, y \in F)$$

и положим  $F^\circ := (F, \dot{+}, \star, \leq)$ , где  $\leq$  — исходный порядок в  $F$ . Тогда  $F^\circ$  — равномерно полная векторная решетка и  $(F^\circ)^\bullet = F$ , [86, предложение 4.8 (ii)]. Более того,  $F^\circ$  единственна с точностью до эквивалентности, и мы приходим к следующему результату см. [66, теорема 6.3] и [68, теорема 3.3].

**3.1.6. Теорема.** Пусть  $F$  — равномерно полная векторная решетка. Тогда существует равномерно полная векторная решетка  $F^\circ$ , квадратом которой служит  $F$ ; символически,  $(F^\circ)^\circ = F$ . Векторная решетка  $F^\circ$  с этим свойством единственна с точностью до решеточного изоморфизма.

Обозначим символами  $\mathfrak{B}(E)$  и  $\mathfrak{P}(E)$  булевы алгебры соответственно всех полос и всех порядковых проекторов в  $E$ . Пусть  $\mathcal{S}_{uc}(E)$  обозначает упорядоченное по включению множество равномерно замкнутых подрешеток в  $E$ . В следующем утверждении собраны полезные свойства квадрата векторной решетки, см. [66, теорема 6.4] и [68, теорема 3.4].

**3.1.7. Теорема.** Пусть  $E$  — равномерно полная векторная решетка. Для  $L \in \mathcal{S}_{uc}(E)$  обозначим символом  $\hat{\iota}(L)$  множество  $\iota(L) := \{x \odot |x| : x \in L\}$  с алгебраическими операциями и порядком индуцированными из  $E^\circ$ . Тогда выполняются следующие утверждения:



- (1) отображение  $L \mapsto \hat{l}(L)$  осуществляет порядковый изоморфизм упорядоченных по включению множеств  $\mathcal{S}_{\text{uc}}(E)$  и  $\mathcal{S}_{\text{uc}}(E^\odot)$ ;
- (2)  $L \in \mathcal{S}_{\text{uc}}(E)$  — порядковый идеал (фундамент) в  $E$  в том и только в том случае, если  $\hat{l}(L)$  — порядковый идеал (фундамент) в  $E^\odot$ ;
- (3)  $\hat{l}$  определяет булев изоморфизм  $\mathfrak{B}(E)$  на  $\mathfrak{B}(E^\odot)$ ;
- (4)  $\hat{l}(L)$  допускает порядковый проектор  $\pi$  в том и только в том случае, если  $L$  допускает порядковый проектор  $\pi'$  и в этом случае  $\pi(x \odot y) = (\pi'x) \odot y = x \odot (\pi'y) = (\pi'x) \odot (\pi'y)$ ;
- (5)  $E$  и  $E^\odot$  одновременно являются решетками с проекциями и в этом случае существует булев изоморфизм  $\pi \mapsto \pi'$  из  $\mathfrak{P}(E^\odot)$  на  $\mathfrak{P}(E)$  такой, что  $\pi(x \odot y) = (\pi'x) \odot y = x \odot (\pi'y) = (\pi'x) \odot (\pi'y)$  для любых  $x, y \in E$  and  $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ ;
- (6) если  $E$  — пространство Канторовича, то существует изоморфизм  $\alpha \mapsto \alpha'$   $f$ -алгебр  $\text{Orth}^\infty(E^\odot)$  и  $\text{Orth}^\infty(E)$  такой, что  $\alpha(x \odot y) = (\alpha'x) \odot y = x \odot (\alpha'y)$  для всех  $\alpha \in \text{Orth}^\infty(E^\odot)$  и  $x, y \in \mathcal{D}(\alpha)$ , где  $\mathcal{D}(\alpha)$  обозначает область задания  $\alpha$ .

### 3.2. Билинейные операторы Магарам

Здесь рассматривается вопрос о сохранение свойств Магарам и порядковой непрерывности при линейаризации посредством квадрата векторной решетки.

**3.2.1.** Пусть  $E$  и  $G$  — векторные решетки и  $b$  — положительный билинейный оператор из  $E \times E$  в  $G$ . Скажем, что  $b$  *сохраняет порядковые отрезки* или обладает *свойством Магарам*, если для любых  $x, y \in E_+$  и  $0 \leq g \leq b(x, y) \in G_+$  существуют  $0 \leq u \leq x$  и  $0 \leq v \leq y$  такие, что  $g = b(u, v)$  или, короче,  $b([0, x] \times [0, y]) = [0, b(x, y)]$  для любых  $x, y \in E_+$ . Положительно порядково непрерывный билинейный оператор, обладающий свойством Магарам, назовем *билинейным оператором Магарам*.

Пусть  $\phi$  — еще один положительный билинейный оператор из  $E \times E$  в  $G$ . Тогда  $b$  называют *абсолютно непрерывным* относительно  $\phi$ , если  $b(x, y) \in \phi(x, y)^{\perp\perp}$  для всех  $0 \leq x, y \in E$ . Как видно, любой оператор  $b \in \phi^{\perp\perp}$  абсолютно непрерывен относительно  $\phi$ .

**3.2.2.** Структура линейных операторов Магарам изучены достаточно хорошо, см., например, [7]. В билинейном контексте эффект сохранения порядковых отрезков не столь прозрачен. И. Шеффолд [84] ввел следующее понятие: говорят, что билинейный оператор  $b : E \times F \rightarrow G$  *почти сохраняет порядковые отрезки справа*

(слева), если для любых  $e \in E_+$  и  $f \in F_+$  множество  $[0, b(e, f)]$  совпадает с замыканием  $b(e, [0, f])$  (соответственно  $b([0, e], f)$ ) в абсолютно слабой топологии  $|\sigma|(G, G^\sim)$  [34]. (Предполагается, что порядково сопряженное пространство  $G^\sim$  разделяет точки.) В [39, предложение 3.2] установлено, что если  $G$  равномерно полно и  $b$  почти сохраняет порядковые отрезки справа или слева, то оператор  $\Phi_b$  почти сохраняет порядковые отрезки. (Линейные операторы, почти сохраняющие порядковые отрезки, введены в [72].) Опираясь на этот факт в [39, теорема 3.3] установлен билинейный вариант теоремы Арендта [33, теорема 7.4]. Как было показано в [66], в случае ортосимметричных операторов можно продвинуться существенно дальше.

**3.2.3. Теорема.** Пусть  $E$  и  $G$  — пространства Канторовича,  $b : E \times E \rightarrow G$  — положительный ортосимметричный билинейный оператор и  $b = \Phi_b \odot$  для единственного положительного линейного оператора  $\Phi_b : E^\odot \rightarrow G$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $b$  сохраняет порядковые отрезки;
- (2)  $b(x, \cdot)$  сохраняет порядковые отрезки для каждого  $0 \leq x \in E$ ;
- (3)  $b(\cdot, y)$  сохраняет порядковые отрезки для каждого  $0 \leq y \in E$ ;
- (4) для любых  $0 \leq x \in E$  и  $0 \leq u \leq b(x, x)$  существует  $y \in E$ ,  $0 \leq y \leq x$ , такой, что  $u = b(y, y)$ ;
- (5)  $\Phi_b$  сохраняет порядковые отрезки.

В доказательстве этого факта имеются лишь две нетривиальные импликации: (4)  $\Rightarrow$  (5) и (5)  $\Rightarrow$  (2). Первая импликация выводится с помощью 2.3.1: если  $0 \leq v \leq b(x, x)$  и  $v = b(x_1, x_2)$  для некоторых  $x_1, x_2 \in [0, x]$ , то для элемента  $x_0 := x_1^{1/2} x_2^{1/2}$  выполняется  $x_0 \odot x_0 = x_1 \odot x_2$ , поэтому  $b(x_0, x_0) = \Phi_b(x_0 \odot x_0) = \Phi(x_1 \odot x_2) = b(x_1, x_2) = v$ . Вторая импликация выводится из 3.1.2. Подробности см. в [66, теорема 8.2] и [68, теорема 4.2].

**3.2.4.** Рассмотрим равномерно полную векторную решетку  $E$ , пространство Канторовича  $G$  и орторегулярный билинейный оператор  $b : E \times E \rightarrow G$ . Симметричный нулевой идеал  $\mathcal{N}_b$  и симметричный носитель  $\mathcal{C}_b$  оператора  $b$  определяются формулами

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_b &:= \{x \in E : |b|(|x|, |x|) = 0\}, \\ \mathcal{C}_b &:= \mathcal{N}_b^\perp = \{x \in E : x \perp \mathcal{N}_b\}.\end{aligned}$$

Поскольку  $b(x, x) = b(|x|, |x|)$  ( $x \in E$ ) для любого ортосимметричного  $b$ , то симметричный нулевой идеал  $\mathcal{N}_b$  можно также определить формулой  $\mathcal{N}_b := \{x \in E : |b|(x, x) = 0\}$ . Как видно из 3.1.2 и 3.1.7 (2),

симметричный нулевой идеал на самом деле является порядковым идеалом, ибо  $\mathcal{N}_{\Phi_b} = \iota(\mathcal{N}_b)$ . Если  $b$  порядково непрерывен, то  $\mathcal{N}_b$  есть полоса в  $E$ . Если  $b \geq 0$  и  $\mathcal{N}_b = \{0\}$ , то  $b$  называют *существенно положительным*. Ортосимметричный положительный билинейный оператор  $b$  существенно положителен в том и только в том случае, когда он положительно определен.

Орторегулярный билинейный оператор  $b$  назовем *сингулярным*, если  $\mathcal{N}_b$  содержит некоторый фундамент или, эквивалентно,  $\mathcal{N}_b$  — фундамент в  $E$ .

**3.2.5.** Пусть  $E$ ,  $G$ ,  $b$  и  $\Phi_b$  — те же, что и 3.2.3. Справедливы утверждения:

- (1)  $b$  порядково непрерывен в том и только в том случае, когда  $\Phi_b$  порядково непрерывен;
- (2)  $b$  сингулярен в том и только в том случае, когда  $\Phi_b$  сингулярен;
- (3)  $b$  строго положителен в том и только в том случае, когда  $\Phi_b$  строго положителен;
- (4)  $b$  — оператор Магарам в том и только в том случае, когда  $\Phi_b$  — оператор Магарам.

**3.2.6.** Операторы Магарам впервые изучались в работе Д. Магарам [74] (см. также обзор [76]). В. Люксембург и А. Шеп [73] распространили часть теории Магарам на положительные операторы в пространствах Канторовича. Термины «свойство Магарам» и «оператор Магарам» были введены в [73] и [6] соответственно (подробнее см. в [7]). Свойство Магарам в антураже выпуклого анализа изучен в [15]. Как было установлено в [6], линейный оператор Магарам представляет собой интерпретацию порядково непрерывного линейного функционала в подходящей булевозначной модели [7]. Булевозначный подход возможен, разумеется, и к изучению билинейных операторов [64].

### 3.3. Теорема Радона — Никодима

Используя теорему 3.2.5, можно некоторые результаты о строении линейных операторов Магарам переносить на ортосимметричные билинейные операторы Магарам. Для билинейного оператора  $\phi \in BL_\infty^\sim(E; G)$  обозначим  $E_\phi := \mathcal{C}_\phi$  и  $G_\phi := \phi(E \times E)^{\perp\perp}$ . Если  $\phi$  — порядково непрерывный ортосимметричный билинейный оператор Магарам, то в силу 3.2.5 можно применить [73, теорема 2.2] (см. также [7, теорема 3.4.3]) к линейному оператору Магарам  $\Phi_\phi$ , что приводит к следующему результату [66, теорема 9.1; 68, теорема 4.5].

**3.3.1. Теорема.** Пусть  $E$  и  $G$  — пространства Канторовича,  $\phi$  — положительный ортосимметричный билинейный оператор Магарам из  $E \times E$  в  $G$ . Тогда существует изоморфизм  $h$  из  $f$ -алгебры  $\text{Orth}^\infty(G_\phi)$  на порядково замкнутую подалгебру  $f$ -алгебры  $\text{Orth}^\infty(E_\phi)$  такой, что справедливы утверждения:

- (1)  $h$  индуцирует булев изоморфизм из  $\mathfrak{B}(G_\phi)$  на порядково полную подалгебру булевой алгебры  $\mathfrak{B}(E_\phi)$ ;
- (2)  $h$  индуцирует изоморфизм  $f$ -алгебры  $\mathcal{Z}(G_\phi)$  на порядково замкнутую подалгебру  $f$ -алгебры  $\mathcal{Z}(E_\phi)$ ;
- (3) для любого положительного ортосимметричного порядково непрерывного билинейного оператора  $b : E \times E \rightarrow G$ , абсолютно непрерывного относительно  $\phi$ , выполняется

$$\pi \circ b(x, y) = b(h(\pi)x, y) = b(x, h(\pi)y) \quad (\pi \in \text{Orth}^\infty(G_\phi)_+; x, y \in \mathcal{D}(\pi))$$

и в этом случае  $b$  — оператор Магарам.

Аналогичными рассуждениями, использующими линейаризацию посредством квадрата, устанавливаются следующие три теоремы.

**3.3.2. Теорема Радона — Никодима.** Пусть  $E$  и  $G$  — пространства Канторовича, а  $b$  и  $\phi$  — порядково непрерывные ортосимметричные положительные билинейные операторы из  $E \times E$  в  $G$ , причем  $\phi$  обладает свойством Магарам. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $b \in \{\phi\}^{\perp\perp}$ ;
- (2)  $b$  абсолютно непрерывен относительно  $\phi$ ;
- (3) существует ортоморфизм  $0 \leq \rho \in \text{Orth}^\infty(E)$  такой, что

$$b(x, y) = \phi(\rho x, y) = \phi(x, \rho y) \quad (x, y \in \mathcal{D}(\rho));$$

- (4) существует возрастающая последовательность положительных ортоморфизмов  $(\rho_n)$ ,  $\rho_n \in \text{Orth}(E)$ , такая, что

$$b(x, y) = \sup_n \phi(\rho_n x, y) = \sup_n \phi(x, \rho_n y) \quad (x, y \in E_+).$$

Более того, если  $0 \leq b \leq \phi$ , то  $b = \phi \circ (\rho \times I_E) = \phi \circ (I_E \times \rho)$  для некоторого ортоморфизма  $\rho \in \text{Orth}(E)$ , для которого  $0 \leq \rho \leq I_E$ .

◁ В силу 3.1.2, 3.1.4, 3.1.7 (6), 3.2.3 и 3.3.1 каждый из утверждений (1)–(4) эквивалентен соответствующему условию для линейных операторов  $\Phi_b$  and  $\Phi_\phi$ . Следовательно, нужно лишь применить теорему Радона — Никодима для линейных операторов Магарам, установленную В. Люксембургом и А. Шепом в [73, теорема 3.3], см. также [7, теорема 3.4.9]. Подробности см. в [66, 68]. ▷

**3.3.3. Теорема Накано.** Пусть  $E$  и  $G$  — пространства Канторовича и  $\phi$  — ортосимметричный билинейный оператор Магарам из  $E \times E$  в  $G$ . Орторегулярные билинейные операторы  $b_1, b_2 \in \{\phi\}^{\perp\perp}$  дизъюнкты в том и только в том случае, если дизъюнкты их симметричные носители  $\mathcal{C}_{b_1}$  и  $\mathcal{C}_{b_2}$ .

Доказательство см. [66, теорема 9.3] и [68, теорема 4.7]

Стоит отметить, что следующее следствие из сформулированной теоремы: Соответствие  $\pi \mapsto \phi \circ (\pi \times \pi)$  является изоморфизмом  $\mathfrak{P}(\mathcal{C}_\phi)$  на булеву алгебру  $\mathfrak{E}(\phi)$  всех осколков  $\phi$ . В частности, применение этого факта к  $\phi := |b|$ , приводит к следующему результату из [66, теорема 9.4] и [68, теорема 4.8].

**3.3.4. Теорема Хана о разложении.** Пусть  $E$  и  $G$  — пространства Канторовича и пусть  $b : E \times E \rightarrow G$  — порядково ограниченный ортосимметричный билинейный оператор, для которого  $|b|$  — оператор Магарам. Тогда существует порядковый проектор  $\pi \in \mathfrak{P}(E)$  такой, что  $b^+ = b \circ (\pi \times \pi)$  и  $b^- = b \circ (\pi^\perp \times \pi^\perp)$ .

## Глава 4. Операторы, сохраняющие дизъюнктность

Настоящая глава посвящена билинейным операторам, сохраняющим дизъюнктность. В параграфе 4.1 рассмотрен вариант проблемы Викстеда для билинейных операторов. В параграфе 4.2 дана характеристика классов билинейных операторов, представимых в виде разности симметричных решеточных биморфизмов или же конечных сумм билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность. В параграфе 4.3 дано аналитическое представление орторегулярных билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность, в форме операторов взвешенного сдвига.

### 4.1. Раздельно нерасширяющие операторы

В этом параграфе мы изложим основной результат из статьи [64].

**4.1.1.** Пусть  $E$  — векторная решетка. Билинейный оператор  $b : E \times E \rightarrow E$  назовем *раздельно нерасширяющим*, если отображения  $b(\cdot, e)$  и  $b(e, \cdot)$  являются нерасширяющими для всех  $e \in E$  или, эквивалентным образом, если  $b(L \times E) \subset L$  и  $b(E \times L) \subset L$  для любой полосы  $L$  в  $E$ . Рассуждениями, аналогичными [33, теорема 8.2], можно получить следующую характеристику раздельно нерасширяющих билинейных операторов.

**4.1.2.** Пусть  $E$  — векторная решетка и  $b : E \times E \rightarrow E$  — билинейный оператор. Следующие утверждения равносильны:

- (1)  $b$  является раздельно нерасширяющим;
- (2)  $b(x, y) \in \{x\}^{\perp\perp} \cap \{y\}^{\perp\perp}$  для любых  $x, y \in E$ ;
- (3)  $b(x, y) \perp z$ , если только  $z \in E$  и либо  $x \perp z$ , либо  $y \perp z$ .

Если  $E$  — векторная решетка с главными проекциями, то (1)–(3) эквивалентны также (4) и (5):

- (4)  $\pi b(x, y) = b(\pi x, \pi y)$  для любого порядкового проектора  $\pi$  в  $E$  и любых  $x, y \in E$ ;
- (5)  $\pi b(x, y) = b(\pi x, y) = b(x, \pi y)$  для любого порядкового проектора  $\pi$  в  $E$  и любых  $x, y \in E$ .

**4.1.3.** Как видно из 4.1.2 (2), всякий раздельно расширяющий билинейный оператор ортосимметричен. Следовательно, все орторегулярные раздельно нерасширяющие билинейные операторы симметричны в силу 1.2.3. В то же время порядково ограниченный раздельно нерасширяющий билинейный оператор  $b$  имеет вид  $b = \pi \odot$ , где  $\pi$  — некоторый ортоморфизм в  $E^\odot$ , см. 3.1.2 и 3.1.7 (3). Тем самым возникает вопрос, который следует считать билинейным вариантом проблемы Викстеда [7, 61]:

Каковы необходимые и достаточные условия, при которых все раздельно нерасширяющие билинейные операторы в векторной решетке симметричны? порядково ограничены?

Проблема Викстеда была сформулирована в [87]. Историю и иные формы этой задачи см. в обзоре [61], а также [8–12, 64].

**4.1.4.** Решение можно получить средствами, аналогичными линейному случаю [11, 12]. Булеву  $\sigma$ -алгебру  $\mathbb{B}$  называют  $\sigma$ -дистрибутивной, если

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} b_{n,m} = \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} b_{n, \varphi(n)}$$

для любой двойной последовательности  $(b_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$  в  $\mathbb{B}$ . Другие эквивалентные определения имеются в [28], см. также [4, 7, 61]. Теперь можем сформулировать основной результат настоящего параграфа.

**4.1.5. Теорема.** Пусть  $G$  — расширенная векторная решетка и  $\mathbb{B} := \mathfrak{P}(G)$  обозначает полную булеву алгебру полос в  $G$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $\mathbb{B}$   $\sigma$ -дистрибутивна;
- (2) нет ни одного раздельно нерасширяющего антисимметричного билинейного оператора из  $G \times G$  в  $G$ ;

(3) все раздельно нерасширяющие билинейные операторы из  $G \times G$  в  $G$  симметричны;

(4) все раздельно нерасширяющие билинейные операторы из  $G \times G$  в  $G$  порядково ограничены.

**4.1.6.** Приведенное в [64] доказательство теоремы 4.1.3 опирается на булевозначное моделирование [14]. Фиксируем полную булеву алгебру  $\mathbb{B}$  и рассмотрим соответствующую булевозначную модель теории множеств  $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ . Пусть  $\mathcal{R}$  — поле действительных чисел внутри  $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ . Тогда  $G := \mathcal{R} \downarrow$  (= спуск  $\mathcal{R}$  [14, §7.3]) будет расширенным пространством Канторовича [14, теорема 10.3.4]. Напомним, что  $X \mapsto X^\wedge$  обозначает отображение стандартного имени, которое служит вложением  $\mathbb{V}$  в  $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ . Хорошо известно, что  $\mathbb{R}^\wedge$  можно рассматривать как плотное подполе в  $\mathcal{R}$ . А. Е. Гутман установил в [59, теорема 2] (см. также [7, 60]), что  $\sigma$ -дистрибутивность полной булевой алгебры  $\mathbb{B}$  равносильна совпадению  $\mathcal{R}$  и  $\mathbb{R}^\wedge$  внутри  $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ .

◁ Импликация (1)  $\rightarrow$  (4) без труда следует из того, что условие (1) равносильно локальной одномерности [59]. Импликации (4)  $\rightarrow$  (3) следует из [46, следствие 2], а (3)  $\rightarrow$  (2) очевидна. Остается обосновать (2)  $\rightarrow$  (1). Допустим, что  $\mathbb{B}$  не является  $\sigma$ -дистрибутивной. Тогда  $\mathbb{R}^\wedge \neq \mathcal{R}$  и антисимметричный раздельно нерасширяющий билинейный оператор в  $G$  можно построить следующим образом. Базис Гамеля  $\mathcal{E}$  поля  $\mathcal{R}$ , рассматриваемого как векторное пространство над подполем  $\mathbb{R}^\wedge$ , содержит по меньшей мере два различных элемента  $e_1 \neq e_2$ . Определим функцию  $\beta_0 : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$  так, чтобы  $1 = \beta_0(e_1, e_2) = -\beta_0(e_2, e_1)$  и  $\beta(e'_1, e'_2) = 0$  для всех прочих пар  $(e'_1, e'_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$  (в частности,  $0 = \beta_0(e_1, e_1) = \beta_0(e_2, e_2)$ ). Функция  $\beta_0$  допускает и притом единственное продолжение до  $\mathbb{R}^\wedge$ -билинейной формы  $\beta : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ . Спуск  $b$  формы  $\beta$  представляет собой раздельно нерасширяющий билинейный оператор из  $G \times G$  в  $G$ . Более того,  $b$  отличен от нуля и антисимметричен, поскольку этими свойствами обладает  $\beta$ . ▷

**4.1.7.** Существует безатомное расширенное пространство Канторовича  $G$  такое, что все раздельно нерасширяющие билинейные операторы из  $G \times G$  в  $G$  симметричны и порядково ограничены.

Это следует из теоремы 4.1.3 и следующего результата А. Е. Гутмана [59, пример 9]: существует безатомное расширенное пространство Канторовича с  $\sigma$ -дистрибутивной булевой алгеброй полос, см. также [7, 60].

Билинейный оператор  $b : G \times G \rightarrow G$  назовем *существенно нетривиальным*, если  $\pi b = 0$  влечет  $\pi = 0$  для любого порядкового

проектора  $\pi \in \mathfrak{P}(G)$ . Можно показать, что полная булева алгебра, ассоциированная с пространством с мерой, обладающей свойством прямой суммы, будет  $\sigma$ -дистрибутивной в том и только в том случае, когда атомична, см. [61, 5.3.3]. Отсюда и из теоремы 4.1.5, с учетом принципа исчерпывания для булевых алгебр, вытекает такой результат (ср. [9]).

**4.1.8.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — безатомное пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы, и  $G := L_{\mathbb{R}}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$  — расширенное  $K$ -пространство (классов эквивалентности) вещественных измеримых функций. Тогда существует существенно нетривиальный раздельно нерасширяющий антисимметричный билинейный оператор из  $G \times G$  в  $G$ .

## 4.2. Билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктность

В этом параграфе представлены некоторые результаты из статей [16, 44, 66, 79] о строении билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность.

**4.2.1.** Пусть  $E$ ,  $F$  и  $G$  — произвольные векторные решетки. Для порядково ограниченного билинейного оператора  $b : E \times F \rightarrow G$  следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $b(x, \cdot)$  и  $b(\cdot, y)$  сохраняют дизъюнктность, каковы бы ни были  $x \in E_+$  и  $y \in F_+$ ;
- (2)  $b(x, \cdot)$  и  $b(\cdot, y)$  сохраняют дизъюнктность, каковы бы ни были  $x \in E$  и  $y \in F$ ;
- (3)  $b(x_1, y_1) \perp b(x_2, y_2)$ , если либо  $x_1 \perp x_2$ , либо  $y_1 \perp y_2$ .

Говорят, что билинейный оператор  $b : E \times F \rightarrow G$  сохраняет дизъюнктность, если он удовлетворяет одному (а тогда и всем) из условий 4.2.1 (1–3).

Следующий результат, представляющий собой билинейный вариант теоремы Мейера [7, теорема 3.3.1 (5)], был получен независимо в [79] и [16, теорема 3.4].

**4.2.2. Теорема.** Пусть  $E$ ,  $F$  и  $G$  — векторные решетки и  $b : E \times F \rightarrow G$  порядково ограниченный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда  $b$  имеет положительную часть  $b^+$ , отрицательную часть  $b^-$  и модуль  $|b|$ , которые являются решеточными биморфизмами.



Более того,

$$b^+(x, y) = b(x, y)^+, \quad b^-(x, y) = b(x, y)^- \quad (0 \leq x \in E, \quad 0 \leq y \in F);$$

$$|b(x, y)| = |b(|x|, |y|)| = |b(|x|, |y|)| \quad (x \in E, \quad y \in F).$$

**4.2.3.** В [79] было отмечено, что для сохраняющего дизъюнктивность билинейного оператора  $b : E \times F \rightarrow G$  следующие утверждения равносильны: а)  $b$  имеет ограниченную порядковую вариацию; б)  $b$  порядково ограничен; в)  $b$  порядково ограничен по каждой переменной в отдельности. Этот факт вместе с 4.2.2 приводит к следующему утверждению.

**Теорема.** Для сохраняющего дизъюнктивность билинейного оператора  $b : E \times F \rightarrow G$  следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $b$  орторегулярен;
- (2)  $b$  порядково ограничен и ортосимметричен;
- (3)  $b$  порядково ограничен и симметричен.

Билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктивность, имеют простое строение по модулю решеточных гомоморфизмов. Следующий результат установлен в [17, следствие 3.3]:

**4.2.4. Теорема.** Порядково ограниченный билинейный оператор  $b : E \times F \rightarrow G$ , сохраняющий дизъюнктивность, допускает представление в виде

$$b(x, y) = S(x)T(y) \quad (x \in E, y \in F),$$

где операторы  $S : E \rightarrow G^u$  и  $T : F \rightarrow G^u$  принимают значения в максимально расширении  $G^u$  векторной решетки  $G$ , снабженном однозначно определяемой выбором порядковой единицы структурой  $f$ -алгебры, причем один из них порядково ограничен и сохраняет дизъюнктивность, а другой — решеточный гомоморфизм. Если, сверх того,  $E = F$  и оператор  $b$  симметричен, а  $S$  — решеточный гомоморфизм, то можно взять  $T = \pi S - \pi^\perp S$ , где  $\pi$  — порядковый проектор в  $G^u$ , и  $\pi^\perp := I_G - \pi$ .

Из этого результата легко выводится (ср. [44, теорема 3.4]):

**4.2.5. Теорема.** Пусть  $E$  и  $G$  — векторные решетки и  $b : E \times E \rightarrow G$  — сохраняющий дизъюнктивность орторегулярный билинейный оператор. Тогда существуют векторная решетка  $F$ , решеточные гомоморфизмы  $S, T : E \rightarrow F$  и изоморфное вложение  $h : F^\odot \rightarrow G$  такие, что  $S(E) \perp T(E)$ ,  $S(E) + T(E) = F$  и справедливо представление:

$$b(x, y) = h(S(x) \odot S(y)) - h(T(x) \odot T(y)) \quad (x, y \in E).$$

**4.2.6.** Скажем, что конечные наборы  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset E$  и  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\} \subset F$  *бидизъюнкты*, если для любых натуральных  $0 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$ , либо  $x_i \perp x_j$ , либо  $y_i \perp y_j$ . Билинейный оператор  $b \in BL^\sim(E, F; G)$  назовем *n-дизъюнктным*, если

$$|b(x_0, y_0)| \wedge |b(x_1, y_1)| \wedge \dots \wedge |b(x_n, y_n)| = 0,$$

каковы бы ни были бидизъюнкты наборы  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  в  $E$  и  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  в  $F$ . Из 4.2.1 (3) видно, что в классе порядково ограниченных билинейных операторов 1-дизъюнктный оператор есть в точности сохраняющий дизъюнктность оператор. Билинейный оператор называется *полидизъюнктным*, если он  $n$ -дизъюнктен для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Этот класс билинейных операторов введен и описан в работе [16], используя линейаризацию посредством тензорного произведения по Фремлину. Аналогичным образом, используя линейаризацию посредством квадрата векторной решетки, можно дать следующее описание ортосимметричных полидизъюнктных операторов.

**4.2.7. Теорема.** *Ортотрегулярный билинейный оператор будет n-дизъюнктным в том и только в том случае, если он представим в виде суммы n ортотрегулярных билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность. Тем самым, ортотрегулярный билинейный оператор будет полидизъюнктным в том и только в том случае, если он представим в виде суммы конечного числа ортотрегулярных билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность.*

**4.2.8.** Пусть  $E$  — произвольная векторная решетка, а  $F$  — пространство Канторовича. С. С. Кутателадзе [19] получил следующую характеристику разностей решеточных гомоморфизмов: *Порядково ограниченный линейный оператор  $T$  из  $E$  в  $G$  можно представить в виде разности решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае, когда ядро слоя  $\pi T$  оператора  $T$  служит векторной подрешеткой  $E$  для каждого  $\pi \in \mathfrak{P}(G)$ .* Ниже приведем аналогичный результат для решеточных биморфизмов, установленный в [66, теорема 7.4; 68, теорема 3.6], используя теоремы 3.1.2 и 3.1.7 (1). *Симметричным ядром ортосимметричного билинейного оператора  $b$  назовем множество  $\text{sker}(b) := \{x \in E : b(x, |x|) = 0\}$ .*

**4.2.9. Теорема.** *Пусть  $E$  — произвольная векторная решетка, а  $G$  — пространство Канторовича. Ортотрегулярный билинейный оператор  $b : E \times E \rightarrow G$  можно представить в виде разности двух симметричных решеточных биморфизмов в том и только в том случае, когда симметричное ядро  $\text{sker}(\pi b)$  слоя  $\pi b$  оператора  $b$  служит векторной подрешеткой  $E$  для каждого  $\pi \in \mathfrak{P}(G)$ .*

**4.2.10.** Понятие  $n$ -дизъюнктного линейного оператора в векторных решетках было введено в статье С. Дж. Берно, С. Б. Гюсманса и Б. де Рахте [36] и адаптировано для линейных операторов в решеточно нормированных пространствах в [7]. С. С. Кутателадзе [20] установил, что модуль порядково ограниченного линейного оператора  $T : E \rightarrow G$  представим в виде суммы двух решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае если ядро слоя  $\pi T$  оператора  $T$  является подпространством Гротендика объемлющей векторной решетки  $E$  для любого  $\pi \in \mathfrak{P}(G)$ . Было бы интересно получить аналогичный результат для орторегулярного билинейного оператора.

### 4.3. Мультипликативное представление

Порядково ограниченные билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктность, допускают удобное аналитическое описание [17]. Здесь мы рассмотрим специализацию этого результата для ортосимметричных операторов, полученную в [44].

**4.3.1.** Пусть  $E$  и  $G$  — фундаменты расширенных пространств Канторовича  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{G}$  с фиксированными единицами  $1_{\mathcal{E}}$  и  $1_{\mathcal{G}}$  соответственно. Каждое из пространств  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{G}$  снабдим структурой  $f$ -алгебры, определяемой единственным образом выбором порядковой единицы. Напомним, что порядково ограниченный ортоморфизм в  $\mathcal{E}$  или  $\mathcal{G}$  представляет собой оператор умножения на некоторый фиксированный элемент, с которым и будем отождествлять соответствующий ортоморфизм. Для  $f \in \mathcal{E}$  существует единственный элемент  $g \in \mathcal{E}$  такой, что  $fg = [f]1_{\mathcal{E}}$  и  $[f] = [g]$ , где  $[f]$  — порядковый проектор на полосу  $f^{\perp\perp}$ . Обозначим элемент  $g$  символом  $1_{\mathcal{E}}/f$  и положим  $g/f = g(1_{\mathcal{E}}/f)$ . Ортоморфизм  $g \mapsto g/f$  будем обозначать тем же символом  $1_{\mathcal{E}}/f$ .

Рассмотрим фундаменты  $E' \subset \mathcal{E}$ ,  $G' \subset \mathcal{G}$  и  $G'' \subset \mathcal{G}$ . Обозначим символом  $G' \cdot G''$  векторную подрешетку в  $\mathcal{G}$ , порожденную множеством  $\{g'g'' : g' \in G', g'' \in G''\}$ .

Если  $w : E \rightarrow E'$  и  $S : E' \rightarrow G'$  — линейные операторы, то  $w \times w : E \times E \rightarrow E' \times E'$  и  $S \bullet S : E' \times E' \rightarrow G' \cdot G'$  обозначают линейный и билинейный операторы, определяемые формулами  $(x, y) \mapsto (wx, wy)$  и  $(x, y) \mapsto S(x)S(y)$  соответственно. Скажем, что билинейный ортосимметричный оператор  $b : E \times E \rightarrow G$  допускает  $WSW$ -представление, если существуют фундаменты  $E' \subset \mathcal{E}$  и  $G' \subset \mathcal{G}$ , ортоморфизмы  $w : E \rightarrow E'$  и  $W : G' \cdot G' \rightarrow G$ , и оператор

сдвига  $S : E' \rightarrow G'$  такие, что  $b = W \circ (S \bullet S) \circ (w \times w)$ , т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{b} & G \\ w \times w \downarrow & & \uparrow W \\ E' \times E' & \xrightarrow{S \bullet S} & G' \cdot G' \end{array}$$

коммутативна. Оператор сдвига из  $E'$  в  $G'$  — ограничение на  $E'$  положительного линейного оператора  $\hat{S} : \hat{E} \rightarrow \mathcal{G}$ , удовлетворяющего условиям: 1)  $\hat{E}$  — фундамент в  $\mathcal{E}$ , содержащий  $E'$  и  $1_{\mathcal{E}}$ ; 2)  $\hat{S}$  переводит осколки  $1_{\mathcal{E}}$  в осколки  $1_{\mathcal{G}}$ ; 3)  $\hat{S}$  сохраняет дизъюнктность; 4)  $\hat{S}(1_{\mathcal{E}})^{\perp\perp} = \hat{S}(\hat{E})^{\perp\perp}$ . Операторы  $W$ ,  $S$  и  $w$  называют соответственно *внешним весом*, *сдвигом* и *внутренним весом* представления  $W \circ (S \bullet S) \circ (w \times w)$ . Скажем также, что  $\hat{S}$  — *сдвиг оператора*  $T : E \rightarrow G$ , если  $T(E)^{\perp\perp} = \hat{S}(1_{\mathcal{E}})^{\perp\perp}$  и  $T \circ \pi = [\hat{S}(\pi 1_{\mathcal{E}})] \circ T$  для всех  $\pi \in \mathfrak{P}(\mathcal{E})$ .

Комбинируя теорему 4.2.4 с результатами А. Е. Гутмана [4, 7, 60] о WSW-представлении линейных операторов сохраняющих дизъюнктность, приходим к следующему [44].

**4.3.2. Теорема.** Пусть  $b : E \times E \rightarrow G$  — сохраняющий дизъюнктность орторегулярный билинейный оператор. Тогда существуют разбиение единицы  $(\rho_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  в булевой алгебре  $\mathfrak{P}(F)$  и семейство  $(e_{\xi})_{\xi \in \Xi}$  в  $E^+$  такие, что для каждого  $\xi \in \Xi$  композиция  $\rho_{\xi} \circ b$  допускает WSW-представление

$$\rho_{\xi} \circ b = \rho_{\xi} W \circ (\rho_{\xi} S \bullet \rho_{\xi} S) \circ (1_{\mathcal{E}}/e_{\xi} \times 1_{\mathcal{E}}/e_{\xi}) \quad (\xi \in \Xi),$$

где  $S$  и  $\rho_{\xi} S$  — операторы сдвига, причем  $\rho_{\xi} S$  служит расширением  $\rho_{\xi} \circ S$ , а внешний вес  $W : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  есть оператор умножения на  $o\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} \rho_{\xi} b(e_{\xi}, e_{\xi})$ . Таким образом, оператор  $b$  разлагается в строго дизъюнктную сумму операторов  $\rho_{\xi} \circ b$ , допускающих WSW-представление со сдвигом  $\rho_{\xi} S$ .

**4.3.3.** Пусть  $P$  и  $Q$  — экстремально несвязные компакты,  $E$  и  $G$  — фундаменты в расширенных пространствах Канторовича  $\mathcal{E} := C_{\infty}(P)$  и  $\mathcal{G} := C_{\infty}(Q)$  соответственно. Обозначим символом  $C_0(Q, P)$  множество всех непрерывных отображений  $\sigma : Q_0 := \text{dom}(\sigma) \rightarrow P$ ,

определенных на различных открыто замкнутых подмножествах  $Q_0 \subset Q$ . Для заданных  $\sigma \in C_0(Q, P)$  и  $e \in C_\infty(P)$  функция  $\sigma^*e : Q \rightarrow \mathbb{R}$  определяется формулой

$$(\sigma^*e)(q) := \begin{cases} e(\sigma(q)), & \text{if } q \in \text{dom}(\sigma), \\ 0, & \text{if } q \in Q \setminus \text{dom}(\sigma). \end{cases}$$

Очевидно, что функция  $\sigma^*e$  непрерывна, но не входит в  $C_\infty(Q)$ , вообще говоря, так как может принимать бесконечные значения на множестве  $Q_\infty$  с непустой внутренностью. Однако, если некоторая функция  $W \in C_\infty(Q)$  обращается в нуль на  $Q_\infty$ , то  $W\sigma^*x \in C_\infty(Q)$  (считая по определению  $0(\pm\infty) = 0$ ).

Из теоремы 4.3.3 и результата о мультипликативном представлении линейных операторов, сохраняющих дизъюнктность (см. [60, теорема 5.7.5] или [7, теорема 5.4.5]), вытекает следующий результат.

**4.3.4. Теорема.** Пусть  $E$  и  $G$  — фундаменты соответственно в  $C_\infty(P)$  и  $C_\infty(Q)$ , а  $b : E \times E \rightarrow G$  — сохраняющий дизъюнктность орторегулярный билинейный оператор. Тогда существуют непрерывное отображение  $\sigma \in C_0(Q, P)$ , семейство положительных функций  $(w_\xi)_{\xi \in \Xi}$  в  $C_\infty(P)$ , и семейство попарно дизъюнктных функций  $(W_\xi)_{\xi \in \Xi}$  в  $C_\infty(Q)$  такие, что  $1/w_\xi \in E$  for all  $\xi \in \Xi$  и

$$b(x, y) = o \sum_{\xi \in \Xi} W_\xi \sigma^*(w_\xi x) \sigma^*(w_\xi y) \quad (x, y \in E).$$

**4.3.5.** Теорема 4.3.4 дает аналитическое представление сохраняющего дизъюнктность порядково ограниченного билинейного оператора с помощью операций непрерывной замены переменной и поточечного умножения на вещественнозначную непрерывную функцию, что представляет собой некоторое обобщение классического оператора *взвешенного сдвига*. Такое аналитическое представление, часто называемое также *мультипликативным*, для сохраняющих дизъюнктность линейных операторов восходит к работе Ю. А. Абрамовича [31]. Аналогичные результаты можно получить и для мажорируемых билинейных операторов [18], действующих в пространствах непрерывных или измеримых сечений. Подробности см. в [7]. В [18] было отмечено, что желательно получить результаты об аналитическом (интегральном, псевдоинтегральном и т.п.) представлении широкого класса регулярных (мажорируемых) билинейных операторов.

## Литература

1. Ацел Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными.—М.: Физматлит, 2003.—432 с.
2. Биркгоф Г. Теория решеток.—М.: Наука, 1984.—568 с.
3. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.—М.: УРСС, 2007.—276 с.
4. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
5. Кусраев А. Г. Об одном свойстве базы  $K$ -пространства и некоторых его применениях.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1977.—17 с.
6. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.
7. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.— М.: Наука, 2003.—619 с.
8. Кусраев А. Г. О нерасширяющих операторах // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 3.—С. 47–58.
9. Кусраев А. Г. Автоморфизмы и дифференцирования в алгебре комплексных измеримых функций // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, № 3.—С. 45–49.
10. Кусраев А. Г. О представлении ортосимметричных билинейных операторов // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, № 4.—С. 30–34.
11. Кусраев А. Г. Автоморфизмы и дифференцирования в расширенных комплексных  $f$ -алгебрах // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 97–107.
12. Кусраев А. Г. Анализ, алгебра и логика в теории операторов // Комплексный анализ, теория операторов и математическое моделирование.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2006.—С. 171–204.
13. Кусраев А. Г. О строении ортосимметричных билинейных операторов в векторных решетках // Докл. РАН.—2006.—Т. 408, № 1.—С. 25–27.
14. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ.—М: Наука, 2005.—525 с.
15. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—559 с.
16. Кусраев А. Г. Табуев С. Н. О билинейных операторах, сохраняющих дизъюнктивность // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 1.—С. 58–70.
17. Кусраев А. Г., Табуев С. Н. Мультипликативное представление билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктивность // Сиб. мат. журн.—2008.—Т. 49, № 2.
18. Кусраев А. Г., Шотаев Г. Н. Билинейные мажорируемые операторы // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию / Ред. Ю. Ф. Коробейник и А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2004.—С. 241–262.
19. Кутателадзе С. С. О разностях решеточных гомоморфизмов // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 2.—С. 390–393.
20. Кутателадзе С. С. О подпространствах Гротендика // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 3.—С. 620–624.
21. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и его приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—256 с.
22. Лозановский Г. Я. О топологически рефлексивных  $KB$ -пространствах // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 158, № 3.—С. 516–519.

23. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 3.—С. 584–599.
24. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах. II // Сиб. мат. журн.—1971.—Т. 12, № 3.—С. 552–567.
25. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах. III // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 6.—С. 1304–1313.
26. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах. IV // Сиб. мат. журн.—1973.—Т. 14, № 1.—С. 140–155.
27. Лозановский Г. Я. О функциях от элементов линейной структуры // Изв. вузов. Математика.—1973.—№ 4.—С. 45–54.
28. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1964.—375 с.
29. Стрижевский В. З. О дизъюнктивности некоторых классов порядково непрерывных // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 3.—С. 556–559.
30. Шотаев Г. Н. Некоторые свойства билинейных регулярных операторов // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, № 2.—С. 44–47.
31. Abramovich Yu. A. Multiplicative representation of disjointness preserving operators // Indag. Math. (N.S.).—1983.—V. 45, № 3—P. 265–279.
32. Abramovich Y. A., Alprantis C. D. An Invitation to Operator Theory // Amer. Math. Soc.—Rhode Island: Providence, 2002.—V. 50 (Graduate Studies in Mathematics).
33. Alprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—London: Acad. Press Inc, 1985.—367 p.
34. Alprantis C. D., Charalambos D., Burkinshaw O. Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics, Second edition, Mathematical Surveys and Monographs // Amer. Math. Soc.—Rhode Island: Providence, 2003.—V. 105.
35. Azouzi Y., Boulabiar K., Buskes G. The de Schipper formula and squares of Riesz spaces // Indag. Math. (N.S.).—2006.—V. 17, № 4—P. 265–279.
36. Bernau C. B., Huijsmans C. B., de Pagter B. Sums of lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc.—1992.—V. 115, № 1—P. 151–156.
37. Boulabiar K. Some aspects of Riesz multimorphisms // Indag. Math. (N. S.).—2002.—V. 13, № 4—P. 419–432.
38. Boulabiar K., Buskes G. Vector lattice powers:  $f$ -algebras and functional calculus // Comm. Algebra.—2006.—V. 34, № 4—P. 1435–1442.
39. Boulabiar K., Buskes G., Page R. On some properties of bilinear maps of order bounded variation // Positivity.—2005.—V. 9, № 3—P. 401–414.
40. Boulabiar K., Buskes G., Triki A. Some recent trends and advances in certain lattice ordered algebras. Function spaces (Edwardsville, IL, 2002) // Amer. Math. Soc.—Rhode Island: Providence, 2003.—V. 328.—P. 99–133.
41. Boulabiar K., Buskes G., Triki A. Results in  $f$ -algebras // Positivity / Eds. K. Boulabiar, G. Buskes, A. Triki.—Basel a.o.: Birkhäuser, 2007.—P. 73–96.
42. Bu Q., Buskes G., Kusraev A. G. Bilinear maps on product of vector lattices: A survey // Positivity / Eds. K. Boulabiar, G. Buskes, A. Triki.—Basel a.o.: Birkhäuser, 2007.—P. 97–126.
43. Buskes G., de Pagter B., van Rooij A. Functional calculus on Riesz spaces // Indag. Math. (N. S.).—1991.—V. 4, № 2—P. 423–436.
44. Buskes G., Kusraev A. G. Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Vladikavkaz Math. J.—2007.—V. 9, № 1—P. 16–29.
45. Buskes G. J. H. M., van Rooij A. C. M. Hahn–Banach for Riesz homomorphisms // Indag. Math.—1993.—V. 51—P. 25–34.

46. Buskes G., van Rooij A. Almost  $f$ -algebras: commutativity and the Cauchy-Schwarz inequality // Positivity.—2000.—V. 4, № 3—P. 227–231.
47. Buskes G., van Rooij A. Almost  $f$ -algebras: structure and Dedekind completion // Positivity.—2000.—V. 4, № 3—P. 233–243.
48. Buskes G., van Rooij A. Squares of Riesz spaces // Rocky Mountain J. Math.—2001.—V. 31, № 1—P. 45–56.
49. Buskes G., van Rooij A. The bornological tensor product of two Riesz spaces. Ordered algebraic structures // Dev. Math.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.—V. 7.—P. 3–9.
50. Buskes G., van Rooij A. The bornological tensor product of two Riesz spaces: proof and background material. Ordered algebraic structures // Dev. Math.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.—V. 7—P. 189–203.
51. Buskes G., van Rooij A. Bounded variation and tensor products of Banach lattices // Positivity.—2003—V. 7, № 1/2—P. 47–59.
52. Cristescu R. Ordered vector spaces and linear operators // Translated from the Romanian.—Tunbridge: Abacus Press, 1976.
53. Drnovšek R. Spectral inequalities for compact integral operators on Banach function spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.—1992.—V. 112—P. 589–598.
54. Drnovšek R., Peperko A. Inequalities for the Hadamard weighted geometric mean of positive kernel operators on Banach function spaces // Positivity.—2006.—V. 10, № 4—P. 613–626.
55. Fremlin D. H. Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math.—1972.—V. 94, № 3—P. 777–798.
56. Fremlin D. H. Tensor products of Banach lattices // Math. Ann.—1974.—V. 211—P. 87–106.
57. van Gaans O. W. The Riesz part of a positive bilinear form // Circumspice.—Nijmegen: Katholieke Universiteit Nijmegen, 2001.—P. 19–30.
58. Grobler J. J., Labuschagne C. The tensor product of Archimedean ordered vector spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1988.—V. 104, № 2—P. 331–345.
59. Gutman A. E. Locally one-dimensional  $K$ -spaces and  $\sigma$ -distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, № 2—P. 99–121.
60. Gutman A. E. Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators / Ed. S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer, 1996.—P. 361–454.
61. Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S. The Wickstead Problem.—Vladikavkaz: VSC RAN, 2007.—44 p.—(Prep. / IAMI VSC RAS; № 3.)
62. Haase M. Convexity inequalities for positive operators // Positivity.—2007.—V. 11, № 1—P. 57–68.
63. Krivine J. L. Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés // Seminar Maurey-Schwartz.—Pariz: École Politech, 1973/74.—Exp. 22/23.—22 p.
64. Kusraev A. G. When are all separately band preserving bilinear operators symmetric? // Vladikavkaz Math. J.—2007.—V. 9, № 2.—P. 22–25.
65. Kusraev A. G. Hölder type inequalities for orthosymmetric bilinear operators // Vladikavkaz Math. J.—2007.—V. 9, № 3.—P. 36–46.
66. Kusraev A. G. Orthosymmetric bilinear operators.—Vladikavkaz: VSC RAS, 2007.—34 p.—(Prep. / IAMI VSC RAS; № 1.)
67. Kusraev A. G. Extended functional calculus on vector lattices, to appear.
68. Kusraev A. G. A Radon-Nikod'ym type theorem for Orthosymmetric bilinear operators, to appear.



69. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* On the calculus of order bounded operators // Positivity.—2005.—V. 9, № 2.—P. 327–339.
70. *Labuschagne C. C. A.* Riesz reasonable cross norms on tensor products of Banach lattices // Quaest. Math.—2004.—V. 27, № 3.—P. 243–266.
71. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—V. 2.—243 p.
72. *Lotz H. P.* Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 211.—P. 85–100.
73. *Luxemburg W. A. J., Schep A. A.* Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math.—1978.—V. 40.—P. 357–375.
74. *Maharam D.* The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—V. 75, № 1.—P. 154–184.
75. *Maharam D.* On kernel representation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 79, № 1.—P. 229–255.
76. *Maharam D.* On positive operators // Contemporary Math.—1984.—V. 26.—P. 263–277.
77. *Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M.* Classical and New Inequalities in Analysis.—Dordrecht: Kluwer, 1993.—xvii+740 p.
78. *Nakano H.* Product spaces of semi-ordered linear spaces // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.—1953.—V. 12.—P. 163–210.
79. *Page R.* On bilinear maps of order bounded variation. Thesis.—University of Mississippi, 2005.
80. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis.—New Jersey: Princeton Univ., 1970.
81. *Rubinov A. M.* Monotonic analysis // Studies on Functional Analysis and Its Applications / Eds. A. G. Kusraev, V. M. Tikhomirov.—Moscow: Nauka, 2006.—P. 167–214.
82. *Schaefer H. H.* Aspects of Banach lattices // In: Studies in Functional Analysis, MMA Studies in Math.—1980.—V. 21.—P. 158–221.
83. *Schaefer H. H.* Positive bilinear forms and the Radon–Nikodým theorem // In: Funct. Anal.: Survey and Recent Results. 3.—Amsterdam e. a., 1984.—P. 135–143. (Proc 3rd Conf. Paderborn, 24–29 May, 1983.)
84. *Scheffold E.* Maßalgebren mit intervallerhaltender linksseitiger Multiplikation // Acta Math. Hungar.—1997.—V. 76, № 1/2.—P. 59–67.
85. *Schwarz H.-U.* Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.
86. *Szulga J.*  $(p, r)$ -convex functions on vector lattices // Proc. Edinburg Math. Soc.—1994.—V. 37, № 2.—P. 207–226.
87. *Wickstead A. W.* Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math.—1977.—V. 35, № 3.—P. 225–238.
88. *Wittstock G.* Ordered normed tensor products // Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces.—Berlin: Springer, 1974.—P. 67–84.—(Lecture Notes in Phys; V. 29.)
89. *Wittstock G.* Eine Bemerkung über Tensorprodukte von Banachverbänden // Arch. Math.—Basel, 1974.—V. 25.—P. 627–634.

КУСРАЕВ АНАТОЛИЙ ГЕОРГИЕВИЧ

Владикавказ, Институт прикладной математики и  
информатики ВЦ РАН

E-mail: kusraev@smath.ru

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

С. М. Ситник

В обзоре рассматриваются основные понятия и задачи теории операторов преобразования. Затем перечислены наиболее известные приложения операторов преобразования к обратным задачам, теории рассеяния, спектральной теории, нелинейным дифференциальным уравнениям и построению солитонов, обобщенным аналитическим функциям, сингулярным краевым задачам, теории дробного интегродифференцирования, вложениям некоторых функциональных пространств.

## Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дана пара операторов  $(A, B)$ . Оператор  $T$  называется *оператором преобразования* (ОП, transmutation), если выполняется соотношение

$$T A = B T. \quad (1)$$

Соотношение (1) называется иначе *сплетающим свойством*, тогда говорят, что ОП  $T$  *сплетает* операторы  $A$  и  $B$  (intertwining operator). Для превращения (1) в строгое определение необходимо задать пространства, на которых действуют операторы  $A$ ,  $B$ , и, следовательно,  $T$ . Иногда в определение ОП закладывают и требование обратимости, что является желательным, но не обязательным свойством. В конкретных реализациях операторы  $A$  и  $B$  обычно являются дифференциальными,  $T$  — линейный оператор на стандартных пространствах. Ясно, что понятие ОП является прямым и далеко идущим обобщением понятия подобия матриц из линейной алгебры [1–3]. Но ОП не сводятся к подобным (или эквивалентным) операторам, так как обратный к ОП не обязан существовать и действовать в том же пространстве. Так что спектры операторов, сплетаемых ОП, могут не совпадать.

Как же обычно используются операторы преобразования? Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный

оператор  $A$ . При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора  $B$ . Тогда, если существует ОП (1), то часто удастся перенести свойства модельного оператора  $B$  и на  $A$ . Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение  $Au = f$  с оператором  $A$ , то применяя к нему ОП  $T$  со сплетающим свойством (1), получаем уравнение с оператором  $B$  вида  $Bv = g$ , где обозначено  $v = Tu$ ,  $g = Tf$ . Поэтому, если второе уравнение с оператором  $B$  является более простым, и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения  $u = T^{-1}v$ . Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из основных применений техники ОП в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены существенные части монографий [4–9], кроме того различные вопросы ОП рассматриваются также в [10–41]. К сожалению, на русском языке нет книг, полностью посвященных ОП, таких, как замечательные книги Роберта Кэрролла на английском [4–6]. По-видимому, данный обзор также является первым на русском языке по теории ОП. Не претендуя на полноту, я включил в обзор только те результаты, которые представляются основными, а также связанные с собственными работами.

Сделаем одно терминологическое замечание. В западной литературе принят для ОП термин «transmutation», восходящий к Ж. Дельсарту. Как отмечает Р. Кэрролл, похожий термин «transformation» при этом закрепляется за классическими интегральными преобразованиями Фурье, Лапласа, Меллина и другими подобными им. Кроме того, термин «transmutation» имеет в романских языках дополнительный оттенок «волшебного превращения», что довольно точно характеризует действие ОП. Приведем точную цитату из [6]: «Such operators are often called transformation operators by the Russian school (Levitan, Naimark, Marchenko et. al.), but transformation seems too broad a term, and, since some of the machinery seems «magical» at times, we have followed Lions and Delsarte in using the word transmutation».

Необходимость теории ОП доказана большим числом ее приложений. Методы ОП применяются в теории обратных задач, определяя обобщенное преобразование Фурье, спектральную функцию и решения знаменитого уравнения Гельфанда — Левитана; в теории рассеяния через ОП выписывается не менее знаменитое уравнение Марченко; в спектральной теории получаются известные формулы следов и асимптотика спектральной функции; оценки ядер ОП отвечают за устойчивость обратных задач и задач рассеяния; в теории нелинейных дифференциальных уравнений метод Лакса использует ОП для доказательства существования решений и построения солитонов. Определенными разновидностями ОП являются части теорий обобщенных аналитических функций и операторов обобщенного сдвига. В теории уравнений с частными производными методы ОП применяются для построения явных решений некоторых задач, изучения сингулярных и вырождающихся краевых задач, псевдодифференциальных операторов, задач для решений с особенностями на части границы, оценки скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений. Теория ОП позволяет дать некоторую новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах, в том числе различных операторов дробного интегродифференцирования. В теории функций найдены приложения ОП к вложениям функциональных пространств и обобщению операторов Харди, расширению теории Пэли — Винера. Методы ОП с успехом применяются во многих прикладных задачах: оценках решений Йоста и квантовой теории рассеяния, исследовании системы Дирака, теории вероятностей и случайных процессов, линейном стохастическом оценивании, фильтрации, стохастических случайных уравнениях, обратных задачах геофизики и трансзвуковой газодинамики.

Методы теории ОП в той или иной степени применялись в работах многих математиков: A. Boumenir, H. Begehr, B. Braaksma, L. Bragg, R. Carroll, M. Chao, H. Chebli, C. Dunkl, J. Delsarte, R. Gilbert, R. Hersh, J. Löffström, J. Lions, A. Mercer, J. Peetre, F. Santosa, J. Siersma, H. deSnoo, V. Thyssen, K. Trimeche, Vu Kim Tuan, Агранович З. С., Андрощук А. А., Валицкий Ю. Н., Волк В. Я., Глушак А. В., Горбачук М. Л., Иванов Л. А., Ерёмин М. С., Карп Д. Б., Катрахов В. В., Килбас А. А., Киприянов И. А., Ключанцев М. И., Кононенко В. И., Коробейник Ю. Ф., Лаптев Г. И, Левин Б. Я., Левитан Б. М., Ляхов Л. Н., Ляховец

кий Г. В., Маламуд М. М., Марченко В. А., Мацаев В. И., Муравник А. Б., Наймарк М. А., Нагнибида Н. И., Олевский М. Н., Познер А. Я., Поляцкий В. Т., Сахнович Л. А., Ситник С. М., Сташевская В. В., Фаддеев Л. Д., Фаге Д. К., Хачатрян И. Г., Хромов А. П., Шкальников А. А., Шмулевич С. Д., Ярославцева В. Я. Разумеется, этот список не полон и может быть существенно расширен.

### 1. Операторы преобразования для операторов Штурма — Лиувилля

Рассмотрим задачу построения различных ОП, сплетающих простейший оператор Штурма — Лиувилля

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = (L_0 y)(x) \quad (2)$$

с оператором Штурма — Лиувилля общего вида

$$y''(x) + q(x)y(x) + \lambda^2 y(x) = (Ly)(x). \quad (3)$$

Функция  $q(x)$  в (3) называется потенциальной функцией. Эта функция может быть комплексной, число  $\lambda \in \mathbb{C}$ , переменная  $x \in \mathbb{R}$ . Мы ищем ОП, удовлетворяющий тождеству

$$SLf = L_0 Sf \quad (4)$$

на подходящих функциях  $f(x)$ . Естественные требования к ОП  $S$  — линейность и обратимость в стандартных пространствах. Требование линейности  $S$  после подстановки (2) и (3) в (4) приводит к соотношению, которое не зависит от  $\lambda$

$$S(D^2 + q(x))f = D^2 Sf, \quad (5)$$

где обозначено  $D = d/dx$ . Требование обратимости естественным образом приводит к поиску ОП  $S$  в виде интегрального оператора

$$(Sf)(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) f(t) dt, \quad (6)$$

причем ядро  $K(x, t)$  в общем случае может быть распределением (например,  $K(x, t) = \delta(x - t) + G(x, t)$ ,  $G$  — гладкая функция). В формуле (6)  $a(x)$ ,  $b(x)$  — некоторые функции  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Существуют два несколько различных подхода к построению ОП. В первом они строятся лишь на решениях уравнений  $L_0 y = 0$ ,  $Ly = 0$  с операторами (2)–(3). Такой метод был принят в пионерских классических работах по ОП, он и излагается во всех книгах. Похоже, что во многом ему следуют только благодаря традиции. Но возможен и второй подход, который мне кажется более естественным и общим, когда ОП строятся на произвольных функциях, возможно, с некоторыми ограничениями роста в фиксированных точках. Мы кратко изложим именно этот подход, следуя [41], он не является общепринятым. Ясно, что при нашем подходе класс исследуемых ОП побогаче. С другой стороны, оператор, построенный на собственных функциях при любых  $\lambda$ , может быть распространен на достаточно широкие классы благодаря полноте систем собственных функций во всех основных пространствах. Поэтому, за исключением сужения множества рассматриваемых ОП, и первый общепринятый подход не создает серьезных ограничений в приложениях.

Заметим, что мы будем для краткости с некоторой вольностью называть операторами дифференциальные или интегральные выражения, не всегда указывая пространства, в которых действуют операторы. При построении ОП предполагается, что функции  $f(x)$  принадлежат некоторому классу  $\Phi$ , и что ядра  $K(x, t)$  обладают определенной гладкостью по обоим переменным.

Из вышеизложенного ясно, что наиболее целесообразно искать ОП  $S$  как интегральные операторы Вольтерра второго рода:

$$(Sf)(x) = f(x) + \int_c^x K(x, t)f(t) dt. \quad (7)$$

Здесь  $K(x, t)$  — гладкая функция, число  $c$  принадлежит расширенной числовой оси  $\overline{\mathbb{R}}$ . Вместе с тем в [41] рассмотрены и другие возможные операторы. Операторы Вольтерра (7) легко обращаются в стандартных пространствах. Свобода выбора предела интегрирования позволяет в каждом конкретном случае использовать те ОП, которые наилучшим образом подходят для данной задачи. В частности, при  $c = 0$  получаются ОП, впервые построенные А. Я. Познером и Б. М. Левитаном [42, 43] (см. также [44]), а при  $c = +\infty$  получаются ОП, впервые построенные Б. Я. Левиным [45], последние сохраняют асимптотику на бесконечности и используются при решении обратных задач квантовой теории рассеяния.

Для ядра ОП (7) в результате несложных вычислений получаем

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + q(t)K = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = \frac{1}{2} q(x), \quad (x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow c} W_t(f, K(x, t)) = \lim_{t \rightarrow c} W(x) = 0. \quad (10)$$

(Через  $\Omega$  обозначена область определения функции  $K(x, t)$ , замыкание которой содержит часть диагонали  $t = x$ ,  $W_t$  — определитель Вронского с производными по  $t$ .)

Уравнение (8) является стандартным в той задаче, которую мы рассматриваем. Условие (10) показывает выделенность точки  $c$ . Оно сводится к весовым граничным условиям на функцию  $f(x)$  и ее первую производную  $f'(x)$  при  $x \rightarrow c$  и диктует выбор класса функций  $\Phi$ . Важнейшее равенство (9) устанавливает, что значение ядра ОП  $K(x, t)$  на диагонали  $t = x$  позволяет восстановить потенциал  $q(x)$ . Этот факт является основным в теории обратных задач. Поэтому наиболее распространенные методы решения обратных задач сводятся именно к нахождению ядра ОП по спектральной функции (как в уравнении Гельфанда — Левитана) или по данным рассеяния (как в уравнении Марченко).

Чтобы построить решения системы (8)–(10), сначала нужно зафиксировать класс  $\Phi$  так, чтобы выполнялось условие (10), например:  $f(x) \in C^2$ ,  $f(c) = f'(c) = 0$ . Далее обычно реализуется следующий план действий. На первом шаге переходят от уравнения в частных производных к интегральному. Эти уравнения не эквивалентны, однако каждое решение интегрального уравнения удовлетворяет исходному гиперболическому. На этом шаге доказывается существование некоторого ядра ОП и его определенная гладкость. На втором шаге проверяются дополнительные условия для ядра и выбирается подходящий класс функций  $\Phi$ . Этим заканчивается построение ОП.

Итак, перейдем к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + q(t)K \quad (11)$$

с дополнительным условием на диагонали  $x = t$  (см. (9))

$$K(x, x) = \frac{1}{2} q(x). \quad (12)$$

Выполним стандартную замену переменных по формулам

$$u = \frac{1}{2}(x+t), \quad v = \frac{1}{2}(x-t). \quad (13)$$

При этом уравнение диагонали  $x = t$  в новых переменных примет вид  $v = 0$ .

Введем обозначение для ядра в новых переменных

$$H(u, v) = K(u+v, u-v) = K(x, t). \quad (14)$$

Для функции  $H$  перейдем от соотношений (11)–(12) к новым

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = q(u-v)H, \quad (15)$$

$$H(u, 0) = \frac{1}{2} \int_c^u q(s) ds. \quad (16)$$

Здесь функция  $q(u-v)$  должна быть определена,  $c$  — произвольное число, возможно  $c = \pm\infty$ .

Необходимо сделать важное замечание. Из формул замены (13) следует, что возможно как  $u > 0, v > 0$ , так и  $u < 0, v < 0$ .

Система (15)–(16) — это задача Коши лишь с одним начальным условием. Поэтому при естественных предположениях на  $q$  ( $q(x) \in C^1$ ) эта система имеет бесконечно много решений. Следовательно, при каждом потенциале  $q(x)$  существует бесконечно много ОП, например, вида (7). Это чрезвычайно удобно в приложениях, где можно выбирать при одном и том же потенциале различные ОП, наиболее подходящие для каждой конкретной задачи.

Приведем «нечестный» путь построения некоторого класса ядер, удовлетворяющих системе (15)–(16). Для этого достаточно убедиться, что каждое  $C^2$ -решение интегрального уравнения

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_c^u q(s) ds + \int_d^u d\alpha \int_0^v q(\alpha - \beta) H(\alpha, \beta) d\beta \quad (17)$$

удовлетворяет системе (15)–(16) для произвольных чисел  $c, d \in \overline{\mathbb{R}}$ .

«Честный» вывод уравнения (17) проводится по известной стандартной схеме с использованием функции Римана [46–50]. Поэтому



для теории ОП важное значение имеет нахождение функций Римана для конкретных уравнений в явном виде [47–66]. В этом направлении выделим работы куйбышевско-самарской математической школы под руководством С. П. Пулькина и В. Ф. Волкодавова [51–57].

Важность исследования уравнения (17) с разными  $c, d$  в том, что мы можем одновременно изучать и случай  $c = d = 0$ , возникающий при построении ОП типа Повзнера — Левитана, и случай  $c = d = +\infty$ , возникающий при построении ОП типа Левина, и случай произвольных различных  $c, d$ . Обычно эти типы ОП изучались раздельно, а случай произвольных  $c, d$  ( $c, d \neq 0, c, d \neq \pm\infty$ ) не рассматривался.

Доказательство существования решения для интегрального уравнения (17) не представляет труда, оно проводится методом последовательных приближений. При этом решение представляется рядом Неймана [67]. Например, для случая  $c = d = 0$  и суммируемого потенциала получается такой типичный результат [4–6, 21–23].

**Теорема 1.** Пусть функция  $q(x) \in C^k, c = d = 0$ . Тогда уравнение (17) имеет единственное решение, удовлетворяющее оценке

$$|K(x, t)| \leq \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right) - \sigma_1\left(\frac{x-t}{2}\right)\right), \quad (18)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} w(u) &= \max_{0 \leq s \leq u} \left| \int_0^s q(y) dy \right|, \\ \sigma_0(x) &= \int_0^x |q(t)| dt, \quad \sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Если функция  $q(x)$  имеет  $n \geq 0$  непрерывных производных, то ядро ОП  $K(x, t)$  имеет  $n + 1$  непрерывную производную по обоим переменным.

Аналогично в этом случае доказываются существование и единственность обратного оператора к ОП (7) в пространствах  $C^2$  или  $L^2$ . Для ядра обратного оператора доказываются аналогичные теореме 1 оценки, гладкость ядра, соотношение между ядрами прямого и обратного операторов. Заметим, что обратный к (7)  $P = S^{-1}$  также является ОП и действует по правилу  $PL_0f = LPf$  [22–23].

Общий случай произвольных  $c, d$  разобран в [41]. Там же явно построены ядра для некоторых простейших потенциалов, в основном выражающиеся через функции Бесселя и Макдональда. Получены оценки ядер для потенциалов, удовлетворяющих различным равномерным неравенствам.

Оценку (18) можно уточнять разными способами, при этом ослабляя условия на потенциал [4–6, 21–23]. Наиболее сильные результаты в этом направлении при минимальных требованиях к потенциалу можно получить, используя методы очень интересной книги [69]. В ней В. А. Чернятиным получены окончательные необходимые и достаточные условия на потенциал для разрешимости смешанной задачи для гиперболического уравнения (8), что завершило исследования В. А. Стеклова, И. Г. Петровского, Б. М. Левитана, В. П. Михайлова, В. А. Ильина по этой задаче; при этом использовался метод Фурье и принадлежащая А. Н. Крылову идея выделения особенностей из ряда. Метод работы [69] очень близок идейно методам теории ОП, он и был приспособлен для доказательства существования ОП с не очень хорошим потенциалом в [41]. Кроме того, в [41] получена оценка невязки  $SLf - L_0Sf$  в соотношении (4) для того случая, когда ОП  $S$  задан с ошибкой, например, образовавшейся от замены ряда Неймана при решении интегрального уравнения конечной суммой. Существование ОП для совсем плохих потенциалов (с особенностями или даже распределений) с приложениями к спектральной теории и формулам следов получено в [70–74] А. А. Шкаликовым и его учениками и требует более сложных методов. Некоторые другие результаты для подобных ОП см. в [75–77].

Вместе с тем ОП определенного вида существуют не всегда. Ряд отрицательных результатов получен в [41]. Так не существует ОП в форме оператора Фредгольма второго рода с гладким ненулевым потенциалом. Не существует линейного ОП, сплетающего нелинейный оператор  $D^2y + y^2$  со второй производной. Для ОП (7) в случае простейших потенциалов  $q(x) = x, x^2, \cos x$  ядра не могут быть аналитическими функциями. Этим объясняется, например, тот факт, что для функций Матье (решений уравнения  $D^2y + \cos(x)y = \lambda y$ ) нет простых интегральных выражений через тригонометрические или экспоненциальные функции.

## 2. Операторы преобразования Векуа — Эрдейи — Лаундеса

Частный случай ОП для оператора Штурма — Лиувилля (5) получается при выборе постоянного потенциала. При этом возникает важный класс ОП Векуа — Эрдейи — Лаундеса, которые осуществляют сдвиг по спектральному параметру.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** *Обобщенным оператором преобразования Векуа — Эрдейи — Лаундеса (ВЭЛ) называется сплетающий оператор для пары  $(A + \lambda_1, A + \lambda_2)$ , где  $A$  — некоторый базовый оператор,  $\lambda_1, \lambda_2$  — комплексные числа.*

Иными словами

$$T(A + \lambda_1) = (A + \lambda_2)T. \quad (20)$$

ОП ВЭЛ были по разным поводам введены и изучены в работах И. Н. Векуа [78–81], А. Эрдейи [82–84] и Дж. С. Лаундеса [85–87]. В их работах рассматривались такие базовые дифференциальные операторы:

$$A = D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad A = B_\nu = D^2 + \frac{2\nu + 1}{x}D, \quad A = x^\beta B_\nu. \quad (21)$$

Первый ОП ВЭЛ был построен Ильей Несторовичем Векуа в виде

$$J_\lambda f(x) = f(x) - \int_0^x t \frac{J_1(\lambda \sqrt{x^2 - t^2})}{\sqrt{x^2 - t^2}} f(t) dt, \quad J_\lambda(D^2 + \lambda) = D^2 J_\lambda, \quad (22)$$

где  $J_1(\cdot)$  — функция Бесселя. Такой ОП может быть использован, например, для представления решений телеграфного уравнения через решения волнового. В этом проявляется основная роль, которую ОП ВЭЛ играют в теории дифференциальных уравнений в частных производных — они осуществляют сдвиг по спектральному параметру. Поэтому с их помощью получают представления решений для задач «с лямбда» через решения задач «без лямбда», многочисленные примеры можно найти в энциклопедической монографии [34] и ссылках в ней (см. особенно главу 8).

Для А. Эрдейи основным было изучение свойств самих операторов вида (22), их композиций и оценок норм, тогда как Дж. Лаундес в основном изучал представление решений различных задач для

уравнений с частными производными при помощи подобных операторов. Мотивацией И. Н. Векуа для введения ОП было выразить решения уравнения  $\Delta u + \lambda u = 0$ , к которому сводится простейшая задача теории упругости, через гармонические функции. Затем он рассмотрел и более сложные уравнения, в основном возникающие в механике. Простейший подобный интегральный оператор, переводящий аналитические функции в гармонические, был уже давно к тому времени известен, его ввел Э. Уиттекер.

Так возникла новая теория обобщенных аналитических функций, начинающаяся с построения операторов, выражающих решения различных сложных уравнений через аналитические или гармонические функции. Определение таких обобщенных аналитических функций может быть дано на языке ОП: в действительном случае они возникают при рассмотрении ОП, которые сплетают некоторый дифференциальный оператор с частными производными с оператором Лапласа или его степенями, а в комплексном случае они возникают при рассмотрении ОП, которые сплетают уравнения (оператор) Коши — Римана (=Эйлера — Деламбера) с его обобщенными аналогами. После Векуа, Эрдейи и Лаундеса теория обобщенных аналитических функций именно в разрезе явного построения операторов преобразования достраивалась в работах известного американского математика Стефана Бергмана и его учеников (операторы Бергмана — Гильберта) [7, 10, 14, 88]. При этом для трех и более переменных все становится намного сложнее и интереснее. Отметим, что работы Бергмана существенно используют теорию специальных функций, в частности, гипергеометрических. Приложения к физическим задачам рассматривались Л. Берсом, А. Гельбартом, А. Вайнштейном (GASPT — теория обобщенного осесимметрического потенциала) [89–93]. Следует отметить также работы [37, 94], в которых Г. Н. Положий рассмотрел обобщения уравнений Коши — Римана, решения которых названы им  $p$ -аналитическими и  $(p, q)$ -аналитическими функциями. Принадлежность обобщенных аналитических функций различным пространствам (Харди, Смирнова, ВМО) изучается в работах С. Б. Климентова [95–98].

ОП ВЭЛ изучались также в [99–101], перечислим некоторые полученные там результаты. Вначале выделено семейство из восьми основных операторов ВЭЛ. Изучены факторизации этих операторов через более простые: Фурье, Ханкеля, дробные интегралы Римана — Лиувилля, Эрдейи — Кобера и другие [34]. Изучены полугрупповые

свойства введенных операторов ВЭЛ по параметру. Описаны общие методы построения ОП ВЭЛ из уже известных. На этом пути получены новые операторы ВЭЛ, ядра которых выражаются через гипергеометрические функции от нескольких переменных: Райта, Фокса, Гумберта, Кампе де Ферье и другие [102–120]. В [41, 99–101] найдены новые семейства ОП, зависящие от произвольных параметров.

Также построено взаимно однозначное соответствие между ОП ВЭЛ и ОП, сплетающими весовые операторы Бесселя с разными индексами:

$$T(x^2 B_\nu) = (x^2 B_\mu)T, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu + 1}{x}D. \quad (23)$$

Такие ОП изучались в [121], где получен один класс подобных операторов. В [99] найдены формулы, решающие задачу об описании ОП со свойством (23) в общем виде. Оказывается, что по каждому ОП ВЭЛ со свойством (20) можно явно выписать ОП со свойством (23).

Таким образом, теория операторов преобразования Векуа — Эрдейи — Лаундеса представляется сформировавшимся разделом общей теории ОП с достаточно большим набором собственных результатов и важными применениями в теории уравнений с частными производными, теории функций, комплексном анализе, теории специальных функций. Замечательно, что начало этой плодотворной тематики было заложено в трудах академика Ильи Несторовича Векуа, столетие со дня рождения которого отмечалось в 2007 году.

### 3. Операторы преобразования для общих дифференциальных операторов с переменными коэффициентами

Теперь перейдем к рассмотрению вопроса о существовании ОП  $T$ , который сплетает два произвольных линейных дифференциальных оператора

$$\begin{aligned} T \left( a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y + a_0(x) \right) = \\ = \left( b_m(x)y^{(m)} + \dots + b_1(x)y + b_0(x) \right) T. \end{aligned} \quad (24)$$

В этом случае задача существенно усложняется, не все построения оказываются теоретически возможными, что напоминает теорию разрешимости алгебраических уравнений высших порядков.

По-видимому, впервые задачу о построении ОП вида (24) в том случае, когда в (24) справа стоит оператор дифференцирования  $n$ -го порядка, в общих чертах сформулировал Жан Дельсарт (член группы Бурбаки) в 1938 г. [122] (обратим внимание, что во всех русских книгах в ссылках на эту статью неверно указаны номера страниц, т. е. скорее всего ни один автор ее не читал!). Затем общее обсуждение продолжилось, в том числе совместно с Ж. Л. Лионсом [123–126]. При этом роль этих двух французских математиков для теории ОП на мой взгляд совершенно различна. Работы Дельсарта содержат большое число новых интересных результатов (см. ниже). Работы же Лионса по данной тематике содержат набор очевидных рассуждений, тривиальных выкладок общего плана или неверных результатов. (Вспоминаю, как мучил нас, аспирантов, И. А. Киприянов, заставляя разбирать книги Лионса по квазиобращению и Лионса — Мадженеса по краевым задачам, а также Лере по преобразованию Лапласа. Основные черты этого стиля таковы: написано плохо, наскоро, без всякого уважения к читателю; доказательства содержат только очевидное, в первом более-менее сложном месте следует ссылка на другой источник, часто неверная; цитируются в основном только свои работы, в крайнем случае других французов. Я не стал бы приводить эти злобные выпады здесь, но, скажем, они почти дословно совпадают и с отзывами В. И. Арнольда о манере работ нынешних французских математиков [127], а он хорошо владеет предметом, сам там живет. Это делает мое мнение менее субъективным. Зато какое удовольствие после всей этой дребедени было прорабатывать наши учебники И. Г. Петровского, С. Л. Соболева, С. Г. Михлина, Ю. В. Егорова по УЧП!)

Вернемся к ОП. Оказалось, что для построения ОП в случае дифференциальных операторов порядков выше двух существенную роль неожиданно начинает играть аналитичность коэффициентов. Отметим, что для случая дифференциального оператора второго порядка аналитичность коэффициентов практически вообще не играет никакой роли в задачах о построении ОП. Кроме того, следует обратить внимание, что на самом деле существуют два разных подхода к построению ОП вида (24). При первом подходе рассматриваются *локальные ОП*, которые в разных точках области определения задаются разными выражениями, они определены локально и меняются от точки к точке. При втором подходе строятся *глобальные ОП*, которые на всей области определения задаются одним выражением, например, вида (6) с некоторым ядром.

Вопрос о существовании локальных ОП вида (24) был впервые

полностью решен М. К. Фаге в 1957–58 гг. [128–132] (подробное изложение в монографии [9]). Основной вывод таков: дифференциальные операторы вида (24) с непрерывными коэффициентами одного порядка с единичными старшими коэффициентами *локально эквивалентны* на множестве аналитических функций. Эквивалентность означает, что на аналитических пространствах функций было доказано не только существование локальных ОП, но и их непрерывная обратимость. Основные результаты были сформулированы и доказаны М. К. Фаге в рамках созданной им теории  $(M, L)$ -аналитических функций. Интересно отметить, что при этом по существу даже не использовались методы теории уравнений с частными производными.

Теперь рассмотрим *другую задачу* о построении *глобального* ОП в виде интегрального оператора Вольтерра второго рода с некоторым ядром

$$(Tf)(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)f(t) dt. \quad (25)$$

Как показали впервые Л. А. Сахнович и В. И. Мацаев, это не всегда возможно уже для простейших дифференциальных операторов третьего порядка [133–136].

**Теорема 2.** *Если существует ОП вида (25), сплетающий операторы третьего порядка по формуле*

$$T(D^3 - q(x))f = (D^3)Tf, \quad f \in C^2(0, a), \quad f'(0) = f''(0) = 0, \quad (26)$$

*то потенциал  $q(x)$  является аналитической функцией на  $(0, a)$ .*

Аналитичность в этом результате строго по существу. С одной стороны, Л. А. Сахновичем было показано, что для аналитических потенциалов  $q(x)$  задача о построении искомого ОП всегда разрешима [136]. С другой стороны, было доказано, что для чуть худших не бесконечно дифференцируемых  $q(x)$ , искомый ОП для операторов четвертого порядка  $T(D^4 - q(x))f = (D^4)Tf$  может не существовать [135–136]; переработанный подобный пример для оператора третьего порядка с кусочно-постоянным потенциалом приведен в [40]. Таким образом, получается, что свойство наличия ОП может быть устранено или добавлено малым шевелением коэффициентов, это дает ответ на вопрос В. Б. Лидского [142]. О необходимых условиях существования ОП см. также [137–139].

В этом направлении для дифференциальных операторов общего вида окончательные результаты были получены в работах М. М. Маламуда [140–144]. В них рассмотрен вопрос о существовании ОП на решениях простейшей задачи Коши

$$u^{(n)}(x, \lambda) - \lambda^n u(x, \lambda) = 0, \quad u^{(k)}(0, \lambda) = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (27)$$

и общей задачи Коши с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} v^{(n)} + q_1(x)v^{(n-2)} + \dots + q_{n-1}(x)v - \lambda^n v &= 0, \\ v^{(k)}(0, \lambda) &= b_k, \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (28)$$

Будем кратко говорить, что существует ОП для уравнения (28), если для его решений существует представление вида (25) через решения (27).

Сначала приведем результаты М. М. Маламуда для двучленного уравнения, а затем для общего случая.

**Теорема 3.** Если для уравнения  $v^{(n)} + q(x)v - \lambda^n v = 0$  при  $n \geq 3$  существует ОП, то функция  $q(x)$  является аналитической.

**Теорема 4.** Пусть  $a \leq \infty$  и  $q_k(x)$  аналитична на  $(0, a)$  при  $1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$ . Тогда, если для уравнения (28) существует ОП, то функции  $q_k(x)$  являются аналитическими и при  $[\frac{n}{2}] + 1 \leq k \leq n-1$ .

Эти результаты уже используют многие факты теории уравнений с частными производными: метод функций Римана, разрешимость строго эллиптических по Лопатинскому уравнений, результаты Агмона по разрешимости нелинейных уравнений с эллиптическим оператором в главной части, уточненную форму теоремы Коши — Ковалевской (с использованием леммы Розенблума вместо мажорант Коши [145]) и т. д. Внутренний смысл теоремы 4 в том, что вторая группа коэффициентов при наличии ОП выражается через первую. Рассмотрено также аналогичное (25) представление, но с интегрированием по промежутку  $(x, \infty)$ .

Теперь перейдем к более подробному рассмотрению результатов из замечательной монографии [9]. А их довольно много. В этой монографии введены и изучены обобщения аналитических функций —  $L$  и  $(L, M)$ -аналитические функции, что позволило, в том числе, объединить многие ранее полученные результаты. Для таких функций построена теория рядов Тэйлора, введенных ранее в одном частном



случае Дельсартом. Наиболее принципиальным результатом представляется получение глобального ОП для случая переменных аналитических коэффициентов в пространстве аналитических функций.

**Теорема 5.** Пусть все коэффициенты дифференциальных операторов  $P, Q$  являются аналитическими функциями. Тогда в некотором пространстве аналитических функций (см. точные формулировки в [9]) существует ОП, представимый в интегральном виде и сплетающий  $P, Q$ :

$$\begin{aligned} P &= D^n + p_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + p_1(x)D + p_0(x), \\ Q &= D^n + q_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + q_1(x)D + q_0(x), \quad D = \frac{d}{dx}. \end{aligned} \quad (29)$$

Существенные результаты получены в [9] и для представления ОП (29) в интегральном виде. В этом случае для ядра ОП вместо стандартного двумерного гиперболического уравнения (8) получается так называемое уравнение Бианки. В [9] построена полная теория разрешимости задачи Коши для уравнения Бианки. Построение проведено методом Римана с использованием так называемых характеристических пирамид. Формулы получаются достаточно сложные, на некотором этапе, например, в них входят семикратные суммы. Поэтому для общего случая (29) они носят качественный характер, просто указывая на возможность реализации ОП в некотором интегральном виде. А вот для случая  $Q = D^n$  интегральные представления уже существенно упрощены и получены в явном виде. В частности, показано, что для модельных случаев операторов Штурма — Лиувилля эти представления сводятся к известным в теории ОП.

Разобран также важный вопрос об операторах, коммутирующих с производной или ее степенью в пространствах аналитических функций. Коммутирующие операторы — это частный случай ОП. Их важность для теории ОП заключается в следующем. Предположим, что мы имеем ОП со свойством  $TA = BT$ , а также некоторый оператор  $K$ , коммутирующий с  $B$ . Тогда можно построить новый ОП с тем же свойством:

$$T_1 = KT, \quad KB = BK, \quad T_1A = KTA = KBT = BKT = BT_1. \quad (30)$$

Или, аналогично, для операторов  $K$ , коммутирующих с  $A$ :

$$T_2 = TK, \quad KA = AK, \quad T_2A = TKA = TAK = BTK = BT_2. \quad (31)$$

Таким образом, задача об описании всех ОП эквивалентна задаче об описании всех коммутирующих операторов, так как между этими двумя семействами есть взаимно-однозначное соответствие. Можно сказать, что для описания *всех* ОП, сплетающих  $A$  и  $B$ , достаточно знать *всего один* любой такой ОП  $T_1$  и множество *всех* операторов  $K$ , коммутирующих с  $B$  (с  $A$ ). В этом случае все ОП получаются по формуле  $T = KT_1$  ( $T = T_1K$ ). С другой стороны, для описания *всех* операторов, коммутирующих с  $B$  (с  $A$ ), достаточно знать множество *всех* ОП  $T$ , сплетающих  $A$  и  $B$ . В этом случае все коммутирующие с  $B$  (с  $A$ ) получаются по формуле  $K = T_1T_2^{-1}$  ( $K = T_1^{-1}T_2$ ) при дополнительном условии обратимости ОП. Таким образом, эти две задачи практически эквивалентны. Вот почему в теории ОП такую важную роль играют операторы дробного интегродифференцирования различных видов — при естественных условиях они коммутируют со «своей родной» производной и служат материалом для конструирования ОП.

Считалось, что задача об описании операторов, коммутирующих с производной, давно решена в процитированных выше работах Лионса и Дельсарта, поэтому считалась решенной и задача об описании всех ОП для дифференциальных операторов с аналитическими коэффициентами. Но, как указано в [9], соответствующие работы содержат грубые ошибки, на самом деле там описано не все множество коммутирующих операторов, а только его некоторая собственная часть. Правильный результат также получен М. К. Фаге и приведен в [9], с его помощью можно описать все возможные ОП, сплетающие данный дифференциальный оператор с производной того же порядка.

Отметим, что теория операторов в аналитических пространствах функций, важная и для приложений к ОП, рассматривалась Ю. Ф. Коробейником в его монографиях [146, 147]. Теория интегральных операторов в еще более общих пространствах рассмотрена, например, в книгах В. Г. Фетисова [148], А. Г. Кусраева [149], А. Э. Пасенчука [150].

Укажем на существенность для перечисленных результатов равенства единице старших коэффициентов дифференциальных операторов. Так, в [151] доказано, что операторы  $D$  и  $\exp(-z)D$  не эквивалентны. Многочисленные примеры эквивалентности или ее отсутствия для дифференциальных операторов в различных аналитических пространствах рассмотрены во второй части монографии [9].

Отметим, что существенную роль в теории общих ОП сыграли также результаты В. А. Марченко [152–156].

О некоторых других результатах этого направления см. [157–162].

Таким образом, мне представляется более справедливым называть ОП со свойством (24) ОП Дельсарта — Фаге (или Дельсарта — Марченко — Фаге), а не как принято на Западе ОП Лионса — Дельсарта. О вкладе отечественных математиков не скажешь лучше ведущего американского специалиста по ОП Роберта Кэррола: «Идея ОП, возникшая в начале 50-х, восходит к Гельфанду, Левитану, Марченко, Наймарку и другим. Она была подхвачена вновь Дельсартом и Лионсом. . .» [163].

#### 4. Операторы преобразования типа Сонина и Пуассона

Перейдем к рассмотрению, наверное, самого известного класса ОП, сплетающих дифференциальный оператор Бесселя со второй производной:

$$T(B_\nu)f = (D^2)Tf, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x}D, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \nu \in \mathbb{C}. \quad (32)$$

Как было отмечено в § 2, одним из способов построения ОП является установление соответствий между решениями соответствующих дифференциальных уравнений. Решениями уравнения вида  $B_\nu f = \lambda f$  являются функции Бесселя, а уравнения  $D^2 f = \lambda f$  — тригонометрические функции или экспонента. Поэтому преобразованиями ОП вида (32) были формулы Пуассона и Сонина:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})2^{\nu-1}x^\nu} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(t) dt, \quad \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}, \quad (33)$$

$$J_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1}x^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} \sin(t) dt, \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Как обычно, именные названия формул носят условный характер. Начнем с того, что функции Бесселя для произвольного индекса были введены и исследованы великим Леонардом Эйлером, когда Бессель еще и не родился. Вообще эти функции возникли и

постепенно вводились в период 1690–1770 гг. для решения дифференциального уравнения, которое мы сейчас называем именем Риккати. Участвовали в этом члены семьи Бернулли, венецианский граф Джаккопо Франческо Риккати и Эйлер [164–166]. Вместе с тем вклад самого Фридриха Бесселя в изучение названных его именем функций достаточно велик. Интеграл (33) начал изучать Эйлер в 1769 г. Затем Парсеваль посчитал интеграл при  $\nu = 0$  в 1805 г., для целых  $\nu$  формулу (33) получил Плана в 1821 г., Пуассон вывел ее для полуцелых  $\nu$  в 1823 г., его метод применим и для целых  $\nu$ , но он этого не заметил. Далее этот интеграл встречался в работах Куммера, Лоббато и Дюамеля. Окончательно формулу (33), которую мы приписываем Пуассону, установил в общем случае Ломмель в 1868 г., а Сонин вывел формулу (34) в 1880 г. Формулу Сонины, в существование которой все верят и считают прообразом ОП (36), и которая бы выражала экспоненту или тригонометрические функции через интеграл по конечному промежутку от функции Бесселя, я в литературе не нашел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. ОП Пуассона называется выражение

$$P_\nu f = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)2^\nu x^{2\nu}} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}. \quad (35)$$

ОП Сонины называется выражение

$$S_\nu f = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} t^{2\nu+1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}. \quad (36)$$

Операторы (35)–(36) действуют как ОП по формулам

$$S_\nu B\nu = D^2 S_\nu, \quad P_\nu D^2 = B\nu P_\nu. \quad (37)$$

Их можно доопределить на все значения  $\nu \in \mathbb{C}$ .

Идею изучения операторов подобных (35)–(36) высказывал еще Лиувилль, их реальное использование в контексте теории функций Бесселя начал Николай Яковлевич Сонин [167]. Как ОП эти операторы были введены в работах Дельсарта [122, 168–170] и затем изучены в работах Дельсарта и Лионса [17, 123–126]. Поэтому мы будем называть (35)–(36) ОП Сонины — Пуассона — Дельсарта (СПД). В

нашей стране об операторах СПД в основном узнали из великолепно написанной статьи Б. М. Левитана [171].

Не будет преувеличением сказать, что операторы СПД (35)–(36) являются самыми знаменитыми объектами всей теории ОП, их изучению, приложениям и обобщениям посвящены сотни работ. Перечислим очень кратко только основные направления.

Дельсартом на базе ОП СПД было введено фундаментальное понятие обобщенного сдвига.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** *Оператором обобщенного сдвига (ООС) называется решение  $u(x, y) = T_x^y f(x)$  задачи*

$$(B_\nu)_y u(x, y) = \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\nu + 1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y), \quad (38)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = 0.$$

Название объясняется тем, что в частном случае  $\nu = -1/2$  ООС сводится к почти обычному сдвигу  $T_x^y f(x) = \frac{1}{2} (f(x + y) + f(x - y))$ . Для ООС (38) Дельсартом была получена явная формула

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos(t)} \sin^{2\nu} t \, dt). \quad (39)$$

Можно рассматривать в определении (38) и произвольные пары дифференциальных (или даже любых) операторов. Например, при таком определении  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $u(x, 0) = f(x)$  получаем привычный сдвиг  $T_x^y f(x) = f(x + y)$ . Отметим, что ООС (38)–(39) явно выражаются через ОП СПД (35)–(36) [4–6, 22–29, 171].

Теперь, когда есть новый сдвиг, то можно обобщать прежние теории, основанные на обычном сдвиге. Так возникли теория обобщенных почти-периодических функций [18, 20, 25–27, 126, 169], разложения по обобщенным рядам Тэйлора, справедливо названных рядами Тэйлора — Дельсарта [9, 24–26, 168], обобщенная свертка и ее приложения [172–174]. (Отметим, что определение и основные свойства почти-периодических функций были впервые даны профессором Юрьевского (Тартусского (Дерптского)) университета Пирсом Георгиевичем Бодем задолго до Г. Бора. Боде также получил знаменитую топологическую теорему о неподвижных точках непрерывного отображения сферы в себя до Брауэра. Из эвакуированных за

время войны и революции сотрудников Юрьевского университета начал в 1918 г. создаваться Воронежский университет.)

Огромную роль конструкции ОП и ООС сыграли в теории уравнений с частными производными. ОП позволяют преобразовывать более сложные уравнения в более простые, ООС помогают в сингулярных уравнениях переносить особенность из начала в произвольную точку, а также с помощью обобщенной свертки находить фундаментальные решения.

Особо отметим один класс уравнений с частными производными с особенностями, типичным представителем которого является  $B$ -эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^n B_{\nu, x_k} u(x_1, \dots, x_n) = f, \quad (40)$$

аналогично рассматриваются  $B$ -гиперболические и  $B$ -параболические уравнения. Изучение этого класса уравнений было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу, продолжено в теории обобщенного осесимметрического потенциала А. Вайнштейна и в трудах отечественных математиков Л. Д. Кудрявцева, П. И. Лизоркина, Л. Г. Михайлова, М. Н. Олевского, С. А. Терсенова, Я. И. Житомирского, М. И. Матийчука, М. М. Смирнова, А. И. Янушаускаса и других. Наиболее полно весь круг вопросов для подобных уравнений был изучен воронежским математиком Иваном Александровичем Киприяновым и его учениками Л. А. Ивановым, В. П. Архиповым, А. Н. Байдаковым, Б. М. Богачёвым, А. Л. Бродским, Г. А. Виноградовой, В. А. Зайцевым, Ю. В. Засориным, Г. М. Каганом, В. В. Катраховым, А. А. Катраховой, Н. И. Киприяновой, В. И. Конonenko, М. И. Ключанцевым, А. А. Куликовым, А. А. Лариным, М. А. Лейзиным, Л. Н. Ляховым, А. Б. Муравником, И. П. Половинкиным, А. В. Рыжковым, С. М. Ситником, В. П. Шацким, В. Я. Ярославцевой; основные результаты этого направления представлены в [30]. Для описания классов решений соответствующих уравнений И. А. Киприяновым были введены и изучены функциональные пространства [175], позднее названные его именем (см. монографии Х. Трибеля [176], Л. Д. Кудрявцева и С. М. Никольского [177], в которых пространствам Киприянова посвящены отдельные параграфы).

В настоящее время в этом направлении работают В. В. Катра-

хов и Л. Н. Ляхов со своими учениками. Задачи для операторных уравнений вида (40), берущие начало в известной монографии [11], рассматривали А. В. Глушак, С. Б. Шмулевич, В. Д. Репников и др.

Здесь следует отметить, что первой фундаментальной работой, с которой начался отсчет изучения вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, является статья М. В. Келдыша [178] (задача E).

Интересные результаты по изучению ОП СПД были получены В. В. Катраховым, они также изложены в [30]. Рассматривались также ОП для многочисленных обобщений оператора Бесселя [179–190]. Вместе с тем были построены аналогичные теории и для некоторых других модельных операторов, например, таких [4–6, 189, 190]:

$$A = \frac{1}{v(x)} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d}{dx}, \quad v(x) = \sin^{2\nu+1} x, \operatorname{sh}^{2\nu+1} x, \quad (41) \\ (e^x - e^{-x})^{2\nu+1} (e^x + e^{-x})^{2\mu+1}.$$

Важность операторов  $A$  вида (41) для теории заключается в том, что по знаменитой формуле Гельфанда они представляют радиальную часть оператора Лапласа на симметрических пространствах [191]. При этом оператор Бесселя получается при выборе в (41)  $v(x) = x^{2\nu+1}$ . Подход через ОП позволяет с единых позиций изучать многие свойства специальных функций, через которые выражаются собственные функции (41), этот подход последовательно проводится в [4–6].

Отметим, что некоторый способ построения ОП со свойствами (63) на решениях соответствующих уравнений для частного случая целых  $\nu$  упоминается в литературе под названием метода Крама — Крейна [21–23], но он приводит к длинной последовательности усложняющихся подстановок, а результирующий ОП не может быть выписан в явном виде.

## 5. Связь операторов преобразования с дробным интегродифференцированием

Операторы дробного интегродифференцирования играют важную роль во многих современных разделах математики: уравнениях с частными производными, функциональном анализе и теории функ-

ций, специальных функциях, многочисленных приложениях (см. энциклопедическую монографию [34], а также [192–196]). Для теории специальных функций важность дробного интегриродифференцирования отражена в названии известной статьи [197]: «*Все специальные функции получаются дробным интегриродифференцированием элементарных функций!*»

Приведем список основных операторов дробного интегриродифференцирования: Римана — Лиувилля, Эрдейи — Кобера, дробного интеграла по произвольной функции  $g(x)$

$$\begin{aligned} I_{0+,x}^{\alpha} f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \\ I_{-,x}^{\alpha} f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} I_{0+,x^2}^{\alpha} f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} 2t f(t) dt, \\ I_{-,x^2}^{\alpha} f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{\alpha-1} 2t f(t) dt, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} I_{0+,g}^{\alpha} f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (g(x) - g(t))^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt, \\ I_{-,g}^{\alpha} f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (g(t) - g(x))^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt, \end{aligned} \quad (44)$$

во всех случаях предполагается, что  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ , на оставшиеся значения  $\alpha$  формулы также без труда продолжаются [34]. При этом обычные дробные интегралы получаются при выборе в (44)  $g(x) = x$ , Эрдейи — Кобера — при  $g(x) = x^2$ , Адамара — при  $g(x) = \ln x$ .

Связь с ОП проявляется в том, что, как видно из (35)–(36), ОП СПД с точностью до множителей как раз и являются операторами Эрдейи — Кобера, т. е. дробными степенями  $\left(\frac{d}{dx^2}\right)^{-\alpha}$ . Так же как ОП для перечисленных в (41) модельных операторов являются дробными степенями  $\left(\frac{d}{dg}\right)^{-\alpha}$  при  $g(x) = \sin x, \operatorname{sh} x$ . Поэтому основные



свойства этих ОП можно получить из теории операторов дробного интегродифференцирования, а не изобретать заново, что нередко и делалось.

Теперь вспомним связь ОП с коммутированием (30)–(31). Поэтому домножение с нужной стороны на различные формы дробных интегралов приводит к новым ОП. Для ОП Векуа — Эрдейи — Лаундеса эта идея использована в [99–101] для построения новых преобразований с различными экзотическими ядрами, для ОП СПД см. ниже. Новая возможность — это использование операторов дробного интегродифференцирования, коммутирующих с оператором Бесселя. Для этого требуется, например, явное описание дробных степеней оператора Бесселя. И оно есть, хоть об этом мало кто знает!

Несмотря на то, что операторы дробного интегродифференцирования Бесселя являются пока менее известными по сравнению с перечисленными выше, уже созданы основы их теории. Формальные определения даны в [198–201].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Пусть  $f(x) \in C^{2k}(0, b]$ . Определим *правосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя* при условии  $f^{(i)}(b) = 0$ ,  $0 \leq i \leq 2k - 1$ ,  $k \in N$  по формуле

$$\begin{aligned} (B_{b-}^{\nu, k} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(2k)} \times \\ &\times \int_x^b \left( \frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2k-1} {}_2F_1 \left( k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) f(y) dy = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_x^b (y^2 - x^2)^{k-\frac{1}{2}} \left( \frac{y}{x} \right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{1}{2}-k}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right) f(y) dy. \end{aligned} \quad (45)$$

Определим *левосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя* при условии  $f^{(i)}(a) = 0$ ,  $0 \leq i \leq 2k - 1$ ,  $k \in N$  по формуле

$$\begin{aligned} (B_{a+}^{\nu, k} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(2k)} \times \\ &\times \int_a^x \left( \frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2k-1} {}_2F_1 \left( k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) f(y) dy = \end{aligned}$$

$$= \int_a^x (x^2 - y^2)^{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right) f(y) dy, \quad (46)$$

где  ${}_2F_1$  — гипергеометрическая функция Гаусса,  $P_\nu^\mu(z)$  — функция Лежандра.

Введенные операторы являются интегральными реализациями отрицательных целых степеней  $(B_{\frac{\nu-1}{2}})^{-k}$ . Их распространение на произвольные комплексные значения параметра  $k$  проводится аналогично классическому случаю [34]. При  $\nu = -1/2$  оператор Бесселя сводится ко второй производной, а введенные операторы к интегралам Римана — Лиувилля

$$B_{b-}^{k,0} f = I_{b-}^{2k} f, \quad B_{a+}^{k,0} f = I_{a+}^{2k} f.$$

Отметим, что формально дробные степени оператора Бесселя можно сразу определить в образах преобразования Ханкеля. Такой подход иногда используется за неимением лучшего. Но при таком подходе невозможно, по-видимому, получить явные представления дробных степеней.

Многочисленные приложения операторов дробного интегрирования основаны на их вхождении в остаточный член формулы Тэйлора. Получены формулы Тэйлора для дифференциального оператора Бесселя с остаточным членом [198–202]. Обратим внимание читателя, что в формулировках теорем 7, 8 оператор Бесселя определяется немного иначе, чем в (23):  $B_\nu = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\nu}{y} \frac{\partial}{\partial y}$ .

**Теорема 7.** Справедлива формула Тэйлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора Бесселя с остаточным членом в интегральной форме

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left( \frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-2} \times \right. \\ & \times {}_2F_1 \left( i + \frac{\nu-1}{2}, i-1; 2i-1; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) (B^{i-1} f) \Big|_b - \\ & - \frac{1}{\Gamma(2i)} \left( \frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-1} {}_2F_1 \left( i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \times \\ & \left. \times (DB^{i-1} f) \Big|_b \right\} + B_{b-}^{\nu,k} (B^k f), \end{aligned} \quad (47)$$

где  $B_{b-}^{\nu,k}$  есть оператор левостороннего дробного интегрирования Бесселя (46),  ${}_2F_1$  — гипергеометрическая функция Гаусса.

Также справедлива двойственная формула, использующая формально сопряженный оператор

$$C_\nu f = D^2 f - D \left( \frac{\nu}{y} f \right) = D^2 - \frac{\nu}{y} D f + \frac{\nu}{y^2}.$$

**Теорема 8.** Справедлива формула Тэйлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора  $C_\nu$  с остаточным членом в интегральной форме

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left( \frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-2} \left( \frac{a}{x} \right) \times \right. \\ & \times {}_2F_1 \left( i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i-1; 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) (C_\nu^{i-1} f) \Big|_a + \\ & + \frac{1}{\Gamma(2i)} \left( \frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-1} {}_2F_1 \left( i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \times \\ & \left. \times a^\nu (Dx^{-\nu} C_\nu^{i-1} f) \Big|_a \right\} + B_{a+}^{\nu,k} (C_\nu^k f), \end{aligned} \quad (48)$$

где  $B_{a+}^{\nu,k}$  есть оператор правостороннего дробного интегрирования Бесселя (46),  ${}_2F_1$  — гипергеометрическая функция Гаусса.

Гипергеометрические функции в формулах Тэйлора могут быть выражены через функции Лежандра аналогично определению 5. Из формул (47)–(48) сразу следуют модификации операторов дробного интегриродифференцирования Бесселя (45)–(46) по Капуто [210–212].

Отметим, что формула Тэйлора для дифференциального оператора Бесселя с неопределенными явно коэффициентами и остаточным членом рассматривалась в [203]. При этом для набора коэффициентов выписывалась система рекуррентных уравнений, а ядро определялось многократным интегралом. Наш подход не содержит неявно определяемых операторов и неизвестных числовых коэффициентов, теперь все посчитано явно. В [203] также содержатся важные приложения к методу конечных элементов и разностным методам для ряда сингулярных задач. Операторы (45)–(46) первоначально использовались в [204] при решении некоторых интегральных уравнений.

Формулы разложения по степеням оператора Бесселя рассматривались Дельсартом [168–171] (ряды Тэйлора — Дельсарта). Общий способ их построения изложен в [9] в терминах операторно-аналитических функций. Но это формулы несколько другой природы — в них раскладывается обобщенный сдвиг, и они являются операторными аналогами рядов для функций Бесселя, поэтому такие формулы выписываются сразу вместе с остаточным членом. Приведенные выше прямые аналоги формулы Тэйлора для обычного сдвига построить и доказать намного труднее. Вместе с тем в приложениях к дифференциальным уравнениям и численным методам их решения чаще применяются именно формулы для обычного сдвига.

Задачу о выводе формул Тэйлора (47)–(48) по предложенному плану с использованием интегрирования по частям я поставил в 1994 г. для курсовой работы одной студентке третьего курса Дальневосточного политехнического института, в котором тогда преподавал во Владивостоке (при этом двадцать сотрудников двух академических институтов учили в течение всех пяти лет одну группу из двадцати студентов, читая все курсы). Она спросила, что такое гипергеометрическая функция, записала ссылку на книгу Бэйтмена — Эрдейи и ушла. Через две недели без единой консультации студентка принесла текст, в котором без единой пометки был записан подробный вывод теорем 7, 8 и их обобщений (см. ниже). Ничего подобного в своей жизни я больше не видел, а жаль, завидую коллегам, которые сталкивались с подобными случаями чаще. Сейчас, насколько я знаю, Дина Коновалова живет и работает в Новосибирске.

Рассмотрены и более общие дробные степени  $(\frac{1}{x}D)^m(B_\nu)^k$ . Это семейство операторов интересно тем, что содержит обычные операторы Римана — Лиувилля ( $m = 0$ ,  $\nu = -1/2$ ), дробное интегриродифференцирование Бесселя ( $m = 0$ ), операторы Эрдейи — Кобера ( $k = 0$ ). В этом случае также доказана формула Тэйлора.

Автором изучены и другие основные свойства операторов дробного интегриродифференцирования Бесселя вида (45)–(46): действие в стандартных функциональных пространствах, интегральные уравнения в особых случаях  $a=0$  и на полуоси, модификации операторов по Маршо и Капуто, сразу вытекающие из формул Тэйлора (47)–(48), связь с преобразованиями Фурье — Бесселя, Лапласа и Меллина, действие на распределениях в классах типа Лизоркина, связь с обобщенным преобразованием Стильтьеса, весовые и разносторон-

ние формулы композиций, выражения левосторонних операторов через правосторонние и наоборот с помощью сингулярных интегралов, приложения в теории операторов преобразования. Введенные операторы родственны операторам Лава и Сайго [34], последние подробно изучены О. А. Репиным в [205].

Приведем выражение для резольвенты дробных степеней оператора Бесселя. Оно обобщает знаменитую формулу для дробных интегралов Римана — Лиувилля, полученную Эйнарсом Хилле и Яковом Давидовичем Тамаркиным в работе [206] в 1930 г. Формула Хилле — Тамаркина является самым известным применением функций Миттаг-Лефлёра, а также основой огромного числа работ по приложениям дробного исчисления к дифференциальным уравнениям.

**Теорема 9.** Для резольвенты оператора дробного интегрирования Бесселя (46) на подходящих функциях справедливо интегральное представление

$$R_\lambda f = -\frac{1}{\lambda} f - \frac{1}{\lambda} \int_0^x K(x, y) f(y) dy, \quad (49)$$

где ядро  $K(x, y)$  выражается по формулам

$$K(x, y) = \frac{2y}{x^2 - y^2} \int_0^1 S_{\alpha, \nu}(z(t)) \frac{dt}{t(1-t)^{\frac{\nu+1}{2}}}, \quad (50)$$

$$z(t) = \left( \frac{t(1-t)(x^2 - y^2)^2}{\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)t\right)4y^2} \right)^\alpha,$$

$$S_{\alpha, \nu}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \frac{\nu-1}{2})\Gamma(\alpha k - \frac{\nu-1}{2})},$$

$S_{\alpha, \nu}(z)$  — разновидность гипергеометрической функции Райта или Фокса [102, 105–120].

Подобная функция недавно встречалась в работах А. В. Псху [196], в частном случае она называется функцией Бесселя — Мейтленда [34]. Все это специальные случаи более общих функций Райта,  $G$ -функций Мейера и  $H$ -функций Фокса, которые первоначально вводились как обобщения функций Бесселя [102–120].

Интересной задачей является дальнейшее упрощение представления ядра (50), если оно возможно.

Отметим, что резольвенты, как аналитические оператор-функции, коммутируют со своими операторами. Следовательно, их в принципе можно опять рассматривать как сырье для получения новых ОП. Кроме того, из основного свойства ОП (1) формально следует подобное соотношение и для резольвент  $TR_\lambda(A) = R_\lambda(B)T$ , но мне неизвестны применения этого соотношения. Более того, опять же формально сразу получается и общая формула

$$Tf(A) = f(B)T \quad (51)$$

для произвольного линейного ОП со свойством (1) и аналитической функции  $f$ .

Укажем также, что в заметке [200] исправляются ошибки в формулировке теоремы Хилле — Тамаркина из известной книги М. М. Джрбашяна [207], эта формулировка стала стандартной и часто воспроизводится, корректная версия приведена в [34]. Я очень уважаю эту книгу, но некоторые формулы из нее заставляют цепенеть от изумления, читатель может проверить собственные ощущения, например, от формулы для  $k_\alpha$  на с. 600.

Полученная формула для резольвенты дробных степеней оператора Бесселя позволяет рассматривать начальные и смешанные задачи для дифференциального уравнения с дробными частными производными вида

$$(B_{\nu,t})^\alpha u(x,t) - \lambda u(x,t) = \Delta_x u(x,t), \quad (52)$$

которые обобщают активно развивающуюся в настоящее время теорию уравнений с дробными интегралами Римана — Лиувилля, их многочисленными обобщениями и приложениями [34, 120, 192–196, 205, 208–215]. Возможно также рассматривать модификации уравнения (52) по Капуто [192, 210–212]. Другая очевидная возможность — это применение ОП к левой части (52) по переменной  $t$ , но их надо еще построить. Здесь может помочь соотношение вида (51), но подобные результаты для конкретной задачи нуждаются в аккуратном обосновании. Кроме того, рассмотрение спектральных свойств уравнения (52) нуждается в изучении асимптотики функции  $K(x,y)$  из формулы (50) в комплексной плоскости, а также распределения ее корней.

## 6. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи

Рассмотрим важный класс ОП, который при определенном выборе параметров является одновременным обобщением ОП СПД и их сопряженных, операторов дробного интегриродифференцирования Римана — Лиувилля и Эрдейи — Кобера, а также интегральных преобразований Мелера — Фока.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Операторами Бушмана — Эрдейи* называются интегральные операторы

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left( \frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (53)$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left( \frac{t}{x} \right) f(t) dt, \quad (54)$$

$$B_-^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left( \frac{t}{x} \right) f(t) dt, \quad (55)$$

$$E_-^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left( \frac{x}{t} \right) f(t) dt. \quad (56)$$

Здесь  $P_\nu^\mu(z)$  — функция Лежандра первого рода [102],  $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$  — та же функция на разрезе  $-1 \leq t \leq 1$ ,  $f(x)$  — локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Параметры  $\mu, \nu$  — комплексные числа,  $\operatorname{Re} \mu < 1$ , можно ограничиться значениями  $\operatorname{Re} \nu \geq -1/2$ .

Данные операторы были введены и первоначально исследованы в работах Р. Бушмана [216, 217] и А. Эрдейи [218, 219]. При этом в основном изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами и их факторизации, см. также [220–225]. Эти результаты изложены в монографии [34], хотя случай выбранных нами пределов интегрирования считается там особым и не рассматривается. Достаточно полное исследование операторов Бушмана — Эрдейи проведено автором в [226–229], при этом необходимо отметить, что их роль как ОП вообще ранее не рассматривалась.

Важность операторов Бушмана — Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными [34]: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу в четверти плоскости, установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвиг [230–232] действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана — Эрдейи по радиальной переменной, при исследовании краевых задач для различных уравнений с особенностями внутри области (см. далее приложения).

Приведем основные результаты, следуя в изложении [226–227]. Вначале распространим определение 5 на важный случай  $\mu = 1$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** Введем при  $\mu = 1$  операторы Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам

$$B_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu \left( \frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (57)$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu \left( \frac{t}{x} \right) \frac{df(t)}{dt} dt, \quad (58)$$

$$B_-^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu \left( \frac{t}{x} \right) \left( -\frac{df(t)}{dt} \right) dt, \quad (59)$$

$$E_-^{\nu,1} f = \left( -\frac{d}{dx} \right) \int_x^\infty P_\nu \left( \frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (60)$$

где  $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$  — функция Лежандра.

Разумеется, при очевидных дополнительных условиях на функции в (57)–(60) можно продифференцировать под знаком интеграла или проинтегрировать по частям.

**Теорема 10.** Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана — Эрдейи на подходящих функциях через



дробные интегралы Римана — Лиувилля, Эрдейи — Кобера и Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости:

$$B_{0+}^{\nu,\mu} = I_{0+}^{1-\mu} B_{0+}^{\nu,1} = I_{0+}^{\nu+2-\mu} x I_{0+,x^2}^{-(\nu+1)} 2^{\nu+1} x^{\nu-1}. \quad (61)$$

Аналогичные представления получены для других операторов (53)–(56).

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним оператор углового момента из квантовой механики

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \left( \frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) \left( \frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right). \quad (62)$$

Их взаимосвязь устанавливает

**Теорема 11.** Пусть пара ОП  $X_\nu, Y_\nu$  сплетают  $L_\nu$  и вторую производную:

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, \quad Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \quad (63)$$

Введем новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}, \quad P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}. \quad (64)$$

Тогда пара новых ОП  $S_\nu, P_\nu$  сплетают оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, \quad P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \quad (65)$$

Разумеется, по указанным формулам можно перейти и наоборот от ОП для оператора Бесселя к ОП для оператора углового момента. Мы сохраним за ОП, действующими по формулам (63), названия ОП типа Сонина и Пуассона соответственно.

**Теорема 12.** Операторы Бушмана — Эрдейи  $B_{0+}^{\nu,\mu}, E_{-}^{\nu,\mu}$  на подходящих функциях являются ОП типа Сонина, а  $B_{-}^{\nu,\mu}, E_{0+}^{\nu,\mu}$  являются ОП типа Пуассона, они действуют по формулам (63).

Теперь рассмотрим более подробно свойства ОП Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости, введенных по формулам (57). Подобный оператор был построен В. В. Катраховым [233, 234] путем домножения стандартного ОП Сонина на обычный дробный интеграл с целью взаимно компенсировать гладкость этих двух операторов и получить новый, который бы действовал в одном пространстве типа  $L_2(0, \infty)$ . Как впоследствии оказалось, это можно сделать известными средствами, так как ОП Сонина — это частный случай

операторов Эрдейи — Кобера. Существует замечательная теорема А. Эрдейи, позволяющая выделить стандартный дробный интеграл Римана — Лиувилля из дробного интеграла по любой функции [34]. В результате получается

**Теорема 13.** *На подходящих функциях справедливо представление оператора Эрдейи — Кобера через дробный интеграл Римана — Лиувилля и оператор Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости при  $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ :*

$$I_{0+,x^2}^\alpha = I_{0+}^\alpha \left( (2x)^\alpha f + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} P_{-\alpha} \left( \frac{x}{t} \right) (2t)^\alpha f(t) dt \right). \quad (66)$$

Операторы нулевого порядка гладкости выделяются тем, что только для них можно доказать оценки в *одном* пространстве типа  $L_p(0, \infty)$ . При этом, учитывая структуру этих операторов, удобно пользоваться техникой преобразования Меллина.

Напомним [235], что преобразование Меллина функции  $f(x)$  называется функцией  $g(s)$ , которая определяется по формуле

$$g(s) = M[f](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx. \quad (67)$$

Определим также свертку Меллина

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^\infty f_1 \left( \frac{x}{y} \right) f_2(y) \frac{dy}{y}, \quad (68)$$

при этом оператор свертки с ядром  $K$  действует в образах преобразования Меллина как умножение на мультипликатор

$$M[Af](s) = \int_0^\infty K \left( \frac{x}{y} \right) f(y) \frac{dy}{y} = M[K * f](s) = m_A(s) M[f](s), \quad (69)$$

$$m_A(s) = M[K](s).$$

Заметим, что преобразование Меллина является преобразованием Фурье на полуоси по мере Хаара  $\frac{dy}{y}$  [191]. Его роль велика в теории специальных функций, например, гамма-функция является

преобразованием Меллина экспоненты. С преобразованием Меллина связан важный прорыв в 1970-х годах, когда в основном усилиями О. И. Маричева была полностью доказана и приспособлена для нужд вычисления интегралов известная теорема Слейтер, позволяющая для большинства образов преобразований Меллина восстановить оригинал в явном виде по простому алгоритму через гипергеометрические функции [235, 236]. Этот результат, который несложно получить формально по общей формуле обращения Меллина — Барнса через вычеты, для своего строгого обоснования потребовал достаточно сложных и тщательных выкладок, связанных с обработкой асимптотик гипергеометрических функций вблизи полюсов и на бесконечности, а такие асимптотики весьма разнообразны и разнородны. Эта работа была только начата Люси Джоан Слейтер, а в основном проведена до конца Олегом Игоревичем Маричевым, данное обстоятельство часто недооценивается. Теорема Слейтер — Маричева позволила создать универсальный мощный метод вычисления интегралов, который впоследствии позволил решить многие задачи в теории уравнений с частными производными, а также воплотился в передовые технологии символьного интегрирования пакета MATHEMATICA (О. И. Маричев работает в Wolfram Research).

Для изучения операторов вида (69) автором в [226, 227] был предложен удобный алгебраический подход, который не содержит ничего нового, но в удобной форме позволяет быстро получать нужные оценки. Нужные факты будут собраны вместе как

**Теорема 14.** Пусть оператор  $A$  действует по формуле (69).

а) Для того, чтобы  $A$  допускал расширение до ограниченного оператора в  $L_2(0, \infty)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| m_A \left( i\xi + \frac{1}{2} \right) \right| = M_2 < \infty; \quad (70)$$

при этом  $\|A\|_{L_2} = M_2$ .

б) Для того, чтобы  $A$  допускал расширение до ограниченного оператора в  $L_p(0, \infty)$ ,  $p > 1$ , при дополнительном условии неотрицательности ядра  $K$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| m_A \left( i\xi + \frac{1}{p} \right) \right| = M_p < \infty; \quad (71)$$

при этом  $\|A\|_{L_p} = M_p$ .

в) Обратный оператор  $A^{-1}$  действует также по формуле (69) с мультипликатором  $\frac{1}{m_A}$ , для того, чтобы он допускал расширение до ограниченного оператора в  $L_2(0, \infty)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}} \left| m_A \left( i\xi + \frac{1}{2} \right) \right| = m_2 < \infty; \quad (72)$$

при этом  $\|A^{-1}\|_{L_2} = \frac{1}{m_2}$ .

г) Пусть операторы  $A$ ,  $A^{-1}$  определены и ограничены в  $L_2(0, \infty)$ . Они унитарны тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\left| m_A \left( i\xi + \frac{1}{2} \right) \right| = 1 \quad (73)$$

для почти всех  $\xi$ .

Последняя теорема суммирует результаты многих математиков: Шура, Харди, Литтлвуда, Пойа, Кобера, Михлина и Хермандера. Мне неизвестно, можно ли в формулировке пункта б) опустить требование неотрицательности ядра, хотя в письме С. Г. Самко сообщил мне, что можно. При этом он утверждал, что это следует из результатов одной статьи М. Г. Крейна, чего я проверить не смог. Неразобранным остается и диапазон  $0 < p < 1$ , хотя в общем случае тут оценок нет, на что было мне указано В. И. Буренковым на примере операторов Харди. Первым математиком, использовавшим технику преобразования Меллина для оценки норм операторов Римана — Лиувилля для случая чисто мнимых степеней, был, насколько мне известно, Кобер [237]. Поэтому иногда часть б) приведенной теоремы называется леммой Кобера, что не совсем точно, так как он на самом деле доказал формулу для нормы из части а) для случая знакопеременных функций.

Данный подход позволяет легко описать и сплетающие свойства ОП вида (69).

**Теорема 15.** Пусть оператор действует по правилу (69). Тогда он является ОП типа Сонина (63) на подходящих функциях тогда и только тогда, когда его мультипликатор удовлетворяет функциональному уравнению

$$m(s) = m(s-2) \frac{(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2) - \nu(\nu+1)}. \quad (74)$$

Все подобные ОП типа Сонина тогда получаются по формуле (69) с

мультипликатором  $p(s)m(s)$ , где  $p(s)$  — произвольная периодичная функция с периодом 2, т. е.  $p(s) = p(s - 2)$ .

Таким образом, в теореме 15 содержится полное описание ОП типа Сонина, а также алгоритм их конструирования. Аналогичный результат справедлив и для операторов типа Пуассона. Конкретные примеры ОП с помощью теоремы 15 построены в [226, 227], при этом используются преобразования Стильтьеса и Гильберта на полуоси.

Отметим, что из теоремы 15 можно сразу вывести симпатичную переформулировку знаменитой гипотезы Римана, которая оказывается эквивалентной обратимости во всех  $L_p$  кроме  $p = 2$  интегральных операторов свертки с дзета-функцией Римана в качестве мультипликатора. Было бы интересным построить этот оператор свертки в оригиналах (прообразах) в явном виде. По-видимому, этот факт ранее не отмечался, он приятен, но, как и тысячи подобных переформулировок, совершенно бесполезен в плане хоть какого-то приближения к доказательству знаменитой гипотезы.

Теперь применим теорему 14 к операторам Бушмана — Эрдейи. Для краткости приведем результаты только для одного оператора из четырех.

**Теорема 16.** Оператор Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости  $B_{0+}^{\nu,1}$ , определенный по формуле (57), действует по правилу (69) с мультипликатором

$$m(s) = \frac{\Gamma(-s/2 + \frac{\nu}{2} + 1) \Gamma(-s/2 - \frac{\nu}{2} + 1/2)}{\Gamma(1/2 - \frac{s}{2}) \Gamma(1 - \frac{s}{2})} \quad (75)$$

при условии  $\operatorname{Re} s < \min(2 + \operatorname{Re} \nu, 1 - \operatorname{Re} \nu)$ . Для его нормы, которая является периодической функцией по  $\nu$ , справедлива формула

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin \pi \nu}}. \quad (76)$$

Оператор ограничен в  $L_2(0, \infty)$  при  $\nu \neq 2k + 1/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Аналогичные результаты получены в [226, 227] и для пространств со степенным весом.

Известно, что разносторонние операторы Римана — Лиувилля связаны друг с другом при помощи преобразования Стильтьеса [34]. Соответствующие результаты получены в [226, 227] и для операторов Бушмана — Эрдейи.

В [226, 227] введены и рассмотрены некоторые обобщения ОП Бушмана — Эрдейи, ядра которых выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса и более общую  $G$ -функцию Мейера. Подобные обобщения другого рода, в которых рассматриваются операторы с интегрированием по всей полуоси и ядра выражаются через обобщенные функции Лежандра, изучались в [238–240]. Для исследования таких операторов могут оказаться полезными различные неравенства для гипергеометрических функций, например, полученные в [241–251].

## 7. В поисках вольтерровых унитарных операторов преобразования

Название этого пункта почти копирует название параграфа из известной работы Л. Д. Фаддеева [33]. Вопрос об унитарной эквивалентности возникает уже в простейшем случае двух матриц. Если общих содержательных критериев подобия не существует (кроме совпадения канонических форм), то для унитарного подобия получены интересные критерии Шпехта и Пирси [1]. Тем более интересным становится поиск унитарных ОП в бесконечномерном случае.

Рассмотрим вопрос об унитарности в  $L_2(0, \infty)$  ОП типа Сони́на и Пуассона. Еще в ранних работах Дельсарта, Лионса и Левитана было замечено, что стандартные ОП Сони́на и Пуассона (35)–(36) не сохраняют гладкость функций, что создает различные сложности при их применении. Так возникла мечта о построении унитарных ОП. Следующим шагом стало построение унитарных ОП хотя бы для некоторых значений параметров.

**Теорема 17.** *Для унитарности в  $L_2(0, \infty)$  операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости (57) необходимо и достаточно, чтобы число  $\nu$  было целым. При этом пары операторов (57)–(59) и (58)–(60) являются взаимно обратными.*

Эта теорема была первоначально сформулирована в [233, 234], доказательство содержало неточности (утверждалась унитарность при всех  $\nu$ ), затем скорректированные в [252, 253], см. также [254–260].

Задача о построении унитарных ОП типа Сони́на и Пуассона для оператора Бесселя (или углового момента) в общем случае для произвольного  $\nu$  была окончательно решена в [289, 290] в рамках композиционного метода (см. ниже). Это потребовало введения операторов несколько более сложной структуры.

**Теорема 18.** Следующие операторы являются ОП типа Сонина и Пуассона, взаимно обратными и унитарными при всех  $\nu$ :

$$\begin{aligned}
 S_U^\nu f &= \cos \frac{\pi\nu}{2} \left( -\frac{d}{dx} \right) \int_x^\infty P_\nu \left( \frac{x}{y} \right) f(y) dy + \\
 &+ \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \left( \int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left( \frac{x}{y} \right) f(y) dy - \right. \\
 &\quad \left. - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left( \frac{x}{y} \right) f(y) dy \right), \\
 P_U^\nu f &= \cos \frac{\pi\nu}{2} \left( \int_0^x P_\nu \left( \frac{y}{x} \right) \left( \frac{d}{dy} \right) f(y) dy - \right. \\
 &- \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \left( \int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left( \frac{y}{x} \right) f(y) dy - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left( \frac{y}{x} \right) f(y) dy \right) \right),
 \end{aligned} \tag{77}$$

где  $P_\nu$  — функция Лежандра первого рода,  $Q_\nu^1$  — функция Лежандра второго рода,  $Q_\nu^1$  — функция Лежандра второго рода на разрезе [102].

Этим завершается история построения унитарных ОП типа Сонина и Пуассона.

Интересно рассмотреть частный случай, который вытекает из теоремы 17 при  $\nu = 1$ . Получаем пару очень простых операторов

$$E_{0+}^{1,1} f = f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad E_-^{1,1} f = f(x) - \int_x^\infty \frac{f(y)}{y} dy, \tag{78}$$

связанных со знаменитыми операторами Харди

$$H_1 f = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad H_2 f = \int_x^\infty \frac{f(y)}{y} dy. \tag{79}$$

По поводу теории неравенств Харди см. [261, 262]. Из наших результатов следует

**Теорема 19.** Операторы (78) образуют пару взаимнообратных унитарных в  $L_2(0, \infty)$  операторов. Они сплетаются как ОП  $\frac{d^2}{dx^2}$  и  $\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}$ .

Как следует из (79), операторы Бушмана — Эрдейи могут рассматриваться как *обобщения операторов Харди*, а неравенства для их норм являются *определенными обобщениями неравенств Харди*, что позволяет взглянуть на этот класс операторов под новым интересным углом зрения. Кроме того, можно показать, что операторы (78) являются преобразованиями Кэли от симметричных операторов  $\pm 2i(xf(x))$  при соответствующем выборе областей определения. Их спектром является единичная окружность. В [226, 227] эти вопросы рассмотрены и для пространств со степенным весом.

Результат об унитарности из теоремы 19 был недавно переоткрыт Куфнером, Перссоном и Малиграндой, давшими его элементарное доказательство. Теорема 17 позволяет выписать еще несколько пар унитарных операторов очень простого вида.

$$\begin{aligned}
 U_3 f &= f + \int_0^x f(y) \frac{dy}{y}, & U_4 f &= f + \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy, \\
 U_5 f &= f + 3x \int_0^x f(y) \frac{dy}{y^2}, & U_6 f &= f - \frac{3}{x^2} \int_0^x y f(y) dy, \\
 U_7 f &= f + \frac{3}{x^2} \int_x^\infty y f(y) dy, & U_8 f &= f - 3x \int_x^\infty f(y) \frac{dy}{y^2}, \\
 U_9 f &= f + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y} \right) f(y) dy, \\
 U_{10} f &= f + \frac{1}{2} \int_x^\infty \left( \frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x} \right) f(y) dy.
 \end{aligned}$$

Этот перечень можно существенно расширить. На мой взгляд подобных простых явных примеров очень не хватает в курсах функционального анализа.



## 8. Операторы преобразования для некоторых сингулярных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами

В этом пункте будут рассмотрены ОП вида

$$S_\nu(B_\nu - q(x)) = B_\nu S_\nu, \quad B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{x} \frac{d}{dx}, \quad (80)$$

которые обобщают ранее рассмотренные ОП для операторов Штурма — Лиувилля и Бесселя.

Первые работы по данной задаче рассматривали ОП на решениях соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом использовался метод функций Римана в том виде, как он был разработан в фундаментальной статье Б. М. Левитана [171]. Нужные ОП были построены в работах [263, 264], в последней работе имеются неточности в формулировках. Следует отметить, что метод Б. М. Левитана имел, на мой взгляд, и один недостаток: им использовалось выражение функции Римана через гипергеометрическую функцию Гаусса, а последняя оценивалась на основании общих асимптотик. В результате окончательные оценки для ядер ОП содержали неконтролируемые константы общего вида.

Определенный прорыв потребовал новых идей, он был совершен в замечательных работах В. В. Сташевской [265, 266]. При этом была установлена неожиданная связь между теорией ОП и теоремами типа Пэли — Винера из теории функций. Изложим кратко план построения ОП вида (80) по В. В. Сташевской.

1. Рассматривается задача о нахождении решения дифференциального уравнения

$$y'' - \left( q(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right) y + \lambda^2 y = 0, \quad (81)$$

на полуоси  $0 < x < \infty$ , где  $n$  — натуральное число,  $q(x)$  — вещественная функция, удовлетворяющая при  $a > 0$ ,  $\mu < 1/2$  требованию

$$\int_0^a t^\mu |q(t)| dt < \infty, \quad (82)$$

и условию в нуле

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^n} = \frac{1}{2^{n-1/2} \Gamma(n+1/2)}. \quad (83)$$

2. Доказывается существование решения поставленной задачи (81)–(83) методом последовательных приближений. Это решение имеет вид

$$y(x) = y(x, \lambda) = \frac{\sqrt{\lambda x} J_\nu(\lambda x)}{\lambda^n} + \frac{g(x, \lambda)}{\lambda^n}, \quad (84)$$

где  $J_\nu(t)$  — функция Бесселя,  $g(x, \lambda)$  есть целая функция от  $\lambda$  при каждом фиксированном  $x$ .

3. Доказывается теорема Пэли — Винера для соответствующего преобразования Ханкеля (Фурье — Бесселя) полуцелой степени.

4. Устанавливается, что целая функция  $g(x, \lambda)$  из (84) удовлетворяет всем условиям полученной теоремы Пэли — Винера, в частности, имеет степень  $\leq x$ , поэтому для нее справедливо интегральное представление с интегрированием по промежутку  $(0, x)$  с определенным ядром. Равенство Парсеваля приводит к нужной оценке этого ядра в пространстве  $L_2(0, \infty)$ . На этом построение ОП закончено, для него получено интегральное представление и оценка ядра.

Впоследствии Н. И. Ахиезер доказал теорему Пэли — Винера и для преобразования Ханкеля любого порядка [267], что распространяет результаты Сташевской на все значения  $\nu$ .

Метод Сташевской излагается во всех монографиях по ОП, а также во многих книгах по обратным задачам и теории рассеяния. Он был обобщен для построения более общих ОП  $S$ , сплетающих по формуле

$$S(A - q(x)) = AS, \quad A = \frac{1}{v(x)} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d}{dx}. \quad (85)$$

Это направление разрабатывалось первоначально в работах Шеб-ли [4–6, 268–271], а затем подробно изучалось в работах тунисского математика Халифы Тримеша и соавторов [4–6, 272–281].

Для построения ОП на произвольных функциях в работах [282–284] был несколько усовершенствован метод Левитана. Это потребовало более тщательного использования свойств специальных функций. Основная идея заключается в том, что в рассматриваемом случае в функциях Римана общие гипергеометрические функции могут быть выражены через более простые функции Лежандра, что позволяет получить оценки без неопределенных постоянных. Кроме того, на этом пути удастся ослабить условия на потенциал (82), включив и случай сильно сингулярных потенциалов [285]. Приведем типичный результат из [282–284].

**Теорема 20.** Пусть потенциал  $q(x)$  удовлетворяет условию  $|q(x+y)| \leq p(x)$ ,  $0 \leq x \leq y$  с некоторой неотрицательной функцией  $p(x)$ . Тогда существует ОП, сплетающий по формуле (80) и представимый в виде

$$S_\nu f(x) = f(x) + \int_x^\infty P(x, t) f(t) dt, \quad (86)$$

ядро которого удовлетворяет оценке

$$|P(x, t)| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{t}{x} \right)^\alpha \int_x^\infty P_{\nu-1} \left( \frac{y^2(t^2 + x^2) - (t^2 - x^2)}{2txy^2} \right) |p(y)| dy \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{t-x}{2} \right) \int_{\frac{t+x}{2}}^\infty P_{\nu-1} \left( \frac{y^2(t^2 + x^2) - (t^2 - x^2)}{2txy^2} \right) |p(y)| dy \right\},$$

где  $P_{\nu-1}(z)$  — функция Лежандра. Кроме того, если  $q(x) \in C^1(0, \infty)$ , то  $P(x, t) \in C^2(t > x)$ .

Многие важные для приложений потенциалы, такие как Баргмана, Юкавы и сильно сингулярный [285], удовлетворяют приведенным условиям. Кроме того, в [282–284] рассмотрен также случай ОП на конечном отрезке, специальные оценки для потенциалов, мажорируемых степенными функциями, приложения к неравенствам для функций Лежандра и к теории уравнений с частными производными.

Результат, подобный теореме 20, можно использовать еще двумя способами. Во-первых, он эквивалентен доказательству существования ООС, определяемых на решениях уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{2\nu+1}{x} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) - q(x) u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y). \quad (87)$$

Во-вторых, получаются практически явные формулы для выражения решений уравнения (87) через решения волнового уравнения. Метод получения явных интегральных представлений решений смешанных задач для уравнения вида (87) — это стандартное применение ОП и ООС, для случая  $2\nu+1=0$  он подробно разработан в [25, 26]. Интересный другой подход к выводу подобных формул для случая, когда сингулярное слагаемое в (87) отсутствует (волновое уравнение для неоднородной среды), предложен в [286, 287], см. также [288].

Указанные результаты (построение ООС, представление решений смешанных задач через решения волнового уравнения) получаются и для более общего случая

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) - q(x)u(x, y) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) + \frac{2\mu + 1}{y} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) - p(y)u(x, y) \end{aligned} \quad (88)$$

тем же методом, разработанным в [282–284].

### 9. Композиционный метод построения операторов преобразования различных классов

Композиционный метод построения ОП был первоначально предложен нами в сборнике [289], посвященном памяти новосибирского математика Бориса Алексеевича Бубнова, см. также [290]. Этот метод основан на факторизации ОП через классические интегральные преобразования, такие как Фурье, Лапласа, Ханкеля и подобные им. При этом удастся навести достаточно аккуратный порядок во всем многообразии ОП. Композиционный метод дает алгоритмы не только для построения множества новых ОП, но содержит как частные случаи ОП СПД, Векуа — Эрдейи — Лаундеса, Бушмана — Эрдейи, унитарные ОП (77), обобщенные операторы Эрдейи — Кобера, а также введенные Р. Кэрролом [4–6] классы эллиптических, гиперболических и параболических ОП, а также их обобщения.

Общая схема композиционного метода следующая. На вход подается пара операторов произвольного вида  $A, B$ , а также связанные с ними обобщенные преобразования Фурье  $F(A), F(B)$ , которые обратимы и действуют по формулам

$$F(A)A = g(t)F(A), \quad F^{-1}(B)g(t) = BF^{-1}(B), \quad (89)$$

где  $t$  — двойственная переменная. На выходе получаем пару ОП, сплетающих  $A, B$ .

**Теорема 21.** *Определим пару взаимно обратных операторов по формулам*

$$S = F^{-1}(B) \frac{1}{w(t)} F(A), \quad P = F^{-1}(A) w(t) F(B) \quad (90)$$

с произвольной весовой функцией  $w(t)$ . Тогда они являются ОП, которые удовлетворяют сплетающим соотношениям  $SA = BS$ ,  $PB = AP$ .

На практике чаще всего используются интегральные преобразования Фурье, синус и косинус преобразования, а также преобразование Ханкеля, которые мы определим так:

$$(Ff)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-ity) f(y) dy,$$

$$(F_c f)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(ty) f(y) dy,$$

$$(F_s f)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(ty) f(y) dy,$$

$$(H_\nu f)(t) = \frac{1}{t^\nu} \int_0^{\infty} J_\nu(ty) f(y) dy.$$

При введенных нормировках все эти преобразования унитарны в  $L_2(0, \infty)$  и совпадают с обратными [34, 291]. В дальнейшем сделаем самый очевидный выбор  $g(t) = -t^2$ .

Рассмотрим несколько примеров применения композиционного метода построения ОП из [289, 290].

**ПРИМЕР 1.** Пусть  $A = B_\nu$ ,  $B = \frac{d^2}{dx^2}$ ,  $F(A) = H_\nu$ ,  $F(B) = F_c$ ,  $w(t) = t^\alpha$ . Тогда при некоторых ограничениях на параметры получаем унитарные ОП (77), которые одновременно обобщают ОП СПД, Бушмана — Эрдейи и Эрдейи — Кобера.

**ПРИМЕР 2.** Пусть  $A = B_\nu$ ,  $B = B_\mu$ ,  $F(A) = H_\nu$ ,  $F(B) = H_\mu$ ,  $w(t) = t^\alpha$ . Тогда получаются операторы сдвига по параметру  $T_{\nu,\mu}^{(\alpha)}$ , ядра которых выражаются через гипергеометрические функции. Самым интересным из них представляется ОП при выборе  $\alpha = 0$

$$(T_{\nu,\mu}^{(0)} f)(x) = \frac{2^{1-(\nu-\mu)}}{\Gamma(\nu-\mu)} \int_x^{\infty} y (y^2 - x^2)^{\nu-\mu-1} f(y) dy,$$

который не зависит от самих значений  $\nu$ ,  $\mu$ , а только от величины «спуска» по параметрам  $\nu - \mu$ . Это оператор типа Эрдейи — Кобера,

открытый А. Эрдеи [34]. Другой подход к построению подобных операторов сдвига по параметру, это искать их в виде произведения операторов типа Сонина и Пуассона  $T_{\nu,\mu} = P_\mu S_\nu$ , последние можно опять строить композиционным методом, причем с разными весовыми функциями.

ПРИМЕР 3. При значениях  $\nu = \mu$  из предыдущего примера получается семейство операторов, коммутирующих с оператором Бесселя, ядра которых выражаются через функции Лежандра первого и второго родов.

ПРИМЕР 4. Пусть выбрано  $A = B_\mu$ ,  $B = B_\nu - \lambda^2$ ,  $w(t) = t^\mu (t^2 + \lambda^2)^{-\frac{\mu}{2}}$ ,

$$F(A) = F(B) = \frac{1}{t^\nu} \int_0^\infty y^{\nu+1} J_\nu \left( y \sqrt{t^2 + \lambda^2} \right) f(y) dy. \quad (91)$$

Тогда по формулам (90) получаем ОП типа Векуа — Эрдеи — Лаундеса вида

$$Sf = \lambda^{1+\nu-\mu} \int_0^\infty y (y^2 - x^2)^{\frac{\nu-\mu-1}{2}} J_{\nu-\mu-1} \left( \lambda \sqrt{y^2 - x^2} \right) f(y) dy. \quad (92)$$

Это в точности ОП, введенный Лаундесом [34], он также зависит только от величины сдвига по параметрам. Отметим, что на основе композиционного метода можно изложить всю теорию ОП Векуа — Эрдеи — Лаундеса, при этом роль обобщенного преобразования Ханкеля играет выражение (91).

Обобщая классификацию Р. Кэррола, мы называли ОП для оператора Бесселя из приведенных примеров *B-гиперболическими*. В работах [289, 290] также рассмотрено применение композиционного метода к построению *B-эллиптических* ОП со свойством  $TB_\nu = -D^2T$  и *B-параболических* ОП со свойством  $TB_\nu = DT$ .

В указанном методе может быть использован и оператор квадратичного преобразования Фурье (КПФ, дробное преобразование Фурье, преобразование Фурье — Френеля) [292–294]. Это важное интегральное преобразование недостаточно широко известно (пока), оно возникло из предложения Френеля заменить стандартные плоские волны с линейными аргументами в экспонентах на более общие вол-

ны с квадратичными аргументами в экспонентах, что позволило полностью объяснить парадоксы со спектральными линиями при дифракции Фраунгофера. Математически операторы КПФ являются дробными степенями  $F^\alpha$  обычного преобразования Фурье, достраивая его до полугруппы по параметру  $\alpha$ , они были определены Н. Винером и А. Вейлем. В теории всплесков, в которой принято каждую формулу считать новой и называть по-новому давно известные вещи, КПФ называется преобразованием Габора. Изложенный выше композиционный метод позволяет с помощью этого преобразования строить ОП для одномерного оператора Шрёдингера из квантовой механики. При этом может быть использовано и более общее квадратичное преобразование Ханкеля (КПХ) [295].

О пользе ОП для теории дискретного преобразования Фурье см. [296].

## 10. Некоторые приложения метода операторов преобразования

В этом пункте очень кратко перечислены некоторые приложения ОП.

1. **Теория обратных задач.** В самом простом случае это задача о восстановлении уравнения Штурма — Лиувилля по так называемой спектральной функции. Единственность была доказана В. А. Марченко, общий метод решения заключается в выписывании по спектральной функции некоторого интегрального уравнения для ядра ОП. Получившееся интегральное уравнение называется уравнением Гельфанда — Левитана (можно посплетничать по поводу этого названия, но мы не будем этого делать), потенциал по ядру восстанавливается из соотношения (9). Подробное изложение вопроса имеется в [4–6, 22–23, 28–29, 297–298]. Отметим, что М. Г. Крейном был создан свой метод решения обратных задач, но он не использует технику ОП.

2. **Теория рассеяния.** В самом простом случае это задача о восстановлении уравнения Штурма — Лиувилля по данным рассеяния, например, по двум спектрам. Схема решения та же, что и для обратных задач, определяющее уравнение в этом случае называется уравнением Марченко [4–6, 21–23, 31–33, 299–306]. Через ОП факторизуется сам оператор рассеяния. Метод ОП является также основным при исследовании решений Йоста и задач для системы Дирака [29].

**3. Операторы Штурма — Лиувилля и их обобщения.** Можно без преувеличения сказать, что методы ОП тривиализировали эту теорию, предоставив единый мощный метод для большинства задач. К ним относятся асимптотические формулы для решений и собственных значений, формулы следов, асимптотика спектральной функции [22, 23, 28, 29]. В работах [76, 77] строятся ОП для уравнений вида Штурма — Лиувилля, но с измененным вхождением спектрального параметра в потенциал. В монографии А. П. Хромова [40] рассматриваются ОП для более общих операторов, содержащих дифференциальные и интегральные части, а также вопросы подобия двух операторов Вольтерра.

**4. Нелинейные уравнения.** В теории нелинейных дифференциальных уравнений метод Лакса положил начало использованию ОП для доказательства существования решений и построения солитонов. ОП используется также в так называемом методе одевания и преобразованиях Дарбу [303–306].

**5. Сингулярные и вырождающиеся краевые задачи для уравнений с частными производными.** В работе [234] В. В. Катраховым был предложен новый подход к постановке краевых задач для эллиптических уравнений с особенностями. Например, для уравнения Пуассона им рассматривалась задача в области, содержащей начало координат, в которой решения могут иметь особенности произвольного роста. В точке начала координат им было предложено новое нелокальное краевое условие типа свертки, которое мы назовем  $K$ -следом. В определении классов для решений, которые обобщают пространства С. Л. Соболева на случай функций с существенными особенностями, фундаментальную роль играют различные ОП. Основные результаты состоят в доказательстве корректной разрешимости поставленных задач во введенных пространствах. На более сложные уравнения и области в этом направлении результаты обобщались в работах [307–311].

**6. Сингулярные псевдодифференциальные операторы.** Подобные ПДО, связанные с оператором Бесселя, были определены и изучены В. В. Катраховым и И. А. Киприяновым [312]. Р. Кэррол посвятил этим ПДО Киприянова — Катрахова отдельную главу в книге [5], существенно переработав изложение материала.

**7. Задачи об убывании решений дифференциальных уравнений.** Е. М. Ландисом была поставлена такая задача [313]: доказать, что любое решение во всем пространстве уравнения  $\Delta u =$



$q(x)u = 0$  при условиях  $|q(x)| \leq \lambda^2$ ,  $|u(x)| \leq A \exp(-(\lambda + \varepsilon)|x|)$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$  равно нулю. В работах [314–316] автором было дано частичное решение этой задачи для случаев радиально-симметричного или зависящего от одной переменной потенциалов, а также для некоторых ультрагиперболических уравнений. Решение основывалось на использовании ОП со специальными оценками ядер прямых и обратных операторов для этого случая. Для общих потенциалов утверждение задачи оказалось неверным. В. З. Мешковым было доказано [317, 318], что существуют решения со скоростью убывания  $\exp(|x|^{-4/3})$ . Доказательства Мешкова потребовали обобщения известных неравенств Карлемана и использовали методы теории чисел.

**7. Применение ОП к доказательству вложений функциональных пространств.** В [226, 227] ОП Бушмана — Эрдейи применены автором к доказательству вложений и изометрий пространств И. А. Киприянова [175–177] в весовые пространства С. Л. Соболева. При этом основную роль играют описанные выше оценки норм и свойство унитарности. Подобные вопросы рассматривались также в [319–322]. Отметим, что есть противоречия между моими оценками и оценками из работы [321]. Это некоторое время расстраивало меня, но потом удалось разобраться, что в указанной работе контрпримеры строятся на функциях синуса, про которые сказано, что они, разумеется, принадлежат пространству пробных функций. Но пробные функции для уравнений с оператором Бесселя всегда выбираются четными. Поэтому, если считать синус четной функцией, то верны результаты из [321, 322], а если думать иначе, то мои.

**8. ОП для дифференциально-разностных операторов.** В последнее время теория ОП для дифференциально-разностных операторов в основном разрабатывалась для так называемого оператора Данкля [323–333]. Этот оператор является в простейшем случае весовой суммой обычной производной и симметричной разности, а в общем случае он связан с симметриями и группой Кокстера. Построены явные формулы для ОП, ООС, соответствующих рядов и обобщенных почти-периодических функций. На мой взгляд, часть этих результатов может быть выведена из результатов монографии А. П. Хромова [40], если использовать хитрое строение оператора Данкля. ОП для разностного уравнения Хилла изучаются в [334–335].

Отметим также, что в монографиях Р. Кэррола [4–6] подробно изложены приложения теории ОП в задачах теории вероятностей и

случайных процессов, линейном стохастическом оценивании, фильтрации, стохастических случайных уравнениях, обратных задачах геофизики и трансзвуковой газодинамики.

## 11. Избранные задачи

В заключение приведем несколько задач, решение которых по мнению автора было бы существенным для теории операторов преобразования.

**Задача 1.** В теории ОП есть своя теорема Ферма. Это задача о построении многомерных ОП, сплетающих стационарные операторы Шрёдингера и Лапласа  $T(\Delta - q(x)) = \Delta T$ . Есть оптимисты, верящие, что эта задача решена, при этом они обычно ссылаются на работу Л. Д. Фаддева [33]. Но чтение этой работы лучше начать с конца, где честно написано, что «... исследование должно быть проведено для того, чтобы сделать строгими формальные рассуждения этой главы. Имеющиеся в нашем распоряжении его варианты слишком громоздки для того, чтобы их можно было помещать в настоящем обзоре. Мы надеемся, что приведенная здесь формальная схема решения многомерной обратной задачи рассеяния может стать стимулом для некоторых читателей, которые разработают более адекватные аналитические модели для ее оправдания». Насколько мне известно, такой одаренный читатель пока, к сожалению, так и не появился. Думаю, что и в принципе перспектива построения таких ОП в обозримом виде представляется туманной. Ведь их ядра должны удовлетворять уже ультрагиперболическим уравнениям, методы исследований которых пока практически не разработаны. Думаю, что и множество решений уравнения Шрёдингера уж слишком разнородно и многообразно, чтобы его можно было описать по существу единой формулой по аналогии с уравнениями Штурма — Лиувилля.

Но самое обидное, что существование таких ОП доказано под именем волновых операторов для всех разумных потенциалов! Не удается только построить их в обозримом виде, например, как многомерные операторы Вольтерра.

**Задача 2.** Обобщить результаты М. М. Маламуда из § 3, заменив обычные производные степенями оператора Бесселя.

**Задача 3.** Исторически сложилось, что изучение ОП началось с операторов второго порядка. Построить теорию ОП для операторов

первого порядка, которая оказалась пропущена. Некоторые построения сделаны в [41] для ОП вида  $T(D - q) = DT$ .

**Задача 4.** Можно ли с помощью ОП вида  $T(D - \lambda) = DT$  сконструировать ОП вида  $T(D^2 - \lambda^2) = D^2T$ ? Тогда удалось бы построить, в частности, теорию ОП Векуа — Эрдейи — Лаундеса из более простых «кирпичиков». (Эта задача сложнее, чем кажется с первого взгляда. Возможно, для ее решения потребуется использование гиперкомплексных чисел).

**Задача 5.** Применить к оценкам ядер ОП обобщенные неравенства Коши — Буняковского — Шварца и Юнга, метод построения которых разработан автором в [336–350].

**Задача 6.** Обобщить построения теории ОП, заменив обычные производные их  $q$ -аналогами. Упомянутые выше операторы Данкля — это лишь первый небольшой шаг в данном направлении.

**Задача 7.** Изучить основные задачи для уравнения с дробным оператором Бесселя (52). Для этого изучить асимптотику и распределение нулей ядра резольвентного оператора (49)–(50).

### Благодарности

Автор выражает благодарность своему первому научному руководителю Валерию Вячеславовичу Катрахову, благодаря которому я начал заниматься теорией операторов преобразования и вообще математикой, Леониду Аркадьевичу Минину, подробные обсуждения с которым помогали и помогают мне глубже разбираться в различных математических задачах, Анатолию Георгиевичу Кусраеву за предложение написать этот обзор и огромное терпение, проявленное за время его подготовки, а также участникам в настоящем и прошлом Воронежского семинара по Анализу, теории функций и дифференциальным уравнениям, на заседаниях которого неоднократно докладывались и обсуждались результаты по теории операторов преобразования: А. В. Боровских, А. В. Лободе, В. В. Меньших, И. Я. Новикову, О. М. Пенкину, И. П. Половинкину, В. Л. Прядиеву, В. А. Родину, Н. Н. Удоденко. Автор благодарен Роберту Вэйну Кэрролу за полезные обсуждения и присланные монографии.

### Литература

1. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.—М.: Мир, 1989.—655 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М.: Наука, 1988.—552 с.

3. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра.—М.: Физматлит, 2007.—480 с.
4. Carroll R. Transmutation and Operator Differential Equations.—North Holland, 1979.—245 p.
5. Carroll R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions.—North Holland, 1982.—457 p.
6. Carroll R. Transmutation Theory and Applications.—North Holland, 1986.—351 p.
7. Gilbert R., Begehr H. Transformations, Transmutations and Kernel Functions. V. 1, 2.—Longman, Pitman, 1992.—399 p.; 268 p.
8. Trimeche Kh. Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators // Math. Rep.—1988.—V. 4, № 1.—P. 1–282.
9. Фарг Д. К., Нагнибида Н. И. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов.—Новосибирск: Наука, 1977.—280 с.
10. Gilbert R. Constructive Methods for Elliptic Equations.—Berlin: Springer, 1974.—397 p.—(Lecture Notes Math., № 365.)
11. Carroll R. W., Showalter R. E. Singular and Degenerate Cauchy problems.—New York: Acad. press, 1976.—333 p.
12. Colton D. Solution of Boundary Value Problems by the Method of Integral Operators.—London: Pitman press, 1976.
13. Colton D. Analytic Theory of Partial Differential Equations.—London: Pitman press, 1980.—239 p.
14. Gilbert R. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations.—New York: Acad. press, 1969.—311 p.
15. Carroll R. Topics in Soliton Theory.—North Holland, 1991.—428 p.
16. Antimirov M. Ya., Kolyshkin A. A., Vaillancourt R. Applied Integral Transforms.—Providence: Amer. Math. Soc., 1993.—265 p.
17. Lions J. L. Equations differentielles operationnelles et problèmes aux limites.—Berlin etc.: Springer, 1961.—292 p.
18. Trimeche Kh. Generalized Harmonic Analysis and Wavelet Packets (an Elementary Treatment of Theory and Applications).—Taylor & Francis, 2001.—320 p.
19. Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications // Pitman Research Notes in Math. Ser. 301.—New York, 1994.—402 p.
20. Edited by Connett W. C., Gebuhrer M.-O., Schwartz F. L. Applications of Hypergroups and Related Measure Algebras // AMS Contemporary Math.—1995.—№ 83.—P. 441.
21. Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния.—Харьков: изд-во ХГУ, 1960.—268 с.
22. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля.—Киев: Наукова Думка, 1972.—220 с.
23. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.—Киев: Наукова думка, 1977.—331 с.
24. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка.—М.: Гостехиздат, 1950.—159 с.
25. Левитан Б. М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения.—М.: ГИФМЛ, 1962.—324 с.
26. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига.—М.: Наука, 1973.—312 с.

27. Левитан Б. М. Почти-периодические функции.—М.: ГИТТЛ, 1953.—398 с.
28. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма — Лиувилля.—М.: Наука, 1984.—240 с.
29. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака.—М.: Наука, 1988.—432 с.
30. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи.—М.: Наука-Физматлит, 1997.—204 с.
31. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния.—М.: Мир, 1980.—408 с.
32. Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния-1 // Успехи мат. наук.—1959.—Т. 14, № 4.—С. 57–119.
33. Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния-2 // «Итоги науки и техники», «Современные проблемы математики. Т. 3».—1974.—С. 93–180.
34. Килбас А. А., Маричев О. И., Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
35. Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача теории рассеяния.—Киев: Наукова Думка, 1973.—183 с.
36. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики.—М.: Высшая школа, 1962.—712 с.
37. Положий Г. Н. Уравнения математической физики.—М.: Высшая школа, 1964.—560 с.
38. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969.—528 с.
39. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с.
40. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления.—2004.—№ 10.—С. 3–163.
41. Ситник С. М. Элементарная теория операторов преобразования. (Рукопись подготовлена к печати).—150 с.
42. Левитан Б. М., Повзнер А. Я. Дифференциальные уравнения Штурма — Лиувилля на полуоси и теорема Планшереля // Докл. АН СССР.—1946.—Т. 52, № 6.—С. 483–486.
43. Повзнер А. Я. О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси // Мат. сб.—1948.—Т. 23 (65), № 1.—С. 3–52.
44. Блох А. Ш. Об определении дифференциального оператора по его спектральной матрице-функции // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 92, № 2.—С. 209–212.
45. Левин Б. Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР.—1956.—Т. 106, № 2.—С. 187–190.
46. Соболев С. Л. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1992.—432 с.
47. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных.—М.: ИЛ, 1957.—444 с.
48. Комеч А. И. Практическое решение уравнений математической физики.—М.: МГУ, 1993.—155 с.
49. Copson E. T. On the Riemann–Green Function // Archive for Rational Mechanics and Analysis.—1957/58.—V. 1.—P. 324–348.

50. Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений.—Сер. Мат. Кибернетика.—М.: Знание, 1991.—47 с.
51. Волкодавов В. Ф., Лернер М. Е., Николаев Н. Я., Носов В. А. Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов.—Куйбышев: изд-во Куйбышев. гос. пед. инст., 1982.—56 с.
52. Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с некоторыми специальными функциями в ядрах и их приложения.—Самара: изд-во Самарский университет, 1992.—100 с.
53. Волкодавов В. Ф., Захаров В. Н. Таблицы функций Римана и Римана — Адамара для некоторых дифференциальных уравнений в  $n$ -мерных евклидовых пространствах.—Самара, 1994.—31 с.
54. Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н. Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в  $n$ -мерных евклидовых пространствах и их приложения.—Самара: изд-во Самарский университет, 1995.—76 с.
55. Волкодавов В. Ф., Захаров В. Н. Функции Римана для одного класса дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве и ее применения.—Самара: изд-во Самарский университет, 1996.—53 с.
56. Пулькин С. П. Некоторые краевые задачи... // Уч. зап. Куйбышевского пед. ин-та.—1958.—Вып. 21.—С. 3–54.
57. Лернер М. Е. Принципы максимума для уравнений гиперболического типа и новые свойства функции Римана.—Самара: Самарский государственный технический университет, 2001.—113 с.
58. Малышев Ю. В. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сложными функциями // Вестник Сам. ГТУ. Сер. Физ.-мат. науки.—2002.—Вып. 16.—С. 5–9.
59. Малышев Ю. В. Факторизация дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения и процессы управления.—2003.—№ 2.—С. 78–86
60. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.—Казань: Казанское мат. о-во, 2001.—226 с.
61. Аксёнов А. В. Метод построения функции Римана гиперболического уравнения второго порядка // В сб.: Тезисы докл. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посв. 100-летию со дня рождения ак. И. Н. Векуа.—Новосибирск: НГУ, 2007.—С. 47–48.
62. Аксёнов А. В. Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Докл. РАН.—1995.—Т. 342, № 2.—С. 151–153.
63. Кошечева О. А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в четырехмерном пространстве // В сб.: Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, «Лиманчик» (отв. ред. С. Б. Климентов).—Ростов-на-Дону, 2006.—С. 236–238.
64. Романовский Р. К. О матрицах Римана первого и второго рода // Мат. сб.—1985.—Т. 121, № 4.—С. 494–501.
65. Воробьёва Е. В., Романовский Р. К. Метод характеристик для гиперболических краевых задач на плоскости // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 3.—С. 531–540.
66. Энбом Е. А., Волкодавов В. Ф. Неклассическая задача для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка // Изв. вузов. Мат.—Казань, 2003.—Деп. в ВИНТИ 23.07.2003, № 1445-B2003.

67. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1981.—544 с.
68. Siersma J. Thesis.—Groningen, 1979.
69. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных.—М.: МГУ, 1991.—112 с.
70. Нейман-заде М. И., Шкаликов А. А. Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 5.—С. 723–733.
71. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 6.—С. 897–912.
72. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Формула следа для операторов Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки.—2001.—Т. 69, № 3.—С. 427–442.
73. Савчук А. М., Шкаликов А. А. О собственных значениях оператора Штурма — Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // Мат. заметки.—2006.—Т. 80, № 6.—С. 864–884.
74. Ширяев Е. А., Шкаликов А. А. Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы // Мат. заметки.—2007.—Т. 81, № 4.—С. 636–640.
75. Boumenir A., Vu Kim Tuan. Existence and construction of the transmutation operator // J. Math. Phys.—2004.—V. 45, № 7.—P. 2833–2843.
76. Гусейнов И. М. Об одном операторе преобразования // Мат. заметки.—1997.—Т. 62, № 2.—С. 206–215.
77. Гусейнов И. М., Набиев А. А., Пашаев Р. Т. Операторы преобразования и асимптотические формулы для собственных значений полиномиального пучка операторов Штурма — Лиувилля // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 3.—С. 554–566.
78. Векуа И. Н. О решениях уравнения  $\Delta u + \lambda^2 u$  // Сообщения Акад. Наук Груз. ССР.—1942.—Т. III, № 4.—С. 307–314.
79. Векуа И. Н. Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения // Сообщения АН ГССР.—1945.—Т. 6, № 3.—С. 177–183.
80. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений.—М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.—296 с.
81. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Наука, 1988.—512 с.
82. Erdelyi A. Some applications of fractional integration // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note D1–82–0286.—1963.—№ 316.—23 p.
83. Erdelyi A. An application of fractional integrals // J. Analyse Math.—1965.—V. 14.—P. 113–126.
84. Erdelyi A. On the Euler — Poisson — Darboux equation // J. Analyse Math.—1970.—V. 23.—P. 89–102.
85. Lowndes J. S. An application of some fractional integrals // Glasgow Math. J.—1979.—V. 20, № 1.—P. 35–41.
86. Lowndes J. S. On some generalizations of Riemann — Liouville and Weil fractional integrals and their applications // Glasgow Math. J.—1981.—V. 22, № 2.—P. 73–80.
87. Lowndes J. S. Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc.—1983.—V. 26, № 3.—P. 97–105.
88. Бергман С. Интегральные операторы в теории уравнений с частными производными.—М.: Мир, 1964.—309 с.

89. Bers L., Gelbart A. On a class of differential equations in mechanics of continua // Quart. of Appl. Math.—1943.—V. 5, № 1.—P. 168–188.
90. Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc.—1944.—V. 56.—P. 67–93.
91. Bers L. A remark on an applications of pseudo-analytic functions // Amer. J. Math.—1956.—V. 78, № 3.—P. 486–496.
92. Weinstein A. Discontinuous integrals and generalized theory of potential // Trans. Amer. Math. Soc.—1948.—V. 63, № 2.—P. 342–354.
93. Weinstein A. Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc.—1953.—V. 59.—P. 20–38.
94. Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного.—Киев: изд-во КГУ, 1965.—444 с.
95. Климентов С. Б. Классы Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов, Сев.-Кав. регион. Сер. Естеств. науки.—2003.—№ 3.—С. 6–10.
96. Климентов С. Б. Классы Смирнова обобщенных аналитических функций // Изв. вузов, Сев.-Кав. регион. Сер. Естеств. науки.—2005.—№ 1.—С. 13–17.
97. Климентов С. Б. Классы ВМО обобщенных аналитических функций // Владикавказ. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 1.—С. 27–39.
98. Климентов С. Б. Теорема двойственности для классов Харди обобщенных аналитических функций // В сб.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: Изд-во ВНИЦ РАН, 2006.—С. 63–73.
99. Ляховецкий Г. В., Ситник С. М. Операторы преобразования Векуа — Эрдейи — Лаундеса.—Владивосток, 1994.—24 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
100. Lyahovetskii G. V., Sitnik S. M. The Vekua — Erdelyi — Lowndes transmutations.—Владивосток, 1994.—14 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
101. Ситник С. М. Построение операторов преобразования Векуа — Эрдейи — Лаундеса // В сб.: Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа.—Новосибирск: НГУ, 2007.—С. 469–470.
102. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. 1.—М.: Наука, Гл. ред. ФМЛ, 1973.—296 с.
103. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. 2.—М.: Наука, Гл. ред. ФМЛ, 1966.—296 с.
104. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. 3.—М.: Наука, Гл. ред. ФМЛ, 1967.—299 с.
105. Andrews G. E., Askey R., Roy R. Special Functions.—Cambridge: Cambridge univ. press, 1999.—665 p.
106. Luke Y. L. Mathematical functions and their approximations.—Acad. press, 1975.—584 p.
107. Luke Y. L. The special functions and their approximations. V. 1.—Acad. press, 1969.—362 p.
108. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации.—М.: Мир, 1980.—610 с.
109. Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.—М.: Наука, 1979.—832 с.
110. Уиттекер Э., Ватсон Дж. Курс современного анализа. Ч. II. Трансцендентные функции.—М.: ГИФМЛ, 1963.—516 с.



111. <http://functions.wolfram.com>
112. <http://dlmf.nist.gov/> Digital Library of Mathematical Functions
113. Slater L. J. Generalized hypergeometric functions.—Cambridge, 1966.—285 p.
114. Dwork B. Generalized hypergeometric functions.—Oxford, 1990.—196 p.
115. Dwork B., Gerotto G., Sullivan F. G. Introduction to  $G$ -functions.—Princeton: Princeton univ. press, 1994.—335 p.
116. Bailey W. N. Generalized hypergeometric series.—Cambridge, 1964.—117 p.
117. Karlsson P. W., Srivastava H. M. Multiple Gaussian hypergeometric series.—New York: Halsted press, 1985.—425 p.
118. Appell P., Kampe de Fériet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite.—Paris: Gauthier-Villars, 1926.—441 p.
119. Exton H. Multiple Hypergeometric Functions and Applications.—New York: John Wiley and Sons.—1976.—310 p.
120. Kilbas A. A., Saigo M.  $H$ -transforms. Theory and applications. Chapman and Hall, CRC.—2004.—401 p.
121. Килбас А. А., Сайго М., Жук В. А. // Диф. уравнения.—1991.—Т. 27, № 9.—С. 1640–1642.
122. Delsarte J. Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations linéaires aux dérivées partielles du seconde ordre // C. R. Acad. Sci.—Paris, 1938.—V. 206.—P. 1780–1782.
123. Lions J. L. Opérateurs de Delsarte et problème mixte // Bull. Soc. Math. France.—1956.—№ 84.—P. 9–95.
124. Lions J. L. Quelques applications d'opérateurs de transmutations // Colloques Internat.—Nancy, 1956.—P. 125–142.
125. Delsarte J., Lions J. L. Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe // Comm. Math. Helv.—1957.—№ 32.—P. 113–128.
126. Delsarte J., Lions J. L. Moyennes généralisées // Comm. math. Helv.—1959.—№ 34.—P. 59–69.
127. Арнольд В. И. Математические эпидемии 20 века // Независимая газета.—2001.—№ 6.
128. Фарг М. К. Построение операторов преобразования и решение одной проблемы моментов для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, вып. 1 (73).—С. 240–245.
129. Фарг М. К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной // Докл. АН СССР.—1957.—Т. 112, № 5.—С. 1008–1011.
130. Фарг М. К. Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной // Докл. АН СССР.—1957.—Т. 115, № 5.—С. 874–877.
131. Фарг М. К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной // Тр. Моск. мат. о-ва.—1958.—Т. 7.—С. 227–268.
132. Фарг М. К. Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной // Тр. Моск. мат. о-ва.—1958.—Т. 8.—С. 3–48.
133. Сахнович Л. А. Спектральный анализ вольтерровских операторов и обратные задачи // Докл. АН СССР.—1957.—Т. 115, № 4.—С. 666–669.
134. Сахнович Л. А. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка  $n > 2$  с аналитическими коэффициентами // Мат. сб.—1958.—Т. 46, № 1.—С. 61–76.

135. Мацаев В. И. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 130, № 3.—С. 499–502.
136. Сахнович Л. А. Необходимые условия наличия операторов преобразования для уравнения четвертого порядка // Успехи мат. наук.—1961.—Т. 16, вып. 5.—С. 199–205.
137. Хачатрян И. Г. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Мат.—1978.—Т. 13, № 3.—С. 215–236.
138. Хачатрян И. Г. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющих асимптотику решений // Изв. АН Арм.ССР. Сер. Мат.—1979.—Т. 14, № 6.—С. 424–445.
139. Поляцкий В. Т. О свойствах решений некоторого уравнения // Успехи мат. наук.—1965.—Т. 17, № 4.—С. 119–124.
140. Маламуд М. М. Об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков // Мат. ан. и теория вероятн.—Киев: Наукова думка, 1978.—С. 108–111.
141. Маламуд М. М. Необходимые условия существования оператора преобразования для уравнений высших порядков // Функцион. ан. и его прил.—1982.—Т. 16, № 3.—С. 74–75.
142. Маламуд М. М. К вопросу об операторах преобразования.—Киев, 1984.—48 с.—(Преп. / ИМ АН УССР.)
143. Маламуд М. М. Операторы преобразования для уравнений высших порядков // Мат. физика и нелин. механика.—Киев: Наукова думка, 1986.—№ 6.—С. 108–111.
144. Маламуд М. М. К вопросу об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва.—1990.—Т. 53.—С. 69–97.
145. Morrey C. B. Multiple integrals in the calculus of variations.—Berlin etc.: Springer, 1966.—130 p.
146. Коробейник Ю. Ф. Операторы сдвига на числовых семействах.—Ростов-на-Дону: ИРУ, 1983.—155 с.
147. Коробейник Ю. Ф. О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных интегральных уравнений.—Ростов-на-Дону: изд-во ООО ЦВВР, 2005.—245 с.
148. Фетисов В. Г. Операторы и уравнения в локально ограниченных пространствах // В книге: Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах.—Владикавказ: Изд-во ВНИЦ РАН, 2006.—С. 7–142.
149. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
150. Пасенчук А. Э. Абстрактные сингулярные операторы.—Новочеркасск, 1993.
151. Фишман М. К. Мат. сб.—Т. 68 (110), № 1.—С. 73.
152. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР.—1950.—Т. 72, № 3.—С. 457–460.
153. Марченко В. А. Операторы преобразования // Докл. АН СССР.—1950.—Т. 74, № 2.—С. 185–188.
154. Марченко В. А. О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным оператором второго порядка // Докл. АН СССР.—1950.—Т. 74, № 4.—С. 657–660.
155. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных

- операторов второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва.—1952.—Т. 1.—С. 327–420.
156. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва.—1953.—Т. II.—С. 3–82.
157. Cheikh B. Relations between harmonic analysis associated with two differential operators of different orders // J. of Computational and Applied Math.—2003.—V. 153, № 1.—P. 61–71.
158. Jaffard K. Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets // Appl. and Computational Harmonic Anal.—1997.—V. 4, № 1.—P. 97–112.
159. Samoilenko A. M., Prykarpatsky Ya. A., Prykarpatsky A. K. The generalized de Rham — Hodge theory aspects of Delsarte — Darboux type transformations in multidimension // Central European J. of Math.—2005.—V. 3, № 3.—P. 529–557.
160. Golenia J., Samoilenko A. M., Prykarpatsky Ya. A., Prykarpatsky A. K. The general differential-geometric structure of multidimensional Delsarte transmutation operators in parametric functional spaces and their applications in soliton theory // arXiv: math-ph/0404016.—2004.—10 p.
161. Trimeche Kh. Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets // Applied and Computational Harmonic Analysis.—1997.—V. 4, № 1.—P. 97–112.
162. Kiryakova V. S. An explanation of Stokes phenomenon by the method of transmutations // Proc. Conf. Diff. Equations and Appl.—1982.—P. 349–353.
163. Carroll R., Boumenir A. Toward a general theory of transmutation // arXiv: funct-an/9501006.—1995.—19 p.
164. Юшкевич А. П. Леонард Эйлер.—М.: Знание, 1982.—64 с.
165. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1.—М.: ИЛ, 1949.—728 с.
166. Ситник С. М. Леонард Эйлер и теория специальных функций // В сб.: Материалы Межд. науч. конф. «Леонард Эйлер и современная наука».—СПб, 2007.—С. 192–200.
167. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах.—М.: Гостехтеоретиздат, 1954.—241 с.
168. Delsarte J. Sur une extension de la formule de Taylor // J. Math. pures et appl.—1938.—V. 17.—P. 217–230.
169. Delsarte J. Une extension nouvelle de la théorie de fonction presque périodiques de Bohr // Acta Math.—1939.—V. 69.—P. 259–317.
170. Delsarte J. Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation // Colloques Internat.—Nancy, 1956.—P. 29–44.
171. Левитан Б. М. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук.—1951.—Т. 6, вып. 2.—С. 102–143.
172. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. мат.—2007.—Т. 71, № 5.—С. 149–196.
173. Платонов С. С. Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближения функций в метрике  $L_2-1$  // Тр. ПетрГУ.—Сер. мат.—2000.—Вып. 7.—С. 70–82.
174. Платонов С. С. Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближения функций в метрике  $L_2-2$  // Тр. ПетрГУ.—Сер. мат.—2001.—Вып. 8.—С. 20–36.
175. Киприянов И. А. Преобразования Фурье — Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова.—1967.—Т. 89.—С. 130–213.

176. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.—М.: Мир, 1980.—664 с.
177. Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М., 1988.—С. 5–157.
178. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР.—1951.—Т. 77, № 1.—С. 181–183.
179. Ключанцев М. И. О построении  $r$ -четных решений сингулярных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.—1975.—Т. 224, № 5.—С. 1004–1007.
180. Ключанцев М. И. Интегралы дробного порядка и сингулярные краевые задачи // Диф. уравнения.—1976.—Т. 12, № 6.—С. 983–990.
181. Rodrigues J. Operational calculus for the generalized Bessel operator // SERDICA, Bulgaricae math. publicationes.—1989.—V. 15.—P. 179–186.
182. Dimovski I. H., Kiryakova V. S. Generalized Poisson transmutations and corresponding representations of hyper-Bessel functions // C. R. de l'Acad. bulgare des Sci.—1986.—Т. 39, № 10.—P. 29–32.
183. Kamoun L., Sifi M. Bessel — Struve intertwining operator and generalized Taylor series on the real line // Integral Transforms and Special Functions.—2005.—V. 16, № 1.—P. 39–55.
184. Ali I., Kiryakova V., Kalla S. L. Solutions of fractional multi-order integral and differential equations using a Poisson-type transform // J. of Math. Anal. and Appl.—2002.—V. 269, № 1.—P. 172–199.
185. Rachdi L. T. Fractional powers of Bessel operator and inversion formulas for Riemann — Liouville and Weyl transforms // J. of Math. Sciences.—2001.—V. 12, № 1.
186. Dimovski I. H., Kiryakova V. S. Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer  $G$ -functions // Proc. Conf. Complex Anal. and Appl.—Varna, 1983; Sofia, 1985.—P. 45–66.
187. Kiryakova V. S. Applications of the generalized Poisson transformation for solving hyper-Bessel differential equations (In Bulgarian) // Godishnik VUZ. Appl. Math.—1986.—V. 22, № 4.—P. 129–140.
188. Baccar C., Hamadi N. B., Rachdi L. T. Inversion formulas for Riemann — Liouville transform and its dual associated with singular partial differential operators // International J. of Math. and Math. Sciences.—2006.—P. 1–26.
189. Ярославцева В. Я. Об одном классе операторов преобразования и их приложении к дифференциальным уравнениям // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 227, № 4.—С. 816–819.
190. Ярославцева В. Я. Неоднородная граничная задача в полупространстве для одного класса сингулярных уравнений // Деп. ред. «Диф. уравнения».—Минск, 1989.—11 с.
191. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ.—М.: Мир, 1987.—736 с.
192. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations.—North Holland Math. Studies.—V. 204.—Elsevier, 2006.—523 p.
193. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии.—М.: Высшая Школа, 1995.—301 с.
194. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение.—Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000.—300 с.

195. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—273 с.
196. Псху А. В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка.—Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2005.—186 с.
197. Kiryakova V. All the special functions are fractional differintegrals of elementary functions // J. Physics A: Math. & General.—1997.—V. 30, № 14.—P. 5085–5103.
198. Ситник С. М. О некоторых обобщениях дробного интегродифференцирования // В сб.: Материалы международного симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики».—Нальчик-Эльбрус, 2003.—С. 86–87.
199. Ситник С. М. Дробное интегродифференцирование для дифференциального оператора Бесселя // В сб.: Материалы международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики».—Нальчик-Эльбрус, 2004.—С. 163–167.
200. Ситник С. М. Об обобщении формулы Хилле — Тамаркина для резольвенты на случай операторов дробного интегрирования Бесселя // В сб.: III Международная конференция: «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики».—Нальчик, 2006.—С. 269–270.
201. Ситник С. М. Операторы дробного интегродифференцирования для дифференциального оператора Бесселя // В сб.: Тр. IV Всероссийской научной конференции с международным участием: «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч. 3.—Самара, 2007.—С. 158–160.
202. Коновалова Д. С., Ситник С. М. Формула Тэйлора для операторов типа Бесселя // В сб.: Тезисы докладов Воронежской весенней математической школы «Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения — VII».—Воронеж, 1996.—С. 102.
203. Катрахов В. В., Катрахова А. А. Формула Тэйлора с оператором Бесселя для функций одной и двух переменных.—Воронеж, 1982.—23 с.
204. Sprinkhuizen-Kuyper I. G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator // J. Math. Anal. and Appl.—1979.—№ 72.—P. 674–702.
205. Репин О. А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов.—Самара: Изд-во Саратовского ун-та, 1992.—184 с.
206. Hille E., Tamarkin J. D. On the theory of linear integral equations // Ann. Math.—1930.—V. 31.—P. 479–528.
207. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.—М.: Наука, 1966.—672 с.
208. Кочубей А. Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Диф. уравнения.—1989.—Т. 25, № 8.—С. 1359–1369.
209. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // Диф. уравнения.—1990.—Т. 26, № 4.—С. 660–770.
210. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations // Math. Studies.—V. 204.—Elsever: Amsterdam, 2006.—540 p.
211. Kilbas A. A., Trujillo J. J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems. Part I // J. of Applicable Analysis.—2001.—V. 78, № 1–2.—P. 153–192.

212. Kilbas A. A., Trujillo J. J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems. Part II // J. of Applicable Analysis.—2001.—V. 81, № 2.—P. 435–493.
213. Глушак А. В. Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными // Мат. заметки.—2005.—Т. 77, № 1.—С. 28–41.
214. Килбас А. А., Репин О. А. Аналог задачи Бицадзе — Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 5.—С. 638–644.
215. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Некоторые локальные и нелокальные аналоги задачи Коши — Гурса для системы уравнений типа Бицадзе — Лыкова с инволютивной матрицей // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2002.—вып. 16.—С. 19–35.
216. Buschman R. G. An inversion integral for a general Legendre transformation // SIAM Review.—1963.—V. 5, № 3.—P. 232–233.
217. Buschman R. G. An inversion integral for a Legendre transformation // Amer. Math. Mon.—1962.—V. 69, № 4.—P. 288–289.
218. Erdelyi A. An integral equation involving Legendre functions // SIAM Review.—1964.—V. 12, № 1.—P. 15–30.
219. Erdelyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals // Glasgow Math. J.—1967.—V. 8, № 1.—P. 50–54.
220. Higgins T. P. A hypergeometric function transform // SIAM J.—1964.—V. 12, № 3.—P. 601–612.
221. Ta Li A new class of integral transform // Proc. AMS.—1960.—V. 11, № 2.—P. 290–298.
222. Ta Li A note on integral transform // Proc. AMS.—1961.—V. 12, № 6.—P. 556.
223. Love E. R. Some integral equations involving hypergeometric functions // Proc. Edinburgh Math. Soc.—1967.—V. 15, № 3.—P. 169–198.
224. Love E. R. Two more hypergeometric integral equations // Proc. Cambridge Phil. Soc.—1967.—V. 63, № 4.—P. 1055–1076.
225. Динь Хоанг Ань Интегральные уравнения с функцией Лежандра в ядрах в особых случаях // Докл. АН СССР.—1989.—Т.33, № 7.—С.591–594.
226. Ситник С. М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости.—Владивосток, 1990.—45 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
227. Ситник С. М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана — Эрдейи // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 320, № 6.—С.1326–1330.
228. Ситник С. М., Ляховецкий Г. В. Формулы композиций для операторов Бушмана — Эрдейи.—Владивосток, 1991.—11 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
229. Ситник С. М. Об одной паре операторов преобразования // В сб.: Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (ответственный редактор В. Н. Врагов).—Новосибирск, 1987.—С. 168–173.
230. Ludwig D. The Radon transform on Euclidean space // Math. Meth. in the Appl. Sci.—1980 (2).—V 19.—P. 108–109.
231. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.—280 с.
232. Deans S. R. The Radon Transform and Some of Its Applications.—New—York: Dover, 1990.—304 p.

233. Катрахов В. В. Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 251, № 5.—С. 1048–1051.
234. Катрахов В. В. Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 259, № 5.—С. 1041–1045.
235. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций.—Минск: Наука и техника, 1978.—312 с.
236. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Вычисление интегралов и преобразование Меллина // Итоги науки и техники, Математический анализ.—М., 1989.—Т. 27.—С. 3–146.
237. Kober H. On a Theorem of Schur and On Fractional Integrals of Purely Imaginary Order // Trans. Amer. Math. Soc.—1941.—V. 50, № 1.—P. 160–174.
238. Virchenko N., Fedotova I. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications.—World Scientific, 2001.—220 p.
239. Virchenko N. On Some Generalized Symmetric Integral Operators of Buschman — Erdelyi's Type // Nonlinear Math. Physics.—1996.—V. 3, № 3Ц-4.—P. 421–Ц425.
240. Вирченко Н. А. О некоторых приложениях обобщенных ассоциированных функций Лежандра // Укр. мат. журн.—1987.—Т. 39, № 2.—С. 149–156.
241. Karp D., Savenkova A., Sitnik S. M. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions // J. of Computational and Applied Math.—2007.—V. 207, № 2.—P. 331–337.
242. Karp D., Sitnik S. M. Asymptotic approximations for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity // J. of Computational and Applied Math.—2007.—V. 205.—P. 186–206.
243. Karp D., Sitnik S. M. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function // Arxiv: math. CA/0703084.—2007.—14 p.
244. Karp D., Sitnik S. M. Two-sided inequalities for generalized hypergeometric function // RGMIA Research Report Collection.—2007.—10(2).—Article 7.—14 p.
245. Karp D., Sitnik S. M. Asymptotic approximations for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity // Arxiv: math. CA/0604026.—2006.—20 p.
246. Karp D., Savenkova A., Sitnik S. M. Series expansions and asymptotics for incomplete elliptic integrals via partial fraction decompositions // Proceedings of the fifth annual conference of the Society for special functions and their applications (SSFA).—2004.—Lucknow (India).—P. 4–30.
247. Ситник С. М. Неравенства для функций Бесселя // Докл. АН СССР.—1995.—Т. 340, № 1.—С. 29–32.
248. Волович В. В., Минин Л. А., Мордвинов В. В., Ситник С. М. Формула Обрешкова и ее применение в теории аппроксимаций Паде.—Владивосток, 1994.—20 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
249. Минин Л. А., Ситник С. М. Аппроксимации Паде элементарных и специальных функций.—Владивосток, 1991.—22 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
250. Ситник С. М. Неравенства для полных эллиптических интегралов Лежандра.—Владивосток, 1994.—17 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
251. Ситник С. М. Неравенства для остаточного члена ряда Тэйлора экспоненциальной функции.—Владивосток, 1994.—30 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
252. Ситник С. М. Краевая задача с интегральными граничными условиями для одного класса уравнений с сильным вырождением // В сб.: Материалы XXI Всесоюзной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика.—Новосибирск, 1983.—С. 55–58.

253. Катрахов В. В., Ситник С. М. Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 278, № 4.—С. 797–799.
254. Ситник С. М. Об унитарных операторах преобразования.—Воронеж: Воронежский университет, 1986.—9 с.—Деп. в ВИНТИ 13.11.1986, № 7770–В86.
255. Ситник С. М. Операторы преобразования для дифференциального выражения Бесселя.—Воронеж: Воронежский ун-т, 1987.—28 с.—Деп. в ВИНТИ 23.01.1987, № 535–В87.
256. Ситник С. М.  $L_2$ -теория операторов преобразования и ее приложения к эллиптическим уравнениям // В сб.: 10-е Чехословацко-Советское совещание: Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики.—1988.—Стара Тура, Чехословакия.—С. 46.
257. Ситник С. М., Фадеев С. А. Об одной паре операторов преобразования.—Воронеж: Воронежский политехнический ин-т, 1988.—Деп. в ВИНТИ 13.07.1988, № 5629–В88.
258. Ситник С. М. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи в функциональных пространствах // В сб.: «Линейные операторы в функциональных пространствах». Тезисы докладов Северо-Кавказской региональной конференции.—1989.—Грозный.—С. 150.
259. Ситник С. М. Операторы Бушмана — Эрдейи // В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции. Международная научная конференция.—1992.—Самара.—С. 233–234.
260. Sitnik S. M. On unitary transmutations for the Bessel operator // В сб.: Международный семинар Day on diffraction 2004.—СПб, 2004.—С. 71.
261. Opic B., Kufner A. Hardy-Type Inequalities.—Longman, 1990.—362 с.
262. Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The Hardy Inequality.—Pilsen, 2007.—162 p.
263. Волк В. Я. О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при  $x = 0$  // Успехи мат. наук.—1953.—Т. 111, вып. 4 (56).—С. 141–151.
264. Сохин А. С. Об одном классе операторов преобразования // Тр. физ.-тех. ин-та низких температур АН УССР.—1969.—вып. 1.—С. 117–125.
265. Сташевская В. В. Метод операторов преобразования // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 113, № 3.
266. Сташевская В. В. Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле // Уч. зап. Харьковского мат. о-ва.—1957.—№ 5.—С. 49–86.
267. Ахиезер Н. И. К теории спаренных интегральных уравнений // Уч. зап. Харьковского гос. ун-та.—1957.—Т. 80.—С. 5–21.
268. Chebli H. Opérateurs de translation généralisés et semigroupes de convolution // Springer Lect. Notes.—1974.—№ 404.—P. 35–59.
269. Chebli H. Sur un théorème de Paley — Winer associé à la décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm — Liouville sur  $(0, \infty)$  // J. Funct. Anal.—1974.—№ 17.—P. 447–461.
270. Chebli H. Positivité des opérateurs de «translation généralisés» associé à un opérateur de Sturm — Liouville et quelques applications à l'analyse harmonique.—Strasbourg: These, 1974.
271. Chebli H. Théorème de Paley — Winer associé à un opérateur différentiel singulier sur  $(0, \infty)$  // J. Math. Pures Appl.—1979.—№ 58.—P. 1–19.



272. Trimeche K. Transformation intégrale de Weil et théorème de Paley — Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur  $(0, \infty)$  // J. Math. Pures Appl.—1981.—№ 60.—P. 51–98.
273. Trimeche K. Transformation intégrale de Riemann — Liouville généralisées et convergence des séries de Taylor généralisées au sens de Delsarte // Rev. Fac. Sci. Tunis.—1981.—№ 1.—P. 7–14.
274. Bloom R., Xu Z. Fourier multipliers for  $L_p$  on Chebli — Trimeche hypergroups // Proc. of the London Math. Society.—2000.—V. 80.—P. 643–664.
275. Kamel J., Yacoub C. Huygens' principle and equipartition of energy for the modified wave equation associated to a generalized radial Laplacian // Annales mathématiques Blaise Pascal.—2005.—№ 12.—P. 147–160.
276. Mourou M., Trimeche K. Opérateurs de transmutation et théorème de Paley — Wiener associés à un opérateur aux dérivées et différences sur  $\mathbb{R}$ . // C. R. de l'Acad. des Sci. Ser. I — Math.—2001.—V. 332, I. 5.—P. 397–400.
277. Boumenir A., Nashed M. Z. Paley — Wiener type theorems by transmutations // J. of Fourier Analysis and Applications.—2001.—V. 7.—№ 4.—P. 395–417.
278. Mahmoud N. H. Partial Differential Equations with Matricial Coefficients and Generalized Translation Operators // Transactions of the American Math. Society.—2000.—V. 352.—№ 8.—P. 3687–3706.
279. Chebli H., Fitouhi A., Hamza M. M. Expansion in series of Bessel functions for perturbed Bessel operators // J. Math. Anal. Appl.—1994.—V. 181.—P. 789–802.
280. Fahem N. H. Théorème de Paley — Wiener associé à un opérateur différentiel singulier à coefficients matriciels // C. R. Acad. Sci. Paris.—1985.—V. 301.—P. 821–823.
281. Mahmoud N. H. Differential operators with matrix coefficients and transmutations // Contemporary Math.—1995.—V. 183.—P. 261–268.
282. Ситник С. М. Оператор преобразования и представление Йоста для уравнения с сингулярным потенциалом.—Владивосток, 1993.—21 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
283. Катрахов В. В., Ситник С. М. Оценки решений Йоста одномерного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР.—1995.—Т. 340, № 1.—С. 18–20.
284. Sitnik S. M. Explicit solutions to a singular differential equation with Bessel operator // Days on diffraction 2007. International conference. Abstracts.—Saint Petersburg, 2007.—P. 78.
285. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния.—М.: Мир, 1980.—408 с.
286. Боровских А. В. Формула распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Диф. уравнения.—2002.—Т. 38, № 6.—С. 758–767.
287. Боровских А. В. Метод распространяющихся волн // Труды семинара имени И. Г. Петровского.—2004.—вып. 24.—С. 3–43.
288. Ким Хе Ен. Продолжение решений систем дифференциальных уравнений в частных производных // Вест. МГУ. Сер. Мат., Механика.—1991.—№ 2.—С. 75–78.
289. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод факторизации в теории операторов преобразования // В сб.: (Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова). Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа (ответственный редактор В. Н. Врагов).—1990, Новосибирск.—С. 104–122.
290. Катрахов В. В., Ситник С. М. Композиционный метод построения  $B$ -

- эллиптических,  $B$ -гиперболических и  $B$ -параболических операторов преобразования // Докл. АН СССР.—1994.—Т. 337, № 3.—С. 307–311.
291. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.—М.—Л.: ГИТТЛ, 1948.—480 с.
  292. Ozaktas H., Zalevsky Z., Kutay M. The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing.—New-York: Wiley, 2001.—513 p.
  293. Абжандадзе З. Л., Осипов В. Ф. Преобразование Фурье — Френеля и некоторые его приложения.—СПб: изд-во С.-П. У., 2000.—224 с.
  294. Осипов В. Ф. Почти периодические функции Бора — Френеля.—СПб: изд-во С.-П. У., 1992.—312 с.
  295. Карп Д. Б., Ситник С. М. Дробное преобразование Ханкеля и его приложения в математической физике.—Владивосток, 1994.—24 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
  296. Matveev V.B. Intertwining relations between the Fourier transform and discrete Fourier transform, the related functional identities and beyond // Inverse Problems.—2001.—V. 17.—P. 633–657.
  297. Абловиц А., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.—М.: Мир, 1979.—479 с.
  298. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи.—М.: Наука, 1980.—319 с.
  299. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.—М.: Мир, 1987.—311 с.
  300. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния для автоморфных функций.—М.: Мир, 1979.—330 с.
  301. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния.—М.: Мир, 1971.—312 с.
  302. Рамм А. Г. Многомерные обратные задачи теории рассеяния.—М.: Мир, 1994.—494 с.
  303. Carroll R. W. Topics in Soliton Theory.—North-Holland: Math. Studies, 167.—1991.—428 p.
  304. Журавлёв В. М. Нелинейные волны. Точно решаемые задачи.—Ульяновск, 2001.—212 с.
  305. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике.—М.: Мир, 1989.—326 с.
  306. Марченко В. А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры.—Киев: Наукова Думка, 1986.—152 с.
  307. Катрахов В. В. Об одной сингулярной краевой задаче для уравнения Пуассона / Мат. сб.—1991.—Т. 182, № 6.—С. 849–876.
  308. Киприянов И. А., Катрахов В. В. Об одной сингулярной эллиптической краевой задаче в областях на сфере.—Владивосток, 1989.—10 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
  309. Киприянов И. А., Катрахов В. В. Сингулярные краевые задачи для некоторых эллиптических уравнений высших порядков.—Владивосток, 1989.—26 с.—(Преп. / ИАПУ ДВО РАН.)
  310. Катрахов В. В. Сингулярные краевые задачи для некоторых эллиптических уравнений в областях с угловыми точками // Докл. АН СССР.—1991.—С. 1047–1050.
  311. Киприянов И. А., Катрахов В. В. Об одной краевой задаче для эллиптических уравнений второго порядка в областях на сфере // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 313, № 3.—С. 545–548.
  312. Киприянов И. А., Катрахов В. В. Об одном классе многомерных сингулярных

- псевдодифференциальных операторов // Мат. сб.—1977.—Т. 104, № 1.—С. 49–68.
313. Ландис Е. М. Задачи Е. М. Ландиса // Успехи мат. наук.—1982.—Т. 37, № 6.—С. 278–281.
314. Ситник С. М. О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений // Диф. уравнения.—1988.—Т. 24, № 3.—С. 538–539.
315. Ситник С. М. О скорости убывания решений стационарного уравнения Шрёдингера с потенциалом, зависящим от одной переменной // В сб.: Неклассические уравнения математической физики (отв. ред. В. Н. Врагов).—Новосибирск, 1985.—С. 139–147.
316. Ситник С. М. О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений.—Воронеж: Воронежский университет, 1986.—19 с.—Деп. в ВИНТИ 13.11.1986, № 7771—В 86.
317. Мешков В. З. Весовые дифференциальные неравенства и их применение для оценок скорости убывания на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова.—1989.—№ 190.—С. 139–158.
318. Мешков В. З. О возможной скорости убывания на бесконечности решений уравнений в частных производных второго порядка // Мат. сб.—1991.—Т. 182, № 3.—С. 364Ц–383.
319. Успенский С. В. О теоремах вложения для весовых классов // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова.—1961.—№ 60.—С. 282–303.
320. Лизоркин П. И. Классы функций, построенные на основе усреднений по сферам. Случай пространств Соболева // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова.—1990.—№ 192.—С. 122–139.
321. Лейзин М. А. К теоремам вложения для одного класса сингулярных дифференциальных операторов в полупространстве // Диф. уравнения.—1976.—Т. 12, № 6.—С. 1073–1083.
322. Лейзин М. А. О вложении некоторых весовых классов // В сб.: Методы решений операторных уравнений.—Воронеж: изд-во ВГУ, 1978.—С. 96–103.
323. Dunkl Ch. Differential-difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc.—1989.—V. 311.—P. 167–183.
324. Dunkl Ch. Intertwining operators associated to the group  $S_3$  // Trans. Amer. Math. Soc.—1995.—V. 347.—P. 3347–3374.
325. Dunkl Ch. An Intertwining Operator for the Group  $B_2$  // arXiv: math. CA/ 0607823.—2006.—27 p.
326. Gallardo L., Trimeche Kh. Un analogue d'un theoreme de Hardy pour la transformation de Dunkl // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.—2002.—V. 334.—P. 849Ц–854.
327. Gallardo L., Trimeche Kh. A version of Hardy's theorem for the Dunkl transform // J. Aust. Math. Soc.—2004.—V. 77.—P. 371–385.
328. Chouchene F. Harmonic analysis associated with the Jacobi — Dunkl operator // J. of Computational and Appl. Math.—2005.—V. 178, I. 1–2.—P. 75–89.
329. Mourou M. Taylor series associated with a differential-difference operator on the real line // J. of Computational and Appl. Math.—2003.—V. 153, № 1/2.—P. 343–354.
330. Dimovski I., Hristov V., Sifi M. Commutants of the Dunkl operators in  $C(R)$  // Fractional Calculus and Applied Analysis.—2006.—V. 9, № 3.—P. 195–213.

331. Rösler M. Positivity of Dunkl's intertwining operator // *Duke Math. J.*—1999.—V. 98.—P. 445–463.
332. Rösler M. Dunkl operators: theory and applications. *Orthogonal Polynomials and Special Functions* (Leuven 2002), (E. Koelink and W. Van Assche, eds.), LNM 1817 // Springer.—Berlin–Heidelberg–New York, 2003.—P. 93–135.
333. Trimeche Kh. Inversion of the Dunkl intertwining operator and its dual using Dunkl wavelets // *Rocky Mountain J. Of Math.*—2002.—V. 32, № 2.—P. 889–895.
334. Лянце В. Э. Несамосопряженный разностный оператор // *Докл. АН СССР.*—1967.—Т. 173, № 6.—С. 1260–1263.
335. Ханмамедов Аг. Х. Операторы преобразования для возмущенного разностного уравнения Хилла и их одно приложение // *Сиб. мат. журн.*—2003.—Т. 44, № 4.—С. 926–937.
336. Sitnik S. M. Refinements of the Bunyakovskii — Schwartz inequalities with applications to special functions estimates // *Conference in Math. Analysis and Applications in Honour of Lars Inge Hedberg's 60 th Birthday*. Linköping University, Sweden, 1996.—P. 97.
337. Ситник С. М. Уточнение интегрального неравенства Коши — Буняковского // *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки.*—2000.—№ 9.—С. 37–45.
338. Ситник С. М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши — Буняковского // *Вестник Самарской гос. эк. академии.*—2002.—№ 1 (8).—С. 302–313.
339. Ситник С. М. Обобщения неравенства Коши — Буняковского в пространствах с индефинитной метрикой // В сб.: *Материалы шестой Казанской международной летней школы-конференции. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского.*—Казань, 2003.—Т. 19.—С. 202–203.
340. Ситник С. М. Об уточнениях интегрального неравенства Коши — Буняковского // В сб.: *Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы, посвященной памяти выдающихся профессоров МГУ Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова.*—Саратов, 2002.—С. 191–192.
341. Ситник С. М. Обобщения неравенств Коши — Буняковского и их приложения // В сб.: *Abstracts of Bunyakovsky International Conference.*—Киев, 2004.—С. 119–120.
342. Ситник С. М. Метод получения последовательных уточнений неравенства Коши — Буняковского и его применения к оценкам специальных функций // В сб.: *Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения-VII».*—Воронеж, 1996.—С. 164.
343. Ситник С. М. Уточнения интегрального неравенства Коши — Буняковского и их приложения к дифференциальным уравнениям // В сб.: *Межд. конф. «Диф. уравнения и смежные вопросы», посв. памяти И. Г. Петровского. Тезисы докладов.*—М.: МГУ, 2004.—С. 210.
344. Ситник С. М. Обобщения неравенств Коши — Буняковского методом средних значений и их приложения // *Черноземный альманах научных исследований. Сер. Фундаментальная мат.*—2005.—№ 1 (1).—С. 3–42.
345. Дикарева Е. В., Телкова С. А., Ситник С. М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши — Буняковского в математическом анализе // *Вестник*

- Воронежского Института МВД России.—Воронеж, 2005.—№ 5 (24).—С. 65–69.
346. Дикарева Е. В., Телкова С. А., Ситник С. М. Средние значения и уточнения неравенств // Вестник Воронежского ин-та МВД России.—Воронеж, 2005.—№ 5 (24).—С. 57–62.
347. Ситник В. С., Ситник С. М. Исторические аспекты доказательства и обобщений некоторых неравенств // В сб.: «Современные методы теории краевых задач». Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения-XVI».—Воронеж, 2006.—С. 170–171.
348. Ситник С. М. О некоторых обобщениях неравенства Коши — Буняковского // В сб.: Международная конференция «Анализ и особенности», посвященная 70-летию В. И. Арнольда. Тезисы докладов.—М.: МИАН, 2007.—С. 92–94.
349. Ситник С. М. Обобщения неравенства Коши — Буняковского с использованием средних // В сб.: Межд. конф. «Диф. уравнения и смежные вопросы», посв. памяти И. Г. Петровского. Тезисы докладов.—М.: МГУ, 2007.—С. 297–298.
350. Ситник С. М., Анциферова Г. А. Некоторые обобщения неравенства Юнга // Вестник Воронежского ин-та МВД России.—Воронеж, 1999.—№ 2 (4).—С. 161–164.
351. Ситник С. М. Сколько неравенств заключено в неравенстве Юнга? Актуальные проблемы обучения математике // Тр. Всероссийской научно-практической конф.—Орел: Изд-во Орловского гос. ун-та, 2007.—С. 464–469.

Ситник Сергей Михайлович

Воронеж, Воронежский институт МВД России

E-mail: mathsms@yandex.ru

## НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ВНУТРЕННЕЙ СУПЕРПОЗИЦИИ

**В. Г. Фетисов**

Рассматриваются нелинейные операторные уравнения, содержащие внутреннюю суперпозицию, в локально ограниченных пространствах измеримых вектор-функций.

### **Введение**

При решении задач идентификации в широком смысле [1, 2] априорная информация либо незначительна, либо отсутствует вообще. Следует также отметить, что к настоящему времени качественная теория идентификации все еще далека от сколь-нибудь полного решения (последнее особенно относится к процессам, описываемым нелинейными интегральными уравнениями и их системами, содержащими атомические операторы, представляющие собой композицию оператора Немыцкого и оператора сдвига).

Открытость и глубина проблематики нелинейных интегральных моделей наталкивают на мысль об использовании техники доминированных операторов при решении целой серии задач качественной теории оценивания состояния объекта.

Традиционно рассматриваемые операторы в нелинейных интегральных системах (например, операторы А. Гаммерштейна, П. С. Урысона, интегростепенные ряды В. Вольтерра — А. Пикара, операторы А. А. Ланнэ, В. А. Парасочкина и др.) укладываются в общую схему  $H$ -операторов, допускающих доминирование [3]. В основе последних соображений лежит известный принцип мажорирования [4], восходящий еще к Л. О. Коши. А именно, если изучаемый оператор  $A$  (уравнение или система) мажорируется другим оператором  $B$ , то «хорошие» свойства последнего ( $B$ ) обеспечат требуемые нам свойства исходного оператора ( $A$ ) в рассматриваемых  $B$ -пространствах.

В качестве конкретных двух примеров приведем:

1. Часто встречающуюся в задачах теории теплообмена излучением, в нелинейной преобразовательной технике и других областях следующую *слабо связанную* (термин наш) систему операторных уравнений, имеющую вид:

$$x_k(t) = \lambda_k [A_k x_k(t) + B_k \vec{x}(t)], \quad k = \overline{1, n}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R},$$

где  $t \in [0, T]$ ,  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  — вектор переменных состояния;  $A_k$  — нелинейный интегральный оператор Гаммерштейна, действующий на компоненту  $x_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;  $B_k$  — композиция функционального полилинейного и сингулярного интегрального операторов, действующая на вектор-функцию  $\vec{x}(t)$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  — вещественные параметры.

2. Функционально-интегральное нелинейное уравнение Урысона, имеющее вид:

$$\int_{T_1} K(s, t, \vec{u}(t)) dt + \vec{w}(s) = \Phi(s, \vec{u}(s)), \quad s \in T_2,$$

где  $T_k$ ,  $k = 1, 2$ , — измеримые пространства с конечной неатомической мерой,  $\vec{u}(s)$  — искомое решение,  $\vec{w}(s)$  и  $\Phi(s, \vec{u}(s))$  — известные вектор-функции (см. также монографию [5], содержащую ряд других примеров).

Цель данной работы — рассмотреть некоторые нелинейные уравнения, определяемые атомическими операторами [6] и содержащие оператор внутренней суперпозиции в локально ограниченных пространствах измеримых вектор-функций.

## 1. Вспомогательные сведения и результаты

Пусть  $\Omega$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  с лебеговской мерой  $\mu$ .

Напомним основополагающую теорему Н. Н. Лузина, используя ее редакцию в монографии [7].

Пусть  $B$  — борелевское подмножество в  $\mathbb{R}^p$ . Отображение  $f : \Omega \times B \rightarrow \mathbb{R}$  называется *нормальным интегрантом*, если:

для почти всех значений  $s \in \Omega$  функция  $f(s, \cdot)$  полунепрерывна снизу на множестве  $B$ ;

существует борелевская функция  $\varphi : \Omega \times B \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $\varphi(s, \cdot) = f(s, \cdot)$  для почти всех значений  $s \in \Omega$ .

**Теорема Н. Н. Лузина («равномерная» по второму переменному).** Пусть  $B$  — борелевское подмножество в  $\mathbb{R}^p$ . Для того, чтобы функция  $f : \Omega \times B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  была нормальным интегрантом, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта  $K \subset \Omega$  и любого  $\varepsilon > 0$  существовал компакт  $K_\varepsilon \subset K$  такой, что  $\mu(K \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$  и ограничение  $f$  на  $K_\varepsilon \times B$  полунепрерывно снизу на  $K_\varepsilon \times B$ .

Отображение  $f : \Omega \times B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  называется *каратеодориевой функцией* (кратко *K-функцией*), если:

$f(s, \cdot)$  для почти всех  $s \in \Omega$  есть непрерывная функция на  $B$ ;

$f(s, x)$  для всех  $x \in B$  измерима на  $\Omega$ .

**Теорема Скорца — Драгои (критерий K-функции).** Отображение  $f : \Omega \times B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  есть K-функция тогда и только тогда, когда: для любого компакта  $K \subset \Omega$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует компакт  $K_\varepsilon \subset K$ , где  $\mu(K \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ , и ограничение (сужение)  $f$  на  $K_\varepsilon \times B$  непрерывно на  $K_\varepsilon \times B$ .

Нормальный интегрант  $f : \Omega \times B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  для любой измеримой функции  $x(s)$  является измеримой функцией (в том числе,  $N_f$  — суперпозиция  $f(s, x(s))$ ) (так называемый *оператор Немыцкого*) есть измеримая функция).

Пусть оператор  $A_g : S(X_1) \rightarrow S(X_2)$ , где  $S(X_k)$ ,  $k = 1, 2$ , пространство измеримых вектор-функций  $\vec{x}(s_k)$  с метрикой, индуцированной сходимостью по мере  $\mu_k$  на пространстве  $X_k = X_k(\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$ . Оператор  $A_g$  называется оператором *внутренней суперпозиции*, если:

$$(A_g \vec{x})(s_2) := \vec{x}(g(s_2)),$$

где  $g : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$  есть  $(\Sigma_2, \Sigma_1)$ -измеримая функция.

Назовем композицию оператора Немыцкого  $N_f$  и оператора внутренней суперпозиции  $A_g$ , т. е. оператор, определяемый формулой

$$(A \vec{x})(s) := N_f(A_g(\vec{x}(s))) = f(s, \vec{x}(g(s))),$$

*атомическим оператором.*

Оператор внутренней суперпозиции  $A_g$  есть или *простой*, или *взвешенный сдвиг* в измеримом пространстве  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ .

Атомический нелинейный интегральный оператор Урысона

$$(A \vec{x})(s_2) := \int_{\Omega_1} K(s_2, s_1, \vec{x}(g(s_1))) d\mu(s_1),$$



где  $s_2 \in \Omega_2$ , является композицией вида  $A = I \circ K_0$  двух операторов: линейного интегрального  $(I\vec{v})(s_2) := \int_{\Omega_1} \vec{v}(s_2, s_1) d\mu(s_1)$  и нелинейного функционального, имеющего вид:

$$(K_0 \vec{u})(s_2, s_1) := K(s_2, s_1, \vec{u}(g(s_1))).$$

## 2. Положительное решение функционально-интегрального уравнения Урысона с атомическим оператором, содержащим оператор внутренней суперпозиции

В этом параграфе нами рассматривается вопрос о существовании положительного решения нелинейного функционально-интегрального уравнения Урысона, имеющего вид:

$$\lambda \int_{\Omega_1} K(s, t, \vec{x}(g(t))) d\mu(t) + \vec{w}(s) = \Phi(s, \vec{x}(g(s))), \quad s \in \Omega_2.$$

Здесь  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ , — компакты в конечномерных пространствах,  $\vec{x}(s)$  — искомое решение,  $\vec{w}(s)$  и  $\Phi(s, \vec{x}(g(s)))$  — известные функции,  $\lambda$  — вещественный параметр.

Будем предполагать, что вектор-функция  $\Phi(s, \vec{x})$  удовлетворяет условиям Каратеодори и является возрастающей функцией по  $\vec{x}$  при каждом фиксированном значении  $s \in \Omega_2$  и, кроме того,  $\Phi(s, \vec{\Theta}) = \vec{\Theta}$ , что, впрочем, не ограничивает решение вопроса. Пусть ядро  $K$  оператора Урысона  $(A\vec{x})(s) := \int_{\Omega_1} K(s, t, \vec{x}(g(t))) d\mu(t)$  является возрастающей каратеодориевой непрерывной функцией по  $\vec{x}$  при почти всех значениях  $(s, t) \in \Omega_2 \times \Omega_1$ , и, аналогично,  $K(s, t, \vec{\Theta}) = \vec{\Theta}$ . Решение ищется в правильном локально ограниченном пространстве измеримых вектор-функций  $E(X)$ .

Как известно [5], через  $E(X)$  обозначается локально ограниченное пространство (кратко ЛОП) всех измеримых вектор-функций  $\vec{x} : \Omega \rightarrow X$ , где  $\|\vec{x}\|_{E(X)} = \|\|\vec{x}\|_X\|_E < +\infty$ . Так, в ЛОП Лебега — Бохнера  $L^p(X)$   $F$ -норма определяется формулой вида

$$\|\vec{x}; L^p(X)\| = \left( \int_T \|\vec{x}(s)\|_X^p d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (0 < p < \infty).$$

Соответственно, назовем ЛОП  $E(X)$  пространством типа  $L(X)$ , если:

- (а) индикатор  $\chi_T(s)$  принадлежит  $E(X)$ ;
- (б)  $E(X)$  обладает абсолютно непрерывной  $F$ -нормой;
- (с) в  $E(X)$  существует аддитивная форма.

Так, например, ЛОП  $L^p(X)$  ( $0 < p < \infty$ ) является пространством типа  $L(X)$ .

**Теорема.** Пусть  $\vec{w}(s) > 0$  при каждом  $s \in \Omega_2$ ,  $\vec{w}(s) \in E_2(X_2)$ ,  $\lambda > 0$ , и существует вектор-функция  $\vec{u}_0(s) \in E_2(X_2)$  такая, что  $\Phi(s, \vec{u}_0(g(s))) \in E_2(X_2)$ , причем  $(A\vec{u}_0)(s) \in E_2(X_2)$  и  $\Phi(s, \vec{u}_0(g(s))) \geq \vec{w}(s) + \lambda(A\vec{u}_0)(s)$ . Тогда исходное функционально-интегральное уравнение Урысона имеет по крайней мере одно положительное решение  $\vec{x}^*(s)$ , причем  $\vec{x}^*(s) \leq \vec{u}_0(s)$ .

◁ Рассмотрим вектор-функцию  $\vec{x}_0(s) = \vec{\Theta}(s)$ . Так как  $\Phi(s, \vec{x})$  — возрастающая и непрерывная по  $\vec{x}$  функция, то существует единственная измеримая функция  $\vec{x}_1(s) \geq \vec{\Theta}$  такая, что

$$\Phi(s, \vec{x}_1(g(s))) = \lambda(A\vec{x}_0)(s) + \vec{w}(s) = \vec{w}(s),$$

где  $\vec{x}_1(s) = \Phi^{-1}(s, \vec{w}(s))$ . Кроме того, из оценки  $\Phi(s, \vec{x}_1(g(s))) = \vec{w}(s) \leq \vec{w}(s) + \lambda(A\vec{x}_1)(s) \leq \Phi(s, \vec{u}_0(g(s)))$  (согласно условию теоремы) вытекает, что  $\vec{x}_1(s) \leq \vec{u}_0(s)$ , т. е. функция  $\vec{x}_1(s) \in E_2(X_2)$ .

Теперь достаточно построить последовательность  $\{\vec{x}_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$  итераций, сходящуюся в  $E_2(X_2)$  к точному решению  $\vec{x}^*(s)$  (если оно существует).

Если  $i$ -я итерация  $\vec{x}_i(s)$  уже построена, где  $\vec{x}_{i-1}(s) \leq \vec{x}_i(s) \leq \vec{u}_0(s)$ , то  $(i+1)$ -я итерация  $\vec{x}_{i+1}(s)$  определяется из уравнения

$$\Phi(s, \vec{x}_{i+1}(g(s))) = \lambda(A\vec{x}_i)(s) + \vec{w}(s), \quad i = 1, 2, \dots$$

Из последней оценки вытекает, что последовательность  $\{\vec{x}_i(s)\}_{i=1}^{\infty}$  сходится почти всюду на множестве  $\Omega_2$  к некоторой вектор-функции  $\vec{x}^*(s)$ , причем  $\vec{x}^*(s) \leq \vec{u}_0(s)$ , откуда следует, что функция  $\vec{x}^*(s) \in E_2(X_2)$ .

Кроме того, так как вектор-функция  $\vec{u}_0(s) \in E_2(X_2)$  (правильному ЛОП), то исходная последовательность  $\{\vec{x}_i(s)\}_{i=1}^{\infty}$  абсолютно ограничена. Значит, последовательность  $\{\vec{x}_i(s)\}_{i=1}^{\infty}$  сходится к вектор-функции  $\vec{x}^*(s)$  по  $F$ -норме в ЛОП  $E_2(X_2)$ .

Заметим, что выполняется равенство  $\Phi(s, \vec{x}^*(g(s))) = \lambda(A\vec{x}^*)(s) + \vec{w}(s)$ , т. е.  $\vec{x}^*(s)$  — искомое решение исходного уравнения  $\lambda(A\vec{x})(s) + \vec{w}(s) = \Phi(s, \vec{x}(g(s)))$ .

Можно показать, что  $\vec{x}^*(s)$  — наименьшее из положительных решений исходного уравнения. Начиная с начального приближения  $\vec{x}_0(s)$  и полагая  $\Phi(s, \vec{u}_{i+1}(g(s))) = \lambda(A\vec{u}_i)(s) + \vec{w}(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , можно, так же, как для случая  $B$ -пространств  $C(\Omega)$  и  $L^p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , убедиться в том, что итерационная последовательность  $\{\vec{x}_i(s)\}_{i=1}^\infty$  сходится по  $F$ -норме к наибольшему положительному решению  $\vec{x}(s)$  исходного функционально-интегрального уравнения Урысона.  $\triangleright$

Теорема, аналогичная сформулированной, была доказана М. М. Вайнбергом, но только для частных случаев  $B$ -пространств  $C(\Omega)$  и  $L^p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , скалярных измеримых по Лебегу функций.

### Литература

1. Гроп Д. Методы идентификации систем.—М.: Мир, 1979.—302 с.
2. Растринин Л. А. Современные принципы управления сложными объектами.—М.: Сов. радио, 1980.—232 с.
3. Фетисов В. Г. Качественные методы исследования нелинейных интегральных моделей, содержащих доминированные операторы // Новые технологии управления движения технических объектов: Материалы 3-й Междунар. НТК.—Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2000.—С. 57–61.
4. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
5. Фетисов В. Г., Филиппенко В. И., Козоброд В. Н. Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах.—Владикавказ: Изд-во ВШЦ РАН, 2006.—432 с.
6. Drakhlin M. E., Ponosov A., Stepanov E. On some classes of operators determined by the structure their memory // Proc. Edinburgh Math. Soc.—2002.—V. 45.—P. 467–490.
7. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.—М.: Мир, 1979.—399 с.
8. Berliocchi H., Lasry J. M. Integrandes normales et mesures parametrees en calcul des variations // Comp. Rend. de l'Acad. Sci. Paris.—1971.—V. 274, ser. A.—P. 839–842.
9. Rockafellar R. T. Minimax theorems and conjugate saddle-functions // Math. Scand.—1964.—V. 14.—P. 151–173.
10. Фетисов В. Г., Козоброд В. Н. Нормальные интегранты в локально ограниченных пространствах измеримых функций // Исследов. по компл. анализу, теор. опер. и мат. моделир.—Владикавказ: Изд-во ВШЦ РАН, 2004.—С. 291–303.

Фетисов Валерий Георгиевич  
Шахты, Южно-Российский госуниверситет  
экономики и сервиса;  
Владикавказ, Институт прикладной математики и  
информатики ВШЦ РАН  
E-mail: fetisov-vg@sssu.ru

# О РАНГЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

**В. И. Филиппенко**

В работе получены оценки ранга спектральной матрицы-функций симметрического дифференциального оператора, порожденного в гильбертовом пространстве  $n$ -мерных вектор-функций формально самосопряженной дифференциальной операцией второго порядка.

Пусть  $\mathbb{X}$  —  $n$ -мерное евклидово пространство, в котором скалярное произведение и норма задаются следующим образом:

$$(y, z) = \sum_{k=1}^n y_k \bar{z}_k, \quad |y|^2 = \sum_{k=1}^n y_k \bar{y}_k,$$

где  $y_k, z_k, k = 1, 2, \dots, n$  — координаты векторов  $y$  и  $z$ . Обозначим через  $\mathcal{L}_n^2(a, b)$  гильбертово пространство  $n$ -мерных вектор-функций, заданных на некотором промежутке  $(a, b)$ , значения которых принадлежат  $\mathbb{X}$ , а квадрат нормы суммируем. Скалярное произведение в  $\mathcal{L}_n^2(a, b)$  определим с помощью равенства:

$$\langle y(x), z(x) \rangle = \int_a^b (y(x), z(x)) dx.$$

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) = -y''(x) + \mathbf{Q}(x)y(x), \quad (1)$$

где  $\mathbf{Q}$  — вещественная матричная функция порядка  $n$ , измеримая и локально суммируемая в сильном смысле, т. е. норма матрицы  $\mathbf{Q}$  суммируема в каждом конечном замкнутом промежутке  $[a_1, b_1] \in (a, b)$ , что равносильно суммируемости в этом промежутке всех элементов матрицы  $\mathbf{Q}$ , и при каждом  $x \in (a, b)$   $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^*$ . Выражение  $l(y)$  имеет смысл для каждой вектор-функции  $y(x)$ , которая на любом отрезке  $[a_1, b_1] \subset (a, b)$  абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной, а  $l(y) \in \mathcal{L}_n^2(a, b)$ .

В этой статье исследуется ранг матрицы-функции распределения самосопряженного оператора  $A$ , порожденного в гильбертовом пространстве  $\mathcal{L}_n^2(a, b)$  дифференциальным выражением (1). Как известно, в случае промежутка  $(a, b)$  с двумя сингулярными концами порядок спектральной матрицы-функции распределения оператора  $A$  равен  $2n$ , если хотя бы один конец промежутка  $(a, b)$  регулярен и оператор  $A$  порождается разделяющимися краевыми условиями, то порядок спектральной матрицы-функции распределения оператора  $A$  равен  $n$ . Оценим ранг спектральной матрицы-функции распределения оператора  $A$  в сегменте  $[\alpha, \beta]$ , исходя из предположения, что дифференциальное уравнение  $l(y) = \lambda y$  имеет при  $\lambda \in [\alpha, \beta]$  решения, обладающие определенными свойствами на концах промежутка  $(a, b)$ . Случай скалярного дифференциального выражения произвольного четного порядка рассматривался А. В. Штраусом [1] в связи с изучением кратности спектра соответствующего самосопряженного расширения минимального дифференциального оператора.

1. Каждой вектор-функции  $y(x)$ , для которой  $l(y)$  имеет смысл, поставим в соответствие вектор-функцию

$$\tilde{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x)),$$

которую будем рассматривать как матрицу-столбец. Введем в рассмотрение ортогональную кососимметрическую матрицу порядка  $2n$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{I}_n$  — единичная  $(n \times n)$ -матрица, а  $\mathbf{0}_n$  — нулевая матрица. Для любых вектор-функций  $y(x)$  и  $z(x)$ , к которым применима операция  $l$ , тождество Лагранжа может быть записано в виде

$$(l(y), z) - (y, l(z)) = \frac{d}{dx}(\tilde{z}^* \mathbf{J} \tilde{y}), \quad (2)$$

где звездочкой обозначен переход к сопряженной матрице, в данном случае — однострочной.

Пусть  $L_0$  — замкнутый симметрический оператор с минимальной областью определения, порожденный в пространстве  $\mathcal{L}_n^2(a, b)$  операцией  $l$  [2]. Пусть  $\mathbf{U}_1(x, \lambda)$  и  $\mathbf{U}_2(x, \lambda)$  составляют фундаментальную систему решений матричного уравнения  $l(\mathbf{Y}) = \lambda \mathbf{Y}$ , удовлетворяющую начальным условиям

$$\mathbf{U}_1(x_0, \lambda) = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{U}_2(x_0, \lambda) = \mathbf{0}_n, \quad \mathbf{U}'_1(x_0, \lambda) = \mathbf{0}_n, \quad \mathbf{U}'_2(x_0, \lambda) = \mathbf{I}_n,$$

где  $x_0$  — произвольная фиксированная точка промежутка  $(a, b)$ . Пусть  $A$  — самосопряженный оператор с областью определения  $D(A) \subset \mathcal{L}_n^2(a, b)$ , являющийся расширением оператора  $L_0$ , а  $\tilde{E}_\lambda$  ( $-\infty < \lambda < +\infty$ ) — спектральная функция оператора  $A$ .

Для произвольных вещественных  $\alpha$  и  $\beta$  разность значений  $E_\beta - E_\alpha$  обобщенной спектральной функции минимального симметрического оператора  $L_0$  является интегральным оператором, а его ядро  $K_{\alpha, \beta}(x, s)$  представимо в виде

$$K_{\alpha, \beta}(x, s) = \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{U}_1(x, \lambda) \mathbf{U}_2(x, \lambda) d\Upsilon(\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^*(s, \lambda) \\ \mathbf{U}_2^*(s, \lambda) \end{pmatrix}),$$

где  $\Upsilon(\lambda)$  — эрмитовонеубывающая матрица-функция порядка  $2n$ , называемая спектральной матрицей-функцией распределения оператора  $L_0$ .

В дальнейшем воспользуемся методом, впервые примененным М. Г. Крейном к обоснованию метода направляющих функционалов [3]. Заметим, что этот метод активно используется и в настоящее время, в частности, при исследовании гамильтониана Дирака со сверхсильным кулоновским полем [4].

**2.** Пусть  $L$  — произвольный симметрический оператор, действующий в абстрактном гильбертовом пространстве  $H$ ,  $A$  — его самосопряженное расширение с выходом в гильбертово пространство  $\tilde{H} \supset H$ ,  $P$  — проектор в  $\tilde{H}$  на  $H$ ,

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\lambda := \{\tilde{g} \mid \tilde{g} \in D(A), A\tilde{g} - \lambda\tilde{g} \in H\}, \mathcal{L}_\lambda := P\widetilde{\mathcal{L}}_\lambda;$$

$E_\lambda$  — обобщенное разложение единицы оператора  $L$ , порожденное самосопряженным расширением  $A$ . Тогда имеет место

**Теорема 1.** Пусть  $g(\lambda)$  — векторная функция вещественного параметра  $\lambda$  ( $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ ), для которой выполняются следующие условия:

- (1)  $g(\lambda)$  представима в виде  $g(\lambda) = \varphi_1(\lambda)g_1 + \dots + \varphi_m(\lambda)g_m$ , где  $g_k \in D(L^*)$  ( $k = 1, \dots, m$ ), а  $\varphi_k(\lambda)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) — комплекснозначные функции удовлетворяющие условию Липшица;
- (2) при любом  $\lambda \in [\alpha, \beta]$   $g(\lambda) \in \mathcal{L}_\lambda$ .

Тогда для любого  $f \in H$  и любого  $\mu \in [\alpha, \beta]$  имеет место равенство.

$$\int_{\alpha}^{\mu} ((L^* dE_{\lambda} f, g(\lambda)) - (dE_{\lambda} f, L^* g(\lambda))) = 0. \quad (3)$$

△ Как известно, для любых вещественных чисел  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) и любого  $f \in H$

$$(E_{\beta} - E_{\alpha})f \in D(L^*) \quad (4)$$

и

$$L^*(E_{\beta} - E_{\alpha})f = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda dE_{\lambda} f. \quad (5)$$

В силу (4) и того, что  $L \subset L^*$  для любого  $f \in H$  и любого  $g \in D(L)$  имеет место равенство:

$$(L^*(E_{\beta} - E_{\alpha})f, g) - ((E_{\beta} - E_{\alpha})f, L^*g) = 0,$$

которое можно переписать в виде:

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((L^* dE_{\lambda} f, g) - (dE_{\lambda} f, L^* g)) = 0. \quad (6)$$

Последнему равенству, согласно (5), можно придать следующую форму:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (dE_{\lambda} f, (L^* - \lambda E)g) = 0. \quad (7)$$

Так как

$$\int_{\alpha}^{\mu} (L^* dE_{\lambda} f, g(\lambda)) = \int_{\alpha}^{\mu} (dE_{\lambda} f, \lambda g(\lambda)),$$

то формула (3) равносильна равенству

$$\int_{\alpha}^{\mu} (dE_{\lambda} f, h(\lambda)) = 0, \quad (8)$$

где

$$h(\lambda) = (L^* - \lambda E)g(\lambda). \quad (9)$$

В силу условия (4)

$$h(\lambda) = (A - \lambda \tilde{E})\tilde{g}(\lambda), \quad (10)$$

где  $\tilde{g}(\lambda) \in \tilde{L}_\lambda$  и  $P\tilde{g}(\lambda) = g(\lambda)$ .

Если векторная функция  $\tilde{g}(\lambda)$  ( $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ ) такова, что существует интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\tilde{E}_\lambda \tilde{g}(\lambda), \quad (11)$$

то равенство (8) доказывается весьма просто. Действительно, в этом случае

$$\int_{\alpha}^{\mu} d\tilde{E}_\lambda A \tilde{g}(\lambda) = \int_{\alpha}^{\mu} \lambda d\tilde{E}_\lambda \tilde{g}(\lambda)$$

и мы имеем:

$$\int_{\alpha}^{\mu} (dE_\lambda f, h(\lambda)) = \int_{\alpha}^{\mu} (d\tilde{E}_\lambda f, (A - \lambda E)\tilde{g}(\lambda)) = \int_{\alpha}^{\mu} (f, d\tilde{E}_\lambda (A - \lambda E)\tilde{g}(\lambda)) = 0.$$

Так как неизвестно, сходится ли интеграл (11), то равенство (8) можно доказать несколько иначе, используя прием, близкий к тому, который применил М. Г. Крейн для обоснования метода направляющих функционалов. Рассмотрим функцию

$$\omega(\mu) = \int_{\alpha}^{\mu} (dE_\lambda f, h(\lambda)) \quad (\alpha \leq \mu \leq \beta). \quad (12)$$

Убедимся в том, что в любой точке  $\mu \in [\alpha, \beta]$   $\omega' = 0$ , т. е.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta} \int_{\mu}^{\mu+\eta} (dE_\lambda f, h(\lambda)) \right) = 0. \quad (13)$$

Докажем сначала равенство

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta} \int_{\mu}^{\mu+\eta} (dE_\lambda f, h(\mu)) \right) = 0. \quad (14)$$



Действительно, принимая во внимание (10), имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^{\mu+\eta} (dE_{\lambda}f, h(\mu)) &= \int_{\mu}^{\mu+\eta} (d\tilde{E}_{\lambda}f, (A - \mu\tilde{E})\tilde{g}(\mu)) = \\ &= \int_{\mu}^{\mu+\eta} (\lambda - \mu)(d\tilde{E}_{\lambda}f, \tilde{g}(\mu)). \end{aligned} \quad (15)$$

Если  $\eta > 0$ , то, очевидно,

$$\int_{\mu}^{\mu+\eta} (\lambda - \mu)(d\tilde{E}_{\lambda}f, \tilde{g}(\mu)) = \int_{\mu+0}^{\mu+\eta} (\lambda - \mu)(d\tilde{E}_{\lambda}f, \tilde{g}(\mu)).$$

Поэтому, при  $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mu}^{\mu+\eta} (dE_{\lambda}f, h(\mu)) \right| &\leq \|\tilde{g}(\mu)\| \left( \int_{\mu+0}^{\mu+\eta} (\lambda - \mu)^2 (d\tilde{E}_{\lambda}f, f) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \eta \|\tilde{g}(\mu)\| ((E_{\mu+\eta} - E_{\mu+0})f, f)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если же  $\eta < 0$ , то в силу (15), мы получим оценку

$$\left| \int_{\mu}^{\mu+\eta} (dE_{\lambda}f, h(\mu)) \right| \leq |\eta| \|\tilde{g}(\mu)\| ((E_{\mu} - E_{\mu+\eta})f, f)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует равенство (14).

Докажем теперь, что в любой точке  $\mu \in [\alpha, \beta]$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta} \int_{\mu}^{\mu+\eta} (dE_{\lambda}f, (h(\lambda) - h(\mu))) \right) = 0. \quad (18)$$

Для этого, согласно (10) и условию (1) из теоремы 1, достаточно установить, что для любого элемента  $g \in H$  и любой функции  $\varphi(\lambda)$  ( $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ ), удовлетворяющей условию Липшица, имеет место равенство

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta} \int_{\mu}^{\mu+\eta} (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))(dE_{\lambda}f, g) \right) = 0. \quad (19)$$

При  $\eta > 0$  имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mu}^{\mu+\eta} (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))(dE_{\lambda}f, g) \right| &= \left| \int_{\mu+0}^{\mu+\eta} (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))(d\tilde{E}_{\lambda}f, g) \right| \leq \\ &\leq \left( \int_{\mu+0}^{\mu+\eta} (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))^2 (d\tilde{E}_{\lambda}f, g) \right)^{\frac{1}{2}} \|g\| \leq \\ &\leq K\eta((E_{\mu+\lambda} - E_{\mu+0})f, f)^{\frac{1}{2}} \|g\|. \end{aligned}$$

При  $\eta < 0$  получаем:

$$\left| \int_{\mu}^{\mu+\eta} (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))(dE_{\lambda}f, g) \right| \leq K |\eta| ((E_{\mu} - E_{\mu+\eta})f, f)^{\frac{1}{2}} \|g\|.$$

Этим доказано равенство (19) и, следовательно, равенство (18). Из соотношений (14) и (18) следует (13). Итак,  $\omega'(\mu) \equiv 0$  ( $\alpha \leq \mu \leq \beta$ ). Согласно (10) и (12)

$$\omega(\alpha) = ((E_{\alpha+0} - E_{\alpha})f, h(\alpha)) = ((\tilde{E}_{\alpha+0} - \tilde{E}_{\alpha})f, (A - \alpha E)\tilde{g}(\alpha)).$$

Поскольку, либо  $(\tilde{E}_{\alpha+0} - \tilde{E}_{\alpha})f = 0$ , либо  $(A - \alpha E)(\tilde{E}_{\alpha+0} - \tilde{E}_{\alpha})f = 0$  в зависимости от того, является ли точка  $\alpha$  точкой непрерывного или дискретного спектра самосопряженного оператора  $A$ , то  $\omega(\alpha) \equiv 0$ . Следовательно,  $\omega(\mu) = 0$ , для любого  $\mu \in [\alpha, \beta]$ .  $\triangleright$

**3.** Доказанная теорема позволяет получить оценку ранга спектральной матрицы-функции самосопряженного расширения  $A$  минимального симметрического оператора  $L_0$ . Заметим, что несколько иной подход к исследованию спектра самосопряженных расширений минимальных дифференциальных операторов основан на исследовании осцилляции собственных функций (см., например, [5]). Случай дифференциального оператора второго порядка рассмотрен в работе Йоргенса и Реллиха [6].

**Лемма.** Пусть для любого  $\lambda \in [\alpha, \beta]$  уравнение  $l(y) = \lambda y$  имеет решение  $v(x; \lambda)$  такое, что:

(1)  $\int_c^b |v(x; \lambda)|^2 dx < \infty$ , где  $c$  — произвольная внутренняя точка промежутка  $(a; b)$ ;

(2) для любой вектор-функции  $f(x) \in D(A)$  выполняется условие

$$\tilde{f}^*(x)\mathbf{J}\tilde{v}(x;\lambda)|_{x=b}=0;$$

(3) при фиксированном  $x \in (a, b)$ , компоненты вектор-функции  $\tilde{v}(x; \lambda)$  удовлетворяют условию Липшица относительно  $\lambda$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$ .

Тогда для любых  $\mu_1, \mu_2 \in [\alpha, \beta]$  имеет место равенство

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} \tilde{v}(x_0; \lambda) \mathbf{J} d\Upsilon(\lambda) = 0.$$

◁ Выберем отрезок  $[a_1, b_1] \subset (a, b)$  так, что  $a_1 \neq a$  и  $b_1 = x_0 \neq b$ . Обозначим через  $T_1$  минимальный оператор, порожденный в гильбертовом пространстве  $\mathcal{L}_n^2(a_1, b_1)$ , выражением  $l(y)$ . Этот оператор имеет индекс дефекта  $(2n, 2n)$ . В области определения  $D(T_1^*)$  сопряженного оператора  $T_1^*$  найдется система линейно независимых вектор-функций  $g_k(x)$  ( $k = 1, \dots, 2n$ ) таких, что  $(2n \times 2n)$ -матрица  $\tilde{\mathbf{G}}(x) = (\tilde{\mathbf{G}}_1(x), \tilde{\mathbf{G}}_2(x)) = (\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_{2n}(x))$  в точке  $x = a_1$  — нулевая, в точке  $x = b_1$  — единичная. Пусть  $v = v(x; \lambda)$  — решение уравнения  $l(y) = \lambda y$ , удовлетворяющее условиям леммы. Положим

$$\tilde{g}(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (a, a_1], \\ \mathbf{G}_1(x)v(b_1, \lambda) + \mathbf{G}_2(x)v'(b_1, \lambda), & \text{при } x \in [a_1, b_1], \\ v(x; \lambda), & \text{при } x \in [b_1, b]. \end{cases}$$

Очевидно, что  $\tilde{g}(x, \lambda) \in D(L_0^*)$  и, более того,  $\tilde{g} \in \tilde{L}_\lambda$ . Отсюда следует, что функция

$$g(x, \lambda) = \mathbf{G}_1(x)v(b_1, \lambda) + \mathbf{G}_2(x)v'(b_1, \lambda),$$

являющаяся проекцией на  $\mathcal{L}_n^2(a_1, b_1)$  вектора  $\tilde{g}(x, \lambda)$ , принадлежит  $\mathcal{L}_\lambda$ . Таким образом, в силу теоремы 2, для любой вектор-функции  $f \in \mathcal{L}_n^2(a_1, b_1)$  имеет место соотношение

$$\int_{\alpha}^{\mu} (\langle L_1^* dE_{\lambda}^1 f, g \rangle_1 - \langle dE_{\lambda}^1 f, L_1^* g \rangle_1) = 0,$$

где  $E_{\lambda}^1$  — обобщенная спектральная функция оператора  $T_1$ , порожденная ортогональной спектральной функцией самосопряженного

оператора  $A$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  — скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $\mathcal{L}_n^2(a_1, b_1)$ .

Пусть  $\Delta := [\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$ . Как известно,  $E_\Delta^1$  — интегральный оператор с ядром

$$K_\Delta(x, s; \lambda) = \int_{\Delta} (\mathbf{U}_1(x, \lambda) \mathbf{U}_2(x, \lambda) d\Upsilon(\lambda)) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^*(s, \lambda) \\ \mathbf{U}_2^*(s, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\eta(f, \lambda) = \int_{a_1}^{b_1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^*(s, \lambda) \\ \mathbf{U}_2^*(s, \lambda) \end{pmatrix} f(s) ds,$$

и

$$h_\Delta = h_\Delta(x; f) = E_\Delta^1 f = \int_{\Delta} (\mathbf{U}_1(x, \lambda) \mathbf{U}_2(x, \lambda)) d\Upsilon(\lambda) \eta(f, \lambda). \quad (20)$$

Тогда в силу тождества (2) получим

$$\langle l(h_\Delta), g \rangle_1 - \langle (h_\Delta), l(g) \rangle_1 = \tilde{g}^* \tilde{\mathbf{J}} h_\Delta \big|_{a_1}^{b_1}. \quad (21)$$

Используя (3) и (4), выводим

$$\begin{aligned} \tilde{g}^* \tilde{\mathbf{J}} h_\Delta(x; f) \big|_{a_1}^{b_1} &= \tilde{g}^*(b_1, \lambda) \tilde{\mathbf{J}} h_\Delta(b_1, f) = \\ &= \tilde{v}^*(b_1; \lambda) \mathbf{J} \int_{\Delta} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1(x, \lambda) & \mathbf{U}_2(x, \lambda) \\ \mathbf{U}_1'(x, \lambda) & \mathbf{U}_2'(x, \lambda) \end{pmatrix} d\Upsilon(\lambda) \eta(f; \lambda). \end{aligned}$$

В силу начальных условий, полагая  $x = x_0$ , получим

$$\tilde{g}^* \tilde{\mathbf{J}} h_\Delta(x; f) \big|_{a_1}^{b_1} = \tilde{v}^*(b_1; \lambda) \mathbf{J} \int_{\Delta} d\Upsilon(\lambda) \eta(f; \lambda).$$

Отсюда, согласно теореме 1, заключаем, что

$$\int_{\alpha}^{\mu} \tilde{v}^*(x_0; \lambda) \mathbf{J} d\Upsilon(\lambda) \eta(f; \lambda) = 0,$$

или, учитывая вид  $\eta$ , приходим к равенству

$$\int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{\alpha}^{\mu} \tilde{v}^*(x_0; \lambda) \mathbf{J} d\Upsilon(\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^*(s, \lambda) \\ \mathbf{U}_2^*(s, \lambda) \end{pmatrix} \right) f(s) ds = 0. \quad (22)$$

Так как  $f(s)$  — произвольная вектор-функция из гильбертова пространства  $\mathcal{L}_n^2(a_1, b_1)$ , то из соотношения (22) следует, что

$$\int_{\alpha}^{\mu} \tilde{v}^*(x_0; \lambda) \mathbf{J} d\Upsilon(\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^*(s, \lambda) \\ \mathbf{U}_2^*(s, \lambda) \end{pmatrix} = 0 \quad (23)$$

(тождественно относительно  $s$ ).

Дифференцируя левую часть соотношения (23) по переменной  $s$  и учитывая начальные условия, получим требуемое равенство.  $\triangleright$

**Теорема 2.** Пусть при любом  $\lambda \in [\alpha, \beta]$  уравнение  $l(y) = \lambda y$  имеет  $m = m' + m''$  линейно независимых решений

$$v_1(x; \lambda), v_2(x; \lambda), \dots, v_m(x; \lambda) \quad (25)$$

таких, что

(1) для каждого из  $m'$  первых решений (25)

(а)  $v_k(x; \lambda) \in \mathcal{L}_n^2(a, c)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m'$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}^*(x) \mathbf{J} \tilde{v}_k(x, \lambda) = 0$ , какова бы ни была вектор-функция  $f(x) \in D(A)$ ;

(2) для каждого из  $m''$  последних решений (25)

(а)  $v_k(x; \lambda) \in \mathcal{L}_n^2(c, b)$ ,  $k = m' + 1, m' + 2, \dots, m$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow b} \tilde{f}^*(x) \mathbf{J} \tilde{v}_k(x, \lambda) = 0$ , какова бы ни была вектор-функция  $f(x) \in D(A)$ ;

(3) каждая компонента вектор-функции  $v_k(x; \lambda)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) при фиксированном  $x \in (a, b)$  удовлетворяют условию Липшица относительно  $\lambda$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$ .

Тогда ранг спектральной матрицы-функции распределения оператора  $A$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$  не превосходит  $2n - m$ .

$\triangleleft$  Как известно, спектральное разложение элемента  $f \in \mathcal{L}_n^2(a, b)$  имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{U}_1(x, \lambda) \mathbf{U}_2(x, \lambda)) d\Upsilon(\lambda) \eta(f; \lambda). \quad (26)$$

Введем матрицу-функцию

$$\mathbf{V}(x; \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^*(x; \lambda) \\ \dots \\ \tilde{v}_m^*(x; \lambda) \\ \dots \\ \tilde{v}_{2n}^*(x; \lambda) \end{pmatrix},$$

составленную из  $2n$  линейно независимых решений уравнения  $l(y) = \lambda y$  и их производных.  $m$  первых строк матрицы  $\mathbf{V}(x; \lambda)$  построены на основе решений, удовлетворяющих условиям теоремы.

Используя матрицу  $\mathbf{V}(x; \lambda)$ , перепишем соотношение (26) в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{U}_1(x, \lambda) \mathbf{U}_2(x, \lambda)) (\mathbf{V}(x_0; \lambda) \mathbf{J})^{-1} \mathbf{V}(x_0; \lambda) \mathbf{J} d\Upsilon(\lambda) \times \quad (27)$$

$$\times (\mathbf{V}(x_0; \lambda) \mathbf{J})^* ((\mathbf{V}(x_0; \lambda) \mathbf{J})^*)^{-1} \eta(f; \lambda).$$

Теперь (27) можно рассматривать как спектральное разложение элемента  $f(x)$  с матрицей-функцией распределения

$$\mathbf{S}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \mathbf{V}(x_0; \lambda) \mathbf{J} d\Upsilon(\lambda) (\mathbf{V}(x_0; \lambda) \mathbf{J})^*.$$

В силу леммы можно утверждать, что на рассматриваемом отрезке  $[\alpha, \beta]$  ровно  $m$  строк матрицы  $\mathbf{S}(\lambda)$  состоят из нулей, и, следовательно, ранг спектральной матрицы-функции распределения оператора  $A$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$  не превосходит  $2n - m$ .  $\triangleright$

**Следствие 1.** Если в условиях теоремы 2 положить  $m = 2n$ , то отрезок  $[\alpha, \beta]$  будет принадлежать лакуне спектра самосопряженного оператора  $A$ .

**4.** Предположим, что  $a$  — регулярный конец промежутка  $(a; b)$ , тогда дефектное число оператора  $L_0$  с минимальной областью определения, порожденного в  $\mathcal{L}_n^2(a, b)$  дифференциальным выражением  $l(y)$ , удовлетворяет неравенствам  $n \leq r \leq 2n$ . Пусть  $A$  — самосопряженное расширение оператора  $L_0$  в пространстве  $\mathcal{L}_n^2(a, b)$ , определенное разделяющимися краевыми условиями. Эти условия в точке  $a$  можно представить в виде

$$\mathbf{B} \tilde{y}(a) = 0, \quad (28)$$

где  $\mathbf{B}$  — некоторая прямоугольная матрица, состоящая из  $n$  линейно независимых строк и  $2n$  столбцов, удовлетворяющая условию  $\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^* = \mathbf{0}$ .

**Теорема 3.** Пусть для любого  $\lambda \in [\alpha, \beta]$  уравнение  $l(y) = \lambda y$  имеет  $q$  линейно независимых решений

$$v_1(x; \lambda), \dots, v_q(x; \lambda)$$

таких, что

$$(1) v_k(x; \lambda) \in \mathcal{L}_n^2(a, b) \quad (k = 1, \dots, q);$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow b} \tilde{f}^*(x) \mathbf{J} \tilde{v}_k(x, \lambda) = 0$ ,  $k = 1, \dots, q$ , какова бы ни была вектор-функция  $f(x) \in D(A)$ ;

(3) линейная комбинация  $\sum_{k=1}^q c_k v_k(x; \lambda)$  удовлетворяет системе краевых условий (28) в точке  $a$  только в том случае, когда  $c_1 = \dots = c_q = 0$ ;

(4) вектор-функции  $v_1(x; \lambda), \dots, v_q(x; \lambda)$  удовлетворяют условию Липшица на сегменте  $[\alpha, \beta]$ .

Тогда ранг спектральной матрицы функции оператора  $A$  на сегменте  $[\alpha, \beta]$  не превосходит  $n - q$ .

◁ Действительно, в этом случае формула (26) преобразуется к виду, содержащему  $(n \times n)$  — матрицу-функцию распределения  $\Upsilon$ . Далее, применяя лемму, убеждаемся в справедливости теоремы 3. ▷

**Следствие 2.** Если в условиях теоремы 3 положить  $q = n$ , то в этом случае отрезок  $[\alpha, \beta]$  принадлежит лакуне спектра самосопряженного оператора  $A$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Утверждения, аналогичные доказанным теоремам имеют место и для операторов, порожденных некоторыми более общими дифференциальными выражениями (например, квазидифференциальными выражениями произвольного порядка — четного или нечетного).

### Литература

1. Штраус А. В. О кратности спектра самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 155, № 4. — С. 771–774.
2. Филиппенко В. И. Спектральные методы в теории операторов // В кн.: Фетисов В. Г., Филиппенко В. И., Козоброд В. Н. Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах. — Ин-т прикладной математики и информатики ВНЦ РАН. — Владикавказ: ВНЦ РАН, 2006. — С. 143–326.

3. Крейн М. Г. Про ермітові оператори з напрямними функціоналами // Збірник праць інституту математики АН УРСР.—1948.—№ 10.—С. 83–105.
4. Воронов Б. Л., Гитман Д. М., Тютин И. В. Гамильтониан Дирака со сверх-сильным кулоновским полем // ТМФ.—2007.—Т. 150, № 1.—С. 41–84.
5. Бен Амара Ж., Владимиров А. А. Об осцилляции собственных функций задачи четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии // Фундаментальная и прикладная математика.—2006.—Т. 12, № 4.—С. 41–52.
6. Jörgens K., Rellich F. Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialoperatoren (bearbeitet von J.Weidmann) // Springer.—1976.—152 p.

Филиппенко Виктор Игнатьевич  
Шахты, Южно-Российский госуниверситет  
экономики и сервиса;  
Владикавказ, Институт прикладной математики и  
информатики ВНИЦ РАН  
E-mail: [filipenko@sssu.ru](mailto:filipenko@sssu.ru)



# К ЗАДАЧЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ<sup>1</sup>

**И. С. Шабаршина**

Рассмотрено дифференциальное уравнение третьего порядка специального вида, содержащее быстро осциллирующие слагаемые, пропорциональные  $\omega^{j/2}$ ,  $j = 0, \dots, 3$  ( $\omega$ -частота осцилляций), причем при  $j = 1, 2, 3$  слагаемые с нулевым средним. Осуществлено с полным обоснованием асимптотическое интегрирование задачи Коши для данного дифференциального уравнения. Асимптотическое разложение решений представлено в виде рядов по целым неотрицательным степеням малого параметра  $\omega^{-1/2}$

В работах [1, 2] осуществлено асимптотическое интегрирование задач Коши для систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f_0 \left( x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^k x}{dt^k}, t, \omega t \right) + \sum_{i=1}^p \omega^i f_i \left( x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{k-i} x}{dt^{k-i}}, t, \omega t \right), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = x_1, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} x(0)}{dt^{n-1}} = x_{n-1}, \quad t \in [0, T], \quad \omega \gg 1,$$

где  $n$  и  $p$  — натуральные числа, причем  $2p \leq n$ ,  $k = n - p$ ,  $T > 0$ . Асимптотическое разложение решений представлено в виде рядов по целым неотрицательным степеням малого параметра  $\omega^{-1}$ . В настоящей работе получено распространение результатов [1, 2] для задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^3 x}{dt^3} &= f_0 \left( x, \frac{dx}{dt}, t, \omega t \right) + \omega^{1/2} f_1 \left( x, \frac{dx}{dt}, t, \omega t \right) + \\ &+ \omega f_2(x, t, \omega t) + \omega^{3/2} f_3(x, t, \omega t), \quad (2) \\ x(0) &= x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = x_1, \quad \frac{d^2 x(0)}{dt^2} = x_2, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00287.

которая не входит в класс (1). Для нее построено полное обоснованное асимптотическое разложение решения по степеням  $\omega^{-1/2}$ . Уравнение третьего порядка рассмотрено с той целью, чтобы провести исследования со всеми подробностями. Заметим, что, не нарушая общности рассуждений, полученные результаты можно распространить на случай систем дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{j=0}^p \omega^j \left( f_{j,0} \left( x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{p-j}x}{dt^{p-j}}, t, \omega t \right) + \right. \\ \left. + \omega^{1/2} f_{j,1} \left( x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{p-j}x}{dt^{p-j}}, t, \omega t \right) \right),$$

где  $p = [n/2]$ ,  $f_{p,1} = 0$  при четных  $n$  и  $f_{j,k}$  удовлетворяют (помимо некоторых других естественных условий) требованиям:

$$\frac{\partial^s f_{j,k}}{\partial t^s}(e_0, \dots, e_{p-j}, 0, \tau) = 0, \quad j \geq 1, \quad s = 0, 1, \dots, (j+k-2).$$

Пусть  $G_i$ ,  $i = 0, 1$ , — конечные интервалы вещественной прямой, функции  $f_i(e_0, e_1, t, \tau)$ ,  $i = 0, 1$ , и  $f_j(e_0, t, \tau)$ ,  $j = 2, 3$ , заданы, соответственно, на множествах

$$\Omega_1 = \{(e_0, e_1, t, \tau) : (e_0, e_1) \in G_0 \times G_1, t \in [0, T], \tau \in [0, \infty)\}, \\ \Omega_2 = \{(e_0, t, \tau) : e_0 \in G_0, t \in [0, T], \tau \in [0, \infty)\}.$$

Всюду далее символом  $\langle f(t, \tau) \rangle$  будем обозначать среднее функции  $f(t, \tau)$  по  $\tau$ :  $\langle f(t, \tau) \rangle = l^{-1} \int_0^l f(t, s) ds$ , а через  $R_\tau g(\tau) := g(\tau) - \langle g(\tau) \rangle$ .

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- 1) данные функции являются  $l$ -периодическими по  $\tau$ ;
- 2) средние функций  $f_1(e_0, e_1, t, \tau)$ ,  $f_i(e_0, t, \tau)$ ,  $i = 2, 3$ , по  $\tau$  равны нулю;
- 3)  $f_i$ ,  $0 \leq i \leq 3$ , имеют непрерывные производные любого порядка по переменным  $e_j$  и  $t$ , и справедливо равенство  $f_3(e_0, 0, \tau) = 0$ .

Асимптотическое разложение решения задачи (2) будем искать в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k/2} u_k(t) + \sum_{k=3}^{\infty} \omega^{-k/2} v_k(t, \omega t), \quad (3)$$

где функции  $v_k(t, \tau)$  являются  $l$ -периодическими по  $\tau$  с нулевым средним.

Пусть усредненная задача

$$\begin{aligned} \frac{d^3 u_0}{dt^3} = & \left\langle f_0 \left( u_0, \frac{du_0}{dt}, t, \tau \right) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial e_1} \left( u_0, \frac{du_0}{dt}, t, \tau \right) \frac{\partial F_3}{\partial \tau} (u_0, t, \tau) \right\rangle + \\ & + \left\langle \frac{\partial f_3}{\partial e_0} (u_0, t, \tau) F_3(u_0, t, \tau) \right\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_0(0) = x_0, \quad \frac{du_0}{dt}(0) = x_1, \quad \frac{d^2 u_0}{dt^2}(0) = x_2 - \frac{\partial^2 \beta_4}{\partial \tau^2}(x_0, 0, 0), \quad t \in [0, T],$$

$$\text{где } F_3(u_0, t, \tau) := R_\tau \left\{ \int_0^\tau R_s \left\{ \int_0^s R_\tau \left\{ \int_0^\tau f_3(u_0, t, s) ds \right\} d\tau \right\} ds \right\},$$

$$\beta_4(u_0, t, \tau) := R_\tau \left\{ \int_0^\tau R_s \left\{ \int_0^s R_\tau \left\{ \int_0^\tau f_2(u_0, t, s) ds \right\} d\tau \right\} ds \right\},$$

имеет решение  $u_0(t)$ .

Введем теперь два вида задач:

**(A)** — задача Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 u}{dt^3} = & a_1(t) \frac{du}{dt} + a_2(t)u + f(t), \\ u(0) = & \tilde{x}_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = \tilde{x}_1, \quad \frac{d^2 u}{dt^2}(0) = \tilde{x}_2, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

где  $a_i(t)$ ,  $f(t)$  — известные непрерывные на  $[0, T]$  функции;

**(B)** — задача о нахождении  $l$ -периодического по  $\tau$  с нулевым средним решения уравнения

$$\frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} = \mu(t, \tau),$$

где  $\mu(t, \tau)$  — известная непрерывная по  $t$ ,  $\tau$ ,  $l$ -периодическая по  $\tau$  с нулевым средним функция.

**Теорема 1.** Построение любой частичной суммы асимптотики (3) сводится к решению конечного числа задач видов **(A)** и **(B)**.

◁ Для нахождения коэффициентов разложения (3) подставим в уравнение и начальные условия (2) вместо  $x$  выражение (3), формально разлагая функции  $f_i$ ,  $i = 0, 1$ , и  $f_j$ ,  $j = 2, 3$ , в ряды Тейлора с центрами  $(u_0(t), \frac{du_0}{dt}(t))$  и  $u_0(t)$  соответственно, и в полученных равенствах приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$ .

Придем к рекуррентной последовательности задач, которые расщепляются в свою очередь с помощью усреднения по  $\tau = \omega t$  на задачи для плавных функций  $u_k(t)$  и быстро осциллирующих функций  $v_k(t, \tau)$ .

Равенства коэффициентов при положительных степенях  $\omega$  имеют вид:

$$\frac{\partial^3 v_3}{\partial \tau^3}(t, \tau) = f_3(u_0, t, \tau), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^3 v_k}{\partial \tau^3}(t, \tau) = \gamma_k(u_0, \dots, u_{k-4}, t, \tau) + \frac{\partial f_3}{\partial e_0}(u_0, t, \tau) u_{k-3}, \quad k = 4, 5. \quad (6)$$

Задача (5), в которой  $u_0$  и  $t$  играют роль параметров, как известно, однозначно разрешима и ее решение дается формулой

$$v_3(t, \tau) = F_3(u_0, t, \tau). \quad (7)$$

Из начальных условий задачи (2) вытекает требование на функцию  $v_3$ :  $\frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} |_{t=0} = 0$ , которое выполняется в силу условия 3).

Аналогично находим решения задач (6)

$$v_k(t, \tau) = \beta_k(u_0, \dots, u_{k-4}, t, \tau) + \alpha(u_0, t, \tau) u_{k-3}, \quad k = 4, 5, \quad (8)$$

где функции  $\beta_k$  и  $\alpha$  —  $l$ -периодические по  $\tau$  с нулевым средним.

С учетом этого выводим задачу для главного члена  $u_0$  асимптотики (3):

$$\begin{aligned} \frac{d^3 u_0}{dt^3} &= \left\langle f_0\left(u_0, \frac{du_0}{dt}, t, \tau\right) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial e_1}\left(u_0, \frac{du_0}{dt}, t, \tau\right) \frac{\partial F_3}{\partial \tau}(u_0, t, \tau) \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle \frac{\partial f_3}{\partial e_0}(u_0, t, \tau) F_3(u_0, t, \tau) \right\rangle, \\ u_0(0) &= x_0, \quad \frac{du_0}{dt}(0) = x_1, \quad \frac{d^2 u_0}{dt^2}(0) = x_2 - \frac{\partial^2 \beta_4}{\partial \tau^2}(x_0, 0, 0). \end{aligned}$$

Получили усредненную задачу (4), которая по условию разрешима на временном отрезке  $[0, T]$ .

После этого по формуле (7) находим  $v_3(t, \tau)$ .

Покажем теперь, что если мы нашли функции  $u_k$  и  $v_{k+3}$  для  $0 \leq k \leq m$ , причем их построение свелось к решению конечного числа задач видов (А) и (В), то мы сможем определить их и для  $k = m + 1$ .

Выпишем задачи, определяющие коэффициенты  $v_k$  ( $\langle v_k(t, \tau) \rangle = 0$ ):

$$\frac{\partial^3 v_{m+4}}{\partial \tau^3}(t, \tau) = \gamma_{m+4}(t, \tau) + b(t, \tau)u_{m+1}(t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^3 v_{k+3}}{\partial \tau^3}(t, \tau) = \gamma_{k+3}(u_{m+1}, \dots, u_{k-1}, t, \tau) + b(t, \tau)u_k(t), \quad (10)$$

$$k = m+2, m+3.$$

Здесь  $b(t, \tau) = \frac{\partial f_3}{\partial e_0}(u_0, t, \tau)$ , функция  $\gamma_{m+4}$  выражается через коэффициенты  $u_k$  и  $v_{k+3}$ ,  $0 \leq k \leq m$ , а потому известна, причем  $\langle \gamma_{m+4}(t, \tau) \rangle = 0$ . Из соотношения (9) однозначным образом определяем

$$v_{m+4}(t, \tau) = \beta_{m+4}(t, \tau) + \alpha(t, \tau)u_{m+1}(t), \quad (11)$$

где  $\beta_{m+4}$  и  $\alpha$  —  $l$ -периодические по  $\tau$  с нулевым средним.

Далее для упрощения записи вместо  $\frac{\partial^p f_j}{\partial e_i^p}(u_0, \dots, \frac{d^n u_0}{dt^n}, t, \tau)$ , где  $n = 0$  для  $j = 2, 3$  и  $n = 1$  для  $j = 0, 1$ , будем коротко писать  $(f_j)_{e_i^p}^{(p)}$ .

Приравнявая коэффициенты при  $\omega^{-\frac{m+1}{2}}$  и усредняя полученную задачу по «быстрому» времени  $\tau$ , получаем однозначно разрешимую на отрезке времени  $[0, T]$  линейную задачу вида (A):

$$\begin{aligned} \frac{d^3 u_{m+1}}{dt^3} &= a_1(t) \frac{du_{m+1}}{dt} + a_2(t)u_{m+1} + \chi_{m+1}(t), \\ u_{m+1}(0) &= -v_{m+1}(0, 0), \\ \frac{du_{m+1}}{dt}(0) &= -\frac{\partial v_{m+1}}{\partial t}(0, 0) - \frac{\partial v_{m+3}}{\partial \tau}(0, 0), \\ \frac{d^2 u_{m+1}}{dt^2}(0) &= -\frac{\partial^2 v_{m+1}}{\partial t^2}(0, 0) - 2\frac{\partial^2 v_{m+3}}{\partial t \partial \tau}(0, 0) - \\ &\quad - \frac{\partial^2 \beta_{m+5}}{\partial \tau^2}(-v_{m+1}(0, 0), 0, 0) + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tau^2}(0, 0)v_{m+2}(0, 0), \end{aligned}$$

где  $a_1(t) = \langle (f_0)'_{e_1} + (f_1)''_{e_1^2} \frac{\partial v_3}{\partial \tau} \rangle$ ,  $a_2(t) = \langle (f_0)'_{e_0} + (f_1)'_{e_1} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + (f_3)'_{e_0} \alpha + (f_3)''_{e_1^2} v_3 \rangle$ ,  $v_1 = v_2 = 0$ , и  $\chi_{m+1}(t)$  — известная непрерывная на  $[0, T]$  функция.

Определив решение данной задачи  $u_{m+1}$ , мы сможем по формуле (11) восстановить функцию  $v_{m+4}$ .  $\triangleright$

**Теорема 2.** Существует  $\omega_0 > 0$  такое, что при  $\omega > \omega_0$  задача (2) имеет на отрезке  $[0, T]$  единственное решение  $x_\omega(t)$ . Кроме того, для

любого  $r = 0, 1, 2, \dots$  найдутся такие положительные числа  $\omega_r (\geq \omega_0)$  и  $c_r$ , что при  $\omega > \omega_r$  эффективно строится приближение

$$\overset{r}{x}_\omega(t) = \sum_{k=0}^r \omega^{-k/2} u_k(t) + \sum_{k=3}^r \omega^{-k/2} v_k(t, \omega t),$$

для которого справедлива оценка

$$\left| x_\omega(t) - \overset{r}{x}_\omega(t) \right| \leq c_r \omega^{-\frac{r+1}{2}}, \quad t \in [0, T]. \quad (12)$$

◁ Под эффективностью понимается тот факт, что при известном решении  $u_0(t)$  усредненной задачи (4) построение приближения  $\overset{r}{x}_\omega(t)$  сводится к решению однозначно разрешимых линейных задач Коши вида (А) и задач вида (В).

В силу теоремы 1 остается установить разрешимость задачи (2) на временном отрезке  $[0, T]$  и получить оценку (12). Определим

$$z_\omega(t) := \overset{r+3}{x}_\omega(t) + \sum_{k=r+4}^{r+6} \omega^{-k/2} v_k(t, \omega t) + (a_{0\omega} + a_{1\omega}t + a_{2\omega}t^2),$$

где  $a_{s\omega}$  подобраны так, чтобы для  $z_\omega$  были выполнены начальные условия задачи (2). Тогда найдутся такие положительные  $c_{r1}$  и  $\omega_1$ , что при  $\omega > \omega_1$  имеют место неравенства  $|a_{s\omega}| \leq c_{r1} \omega^{-\frac{r+3}{2}}$ ,  $s = 0, 1, 2$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{d^3 z_\omega}{dt^3} &= f_0\left(z_\omega, \frac{dz_\omega}{dt}, t, t\omega\right) + \omega^{1/2} f_1\left(z_\omega, \frac{dz_\omega}{dt}, t, t\omega\right) + \\ &+ \omega f_2(z_\omega, t, t\omega) + \omega^{3/2} f_3(z_\omega, t, t\omega) + a_\omega(t), \\ z_\omega(0) &= x_0, \quad \frac{dz_\omega}{dt}(0) = x_1, \quad \frac{d^2 z_\omega}{dt^2}(0) = x_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $a_\omega(t)$  — сколь угодно гладкая на отрезке  $[0, T]$  функция такая, что для некоторых  $c_{r2} > 0$  и  $\omega_2 \geq \omega_1$ , при всех  $t \in [0, T]$  и  $\omega > \omega_2$  выполняется  $|a_\omega(t)| \leq c_{r2} \omega^{-\frac{r+1}{2}}$ .

Из (2) и (13) вытекает задача для  $y = x - z_\omega$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = a_{00}(t, \omega t)y + a_{01}(t, \omega t) \frac{dy}{dt} + \omega^{1/2} \left( a_{10}(t, \omega t)y + a_{11}(t, \omega t) \frac{dy}{dt} \right) +$$

$$+\omega a_{20}(t, \omega t)y + \omega^{3/2}a_{30}(t, \omega t)y - a_\omega(t) \equiv \Xi(y, t, \omega t, \omega), \quad (14)$$

$$y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = \frac{d^2y}{dt^2}(0) = 0,$$

где

$$a_{ij}(t, \tau) = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial e_j} \left( \theta y(t) + z_\omega(t), \theta \frac{dy}{dt}(t) + \frac{dz_\omega}{dt}(t), t, \tau \right) d\theta \equiv$$

$$\equiv \xi_{ij} \left( y(t), z_\omega(t), \frac{dy}{dt}(t), \frac{dz_\omega}{dt}(t), t, \tau \right), \quad i, j = 0, 1,$$

$$a_{i0}(t, \tau) = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial e_0} (\theta y(t) + z_\omega(t), t, \tau) d\theta \equiv$$

$$\equiv \xi_{i0}(y(t), z_\omega(t), t, \tau), \quad i = 2, 3, -l\text{-периодические по } \tau \text{ функции,}$$

причем  $\langle a_{ij}(t, \tau) \rangle = 0, \quad i \neq 0$ .

В силу теоремы Пикара — Линделефа найдутся такие  $c > 0$  и  $t_\omega \in [0, T]$ , что на отрезке  $[0, t_\omega]$  существует единственное решение  $y(t)$  задачи (14) такое, что  $|y(t)| + \left| \frac{dy}{dt}(t) \right| + \left| \frac{d^2y}{dt^2}(t) \right| \leq c, \quad t \in [0, t_\omega]$ . Это решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \Xi(y(s), s, \omega s, \omega) ds, \quad t \in [0, t_\omega].$$

Применяя интегрирование по частям, в правой части последнего равенства можно избавиться от коэффициентов  $\omega^{k/2}, \quad k = 1, 2, 3$ , и перейти к уравнению вида

$$y(t) = \int_0^t \left( b_0(t, \omega, s, \omega s)y(s) + (t-s)b_1(t, \omega, s, \omega s)\frac{dy}{ds}(s) + \right. \\ \left. + (t-s)^2b_3(t, \omega, s, \omega s)\frac{d^2y}{ds^2}(s) \right) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} a_\omega(s) ds, \quad (15)$$

в котором функции  $b_i(t, \omega, s, \tau)$  ( $\omega > \omega_2$ ) являются полиномами относительно  $t$ , коэффициенты которых сколь угодно гладкие относительно  $s$  и  $\tau$ ,  $l$ -периодичны по  $\tau$  и равномерно ограничены.

Действительно, рассмотрим одно из слагаемых

$$\begin{aligned} g_{i\omega}(t) &= \omega^{1/2} \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} a_{1i}(s, \omega s) \frac{d^i y}{ds^i}(s) ds = \\ &= \omega^{1/2} \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \xi_{1i} \left( y(s), z_\omega(s), \frac{dy}{ds}(s), \frac{dz_\omega}{ds}(s), s, \omega s \right) \frac{d^i y}{ds^i}(s) ds. \end{aligned}$$

Поскольку функция  $\xi_{1i}(u_1, v_1, u_2, v_2, s, \tau)$  —  $l$ -периодическая по  $\tau$  с нулевым средним, то существует  $l$ -периодическая по  $\tau$  с нулевым средним функция  $\chi_{1i}(u_1, v_1, u_2, v_2, s, \tau)$  такая, что  $\frac{\partial \chi_{1i}}{\partial \tau} = \xi_{1i}$ . Положим для краткости  $\lambda_{i\omega}(s) = \chi_{1i} \left( y(s), z_\omega(s), \frac{dy}{ds}(s), \frac{dz_\omega}{ds}(s), s, \omega s \right)$ . Тогда

$$\frac{d\lambda_{i\omega}}{ds} = \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial \chi_{1i}}{\partial u_j} \frac{d^j y}{ds^j} + \frac{\partial \chi_{1i}}{\partial v_j} \frac{d^j z_\omega}{ds^j} \right) + \frac{\partial \chi_{1i}}{\partial s} + \omega \xi_{1i} \equiv \zeta_{i\omega} + \omega \xi_{1i}.$$

Применяя метод интегрирования по частям и учитывая, что  $\frac{d^i y}{ds^i}(0) = 0$ , получим

$$\begin{aligned} g_{i\omega}(t) &= \omega^{-1/2} \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \frac{d\lambda_{i\omega}}{ds}(s) \frac{d^i y}{ds^i}(s) ds - \\ &- \omega^{-1/2} \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \zeta_{i\omega}(s) \frac{d^i y}{ds^i}(s) ds = \\ &= \omega^{-1/2} \int_0^t (t-s) \left( \left( \lambda_{i\omega}(s) - \frac{(t-s)}{2} \zeta_{i\omega}(s) \right) \frac{d^i y}{ds^i}(s) - \right. \\ &- \left. \frac{(t-s)}{2} \frac{d^{i+1} y}{ds^{i+1}}(s) \right) ds, \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

Аналогично, применяя метод интегрирования по частям (для слагаемого с  $\omega^{3/2}$  — дважды), получим представление

$$g_{i\omega}(t) := \omega^{i/2} \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} a_{i0}(s, \omega s) y(s) ds, \quad i = 2, 3,$$



в котором нет слагаемых, пропорциональных положительным степеням  $\omega$ . Тем самым представление (15) обосновано.

Обозначим  $\eta(t) = |y(t)| + \left| \frac{dy}{dt}(t) \right| + \left| \frac{d^2y}{dt^2}(t) \right|$ . Тогда из соотношения (15) для некоторого  $K_0 = K_0(c)$  вытекает неравенство

$$|y(t)| \leq K_0 \int_0^t \eta(s) ds + O\left(\omega^{-\frac{r+1}{2}}\right), \quad t \in [0, t_\omega]. \quad (16)$$

Дифференцируя равенства (15) и учитывая (16), получаем оценки

$$\left| \frac{d^i y}{dt^i}(t) \right| \leq K_i \int_0^t \eta(s) ds + O\left(\omega^{-\frac{r+1}{2}}\right), \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\eta(t) \leq K_3 \int_0^t \eta(s) ds + O\left(\omega^{-\frac{r+1}{2}}\right), \quad t \in [0, t_\omega].$$

Отсюда, согласно лемме Гронуолла — Беллмана, имеем  $\eta(t) \leq K_4 \omega^{-\frac{r+1}{2}}$ ,  $\omega > \omega_2$ ,  $t \in [0, t_\omega]$ . В результате приходим к неравенствам

$$\left| \frac{d^i y}{dt^i}(t) \right| \leq K_4 \omega^{-\frac{r+1}{2}}, \quad i = 0, 1, 2, \quad \omega > \omega_2, \quad t \in [0, t_\omega], \quad (17)$$

которые позволяют при больших  $\omega$  продолжить функцию  $y(t)$  на отрезок  $[t_\omega, \min(2t_\omega, T)]$  и получить на этом отрезке оценки (17). Повторив проведенные рассуждения соответствующее число раз, мы установим существование такого числа  $\omega_0 \geq \omega_2$ , что при  $\omega > \omega_0$  задача (2) разрешима на отрезке  $[0, T]$  и при этом справедливо неравенство  $|x_\omega(t) - z_\omega(t)| \leq K_5 \omega^{-\frac{r+1}{2}}$ . Из последнего неравенства и структуры функции  $z_\omega$  следует оценка (12).  $\triangleright$

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В. Б. Левенштаму за постановку задачи и полезные обсуждения результатов работы.

**Литература**

1. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. I // Диф. ур.—2005.—Т. 41, № 6.—С. 761–770.
2. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. II // Диф. ур.—2005.—Т. 41, № 8.—С. 1084–1091.

ШАБАРШИНА ИРИНА СЕРГЕЕВНА

Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет

E-mail: shabarshina@mail.ru

## Часть IV

### Математическое моделирование



## О ДУАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

**В. И. Астахов, Т. В. Кочубей,  
К. С. Шапошников**

Задачи о магнитном поле в присутствии бесконечной пластины с отверстиями и идеальными электрическими свойствами с помощью операторных тождеств преобразуются в дуальные задачи на отверстиях, что облегчает при поиске решений применение численных методов. Материал иллюстрируется примерами расчетов.

### **Введение**

В данной работе на примере бесконечной пластины с отверстиями и идеальными электрическими или магнитными свойствами показывается, что интегральное или интегро-дифференциальное уравнения первого рода на пластине преобразуемы, соответственно, в интегро-дифференциальное или интегральное уравнения первого рода на отверстиях. Другими словами, задачи о магнитной реакции идеально-проводящих пластин и пластин с идеальными магнитными свойствами образуют дуальные пары. При этом решение каждой из задач для совокупности конечных пластин является, одновременно, решением соответствующей дуальной задачи для бесконечной пластины с отверстиями.

### **1. Постановка задач для магнитного поля**

Пренебрежем геометрически малой толщиной пластины, отождествив ее с бесконечной частью плоскости  $E_2$ , изображенной на рис. 1. Пусть пластина имеет конечное число  $N$  отверстий  $S_1^-, S_2^-, \dots, S_N^-$ , объединение которых обозначим  $S^-$ . Будем полагать, что первичное магнитное поле (или ему эквивалентное в смысле [1]) задано своими источниками, которые расположены вне  $E_2$  в ограниченной части пространства  $E_3$  и вместе с отверстиями  $S^-$  укладываются в шаре достаточно большого радиуса  $R$  с границей  $\Gamma_R$  и центром, лежащим на

$S^-$ . Окружающую среду примем однородной ( $\mu = \text{const}$ ), а на  $S^+$ , в зависимости от постановки, зададим условия:

$$\text{а) } \vec{H}\vec{n} = 0 \text{ (идеальный проводник),} \quad (1)$$

$$\text{б) } [\vec{H}\vec{n}] = 0 \text{ (идеальный магнетик),} \quad (2)$$

где  $\vec{H}$  — напряженность результирующего поля,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к  $E_2$  и в обозначениях учтено, что предельные значения входящих в (1), (2) компонент магнитного поля с разных сторон на  $S^+$  совпадают.

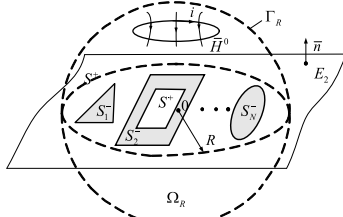


Рис. 1

В условиях (1) еще необходимо указать наличие или отсутствие в отверстиях, так называемых, «замороженных» потоков. Положим

$$\int_{S_k^-} \vec{H} d\vec{S} = \Phi_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad \Phi_k \text{ заданы.} \quad (3)$$

Асимптотика поля в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$|\vec{B}| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 (1/r^3), \quad (4)$$

а в условиях (1), (3) изменения вносит «замороженный» поток  $\Phi$  на отверстиях так, что

$$|\vec{B}| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 (1/r^2) \text{ при } \Phi \neq 0, \text{ где } \Phi = \sum_k \Phi_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Далее выполним редукцию  $\vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{H}^*$ , где  $\vec{H}^0$ ,  $\vec{H}^*$  — напряженности, соответственно, первичного поля и поля магнитной реакции пластины.  $\vec{H}^*$  потенциальна вне  $E_2$ , т. е. можно положить

$\vec{H}^* = -\text{grad } \varphi^*$  вне  $E_2$  и формулировать наши задачи в терминах скалярного потенциала  $\varphi^*$ :

$$\Delta \varphi^* = 0 \quad \text{вне } E_2; \quad (6)$$

$$\text{а) } \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = \vec{H}^0 \vec{n} \text{ на } S^+, \quad \int_{S_k^-} \left( \vec{H}^0 \vec{n} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) dS = \Phi_k, \quad k = \overline{1, N}; \quad (7)$$

$$|\varphi^*| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \quad (1/r^2, \Phi = 0; 1/r, \Phi \neq 0),$$

$$\text{б) } \varphi^* = -\varphi^0 \text{ на } S^+; \quad |\varphi^*| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \quad (1/r^2), \quad (8)$$

где  $\varphi^0$  представляет собой калиброванный нулем в бесконечно удаленной точке потенциал первичного магнитного поля, который в нашей постановке может быть определен для  $\vec{H}^0$  хотя бы на  $E_2 \cup \Gamma_R$ .

Чтобы замкнуть задачи (6)–(8), присоединим к ним неравенство

$$\int_{E_3} |\text{grad } \varphi^*|^2 d\Omega < \infty, \quad (9)$$

означающее, что нас интересует решение, при котором энергия магнитной реакции пластины конечна.

Очевидно, все условия задач (6)–(8) выполняются, если  $\varphi^*$  представить в виде потенциала двойного и простого слоев для случаев а) и б), соответственно, с плотностями  $\tau, \sigma$ , распределенными на  $E_2$  и подчиняющимися уравнениям

$$\text{а) } K_{\tau\sigma}\tau = -2\vec{H}^0 \vec{n} \text{ на } S^+; \quad (10)$$

$$\text{б) } K_{\sigma\tau}\sigma = -2\varphi^0 \text{ на } S^+, \quad (11)$$

где  $K_{\tau\sigma}\tau = -\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \tau \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS$ ,  $K_{\sigma\tau}\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \frac{\sigma}{r} dS$ , нагруженным соотношениями

$$\text{а) } \int_{S_k^-} \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \tau(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{r_{QM}} dS_Q \Big|_{M \rightarrow S_k^-} dS_M = 2 \int_{S_k^-} \vec{H}^0 d\vec{S} - 2\Phi_k,$$

$$\tau = C_k \text{ на } S_k^-, \quad C_k = \text{const}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (12)$$

$$|\tau| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \quad (1/r^2, \Phi = 0; 1/r, \Phi \neq 0)$$

$$\text{б) } \sigma = 0 \text{ на } S^-, \quad |\sigma| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \left(1/r^3\right). \quad (13)$$

Далее, аналогично [2], эти уравнения, с учетом соотношений (12), (13), можно продолжить на  $E_2$  и вариационным методом установить их корректность в подходящих парах функциональных пространств, отвечающих условию (9). Однако, наша цель состоит в том, чтобы преобразовать данные уравнения на  $S^+$  в уравнения на  $S^-$ , имеющей конечную площадь.

## 2. Преобразование уравнений и задач

Главную роль в указанном выше преобразовании сыграют тождества [3]

$$\sigma = K_{\sigma\sigma}^2 \sigma + K_{\tau\sigma} K_{\sigma\tau} \sigma; \quad \tau = K_{\tau\tau}^2 \tau + K_{\sigma\tau} K_{\tau\sigma} \tau, \quad (14)$$

установленные для операторов на замкнутых кусочно-гладких липшицевых поверхностях  $\Gamma$  (или контурах в двумерных задачах) и функций  $\sigma$  и  $\tau$  с носителем  $\Gamma$ , являющихся плотностями потенциалов, соответственно, простого и двойного слоев с конечным интегралом Дирихле в  $E_3$ . Операторы  $K_{\sigma\sigma}$ ,  $K_{\tau\tau}$  выглядят как

$$K_{\sigma\sigma} \sigma(M) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \sigma(Q) \frac{\cos(\vec{n}_M \wedge \vec{r}_{MQ})}{r_{QM}^2} d\Gamma_Q; \quad (15)$$

$$K_{\tau\tau} \tau(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \tau(Q) \frac{\cos(\vec{n}_Q \wedge \vec{r}_{QM})}{r_{QM}^2} d\Gamma_Q, \quad M \in \Gamma. \quad (16)$$

Из (15), (16) замечаем, что при  $M, Q \in E_2$  косинусы в правых частях этих равенств обращаются в нуль, следовательно, если в (14) допускается замена  $\Gamma$  на  $E_2$ , рассматриваемые тождества упрощаются к виду

$$\sigma = K_{\tau\sigma} K_{\sigma\tau} \sigma, \quad \tau = K_{\sigma\tau} K_{\tau\sigma} \tau \text{ на } E_2, \quad (17)$$

показывающему, что  $K_{\tau\sigma}$ ,  $K_{\sigma\tau}$  на плоскости — взаимобратные операторы. Допустимость такой замены обоснована в [4].

Воспользуемся тем, что в нашей постановке первичное поле предполагается заданным своими источниками и, следовательно, правые



части равенств (10), (11) определены не только на  $S^+$ , но и всюду на  $E_2$ . А именно, перепишем (10), (11) в виде

$$\text{а) } K_{\tau\sigma}\tau = -2\vec{H}^0\vec{n} + f_1 \text{ на } E_2; \quad (18)$$

$$\text{б) } K_{\sigma\tau}\sigma = -2\varphi^0 + f_2 \text{ на } E_2, \quad (19)$$

где

$$f_1 = \begin{cases} 0 \text{ на } S^+; \\ K_{\tau\sigma}\tau + 2\vec{H}^0\vec{n} \text{ на } S^-, \end{cases} \quad f_2 = \begin{cases} 0 \text{ на } S^+; \\ K_{\sigma\tau}\sigma + 2\varphi^0 \text{ на } S^-, \end{cases}$$

и подействуем на обе части равенства (18) оператором  $K_{\sigma\tau}$ , а на обе части равенства (19) — оператором  $K_{\tau\sigma}$ . Согласно (17), получим:

$$\text{а) } \tau = 2\varphi^0 + K_{\sigma\tau}f_1 \text{ на } E_2; \quad (20)$$

$$\text{б) } \sigma = 2\vec{H}^0\vec{n} + K_{\tau\sigma}f_2 \text{ на } E_2, \quad (21)$$

из чего видно, что роль неизвестных фактически играют  $f_1$  и  $f_2$  на  $S^-$ . Используя далее (20), (21) и соотношения (12), (13), найдем

$$\text{а) } K_{\sigma\tau}f_1 = -2\varphi^0 + C_k \text{ на } S_k^-, \quad k = \overline{1, N}, \quad (22)$$

причем  $f_1 = 0$  на  $S^+$ ,  $\int_{S_k^-} f_1 dS = 2\Phi_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ ;

$$\text{б) } K_{\tau\sigma}f_2 = -2\vec{H}^0\vec{n} \text{ на } S^-, \text{ причем } f_2 = 0 \text{ на } S^+. \quad (23)$$

### 3. Решение полученных задач

Задачи вида (22), (23) с условием (9) подробно изучены в [2, 3], где показана их корректность в соответствующих парах функциональных пространств. Решения находятся в виде минимизирующих последовательностей Ритца

$$\text{а) } f_1^{(n)}(M) = 2\Phi_k/mes(S_k^-) + \sum_{i=1}^n C_i^{(n)}\sigma_i(M), \quad M \in S_k^-, \quad k \in \overline{1, n};$$

$$\text{б) } f_2^{(n)}(M) = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)}\tau_i(M), \quad M \in S^-,$$

где координаты  $\{C_i^{(n)}\}_{i=1}^n$  приближенных решений получаются решением СЛАУ с вещественной симметричной матрицей. Базисные функции  $\sigma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  можно брать из класса кусочно-непрерывных на  $\Gamma$  функций, равных нулю на  $\Gamma \setminus S^-$  и обладающих свойством  $\int \sigma_i dS = 0$ ,  $k = \overline{1, N}$ , а функции  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  — из класса непрерывных и кусочно-непрерывно дифференцируемых на  $\Gamma$  функций, равных нулю на  $\Gamma \setminus S^-$ .

Расчеты распределения зарядов с плотностью  $f_1$  и токов с функцией потока  $f_2$ , выполненные с помощью оригинального программного пакета, изображены на рис. 2, а) и рис. 3, а), соответственно. На рис. 2, б) и рис. 3, б) представлены распределения токов с функцией потока  $\tau$  и зарядов с плотностью  $\sigma$ , полученные на бесконечной пластине использованием равенств (20), (21), соответственно.

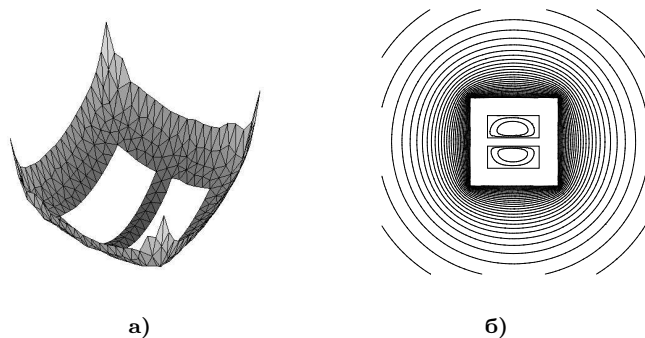


Рис. 2.

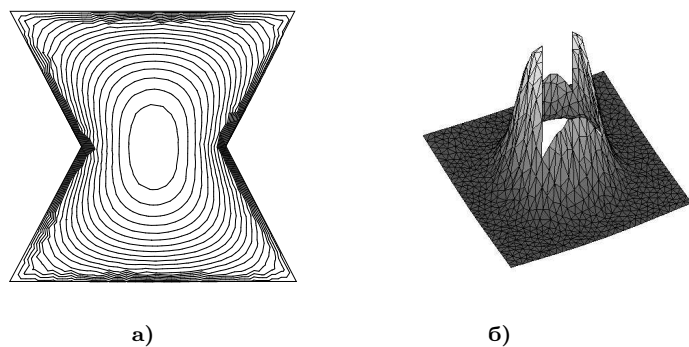


Рис. 3.

### Литература

1. Астахов В. И. О допустимости идеализации границ поляризуемых тел и некоторых энергетических соотношениях для стационарного магнитного и электростатического полей // Изв. вузов. Электромеханика.—2000.—№ 1.—С. 3–14.
2. Астахов В. И. Уравнения первого рода в задачах расчета статических и стационарных полей. Ч. 2 // Изв. вузов. Электромеханика.—2005.—№ 4.—С. 3–17.
3. Астахов В. И. Уравнения первого рода в задачах расчета статических и стационарных полей. Ч. 1 // Изв. вузов. Электромеханика.—2005.—№ 3.—С. 3–15.
4. Астахов В. И., Кочубей Т. В., Шапошников К. С. О дуальности некоторых задач для электромагнитного поля в присутствии пластин с отверстиями и идеальными свойствами // Изв. вузов. Электромеханика.—2007.—№ 4.—С. 38–44.

Астахов Владимир Иванович  
Новочеркасск, Южный научный центр РАН;  
Лаборатория энергетики и электротехники  
E-mail: v.astakhov@mail.ru

Кочубей Татьяна Владимировна  
Новочеркасск, Южный научный центр РАН;  
Лаборатория энергетики и электротехники  
E-mail: tako84@yandex.ru

Шапошников Кирилл Сергеевич  
Новочеркасск, Южный научный центр РАН;  
Лаборатория энергетики и электротехники  
E-mail: \_cyr\_@mail.ru

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ФВП В НЕСИНУСОИДАЛЬНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЯ<sup>1</sup>

**И. Е. Васильев, Е. И. Васильев,  
Р. В. Ключев, О. А. Котова**

На основе уточненной схемы замещения системы электроснабжения промышленного предприятия получена обобщенная математическая модель расчета ФВП и ФВС в несинусоидальность напряжения. Адекватность модели подтверждена экспериментальными результатами активных экспериментов, проведенных при электролизе цинковых растворов.

Нормативные документы по качеству электроэнергии [1, 2] подтверждают необходимость и актуальность определения фактического вклада потребителя (ФВП) и системы (ФВС) в несинусоидальность напряжения в точке общего присоединения (ТОП). Для виновника искажения синусоидального напряжения высшими гармоническими предусмотрены соответствующие экономические санкции.

Существующие методики определения ФВП и ФВС [3, 4] в системах электроснабжения (СЭС) промышленных предприятий в качестве ТОП обычно рассматривают шины 6–10 кВ главной понизительной подстанции (ГПП) и не учитывают взаимное сопротивление  $Z_T$ , равное эквивалентному сопротивлению всех элементов СЭС, включенных между системой и ТОП нелинейного потребителя (трансформаторы, реакторы, кабельные линии).

Адекватная схема замещения при эквивалентировании источников искажения на любой гармонической составляющей напряжения включает линейное сопротивление системы  $Z_C$ , потребителя  $Z_P$  и взаимное сопротивление  $Z_T$  (рис. 1).

Схема замещения (рис. 1) отражает интегрированную систему, где изменение гармонического тока со стороны нелинейной нагрузки вызывает определенное изменение тока гармоники со стороны системы и наоборот.

---

<sup>1</sup> Поддержан грантом Президента РФ, проект МК-1324.2007.8.

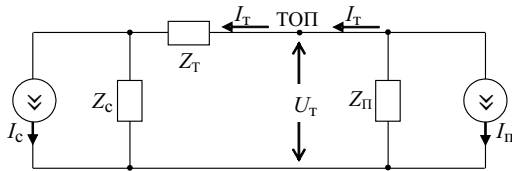


Рис. 1. Эквивалентная схема замещения СЭС относительно ТОП для определения ФВП и ФВС.

На рисунке 1 приняты следующие обозначения:

$I_{\Pi}$  — гармоническая составляющая источника тока искажения нелинейного потребителя;

$Z_{\Pi}$  — сопротивление линейной части нагрузки потребителя для данной гармонической составляющей;

$I_C$  — гармоническая составляющая эквивалентного источника тока искажения от электрической системы;

$Z_C$  — эквивалентное линейное сопротивление электрической системы для данной гармонической составляющей;

$U_T$  — гармоническая составляющая напряжения в ТОП;

$I_T$  — гармоническая составляющая тока в цепи питания потребителя;

$Z_T$  — эквивалентное линейное взаимное сопротивление для данной гармонической составляющей.

Изменение тока потребителя  $\Delta I_{\Pi} = I_{\Pi_2} - I_{\Pi_1}$  и системы  $\Delta I_C = I_{C_2} - I_{C_1}$  до (индекс 1) и после (индекс 2) «возмущения» в СЭС приводит к изменению тока в ТОП  $\Delta I_T = I_{T_2} - I_{T_1}$  и напряжения  $\Delta U_T = U_{T_2} - U_{T_1}$ .

Из схемы (рис. 1) следует, что

$$I_{\Pi} = \frac{U_T}{Z_{\Pi}} + I_T, \quad (1)$$

и тогда ФВП будет равен:

$$U_{\text{ФВП}} = I_{\Pi} \frac{(Z_C + Z_T)Z_{\Pi}}{Z_C + Z_T + Z_{\Pi}} = \frac{(U_T + I_T Z_{\Pi})}{Z_C + Z_T + Z_{\Pi}} (Z_C + Z_T). \quad (2)$$

Аналогично, для системы:

$$I_C = \frac{U_T}{Z_C + Z_T} - I_T, \quad (3)$$

$$U_{\text{ФВС}} = I_C \frac{(Z_C + Z_T)Z_{\Pi}}{Z_C + Z_T + Z_{\Pi}} = \frac{(U_T - I_T(Z_C + Z_T))Z_{\Pi}}{Z_C + Z_T + Z_{\Pi}}. \quad (4)$$

Очевидно, что в ТОП выполняется равенство:

$$U_{\text{ФВП}} + U_{\text{ФВС}} = U_T. \quad (5)$$

Выше рассмотрен случай, когда изменялись токи или со стороны потребителя, или со стороны системы. Рассмотрим случай, когда при неизменных токах искажения происходит изменение линейных нагрузок и, следовательно, сопротивлений  $Z_C + Z_T$  и  $Z_{\Pi}$ .

Из схемы замещения (рис. 1) вытекают соотношения:

$$U_T = Z_{\Pi}(I_{\Pi} - I_T), \quad (6)$$

$$U_T = (Z_C + Z_T)(I_C + I_T). \quad (7)$$

Изменение сопротивления  $Z_{\Pi}$  на величину  $\Delta Z_{\Pi}$  вызывает изменение тока на  $\Delta I_{\Pi}$  и напряжения в ТОП на  $\Delta U_{\Pi}$ . Для этого случая выражение (7) принимает вид:

$$(U_T + \Delta U_T) = (Z_C + Z_T)(I_C + (I_T + \Delta I_T)). \quad (8)$$

Вычитая (7) из (8), получаем эквивалентное линейное сопротивление:

$$(Z_C + Z_T) = \frac{\Delta U_T}{\Delta I_T}. \quad (9)$$

Таким образом, изменение режима со стороны нагрузки позволяет находить сопротивление также, как и при изменении тока искажения со стороны потребителя  $\Delta I_{\Pi}$ .

Рассмотрим случай изменения линейной части нагрузки со стороны системы, т. е.  $Z_C$  на величину  $\Delta Z_C$ . При этом выражение (6) принимает вид:

$$(U_T + \Delta U_T) = Z_{\Pi}(I_{\Pi} - (I_T + \Delta I_T)). \quad (10)$$

Из разности выражений (10) и (6) получаем эквивалентное сопротивление потребителя  $Z_{\Pi}$ :

$$Z_{\Pi} = -\frac{\Delta U_T}{\Delta I_T}. \quad (11)$$

Это означает, что сопротивление  $Z_{\Pi}$  можно найти как по изменению  $\Delta I_C$ , так и по  $\Delta Z_C$ .

Поскольку активные сопротивления  $R_{\Pi}$ ,  $R_C$  и  $R_B$  всегда положительны, то при  $\operatorname{Re} \left[ \frac{\Delta U_T}{\Delta I_T} \right] > 0$  по выражению (9) вычисляется сопротивление  $(Z_C + Z_T)$ . Если  $\operatorname{Re} \left[ \frac{\Delta U_T}{\Delta I_T} \right] < 0$ , то по выражению (11) определяется  $Z_{\Pi}$ . ФВП и ФВС вычисляются по формулам (2), (4).

Выше рассмотрены случаи, когда происходило изменение только одного из параметров схемы замещения. Рассмотрим наиболее общий случай, когда произошло изменение токов искажения  $I_C$  и  $I_{\Pi}$  на  $\Delta I_C$  и  $\Delta I_{\Pi}$ .

Изменение тока  $I_C$  вызывает изменение тока в цепи питания потребителя на величину  $\Delta I_{TC}$  и напряжения в ТОП на величину  $\Delta U_{TC}$ . Аналогично, изменение тока  $I_{\Pi}$  вызывает изменение тех же параметров на  $\Delta I_{TP}$  и  $\Delta U_{TP}$ . Суммарное изменение параметров составляет:

$$\Delta U_T = \Delta U_{TC} + \Delta U_{TP}, \quad (12)$$

$$\Delta I_T = \Delta I_{TC} + \Delta I_{TP}. \quad (13)$$

Тогда выражение для соотношения приращений напряжения и тока в ТОП имеет вид:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{\Delta U_{TC} + \Delta U_{TP}}{\Delta I_{TC} + \Delta I_{TP}}. \quad (14)$$

Преобразуем выражение (14), умножив и поделив его на произведение  $(\Delta I_{TC} \cdot \Delta I_{TP})$ , и, с учетом выражений (9), (11), получаем:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{\frac{(Z_C + Z_T)}{\Delta I_{TC}} - \frac{Z_{\Pi}}{\Delta I_{TP}}}{\frac{1}{\Delta I_{TP}} + \frac{1}{\Delta I_{TC}}}. \quad (15)$$

После преобразования получаем в окончательном виде обобщенную математическую модель результирующего сопротивления:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{(Z_C + Z_T)\Delta I_{TC} - Z_{\Pi}\Delta I_{TP}}{\Delta I_{TP} + \Delta I_{TC}}. \quad (16)$$

Согласно (2), (4), фактический вклад в напряжение ТОП  $U_T$  со стороны системы и потребителя составляет:

$$U_{\text{ФВС}} = I_C Z_{\text{рез}}, \quad (17)$$

$$U_{\text{ФВП}} = I_{\Pi} Z_{\text{рез}}. \quad (18)$$

Действительно, если произошло изменение только тока  $I_{\Pi}$ , то  $\Delta I_{TC} = 0$  и из (16) следует, что  $Z_{рез} = Z_C + Z_T$ , что соответствует выражению (9). Если произошло изменение только тока  $I_C$ , то  $\Delta I_{TP} = 0$  и из (16) следует, что  $Z_{рез} = -Z_{\Pi}$ , что соответствует выражению (11).

Разработана методика определения ФВП и ФВС в несинусоидальность напряжения в Топ на основе инструментального измерения (приборы АР-5, ПКК-57) параметров СЭС при проведении активных экспериментов до и после «возмущений», вызываемых:

- включением/отключением батарей статических конденсаторов (БСК);
- регулированием напряжения трансформаторов под нагрузкой (РПН);
- включением трансформаторов на параллельную работу.

Экспериментальные исследования проводились на ОАО «Электроцинк» при электролизе цинковых растворов, где источниками вышедших гармонических токов и напряжений являлись мощные вентиляционные преобразователи. По результатам измерений определялись  $\Delta I_C = I_{C_2} - I_{C_1}$ ,  $\Delta I_{\Pi} = I_{\Pi_2} - I_{\Pi_1}$ ,  $\Delta U_T = U_{T_2} - U_{T_1}$  и, с использованием (16), по всем гармоническим составляющим напряжения рассчитывалось значение  $Z_{рез}$ ,  $U_{ФВС}$  (17) и  $U_{ФВП}$  (18).

Полученные при проведении активных экспериментов данные показали, что относительная погрешность расчетов  $Z_{рез}$  по высшим гармоническим составляющим в исследуемой СЭС находится в пределах  $(0,056 \div 6,3)\%$ , что подтверждает адекватность обобщенной математической модели (16) и высокую эффективность определения ФВП и ФВС на основе активных экспериментов.

## Литература

1. Федеральный закон № 184-ФЗ «О техническом регулировании».
2. ГОСТ 13109-97. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения.—Минск: Изд-во стандартов, 1998.—31 с.
3. Карташев И. И. Качество электроэнергии в системах электроснабжения. Способы его контроля и обеспечения.— М.: Изд-во МЭИ, 2000.—120 с.
4. Методические указания по контролю и анализу качества электроэнергии в системах электроснабжения общего назначения (РД 153-34.0-15.502-2002).— М., 2002.—32 с.



Васильев Игорь Евгеньевич  
Владикавказ, Северо-Кавказский  
горно-металлургический университет  
E-mail: [elsi@hotmail.ru](mailto:elsi@hotmail.ru)

Васильев Евгений Игоревич  
Владикавказ, Северо-Кавказский  
горно-металлургический университет  
E-mail: [vasiliev\\_ei@mail.ru](mailto:vasiliev_ei@mail.ru)

Клюев Роман Владимирович  
Владикавказ, Северо-Кавказский  
горно-металлургический университет  
E-mail: [Kluev\\_P@mail.ru](mailto:Kluev_P@mail.ru)

Котова Ольга Анатольевна  
Владикавказ, Северо-Кавказский  
горно-металлургический университет  
E-mail: [elsi@hotmail.ru](mailto:elsi@hotmail.ru)

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ГОРОДОВ

**И. Е. Васильев, Д. С. Сахаров, Р. В. Ключев**

В статье представлена математическая модель расчета надежности систем электроснабжения городов СЭСГ, основанная на анализе аварийных ситуаций на фидерах 6–10 кВ городских распределительных пунктов (ГРП), позволяющая рассчитывать и прогнозировать количественные оценки надежности СЭСГ.

Система электроснабжения городов (СЭСГ) представляет собой сложную структуру с двумя иерархическими уровнями напряжений распределительной сети: 6–10 кВ и 0,4 кВ — и смешанными схемами электроснабжения потребителей. Из-за значительного материального и морального износа электрооборудования электрических сетей и служебного транспорта СЭСГ имеет относительно невысокий уровень надежности и эксплуатации оборудования. Исследование надежности такой сложной системы в общем виде практически невозможно, хотя актуальность такого исследования не вызывает сомнений.

Поэтому целесообразным является использование метода декомпозиции СЭСГ и исследование надежности основных элементов системы. Основным системообразующим элементом СЭСГ является городской распределительный пункт (ГРП) 6–10 кВ со средним количеством отходящих фидеров  $m = 4 - 5$ .

В процессе эксплуатации ГРП, при  $m = 4$ , может находиться в одном из следующих пяти конечных состояний  $S_0 - S_4$ , соответственно (рис. 1):  $S_0$  — отключений фидеров нет, система работает в нормальном режиме;  $S_1$  — аварийно отключен один фидер;  $S_2$  — аварийно отключены два фидера;  $S_3$  — аварийно отключены три фидера;  $S_4$  — аварийно отключены четыре фидера. Из  $i$ -го состояния в  $j$ -ое система переходит с постоянной интенсивностью  $\lambda_{ij}$ , обратно — с постоянной интенсивностью  $\mu_{ji}$ . Граф состояний системы в процессе перехода при числе состояний, равном 5, представлен на рис. 2.

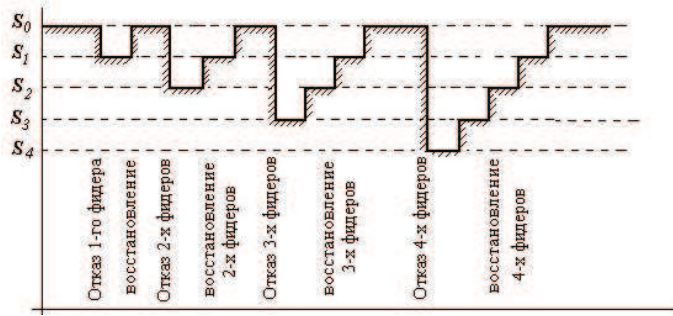
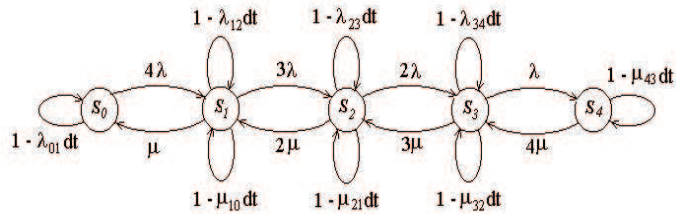


Рис. 1. Диаграмма состояний СЭСГ

Рис. 2. Граф перехода состояний  $S_i$ 

Вероятность состояний может быть определена при решении системы дифференциальных уравнений А. П. Колмогорова [1]. Вероятность того, что система на интервале времени  $\Delta t$ , примыкающем ко времени  $t$ , находится в состоянии  $S_0$  равна произведению вероятности того, что система в момент времени  $t$  находилась в начальном состоянии, на вероятность того, что она не перейдет на интервале  $\Delta t$  из состояния  $S_0$  в состояние  $S_1$ , плюс произведение вероятности того, что система в момент времени  $t$  находится в состоянии  $S_1$ , на вероятность того, что она перейдет в состояние  $S_0$  из состояния  $S_1$  за время  $\Delta t$ . Аналитически эта формулировка может быть представлена следующим образом:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)\{1 - P_{01}(\Delta t)\} + P_1(t)P_{10}(\Delta t). \quad (1)$$

Аналогично записываются уравнения для вероятностей того, что система на интервале времени  $\Delta t$ , примыкающем к времени  $t$ , находится в состоянии  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ .

В результате получается система уравнений:

$$\begin{cases} P_0(t + \Delta t) = P_0(t)\{1 - P_{01}(\Delta t)\} + P_1(t)P_{10}(\Delta t); \\ P_1(t + \Delta t) = P_1(t)\{1 - [P_{12}(\Delta t) + P_{10}(\Delta t)]\} + P_0(t)P_{01}(\Delta t) + \\ \quad + P_2(t)P_{21}(\Delta t); \\ P_2(t + \Delta t) = P_2(t)\{1 - [P_{23}(\Delta t) + P_{21}(\Delta t)]\} + P_1(t)P_{12}(\Delta t) + \\ \quad + P_3(t)P_{32}(\Delta t); \\ P_3(t + \Delta t) = P_3(t)\{1 - [P_{34}(\Delta t) + P_{32}(\Delta t)]\} + P_2(t)P_{23}(\Delta t) + \\ \quad + P_4(t)P_{43}(\Delta t); \\ P_4(t + \Delta t) = P_4(t)\{1 - P_{43}(\Delta t)\} + P_3(t)P_{34}(\Delta t). \end{cases} \quad (2)$$

Вероятность перехода из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  вследствие отказа с интенсивностью  $\lambda_{ij}$  равна

$$P_{ij}(\Delta t) = 1 - \exp(-\lambda_{ij}\Delta t) = 1 - (1 - \lambda_{ij}\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t. \quad (3)$$

Вероятность перехода из состояния  $S_j$  в состояние  $S_i$  вследствие восстановления с интенсивностью  $\mu_{ji}$  равна  $\mu_{ji}\Delta t$ .

Вероятность отсутствия перехода из состояния  $S_1$  в состояние  $S_2$  или  $S_0$  равна

$$1 - [P_{12}(\Delta t) + P_{10}(\Delta t)]. \quad (4)$$

После подстановки полученных выражений в (2) можно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - P_0(t)\lambda_{01}\Delta t + P_1(t)\mu_{10}\Delta t; \\ P_1(t + \Delta t) = P_1(t) - P_1(t)[\lambda_{12} + \mu_{10}]\Delta t + P_0(t)\lambda_{01}\Delta t + \\ \quad + P_2(t)\mu_{21}\Delta t; \\ P_2(t + \Delta t) = P_2(t) - P_2(t)[\lambda_{23} + \mu_{21}]\Delta t + P_1(t)\lambda_{12}\Delta t + \\ \quad + P_3(t)\mu_{32}\Delta t; \\ P_3(t + \Delta t) = P_3(t) - P_3(t)[\lambda_{34} + \mu_{32}]\Delta t + P_2(t)\lambda_{23}\Delta t + \\ \quad + P_4(t)\mu_{43}\Delta t; \\ P_4(t + \Delta t) = P_4(t) - P_4(t)\mu_{43}\Delta t + P_3(t)\lambda_{34}\Delta t. \end{cases} \quad (5)$$

Переносим из правой части уравнения (5)  $P_i(t)$  в левую часть и поделим правую и левую часть на  $\Delta t$ . Учитывая, что  $P_i(t + \Delta t) - P_i(t) = \Delta P_i$ , и заменяя  $\Delta P_i / \Delta t = dP_i / dt$ , можно получить систему

дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \mu_{10}P_1(t); \\ \frac{dP_1}{dt} = \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{12} + \mu_{10})P_1(t) + \mu_{21}P_2(t); \\ \frac{dP_2}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) - (\lambda_{23} + \mu_{21})P_2(t) + \mu_{32}P_3(t); \\ \frac{dP_3}{dt} = \lambda_{23}P_2(t) - (\lambda_{34} + \mu_{32})P_3(t) + \mu_{43}P_4(t); \\ \frac{dP_4}{dt} = \lambda_{34}P_3(t) - \mu_{43}P_4(t). \end{cases} \quad (6)$$

Процесс отключения фидеров можно рассматривать как марковский стационарный процесс [2], тогда производные  $dP_i/dt = 0$  (вероятности изменения состояния не меняются с течением времени). Тогда вероятностная модель расчета надежности при аварийных ситуациях в СЭСГ будет представлена системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_{01}P_0(t) + \mu_{10}P_1(t); \\ 0 = \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{12} + \mu_{10})P_1(t) + \mu_{21}P_2(t); \\ 0 = \lambda_{12}P_1(t) - (\lambda_{23} + \mu_{21})P_2(t) + \mu_{32}P_3(t); \\ 0 = \lambda_{23}P_2(t) - (\lambda_{34} + \mu_{32})P_3(t) + \mu_{43}P_4(t); \\ 0 = \lambda_{34}P_3(t) - \mu_{43}P_4(t); \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Шестое уравнение для этой системы (при пяти неизвестных) необходимо в силу того, что пять первых уравнений сводятся к четырем. Решение системы (7) дает следующие корни:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\mu_{21}\mu_{10}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{32}\mu_{21}\mu_{10}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{\mu_{43}\mu_{32}\mu_{21}\mu_{10}}}; \\ P_1 &= P_0 \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}}; \quad P_2 = P_0 \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\mu_{21}\mu_{10}}; \quad P_3 = P_0 \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{32}\mu_{21}\mu_{10}}; \\ P_4 &= P_0 \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{\mu_{43}\mu_{32}\mu_{21}\mu_{10}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3. \quad (9)$$

Согласно рис. 2, принимая во внимание, что  $\lambda_{ij} = \lambda = 0.0265$  1/ч и  $\mu_{ji} = \mu = 0.339$  1/ч [3], а законы распределения времени наработки на отказ и времени восстановления — экспоненциальные, значения корней системы уравнений (8) равны:

$$P_0 = \frac{1}{1 + 4 \cdot \frac{\lambda}{\mu} + 4 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4};$$

$$P_1 = P_0 \cdot 4 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right); \quad P_2 = P_0 \cdot 6 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2; \quad P_3 = P_0 \cdot 4 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3; \quad (10)$$

$$P_4 = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4.$$

Тогда величины вероятностей нахождения в соответствующих состояниях равны:  $P_0 = 0,73997$ ,  $P_1 = 0,23145$ ,  $P_2 = 0,02708$ ,  $P_3 = 0,001414$ ,  $P_4 = 0,000027$ . Коэффициент готовности  $K_{\Gamma} = 0,9968$ .

Динамика изменения коэффициента готовности  $K_{\Gamma} = F(m)$  в процессе устранения аварийных состояний  $S_i$  при наибольшем их числе  $m = 5$  и текущем числе восстанавливаемых аварийных состояний  $k = 5, 4, 3, 2, 1, 0$  представлена на рис. 3.

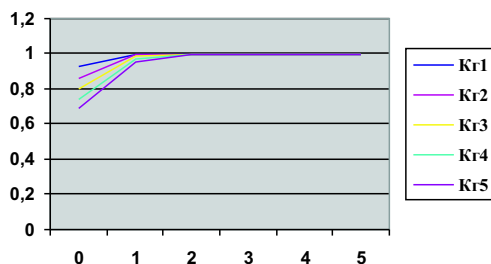


Рис. 3. Динамика изменения коэффициента готовности.

Математическая модель (7) позволяет прогнозировать на предстоящий период (1 год) ожидаемое число одновременных аварийных отключений фидеров по значениям вероятностей состояний  $P_i$  при  $i = 1, 2, 3, 4$ , как вероятность отключения одновременно  $i$  фидеров. В таблице 1 представлены возможные аварийные состояния СЭСГ и расчетное значение количества одновременных отключений фидеров.

Таблица 1

| Состояния $S_i$ | $P_i$   | 2005 | $P_i$    | 2006 |
|-----------------|---------|------|----------|------|
| $S_1$           | 0,2315  | 83   | 0,26834  | 98   |
| $S_2$           | 0,0271  | 10   | 0,041966 | 15   |
| $S_3$           | 0,00142 | 0,5  | 0,003283 | 1,2  |
| $S_4$           | 0,00003 | —    | 0,000128 | 0,05 |

Ожидаемое число аварийных отключений имеет устойчивую тенденцию роста, что подтверждается анализом наблюдений на первый квартал 2007 г. На ухудшение состояния распределительных сетей 6–10 кВ указывают появление аварийных ситуаций при одновременном отключении четырех и пяти фидеров на момент проведения расчетов.

### Литература

1. Фокин Ю. А., Туфанов В. А. Оценка надежности систем электроснабжения.—М.: Энергоиздат, 1981.—224 с.
2. Голинкевич Т. А. Прикладная теория надежности.—М: Высшая школа, 1985.—168 с.
3. Васильев И. Е., Бузовкин В. Л. Адаптивная математическая модель надежности системы электроснабжения города // Изв. вузов. Электромеханика.—Новочеркасск, 2005.—№ 5.—С. 19–22.

Васильев Игорь Евгеньевич  
Владикавказ, Северо-Кавказский  
горно-металлургический университет  
E-mail: elsi@hotmail.ru

Сахаров Дмитрий Святославович  
Владикавказ, Северо-Кавказский  
горно-металлургический университет  
E-mail: dmtrsv@rambler.ru

Клюев Роман Владимирович  
Владикавказ, Северо-Кавказский  
горно-металлургический университет  
E-mail: Kluev\_P@mail.ru

## О ПОГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИ НЕЙМАНА

**В. Н. Думачев, В. И. Малыхин, В. А. Родин**

В работе проведены исследования критерия выбора оптимальной ставки налога фирмы для решения задачи максимизации суммарных налоговых поступлений за несколько циклов.

### **Введение**

В основу работы положены теоретические исследования, приведенные во многих статьях и монографиях (мы будем придерживаться работ [1–3]). В отличие от этих работ, исследования будут проведены настолько подробно, чтобы обеспечить возможность прикладного использования инструментов и схем в практической деятельности налоговых органов. В конце работы приведено решение нескольких типичных современных задач.

Похожие задачи о необходимости соблюдения принципа «соразмерности» в теории налогообложения — когда интересы государства и налогоплательщиков сбалансированы, постоянно встречаются в практической деятельности современной налоговой службы, и они будут особо актуальными в будущем при совершенствовании ее методов работы. Нас также будет интересовать критическое значение параметра (величины ставки налога), превышение которого создает объективную возможность появления криминальных явлений (например, уклонение от налогов с целью выживания). Умение вычислять эти параметры особенно важно для прогнозирования и предотвращения финансовых преступлений. В работе [2] полностью исследованы явления, которые возникают при описании работы фирмы за один цикл в условиях налогообложения. В настоящей работе проведены исследования критерия выбора оптимальной ставки налога фирмы для решения задачи максимизации суммарных налоговых поступлений за несколько циклов.



## 1. Стационарные траектории в модели Неймана

Одно из возможных представлений модели экономики Неймана описывается парой  $(C, K)$ , где  $C$  — пространство товаров, а  $K$  — множество производственных процессов, или отображений, которые переводят матрицу затрат  $\mathbf{A}$  в матрицу выпуска  $\mathbf{B}$ . Обычно рассматривают линейное отображение  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  или отображения вида: вектор  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{z})$  отображается в вектор  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{z})$ . Вектор  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$  характеризует интенсивность развития. Координаты этого вектора положительны. Другими словами линейная оболочка  $(\mathbf{z} \cdot \mathbf{A})$  переходит в линейную оболочку  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{z})$ . Заметим, что численные коэффициенты, координаты вектора  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$  не обязаны быть меньше единицы. Экономика (или производство) в модели Неймана функционирует циклами, в цикле интенсивности постоянны, длительность циклов одинакова. Для простоты будем считать цены  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  постоянными. Экономика Неймана называется замкнутой, если в следующем цикле она перерабатывает те товары, которые произвела в предыдущем цикле. Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{z}^{(k+1)} \leq \mathbf{B} \cdot \mathbf{z}^{(k)}$ , где  $\mathbf{z}^{(k)}$  — вектор интенсивности в  $k$ -ом цикле. Неравенство векторов означает, что каждая координата вектора слева не превосходит соответствующую координату справа.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Последовательность векторов  $\mathbf{z}^{(k)}$  называют *стационарной*, если существует такое число  $\lambda > 0$ , что  $\mathbf{z}^{(k+1)} = \lambda \mathbf{z}^{(k)}$  или, тем самым, существует такое число  $\lambda > 0$  и начальный вектор  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ , что  $\mathbf{z}^{(k+1)} = \lambda^k \mathbf{z}$ . Число  $\lambda > 0$  называется *коэффициентом роста*. Экономика называется *сужающейся*, если  $\lambda < 1$ , *стабильной* при  $\lambda = 1$  и *расширяющейся*, если  $\lambda > 1$ . Стационарная траектория задается парой  $(\lambda, \mathbf{z})$ .

Естественно желание найти стационарную траекторию максимального роста. В этом случае математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \max \\ \mathbf{Bz} &\geq \lambda \mathbf{Az}, \quad z_i \geq 0, \quad z_i \neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Другими словами, необходимо определить такое максимальное число  $\lambda > 0$ , для которого найдется ненулевой вектор  $\mathbf{z}$ , удовлетворяющий неравенству  $\lambda \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \leq \mathbf{B} \cdot \mathbf{z}$ .

Данная задача в общем случае очень сложна. В настоящей работе нас будут интересовать стратегии налоговых органов в рамках

поставленной задачи. Естественно, нет смысла рассматривать сужающуюся экономику (или производство), поэтому мы будем считать, что  $\lambda \geq 1$ .

## 2. Налог на прибыль

Рассмотрим один цикл работы экономики Неймана. Пусть ставка налога равна  $t$ . База для налога на прибыль равна разности полных затрат фирмы на производство продукции и полной прибыли фирмы от реализации произведенной продукции:  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z})$ . Налог равен  $t(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z})$ . При этом доход фирмы уменьшается и становится равным

$$I(z) = (1 - t)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}).$$

Предприятие, фирма хотела бы естественно развиваться максимально быстро, и поэтому «она ищет» стационарную траекторию  $(\lambda, \mathbf{z})$  максимального роста. Для этого фирме нужно решить задачу (1). Однако, как будет показано ниже, введение налога уменьшит коэффициент роста и, следовательно, уменьшит базу налогообложения. Возникает естественная задача на экстремум. Уменьшение ставки налога уменьшает налог, а чрезмерное увеличение налога может привести к существенному уменьшению налогооблагаемой базы. Следовательно, оптимальное решение может находиться внутри, между крайними состояниями. Определение этого оптимального значения за один цикл или для более сложной задачи — суммарного налогообложения за  $n$ -циклов — и является основной задачей данной работы.

Для полноты изложения, следуя работе [2], сначала рассмотрим известные явления, вскрытые в указанной работе математическими методами. До введения налога на прибыль  $\lambda$  было максимальным числом, при котором существует вектор  $\mathbf{z}$  и выполняется неравенство  $\lambda \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \leq \mathbf{B} \cdot \mathbf{z}$ . Перепишем это неравенство в виде  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \geq (\lambda - 1)\mathbf{A} \cdot \mathbf{z}$  или  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \geq (\lambda - 1)\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}$ . Таким образом, выручки хватило на оплату покупки ресурсов в начале цикла на сумму  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}$ , и в начале следующего цикла из прибыли  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}$  оплатить покупку ресурсов на сумму  $(\lambda - 1)\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}$ . После введения налога от прибыли у предприятия осталось  $(1 - t)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z})$ . Вспоминая определение числа  $\lambda$ , получаем, что  $\lambda$  — это максимальное число, для которого справедливо нера-

венство  $(1-t)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}) \geq (1-t)(\lambda-1)\mathbf{A} \cdot \mathbf{z}$ . Итак, после введения налога, оставшейся части прибыли хватило на покупку ресурсов в начале цикла  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{z})$ , и в конце или в начале следующего цикла из прибыли  $(1-t)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z})$  оплатить покупку ресурсов  $-(1-t)(\lambda-1)\mathbf{A} \cdot \mathbf{z}$ . Всего получается  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + (1-t)(\lambda-1)\mathbf{A} \cdot \mathbf{z} = [(1-t)(\lambda-1) + 1]\mathbf{A} \cdot \mathbf{z}$ . Значение в квадратных скобках определяет новый коэффициент расширения:  $\lambda_t^1 = (1-t)(\lambda-1) + 1 = (1-t)\lambda + t$ . Несложно показать, что через  $n$  циклов коэффициент расширения будет равен

$$\lambda_t^{(n)} = (\lambda-1)(1-t)^n + 1.$$

Данная формула объясняет известную финансовую стратегию:

**Утверждение 1.** *При изъятии всей прибыли производство не расширяется а становится стабильным.*

Действительно, при  $t = 1$  имеем  $\lambda_1^{(n)} = 1$ . Это интересное явление поясняет осторожную, и как правило неэффективную политику определенных фирм и даже государств. Тривиально и нижеследующее утверждение.

**Утверждение 2.** *Если производство расширяется, то оно остается расширяющимся после введения налога только на прибыль. Если коэффициент расширения больше единицы, то после введения налога на прибыль он уменьшится, но останется больше единицы.*

Действительно, при  $t < 1$  и  $\lambda > 1$  из (1) следует  $1 < \lambda_t^{(n)} < \lambda$ .

### 3. Суммарное налогообложение

Обозначим величину налога на прибыль в  $k+1$  цикле  $N_{k+1}$ , тогда  $N_{k+1} = \lambda_t^{k+1}N_k$ , а  $N_0 = N = t(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z})$ . Суммарное значение налога за  $n$  циклов равно

$$\sum_{m=0}^n N_m = F(n, t)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}),$$

где

$$F(n, t) = t \left[ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^k \lambda_t^{(i)} \right].$$

Последняя формула позволяет для каждой экономики с определенным коэффициентом расширения  $\lambda$  найти такую оптимальную

ставку налогообложения  $t^* = t(\lambda, n)$ , при которой налоговые сборы за  $n$  циклов будут максимальными. Аналитически решение задачи выглядит следующим образом. Приравнявая производную функции  $\partial_t F(n, t)$  к нулю, найдем оптимальную ставку налогообложения  $t^* = t^*(\lambda)$ . Условие, чтобы эта оптимальная ставка лежала в интервале  $[0, 1]$ , имеет вид:  $t^*(\lambda) < 1$ , откуда находим  $\lambda^*$ .

ПРИМЕР 1.  $n = 2$ . Так как скобка  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z})$  не содержит  $t$ , то исследуем на экстремум функцию

$$F(2, t) = t \times (1 + \lambda_t^1) = t(1 + \lambda + t(1 - \lambda)).$$

Приравнявая производную этой функции к нулю, получаем уравнение

$$F'(2, t) = 1 + \lambda + 2t(1 - \lambda) = 0$$

с решением

$$t^* = \frac{1 + \lambda}{2(\lambda - 1)}.$$

Условие, чтобы эта оптимальная ставка лежала в интервале  $[0, 1]$ , имеет вид:  $t^* = \frac{1 + \lambda}{2(\lambda - 1)} < 1$  или  $\lambda > 3$ .

Заметим, что если  $\lambda \leq 3$ , то  $t^* \geq 1$  и реально для этого случая,  $t^* = 1$ . Это означает, что выгодно для налоговых органов вся прибыль. Так как в этом случае рост производства незначительный —  $\lambda \leq 3$ , то для фирмы возникает психологическая угроза ухода «в тень».

**Вывод** (*Несколько необычный*). Для быстро растущих производств ( $\lambda > 3$ ) выгодно в случае оптимального суммарного за два цикла налогообложения делать ставку меньше единицы (точнее она равна  $t^* = \frac{1 + \lambda}{2(\lambda - 1)}$ , для  $n = 2$ ). Медленно растущие производства ( $\lambda \leq 3$ ) не имеют оптимального решения для ставки налога в отрезке  $[0, 1]$ , поэтому для этого случая  $t^* = 1$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пограничное значение суммарного налогообложения для  $k$  циклов производства  $\lambda_k^*$ , будем называть *пороговой константой*.

В общем случае, для изучения особенностей суммарного налогообложения для  $k$  циклов, обозначим аналогичную константу как  $\lambda_k^*$ .

Ниже мы покажем, что такие константы существуют для суммарного налогообложения любой длины  $k$  и исследуем особенности

последовательности  $\{\lambda_k^*\}$  с целью дать практические рекомендации для налоговых органов.

**Утверждение 3.** Последовательность  $\lambda_k^*$  монотонно убывает к двум при увеличении параметра  $k$ .

◁ Напомним, что  $\lambda_t^{(n)} = (\lambda - 1)(1 - t)^n + 1$ , поэтому

$$\lambda^{(n)}|_{t=1} = 1, \quad \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} = \begin{cases} 1 - \lambda; & n = 1, \\ n(1 - \lambda^{(n-1)}); & n > 1, \end{cases}$$

$$\left. \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \right|_{t=1} = \begin{cases} 1 - \lambda; & n = 1, \\ 0; & n > 1. \end{cases}$$

Перепишем функцию  $F(n, t)$  в виде  $F(n, t) = t[1 + \lambda_1(1 + \Lambda(n, t))]$ , где  $\Lambda(n, t) = \sum_{k=2}^{n-1} \prod_{i=2}^k \lambda_i$  имеет легко проверяемые свойства:

$$\Lambda(n, 1) = n - 2, \quad \left. \frac{\partial \Lambda(n, t)}{\partial t} \right|_{t=1} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 1 + \lambda_1(1 + \Lambda) + t \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}(1 + \Lambda) + \lambda_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right).$$

Так как

$$\left. \lambda_1(1 + \Lambda) \right|_{t=1} = ((\lambda - 1)(1 - t)^1 + 1)(1 + \Lambda(n, t))|_{t=1} = n - 1,$$

$$\left. \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}(1 + \Lambda) + \lambda_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) \right|_{t=1} = (1 - \lambda)(n - 1),$$

получим

$$\partial F / \partial t = 1 + n - 1 + (1 - \lambda)(n - 1) \quad (2)$$

Из условия  $\partial_t F(n, 1) = 0$  найдем

$$\lambda^* = \frac{2n - 1}{n - 1}. \triangleright$$

ПРИМЕР 2. Если  $n = 2$ , то  $\lambda^* = \frac{2n-1}{n-1} = 3$ .

ПРИМЕР 3. Если  $n = 3$ , то  $\lambda^* = \frac{2n-1}{n-1} = \frac{5}{2}$ .

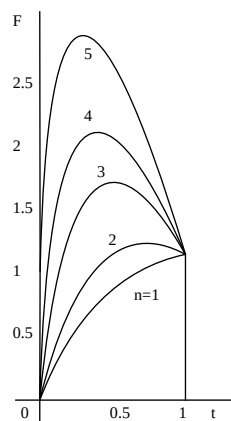


**Рис. 1.** Динамика суммарного нормированного значения налогов за  $n$  циклов при фиксированном коэффициенте расширения фирмы  $\lambda = 3$ .

На рис. 1 показана динамика суммарного нормированного значения налогов за  $n$  циклов при фиксированном коэффициенте расширения фирмы  $\lambda = 3$ . *Нормированным значением* мы будем называть суммарный налоговый сбор за  $k$  циклов, деленный на число циклов  $k$ . Видно, что при увеличении числа циклов  $n$  ставку налогообложения необходимо уменьшать, чтобы добиться ее оптимального значения.

Поскольку  $t^* = t(\lambda, n)$ , возникает задача нахождения таких  $(\lambda, n)$ , при которых  $t^*(\lambda, n) < 1$ .

**Утверждение 4.** При  $\lambda \geq 3$ ,  $n > 2$  оптимальное значение  $t^*(\lambda, n) \in [0, 1]$ .

◁ Вначале покажем, что в точке  $t = 1$  первая производная отрицательна:  $\frac{\partial F(n, t, \lambda)}{\partial t} < 0$ .

Из формулы (2) получим  $\partial F / \partial t = (2 - \lambda)(n - 1) + 1$ . Отсюда следует, что  $F / \partial t < 0$  при  $\lambda \geq 3$ ,  $n > 2$  и оптимальное значение  $t^*(\lambda, n) \in [0, 1]$ .

Однако, как видно из рисунка, на промежутке  $t \in [0, 1]$  для второй производной существуют участки, где вторая производная  $\frac{\partial^2 F(n, t, \lambda)}{\partial t^2} > 0$ . Функция вогнута, и нам необходимо доказать, что она возрастает (при движении влево от единицы). Для расчета порогового значения  $\lambda$  использовалась идея, чтобы оптимальная ставка

налога (т. е. максимум  $F(n, t, \lambda)$ ) лежал в интервале  $[0, 1]$ . Т. е. где-то на этом интервале  $t \in [0, 1]$  функция  $F(t) > F(1)$ . Для этого рассмотрим разложение функции  $F(n, t, \lambda) = F(t)$  в ряд Тейлора влево от  $t_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} F(t) = F(t_0 - \Delta t) &\cong F(t_0) + \frac{\partial F(t_0)}{\partial t}(-\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(t_0)}{\partial t^2}(-\Delta t)^2 = \\ &= F(t_0) - \frac{\partial F(t_0)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(t_0)}{\partial t^2} \Delta t^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $\partial F / \partial t < 0$ , то

$$\begin{aligned} F(t_0) - \frac{\partial F(t_0)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(t_0)}{\partial t^2} \Delta t^2 = \\ = F(t_0) + \left| \frac{\partial F(t_0)}{\partial t} \right| \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(t_0)}{\partial t^2} \Delta t^2 \geq F(t_0). \end{aligned}$$

Таким образом,  $F(t) > F(1)$ . Во втором приближении по  $\Delta t$  утверждение доказано.  $\triangleright$

## 5. Современная стоимость суммарного налогообложения

Хорошо известно [4, 5], что сравнение финансовых операций, проходящих во времени, производится по их современной стоимости. В предыдущем пункте, если цикл производства фирмы, например, равен году, то в рассмотренные в пункте 3 формулы нужно вносить коррективы с учетом явления дисконтирования сумм. В этом пункте это будет сделано. Бесспорно, общий случай прогноза возможен только с помощью программ ЭВМ.

Пусть процентная ставка равна  $i$ . Тогда, если величину налога на прибыль в  $k$ -ом цикле обозначить  $N_k$ , то в  $k+1$ -ом цикле она будет равна

$$N_{k+1} = \frac{\lambda_t^{k+1} N_k}{1 + i}.$$

Пусть

$$N_0 = N = t(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}).$$

Современная стоимость суммарного налогового сбора за  $n$  циклов будет равно

$$\sum = \sum_{m=0}^n \frac{N_m}{(1+i)^m} = N_0 \left[ 1 + \frac{\lambda_t^1}{1+i} + \frac{\lambda_t^1 \lambda_t^2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{\lambda_t^1 \lambda_t^2 \lambda_t^3 \dots \lambda_t^n}{(1+i)^n} \right]. \quad (3)$$

## 5. Суммарное НДС

Существует несколько способов описания НДС. В этом пункте будем придерживаться математического описания этих способов из [2], подробно расширяя и обобщая изложенное в этой работе. Рассмотрим, как и ранее, развитие производства фирмы по стационарной траектории с коэффициентом расширения  $\lambda > 1$ . В [2] результаты действия НДС для определения нового коэффициента расширения фактически сводятся к схеме, описанной в пункте 3. Это делается с помощью решения следующего уравнения

$$(\mathbf{p} = \mathbf{np})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}) = (1 = t)\mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}). \quad (4)$$

Заметим, что так как  $n = (N_1, N_2, \dots, N_k)$  имеет значения в долях (меньше единицы), то скобка  $(\mathbf{p} = \mathbf{np})$  — это вектор с положительными координатами. Следовательно, и это очень важный момент, параметр  $t$  не может быть отрицательным. Для этого вида налогообложения нет прямой угрозы необходимости «уходить в тень». По этому уравнению определяется, какая часть прибыли остается у предприятия после уплаты НДС. В уравнении (4) приняты обозначения:  $\mathbf{n}$  — вектор ставок на различные товары,  $\mathbf{p}$  — вектор цен на эти товары. Матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и вектор  $\mathbf{z}$  имеют тот же смысл, что и в пункте 3. Определив из уравнения (4) параметр  $t$  (заметим, что здесь он носит вспомогательный характер и не имеет прямого финансового значения, как бы заменяя действия НДС), новый коэффициент расширения находим по формуле  $\lambda_t^1 = \lambda - t(\lambda - 1)$ . Все дальнейшие рассуждения проходят по схемам пунктов 2 и 3.

## 6. Акцизный налог

Этот налог взимается с каждой проданной единицы и имеет отличительную от перечисленных выше видов налогов особенность. При неверном расчете этого налога для фирмы возникает математическая необходимость «уходить в тень», так как коэффициент, определяющий развитие, может стать меньше единицы. Пусть  $\mathbf{k}$  — вектор



ставок акцизного налога,  $\mathbf{p}$  — вектор цен. Рассмотрим, следуя [2], опять развитие производства по стационарной траектории с коэффициентом расширения  $\lambda > 1$ . Ставку  $t$  определяют [2] из уравнения:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{k})\mathbf{Bz} - \mathbf{pAz} = (1 - t)\mathbf{p}(\mathbf{Bz} - \mathbf{Az}). \quad (5)$$

В [2] показано, что новый коэффициент расширения определяется по формуле  $\lambda_t^1 = \lambda - t(\lambda - 1)$ . Заметим, что из формулы (5) следует, что при неосторожном увеличении ставок акцизного налога можно получить случай, когда у фирмы возникают долги и коэффициент  $\lambda_t^1 < 1$ . Что неизбежно приведет к сужению производства и даже к криминальным действиям.

В этом отличительная особенность акцизного налога и его специфическое предназначение. Дальнейшие исследования проводятся по той же схеме пунктов 2 и 3.

## 7. Выводы

Актуальность оптимальной политики в сфере налогообложения не вызывает сомнений. Также особо актуальной задачей является разработка инструментов для выявления возможности появления криминальных действий. В настоящей работе — это формулы, графики и программы для прогностического моделирования двух задач:

- 1) расчет оптимальных с точки зрения налоговых органов ставок различных налогов;
- 2) прогнозирование критических ситуаций, вызванных некорректным использованием налоговых схем и вычисление пороговых констант для наилучшего обустройства работы налогооблагаемой базы.

Для практического применения формул и программ данной статьи необходимо сначала с помощью продолжительных репрезентативных наблюдений собрать информацию для определения константы  $\lambda$ . Обычно информацию можно получить в плановом отделе фирмы. Матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{P}$  известны для конкретной фирмы. Определяя конкретное значение ставки, при которой собирается максимальная сумма налогов, можно определить лучшую стратегию для налоговых органов. Так же, сравнивая оптимальную сумму с реальной, можно определить степень уклонения фирмы от уплаты. Определяя пороговые константы, можно приблизиться к соблюдению принципа «соразмерности» в налогообложении, когда интересы государства

и налогоплательщиков сбалансированы, определить реальную грань «ухода в тень», тем самым, получив возможность предотвращать экономико-финансовые нарушения данного вида.

### Литература

1. *Малыхин В. Н.* Математическое моделирование экономики.—М.: УРАО, 2003.—254 с.
2. *Малыхин В. Н.* Экономико-математическое моделирование налогообложения.—М.: УРАО, 2003.—122 с.
3. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах.—М.: Постмакет, 2000.—462 с.
4. *Малыхин В. Н.* Финансовая математика.—М.: ЮНИТИ, 2002.—200 с.
5. *Малыхин В. Н., Родин В. А.* Финансовая математика в упражнениях и задачах.—Воронеж.: АО ИММиФ, 2004.—184 с.

Думачев Владислав Николаевич  
Воронеж, Воронежский институт МВД России  
E-mail: [dumv@comch](mailto:dumv@comch)

Малыхин Владимир Иванович  
Москва, Московский государственный  
университет управления

Родин Владимир Александрович  
Воронеж, Воронежский институт МВД России  
E-mail: [v\\_rodin@mail.ru](mailto:v_rodin@mail.ru)

## УРАВНЕНИЯ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ НА СИНГУЛЯРНЫХ НОСИТЕЛЯХ

**Я. А. Науменко**

Рассмотрены интегральные уравнения первого и второго порядка для плотности вихревых токов, распределенных на тонких многосвязных проводящих оболочках, находящихся в стационарном либо квазистационарном магнитном поле. Доказаны существование, единственность и устойчивость их решений при условиях, естественных для технических задач, сводящихся к указанным уравнениям. Предложен численный метод. Приведены примеры расчетов.

### **Введение**

Существует обширный класс задач, в которых необходим расчет квазистационарных магнитных полей в присутствии тонкослойных проводников, например, моделирование режимов движения высокоскоростного наземного транспорта, проектирование экранов для защиты персонала и высокочувствительного оборудования и т. д. Использование метода конечных элементов для таких задач приводят к плохо обусловленным системам линейных алгебраических уравнений весьма значительной размерности. В работе дан обзор введенных авторами векторных интегральных уравнений типа Фредгольма первого и второго родов для поверхностных токов, указаны критерии существования их решений, рассмотрены классы решений в зависимости от класса свободного члена.

### **1. Основные положения**

Для удобства чтения, будем обозначать векторные величины жирным шрифтом. Большинство используемых ниже функциональных пространств является векторными, поэтому, во избежание путаницы, размерность вектор-функций будет указываться явно.

Рассмотрим  $L_2(S; \mathbb{C}^2)$  — пространство двухкомпонентных комплекснозначных суммируемых с квадратом вектор-функций, определенных на плоском многообразии  $S \subset R^2$ . Многообразие  $S$  может

быть многосвязным, при этом будем считать, что каждый из связанных кусков  $l$  границы множества  $S$ , является жордановой и липшицевой [6] кривой. Нормаль к плоскости  $S$  обозначим  $\mathbf{n}$ , а нормаль к  $l$  — как  $\nu$ .

Ряд описываемых ниже результатов допускает обобщение на многообразия  $S$ , не являющиеся плоскими [17]. Для облегчения изложения мы здесь не будем этого делать.

Согласно [2] пространство  $L_2(S; \mathbb{C}^2)$  допускает разложение в прямую сумму ортогональных подпространств:

$$L_2(S; \mathbb{C}^2) = L^{(P)} \oplus \mathfrak{L}.$$

Одним из возможных вариантов построения пространства обобщенных по Вейлю потенциальных полей  $L^{(P)}$  является замыкание по норме  $L_2(S; \mathbb{C}^2)$  множества, элементами которого являются градиенты функций из  $C_0^{(1)}(S; \mathbb{C}^2)$  [9]. Ясно, что условие  $\mathbf{b} \in \mathfrak{L}$  влечет выполнение равенства

$$\iint_S \mathbf{b} \operatorname{grad} \varphi dS = 0$$

для любой функции  $\varphi \in C_0^{(1)}(S)$ . Последнее соотношение, в частности, означает, что если компоненты поля  $\mathbf{b} \in \mathfrak{L}$  принадлежат  $C^{(1)}(S)$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$  на  $S$ ,  $\mathbf{b}\nu = 0$  на  $l$ , поэтому элементы  $\mathfrak{L}$  еще называют полностью соленоидальными.

Пространство  $\mathfrak{L}$  в свою очередь может быть представлено в виде:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G} \oplus L^{(S)}.$$

Здесь  $\mathfrak{G}$  — конечномерное подпространство, размерность которого на единицу меньше связности  $S$  [1]. В частности, если поверхность  $S$  односвязна, то  $\mathfrak{G} = \emptyset$ . Компоненты полей из  $\mathfrak{G}$  являются на  $S$  гармоническими функциями, причем для любого  $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$  выполняются соотношения

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{g}\nu = 0.$$

Существенно также, что пространство  $L^{(S)}$  состоит из полей, периоды которых равны нулю. В случае, когда компоненты поля  $\mathbf{b} \in L^{(S)}$  непрерывны, это означает выполнение равенства

$$\oint_C \mathbf{b} d\mathbf{l} = 0$$

для любого кусочно-гладкого замкнутого контура  $C \subset S$ .

Введем ортопроектор  $P = P^{\mathfrak{L}} P^S$ . Оператор  $P^S$  действует из  $L_2(S; \mathbb{C}^3)$  в  $L_2(S; \mathbb{C}^2)$ , обнуляя нормальную к  $S$  компоненту поля. Очевидно,  $P^S$  является ортопроектором. Оператор  $P^{\mathfrak{L}}$  определим как ортопроектор из  $L_2(S)$  на подпространство  $\mathfrak{L}$ . Явное представление оператора  $P^{\mathfrak{L}}$  весьма сложно, но для дальнейшего будет достаточно факта его существования. Понятно, что оператор  $P$  также будет являться ортопроектором, переводящим  $L_2(S; \mathbb{C}^3)$  в  $\mathfrak{L}$ .

В работе рассматриваются следующие операторные уравнения:

$$K \sigma = \mathbf{f}_1, \quad (1)$$

$$\delta = -\lambda K \delta + \mathbf{f}_2, \quad (2)$$

где  $K = P \Gamma$ ,  $\Gamma \xi = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\xi}{r_{NM}} dS_N$ ,  $\lambda$  — мнимый параметр<sup>1</sup>. Пусть

$\mathbf{A}^0$  — векторный потенциал невозмущенного магнитного поля внешних (заданных) источников. Будем считать, что его компоненты принадлежат пространству  $W_2^1(\Omega)$ , где  $\Omega \subset R^3$  — некоторая ограниченная область с липшицевой границей, содержащая в себе  $S$  вместе с некоторой ее окрестностью. Согласно [18], существует ограниченное продолжение  $W_2^1(\Omega)$  в  $W_2^1(R^3)$ . Данное требование означает конечность энергии невозмущенного магнитного поля в смысле [5]. Помимо этого, считаем, что на идеально-проводящей поверхности отсутствуют так называемые «вмороженные потоки» [14]<sup>2</sup>, а для потенциала  $\mathbf{A}^0$  выполнена калибровка Лоренца. С физической точки указанные условия являются естественными. Значения компонент  $\mathbf{A}^0$  на  $S$  будем понимать в смысле следов  $W_2^1(R^3)$  на многообразиях. Согласно [6], при указанных выше условиях следы компонент потенциала  $\mathbf{A}^0$  на  $S$  существуют. Свободные члены уравнений (1), (2) имеют вид [13, 14]:

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{1}{\mu} P \mathbf{A}^0, \quad (3)$$

$$\mathbf{f}_2 = -\frac{\lambda}{\mu} P \mathbf{A}^0. \quad (4)$$

Согласно [20],  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathfrak{L}$ .

<sup>1</sup>  $\lambda = i\omega\gamma\mu h$ ;  $\mu$  — магнитная проницаемость внешней среды;  $\gamma$  — удельная электропроводность материала  $S$ ;  $\omega$  — круговая частота;  $h$  — толщина реальной оболочки, срединной поверхностью которой является  $S$ .

<sup>2</sup> Либо проведена их редукция [14].

Уравнение (1) описывает вихревые токи на бесконечно тонкой идеально-проводящей пластине, помещенной в стационарное (либо квазистационарное) магнитное поле. Уравнение (2) описывает плотность токов на срединной поверхности тонкой пластины с конечной проводимостью, помещенной в квазистационарное, синусоидальное по времени магнитное поле. Вывод (1) можно найти в [13, 14], а (2) получается переходом от скалярной функции потока к векторной плотности тока в уравнении, полученном в ряде работ (см., например, в [3]).

## 2. Свойства оператора $K$

**Лемма 1.** Оператор  $K$  линеен, самосопряжен и положителен в  $\mathfrak{L}$ .

**Лемма 2.** Оператор  $K$  компактен в пространстве  $\mathfrak{L}$ .

Два различных доказательства леммы 1 приведены в работах [13] и [14]. Доказательство последней леммы несложно и имеется, например, в работе [17]. Отметим здесь же, что компактность  $K$  в  $\mathfrak{L}$  означает неограниченность обратного оператора  $K^{-1}$  в этом пространстве.

Результат леммы 2 допускает усиление. Согласно [7], оператор  $P^{\mathfrak{L}}$  ограничен в пространстве  $W_2^1(S; \mathbb{C}^2)$ . Отсюда вытекает справедливость нижеследующего утверждения.

**Лемма 3.** При любом  $\xi \in W_2^1(S; \mathbb{C}^3)$  имеем  $P\xi \in W_2^1(S; \mathbb{C}^2)$ . Введем в рассмотрение подпространство:

$$W_{2,\mathfrak{L}}^1 = \mathfrak{L} \cap W_2^1(S; \mathbb{C}^2). \quad (5)$$

Ясно, что оператор  $P$  переводит  $W_2^1(S; \mathbb{C}^2)$  в  $W_{2,\mathfrak{L}}^1$ .

**Лемма 4.** Оператор  $K$  вполне непрерывен в  $W_{2,\mathfrak{L}}^1$ .

◁ Обозначим  $T^{W_{2,\mathfrak{L}}^1 \rightarrow \mathfrak{L}}$  оператор вложения  $W_{2,\mathfrak{L}}^1$  в  $\mathfrak{L}$ . Тогда оператор  $K$  в пространстве  $W_{2,\mathfrak{L}}^1$  может быть представлен в виде комбинации:

$$K = P^{\mathfrak{L}} P^S \Gamma T^{W_{2,\mathfrak{L}}^1 \rightarrow \mathfrak{L}}. \quad (6)$$

Оператор  $\Gamma$  считаем действующим из  $\mathfrak{L}$  в  $W_2^1(S; \mathbb{C}^3)$ . Оператор  $T^{W_{2,\mathfrak{L}}^1 \rightarrow \mathfrak{L}}$  вполне непрерывен, согласно [20]. Операторы  $P^{\mathfrak{L}}$ ,  $P^S$  — ограничены. Согласно [3, 12], оператор  $K_{\sigma\tau}$  ограниченно действует из пространства  $L_2^0(S)$  — функций с нулевым средним значением на  $S$ , суммируемых с квадратом в пространство  $W_2^1(S)$ . В силу того,

что  $\Gamma\xi = (K_{\sigma\tau}\xi_x, K_{\sigma\tau}\xi_y, K_{\sigma\tau}\xi_z)$ , и среднее значение каждой из компонент любого элемента пространства  $\mathfrak{L}$  равно нулю, имеем, что оператор  $\Gamma$  ограничен, действуя из  $\mathfrak{L}$  в  $W_2^1(S; \mathbb{C}^2)$ . В силу (6), оператор  $K$  вполне непрерывен в  $W_{2,\mathfrak{L}}^1$  как композиция вполне непрерывного оператора с конечным числом ограниченных.  $\triangleright$

### 3. Исследование интегральных уравнений

Установленные в лемме 1 свойства оператора  $K$  в  $\mathfrak{L}$  достаточны [11], чтобы была справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Уравнение (1) и вариационная задача:

$$F(\sigma) = (K\sigma, \sigma)_{\mathfrak{L}} - 2 \operatorname{Re}(\mathbf{f}_1, \sigma)_{\mathfrak{L}} \rightarrow \min \quad (7)$$

эквивалентны в энергетическом пространстве оператора  $K$ , порожаемом им на  $\mathfrak{L}$ .

Обозначим это пространство  $\mathfrak{L}_K$ , тогда

$$(\sigma_1, \sigma_2)_{\mathfrak{L}_K} = (K\sigma_1, \sigma_2)_{\mathfrak{L}}, \quad \|\sigma\|_{\mathfrak{L}_K} = (\sigma, \sigma)_{\mathfrak{L}_K}^{1/2}. \quad (8)$$

Существенно, что пространство  $\mathfrak{L}_K$  шире пространства  $\mathfrak{L}$ , причем, согласно [4, 11],  $\mathfrak{L}$  компактно вкладывается в  $\mathfrak{L}_K$ .

Так как всякий ортопроектор является самосопряженным оператором, то входящий в  $K$  ортопроектор  $P$  при вычислении скалярных произведений в (7), (8) можно опустить, и использовать представления

$$F(\sigma) = (\Gamma\sigma, \sigma)_{\mathfrak{L}} - \frac{2}{\mu} \operatorname{Re}(\mathbf{A}^0, \sigma)_{\mathfrak{L}} \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$(\sigma_1, \sigma_2)_{\mathfrak{L}_K} = (\Gamma\sigma_1, \sigma_2)_{\mathfrak{L}}, \quad (10)$$

не требующие явного задания оператора  $P$  и потому удобные для численной реализации.

Для функционала  $\mathfrak{F}(\sigma) = (\mathbf{f}_1, \sigma)_{\mathfrak{L}}$  справедлива следующая теорема [13, 14].

**Теорема 1.** При указанных выше ограничениях на поле  $\mathbf{A}^0$  функционал  $\mathfrak{F}(\sigma) = (\mathbf{f}_1, \sigma)_{\mathfrak{L}}$  ограничен в  $\mathfrak{L}_K$ . При этом справедливы оценки:

$$|\mathfrak{F}(\xi)| \leq \frac{1}{\mu} \|\operatorname{rot} \mathbf{A}^0\|_{L_2(R^3; \mathbb{C}^3)} \|\xi\|_{\mathfrak{L}_K}, \quad (11)$$

$$|\mathfrak{F}(\sigma)| \leq \vartheta \left( \|A_x^0\|_{B_2^{1/2}(S)}^2 + \|A_y^0\|_{B_2^{1/2}(S)}^2 + \|A_z^0\|_{B_2^{1/2}(S)}^2 \right)^{1/2} \|\sigma\|_{\mathfrak{L}_T}. \quad (12)$$

Здесь  $B_2^{1/2}(S)$  — пространство Бесова [6].

Согласно [11], получаем ряд следствий из теоремы 1.

**Следствие 1.** *Решение вариационной задачи (7), а значит, и уравнения (1) существует и единственно в  $\mathfrak{L}_K$ .*

**Следствие 2.** *Справедливы оценки*

$$\|\sigma\|_{\mathfrak{L}_K} \leq \vartheta \|\mathbf{A}^0\|_{B_2^{1/2}(S; \mathbb{C}^2)}, \quad (13)$$

$$\|\sigma\|_{\mathfrak{L}_K} \leq \frac{1}{\mu} \|\operatorname{rot} \mathbf{A}^0\|_{L_2(R^3; \mathbb{C}^3)}. \quad (14)$$

Здесь  $\vartheta$  есть некоторая величина, зависящая лишь от геометрии  $S$ .

Неравенство (13) позволяет оценить норму решения в том случае, когда невозмущенное поле заданно непосредственно в виде следа векторного потенциала на  $S$ , а его источники неизвестны. Оценка (13) означает, в частности, что погрешность в энергии магнитного поля реакции не превысит аналогичной погрешности поля сторонних источников, вызвавшей нарушение свободного члена уравнения (1).

**Следствие 3.** *Решение уравнения (1) устойчиво.*

При выполнении практических расчетов требование принадлежности компонент свободного члена пространству следов из  $W_2^1(R^3)$  несущественно, так как условие ограниченности энергии невозмущенного магнитного поля (что справедливо, разумеется, для любой физической системы), автоматически означает выполнение указанного условия в используемой нами постановке.

Отметим, что пространство  $\mathfrak{L}_K$  имеет естественную физическую интерпретацию в классе задач, описываемых уравнением (1). Это пространство, элементами которого являются плотности вихревых токов, порождающих в трехмерном пространстве магнитные поля с конечной энергией.

Обратимся теперь к уравнению (2). Компактность оператора  $K$ , доказанная в лемме 2, позволяет применить к (2) теорию Рисса — Фредгольма [17].

**Теорема 2.** *Уравнение (2) разрешимо при произвольном  $\mathbf{f}_2 \in \mathfrak{L}$ , причем единственным образом. Его решение устойчиво.*

Из теоремы 2 и известных оценок для норм самосопряженного оператора и его резольвенты [8] вытекает следующее утверждение:

**Следствие 4.** *Справедлива оценка:*

$$\|\delta\|_{\mathfrak{L}} \leq \frac{\|\mathbf{f}_2\|_{\mathfrak{L}}}{1 + |\lambda|/|\lambda_1|}. \quad (15)$$



Здесь  $\lambda_1$  — наименьшее по модулю характеристическое число оператора  $K$ .

Пространство  $\mathcal{L}$  в случае уравнения (2) также имеет естественную физическую интерпретацию — это пространство, элементами которого являются плотности вихревых токов с конечной мощностью джоулевых тепловых потерь<sup>3</sup>.

Заметим, что в силу (4), свободный член  $\mathbf{f}_2$  по определению является результатом действия оператора  $P$  на поле, компонентами которого являются следы на  $S$  функций из пространства  $W_2^1(R^3)$ . Ясно, что поле  $\mathbf{f}_2$  будет принадлежать некоторому подпространству  $\mathcal{L}$ , для элементов которого будут иметь смысл те или иные дифференциально-разностные характеристики. Вопрос характеристики свойств такого пространства и исследование в нем уравнения (2) мы планируем осветить в последующих публикациях. Здесь же ограничимся рассмотрением существенного для практических приложений частного случая.

На поле  $\mathbf{A}^0$  наложим условие принадлежности компонент пространству  $W_2^{3/2}(R^3; \mathbb{C}^3)$ . В этом случае следы компонент  $\mathbf{A}^0$  на  $S$  принадлежат  $W_2^1(S; \mathbb{C}^2)$  [19].

**Теорема.** Уравнение (2) разрешимо при произвольном  $\mathbf{f}_2 \in W_{2,\mathcal{L}}^1$ , причем единственным образом. Его решение устойчиво.

◁ Согласно лемме 1, оператор  $K$  является самосопряженным в  $\mathcal{L}$ , следовательно, его характеристические числа в пространстве  $\mathcal{L}$  — вещественны [8]. Очевидно, это справедливо и в пространстве  $W_{2,\mathcal{L}}^1 \subset \mathcal{L}$ . При этом  $\lambda$  — параметр уравнения (2), является мнимым и поэтому не совпадает ни с одним из характеристических чисел оператора  $K$ . Аналогично теореме 2, уравнение (2) обладает всеми перечисленными в условии теоремы свойствами. ▷

Как видим, зависимость класса гладкости решения уравнения (2) от класса гладкости свободного члена весьма прозрачна. Совершенно иная картина имеет место для уравнения (1). На настоящий момент нам неизвестны критерии, позволяющие уточнить класс решения (1) по свойствам свободного члена. Построен ряд примеров, когда при бесконечно гладком свободном члене решение принадлежит классу  $\mathcal{L}_K \setminus \mathcal{L}$ . Имеется и обратный пример — гладкое решение порождено свободным членом с плохими дифференциальными свойствами.

<sup>3</sup> В случае идеального проводника тепловые потери равны нулю.

#### 4. Численный метод и примеры расчетов

Выбору подходящей системы векторных конечных элементов и доказательству их полноты в смысле сходимости аппроксимативных последовательностей Ритца для пространств  $\mathfrak{L}$  и  $\mathfrak{L}_K$  уделено значительное внимание в работах [13, 14]. Мы не будем останавливаться здесь на этом вопросе детально, отметим лишь, что доказательство их полноты во многом опирается на результаты, изложенные в монографии [21]. Приближенные решения уравнений (1), (2) будем искать в виде:

$$\sigma(M) \approx \sum_{k=1}^m C_k^{(m)} \mathbf{b}_k(M), \quad M \in S,$$

$$\delta(M) \approx \sum_{k=1}^m G_k^{(m)} \mathbf{b}_k(M), \quad M \in S,$$

где коэффициенты разложения  $\left\{C_k^{(m)}\right\}_{k=1}^m$  и  $\left\{G_k^{(m)}\right\}_{k=1}^m$  являются решениями систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^m (\Gamma \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i)_{\mathfrak{L}} C_k^{(m)} = -\frac{1}{\mu} (\mathbf{A}^0, \mathbf{b}_i)_{\mathfrak{L}}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

и

$$\sum_{k=1}^m [(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i)_{\mathfrak{L}} - \lambda (\Gamma \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i)_{\mathfrak{L}}] G_k^{(m)} = -\frac{\lambda}{\mu} (\mathbf{A}^0, \mathbf{b}_i)_{\mathfrak{L}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (17)$$

соответственно.

Отметим, что использование введенной в [13, 14] системы конечных элементов  $\{\mathbf{b}_k(M)\}_{k=1}^m$  приводит к вычислительной размерности, эквивалентной скалярным постановкам. Вместе с тем, векторная постановка является более естественной для рассматриваемого класса задач.

Численное формирование и решение на ЭВМ СЛАУ (16), (17) порождают ряд проблем, различные аспекты которых исследованы в работах [13, 14, 15, 17]. Для численного решения уравнений (1), (2) был создан программный пакет, реализованный с использованием MS Visual C# 2005.

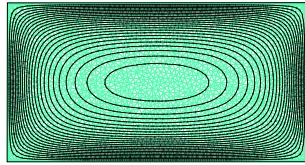


Рис. 1. Медная пластина в переменном магнитном поле частотой 50 Гц.

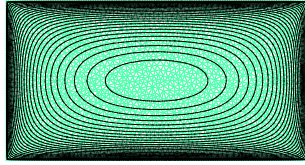


Рис. 2. Идеально-проводящая пластина.

Результаты расчета амплитуды вихревых токов в тонкой прямоугольной пластине, помещенной в однородное однофазное синусоидальное магнитное поле приведены на рис. 1 ( $\lambda = i20$ )<sup>4</sup>. На рис. 2 изображен идеальный проводник. Масштаб силовых линий одинаков.

В публикациях [13, 14, 16] приведено большое количество расчетов для областей сложных форм. Также там можно найти различные примеры практического применения созданного программного пакета.

### Литература

1. Friedrichs K. O. Differential forms on Riemannian manifolds // Comm. on Pure and Appl. Math.—1955.—V. VIII.—P. 551–590.
2. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Math. J.—1940.—V. 7.—P. 411–444.
3. Астахов В. И. Математическое моделирование инженерных задач в электротехнике.—Новочеркасск: Новочерк. гос. техн. ун-т, 1994.—192 с.
4. Астахов В. И. Поверхностные потенциалы и операторы теории потенциала в пространствах Дирихле // Изв. вузов. Электромеханика.—2000.—№ 2.—С. 3–18.
5. Астахов В. И. О допустимости идеализации границ поляризуемых тел и некоторых энергетических соотношениях для стационарного магнитного и электростатического полей // Изв. вузов. Электромеханика.—2000.—№ 1.—С. 3–14.

<sup>4</sup> Толщина пластины — 1 мм, геометрические размеры — 1х2 м. Окружающая среда — воздух. Материал проводника медь. Частота переменного магнитного поля 50 Гц.

6. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1996.—480 с.
7. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Оператор максвелла в областях с негладкой границей // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 27, № 1.—С. 23–36.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2.—М.: Мир, 1966.—1064 с.
9. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Наука, 1970.—288 с.
10. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева.—Л.: Изд-во ленинградского ун-та, 1985.—416 с.
11. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных.—М.: Высш. шк., 1977.—432 с.
12. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—511 с.
13. Науменко Я. А., Астахов В. И. Математическое моделирование магнитного поля в присутствии идеально-проводящей пластины с краем // Изв. вузов. Электромеханика.—2003.—№ 5.—С. 11–16.
14. Науменко Я. А. Локальный признак корректности и численное решение интегрального уравнения первого рода для плотности вихревых токов // Вестник Южного научного центра РАН.—2005.—Т. 1, № 4.—С. 3–8.
15. Науменко Я. А., Астахов В. И. Ускорение формирования матрицы Грама энергетического пространства интегрального оператора // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки.—2004.—Спец. выпуск.—С. 116–117.
16. Науменко Я. А., Астахов В. И. Моделирование крейсерского режима движения электродинамического подвеса методом интегральных уравнений первого рода // Изв. вузов. Электромеханика.—2005.—№ 1.—С. 3–4.
17. Науменко Я. А. Расчет синусоидальных по времени магнитных полей в присутствии проводящих поверхностей методом интегральных уравнений // Тр. ЮНЦ РАН.—Ростов-на-Дону: Изд-во ЮНЦ РАН.—2007.—Т. 2.—С. 80–93.
18. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.—М.: Наука, 1977.—456 с.
19. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958.—Т. 197.—С. 54–112.
20. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—М.: Наука, 1988.—333 с.
21. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач.—М.: Мир, 1980.—511 с.
22. Тиман А. Ф., Трофимов В. Н. Введение в теорию гармонических функций.—М.: Наука, 1968.—208 с.

НАУМЕНКО Ян Александрович  
Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН  
E-mail: [jan@novoch.ru](mailto:jan@novoch.ru)

# СТАЦИОНАРНЫЕ ТРАЕКТОРИИ МАКСИМАЛЬНОГО РОСТА В МОДЕЛЯХ НЕЙМАНА И СОЛОУ

**В. С. Струков, В. А. Родин**

В работе рассматриваются отдельные случаи моделей, которые допускают несложное аналитическое решение задачи определения стационарных траекторий максимального роста в математических моделях развития экономики. Получена графическая интерпретация аналитических результатов.

## 1. Стационарные траектории в модели Солоу

Определение стационарных траекторий максимального роста в математических моделях развития экономики — это легко формулируемая, но технически сложно решаемая задача на экстремум в каком-нибудь виде программирования. Как правило, эта задача решается приближенно, численными методами. В работе рассматриваются отдельные случаи моделей, которые допускают несложное аналитическое решение и имеют графически прозрачную интерпретацию. В модели Неймана, несмотря на нелинейный характер задачи, стратегия похожа на задачу определения максиминной стратегии в теории матричных игр.

## 2. Описание модели Неймана

Будем придерживаться прозрачно-скелетному изложению [2].

Экономика в модели Неймана функционирует циклами, в цикле интенсивности работы постоянны, длительность циклов одинакова. Пусть модели экономики Неймана описывается парой  $(C, K)$ , где  $C$  — пространство товаров, а  $K$  — множество производственных процессов, или отображений, которые переводят матрицу затрат  $\mathbf{A}$  в матрицу выпуска  $\mathbf{B}$ . Обычно рассматривают линейное отображение  $\mathbf{A}$  в  $\mathbf{B}$ . Или отображения вида: вектор  $\sum_{i=1}^m z_i A_i$  отображается в вектор  $\sum_{i=1}^m z_i B_i$ , здесь  $A_i$  — базисные векторы-столбцы матрицы  $\mathbf{A}$ , и  $B_i$  —

базисные векторы-столбцы матрицы  $\mathbf{B}$ . Вектор  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$  характеризует интенсивность развития. Координаты этого вектора положительны. Другими словами, линейная оболочка  $\sum_{i=1}^m z_i A_i$  в процессе производства переходит в линейную оболочку  $\sum_{i=1}^m z_i B_i$ . Заметим, что численные коэффициенты, координаты вектора  $\mathbf{z}$  не обязаны быть меньше единицы.

Для простоты будем считать цены  $P$  постоянными. Экономика Неймана называется замкнутой, если в следующем цикле она перерабатывает те товары, которые произвела в предыдущем цикле. Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $\mathbf{A}\mathbf{z}^{(k+1)} \leq \mathbf{B}\mathbf{z}^{(k)}$ , здесь  $\mathbf{z}^{(k)}$  — вектор интенсивности в  $k$ -ом цикле. Обычно при исследовании модели Неймана выделяют стационарные траектории. Это последовательность циклов, когда существует число  $\lambda > 0$ , такое, что интенсивность в соседних циклах задается равенством  $\mathbf{z}^{(i+1)} = \lambda \mathbf{z}^{(i)}$ .

Пусть  $\mathbf{z}$  — некоторый постоянный начальный (вектор интенсивности в первом цикле) вектор. Число  $\lambda$  — коэффициент роста. Неравенство между векторами означает, что каждая координата вектора слева не превосходит соответствующую координату справа. В принципе для предприятия замкнутость не обязательна — предприятие может закупать на стороне недостающие ему ресурсы.

### 3. Стационарные траектории в модели Неймана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Последовательность векторов  $\mathbf{z}^{(k)}$  называют *стационарной*, если существует такое число  $\lambda > 0$ , что  $\mathbf{z}^{(k+1)} = \lambda \mathbf{z}^{(k)}$  или тем самым, существует такое число  $\lambda > 0$ , и начальный вектор  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ , что  $\mathbf{z}^{(k+1)} = \lambda^k \mathbf{z}$ . Число  $\lambda > 0$  называется *коэффициентом роста*; экономика называется *сужающейся*, если  $\lambda < 1$ , *стабильной*, если  $\lambda = 1$ , *расширяющейся*, если  $\lambda > 1$ . Стационарная траектория задается парой  $(\lambda, \mathbf{z})$ .

Пусть экономика Неймана задана матрицами  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ . Тогда для определения стационарной траектории максимального роста надо решить задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \max, \\ \mathbf{B}\mathbf{z} &\geq \lambda \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \geq 0, \quad \mathbf{z} \neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Другими словами, для заданных матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  нужно найти такое максимальное число  $\lambda$ , для которого найдется неотрицательный, ненулевой вектор  $\mathbf{z}$ , который удовлетворяет неравенству  $\mathbf{Bz} \geq \lambda \mathbf{Az}$ .

Для произвольного числа товаров и базисных процессов (произвольного размера матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ) эту задачу решить нелегко. Случай, когда обе матрицы имеют размер  $(2 \times 2)$  подробно разобран в [2]. Ниже мы покажем, что и более сложные ситуации достаточно прозрачны.

Случай, когда обе матрицы имеют размер  $(n \times 2)$ . Пусть матрицы имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \end{pmatrix}.$$

Задача (1) принимает следующий вид условного экстремума с системой ограничений в виде неравенств:

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \max, \\ b_{11}x + b_{12}(1-x) &\geq \lambda (a_{11}x + a_{12}(1-x)), \\ b_{n1}x + b_{n2}(1-x) &\geq \lambda (a_{n1}x + a_{n2}(1-x)). \end{aligned}$$

Эти неравенства появились в связи с тем, что координаты вектора  $\mathbf{z} = \{z_1, z_2\}$  нужно определить лишь с точностью до пропорционального множителя. Или можно считать, что  $z_1 = x$ , а  $z_2 = 1 - x$ , где  $0 \leq x \leq 1$ . Если эти неравенства разделить на соответствующие скобки, стоящие в правой части, и определить функции

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \frac{b_{11}x + b_{12}(1-x)}{a_{11}x + a_{12}(1-x)}, \\ v_n(x) &= \frac{b_{n1}x + b_{n2}(1-x)}{a_{n1}x + a_{n2}(1-x)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что знаменатели в (2) положительны для  $0 \leq x \leq 1$ . Поэтому задача (2) эквивалентна, хорошо известной в теории матричных игр задачи определение максиминной стратегии. Только функ-

ции не линейные, а дробно-линейные.

$$\begin{aligned}\lambda &\rightarrow \max, \\ \lambda &\leq \min \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)\}.\end{aligned}$$

Функция, стоящая в правой части неравенства (2), — это нижняя огибающая всех графиков функций  $v_k(x)$ . И задача — найти максимум этой огибающей на промежутке  $[0, 1]$ .

$$\lambda = \max_x \min \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)\}.$$

Эта задача легко решается. Для примера, приведем на рисунках возможные ситуации для трех функций.

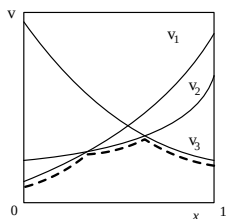


**Рис. 1.** Задача (4) — определения стационарной траектории максимального роста реализуется в точке пересечения гипербол  $V_2$  и  $V_3$ .

Решая совместно эти два уравнения, мы определим первую координату вектора интенсивности —  $x^*$ . А высота до графика равная  $V_2(x^*) = V_3(x^*) = \lambda_{\max}$ .

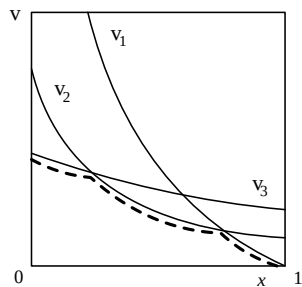


**Рис. 2.** Задача (4) — определения стационарной траектории максимального роста реализуется в точке ноль (чуть больше 2).



Эта крайняя ситуация соответствует такому необычному случаю, когда  $x = 0$  — точка, определяющая стационарную траекторию максимального роста. Эта ситуация на практике означает, что один (первый) вид продукции (первый столбец в матрицах) не следует выпускать вообще! Ясно, что это крайняя ситуация. Еще одну крайнюю ситуацию рассмотрим на следующем рисунке.

Заметим, что если в определении функции  $v_k(x)$  справедливо для коэффициентов равенство  $a_{k1} = a_{k2}$ , то гипербола превращается в прямую линию. А если еще дополнительно выполнено равенство  $b_{k1} = b_{k2}$ , то функция просто равна константе, или постоянная. В этом случае возможно неоднозначное решение задачи (см. рис. 3).

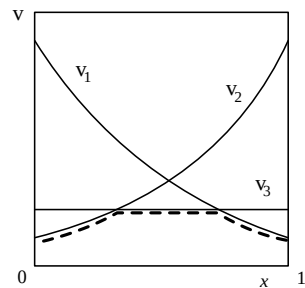


**Рис. 3.** Все точки прямолинейного участка от пересечения второй и третьей линии до точки пересечения первой и третьей линии могут служить решением задачи, для определения координаты —  $x$ . Высота везде равна  $0,5 = \lambda_{\max}$

В завершение этого пункта установим следующее

**Утверждение 1.** Для случая, когда обе матрицы имеют размер  $(n \times 2)$ , задача определения стационарной траектории максимального роста в модели Неймана всегда имеет решение. Это решение находится или для  $x = 0$ ,  $x = 1$ , или в абсциссе одной из точек пересечения кривых  $v_k(x)$ .

◁ Если все функции  $v_k(x)$  убывают (рисунок симметричный рис. 2), то решение задачи  $x = 0$ . Если все функции возрастают (рис. 2), то  $x = 1$ . Предположим, что часть функций на промежутке  $[0, 1]$  возрастает, часть убывает (рис. 1), и имеются пересечения этих функций. Рассмотрим интервал на оси абсцисс между двумя соседними точками пересечения. На этом интервале вверх расположена часть гиперболы, которая или убывает или возрастает, следовательно, подозрительные на нахождение решения задачи

являются только точки пересечения графиков функций  $v_k(x)$ . Перебирая все точки пересечения находящиеся на нижней огибающей функций  $v_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , мы найдем верхнюю точку огибающей. Если она расположена на отрезке прямой параллельной оси абсцисс (вырожденный случай гиперболы рис. 3), то любая точка этого отрезка является решением задачи. Что и требовалось установить.  $\triangleright$

**Двойственная ситуация.** Можно заметить, что первоначальная, базисная модель Неймана оперирует с базисными процессами [1]. Это соответствует процедуре умножения всех координат определенного ( $k$ -го) столбца матрицы выпуска на одно число —  $z_k$ .

Правомочна и другая интерпретация, когда в модели по разным видам продукции (по строкам) устанавливается различная интенсивность производства в цикле. Эта двойственная в определенном смысле ситуация, когда матрицы будут иметь размер  $(2 \times n)$ . Пусть матрицы имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, \dots, a_{2n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}, \dots, b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}, \dots, b_{2n} \end{pmatrix}.$$

Задача (1) принимает вид условного экстремума с системой ограничений в виде неравенств с измененными по сравнению с предыдущей задачей индексами:

$$\begin{aligned} \lambda^* &\rightarrow \max, \\ b_{11}x + b_{21}(1-x) &\geq \lambda^* (a_{11}x + a_{21}(1-x)), \\ b_{1n}x + b_{2n}(1-x) &\geq \lambda^* (a_{1n}x + a_{2n}(1-x)). \end{aligned}$$

Если эти неравенства разделить на соответствующие скобки стоящие в правой части и определить функции вида (2), но с другой нумерацией, то для

$$\begin{aligned} v_1^*(x) &= \frac{b_{11}x + b_{21}(1-x)}{a_{11}x + a_{21}(1-x)}, \\ v_n^*(x) &= \frac{b_{1n}x + b_{2n}(1-x)}{a_{1n}x + a_{2n}(1-x)}, \end{aligned}$$

задача эквивалентна определению максиминной стратегии:

$$\begin{aligned} \lambda^* &\rightarrow \max, \\ \lambda^* &\leq \min\{v_1^*(x), v_2^*(x), \dots, v_n^*(x)\}. \end{aligned}$$

Эта задача решается так же как и раньше.

#### 4. Описание модели Солоу

Утверждения этого пункта работы основаны на материале работ [1, 2]. Получены новые обобщения результатов работы [2]. Будем придерживаться описания модели Солоу в версии работы В. И. Малыхина. При этом основное направление исследований работы — это дать определенные практические рекомендации налоговым службам по схеме обследования деятельности фирмы с целью максимизации налоговых сборов и одновременно определения критического значения ставки НДС (для прозрачности и простоты изложения рассматриваем один продукт и ставка — это число  $0 < t < 1$ ), при которых объем производства может реально уменьшиться на столько, что фирма или перестает работать или вынуждена уйти в «теневую экономику».

В модели Солоу, в отличие от модели Неймана, производство рассматривается как единое целое без структурных подразделений, в усредненных показателях.

Состояние производства характеризуется пятью *эндогенными* переменными состояниями:  $Y$  — конечный продукт,  $L$  — трудовые ресурсы,  $K$  — фонды,  $I$  — инвестиции,  $C$  — размер непроизводственного потребления. Все эти переменные выражаются в денежной форме. Они являются функциями от времени. Обычно вместо этих абсолютных переменных используют относительные: производительность труда  $y = Y/L$ , фондовооруженность  $k = K/L$ . Функцию, определяющую годовой конечный продукт  $Y = F(K, L)$ , принято считать однородной первой степени, или для произвольной константы  $\lambda > 0$ , справедливо равенство  $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ . Учитывая этот факт, функцию, определяющую годовой конечный продукт в относительных переменных, запишем как

$$y = \frac{F(K, L)}{L} = \frac{LF(K/L, 1)}{L} = F(k, 1).$$

Последнюю функцию обозначим  $f(k) = F(k, 1)$ .

Имеются [1] еще *экзогенные* (заданные вне системы) показатели (константы):

$\nu$  — годовой темп прироста числа занятых;

$\mu$  — доля выбывших за год основных производственных фондов;

$\rho$  — норма накопления (доля валовых инвестиций).

Границы для этих параметров:  $-1 < \nu < 1$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $0 < \rho < 1$ . Время  $t$  считается непрерывным и изменяется в годах. Значения показателей потока  $Y = Y(t)$ ,  $I = I(t)$ ,  $C = C(t)$  в момент  $t = [t] + \{t\}$  определяются в виде накопления за год, который начинается на  $\{t\}$  дней позже 1 января года  $[t]$ .

Для данной модели в [2] получено дифференциальное уравнение для описания изменения фондовооруженности:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \rho f(k) - (\mu + \gamma)k(t), \\ k(0) &= k_0 = K_0/L_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение уравнения (3) имеет вид:

$$t = \int_{k_0}^{k(t)} \frac{dk}{\rho f(k) - (\mu + \nu)k}. \quad (4)$$

Интеграл (4) имеет различное значение для различных функций  $f(k)$ .

## 5. Стационарные траектории в модели Солоу

Пусть фондовооруженность не меняется или  $dk/dt = 0$ . Тогда для определения  $k$  из уравнения (4) имеем равенство:

$$f(k) = \left[ \frac{\mu + \nu}{\rho} \right] k.$$

Обычно производственная функция на практике — вогнутая функция,  $f''(k) < 0$ , и первая производная ее при  $k \rightarrow +0$  стремится к бесконечности. На рис. 1 в этом случае видно, что существует единственное отличное от нуля решение  $k^0$  фондовооруженности на стационарной траектории. Этот факт можно доказать в виде несложного утверждения (см. рис. 1). Несложно получается

**Утверждение 2.** Если предположить, что трудовые ресурсы росли по экспоненциальному закону, то на стационарной траектории все основные макропоказатели будут также расти экспоненциально.

Конечный продукт в модели Солоу используется на непроемственное потребление и инвестиции:  $Y = C + I$ . Если норма накопления  $\rho$ , то  $I = \rho Y$ ,  $C = (1 - \rho)Y$ . Поэтому

$$I(t) = \rho f(k_0)L_0 e^{\lambda t}, \quad C(t) = (1 - \rho)f(k_0)L_0 e^{\lambda t}.$$

В работе [1] модель Солоу рассмотрена более подробно, нас же, следуя работе [2], будет интересоваться задача максимального сбора налога в модели Солоу.

## 6. Налог в модели Солоу

Пусть  $t$  ставка налога. Конечный продукт  $Y$ , выраженный в денежном выражении, представляет собой не что иное, как добавленную стоимость. Следовательно, при ставке НДС равной  $t$  из конечного продукта  $Y$  будет изыматься государством его часть, равная  $tY$ . После введения налога, уравнение (3) будет иметь вид:

$$\frac{dk}{dt} = \rho(1 - t)f(k) - (\mu + \gamma)k(t),$$

$$k(0) = k_0 = K_0/L_0,$$

и стационарная траектория  $(1 - t)f(k) = \left[\frac{\mu + \gamma}{\rho}\right] k$ .

Новое уравнение имеет решение (см. рис. 1). Точка  $C$  расположена ниже и левее точки  $B$ . На новой стационарной траектории уменьшилось не только фондовооруженность, но и производительность труда. Это удручающее свойство налога.

Для выявления случаев, когда не правильно определенная ставка налога может парализовать производство, конкретизируем, следуя работе [2], модель.

А именно, рассмотрим линейно однородную функцию Кобба — Дугласа вида  $Y = AK^{1-\alpha}L^\alpha$ . Функция  $f(k) = Ak^\alpha$ , уравнение стационарной траектории имеет вид:  $\rho(1 - t)Ak^\alpha = (\mu + \gamma)k$ . Из этого уравнения, получаем

$$k_t = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\rho(1-t)A}{\mu + \gamma}}, \quad y_t = f(k_t) = A \sqrt[1-\alpha]{\left(\frac{\rho(1-t)A}{\mu + \gamma}\right)^\alpha}.$$

Тогда налог на «душу населения» равен

$$N(t) = tf(k_t) = tA^{1-\alpha} \sqrt[\alpha]{\left(\frac{\rho(1-t)A}{\mu+\gamma}\right)^\alpha}. \quad (5)$$

В этом пункте мы получим утверждения, которые показывают, что максимальная ставка налога не всегда достижима. Ее значение связано с параметрами производства. А упорное внедрение максимальной ставки, в некоторых случаях, может привести к тому, что производство будет сокращаться, остановится или уйдет в «тень».

Для анализа ситуации налоговым органам найдем ставку налога, при котором величина (5) максимальна. Приравняем производную функции (5) к нулю и получаем уравнение

$$1-t = t \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right), \quad (6)$$

$$t^* = 1 - \alpha. \quad (7)$$

Используя эти формулы, получаем оптимальные значения для удельного потребления:

$$c^* = A(1-\rho)^{1-\alpha} \sqrt[\alpha]{\left(\frac{\rho\alpha A}{\mu+\gamma}\right)^\alpha},$$

фондовооруженности  $k^* = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\rho\alpha A}{\mu+\gamma}}$  и производительности труда

$$y^* = \sqrt[1-\alpha]{\left(\frac{\rho\alpha A}{\mu+\gamma}\right)^\alpha}.$$

Для проверки соблюдения принципа «соразмерности» в теории налогообложения вычислим оптимальную сумму удельной величины НДС.

Обозначим ее

$$N_u(t) = c(t) + N(t) = (1-\rho+t)A^{1-\alpha} \sqrt[\alpha]{\left(\frac{\rho(1-t)A}{\mu+\gamma}\right)^\alpha}.$$

Приравняем производную к нулю  $N'_u(t) = 0$ , получаем

**Утверждение 3.** Пусть производственная функция фирмы есть линейно однородная функция Кобба — Дугласа  $F(K, L) = AK^{1-\alpha}L^\alpha$

и  $\frac{F(K,L)}{L} = \frac{LF(K/L,1)}{L} = F(k,1) = f(k)$ . Пусть  $t$  ставка НДС, и уравнение для описания изменения фондовооруженности имеют вид:

$$\frac{dk}{dt} = \rho(1-t)f(k) - (\mu + \gamma)k(t),$$

$$k(0) = k_0 = K_0/L_0$$

и стационарная траектория

$$(1-t)f(k) = \left[ \frac{\mu + \nu}{\rho} \right] k.$$

Тогда оптимальное значение ставки налога связано с параметрами производства по формуле

$$t_u^* = (1 - \alpha) - (1 - \rho)\alpha. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [2] эта задача решена только для частного случая, когда  $\alpha = \rho$ . В этом случае, подставляя  $\rho$  в (8), находим также как и в работе [1], что оптимальное значение равно

$$t_c^* = (1 - \alpha)^2.$$

## 7. Выводы

Утверждения последнего пункта является ответами на вопросы поставленные в работе [2]. Так как коэффициент  $\alpha$  есть параметр функции Кобба — Дугласа, имеющий смысл эластичности выпуска продукции по фондам и удовлетворяет неравенству  $0 < \alpha < 1$ , то формула (7) имеет смысл при  $t^* < 1$ . Так как коэффициент  $\rho$  определяет норму накопления и является долей конечного продукта, то  $0 < \rho < 1$  и неравенство  $t_u^* = (1 - \alpha) - (1 - \rho)\alpha < 1$  всегда выполнено. На практике это означает, что наилучшая ставка налога всегда есть и ее можно рассчитать по формуле (8). Установление произвольной, не учитывающей производственные соотношения, ставки не всегда возможно.

Предположим, мы планируем — возможно ли установить ставку большую, чем  $\frac{1}{2}$ . Тогда в фирме соотношения между параметрами  $\alpha$  и  $\rho$  должно быть следующим —  $\alpha < \frac{1}{2(2-\rho)}$ . Понятно, что это равенство выполняется не всегда. Например, если  $\rho = \frac{1}{2}$ , то  $\alpha$  должна

удовлетворять неравенству  $\alpha < \frac{1}{3}$ . Другими словами, выражение (8) вносит определенные условия для налогообложения и помогает соблюдать «принцип соразмерности» в теории налогообложения — когда интересы государства и налогоплательщиков сбалансированы, а неправильно взимаемая ставка налога не провоцирует нарушение закона.

Как правило, такой предварительный анализ при налогообложении фирмы на практике не проводится. И налогообложение во многом, к сожалению, носит случайный характер. Задачи налогообложения производственной фирмы рассматривались в работах [3, 4].

### Литература

1. Колемаев В. А. Математическая экономика.—М.: ЮНИТИ, 2002.—400 с.
2. Малыгин В. И. Экономико-математическое моделирование налогообложения.—М.: ИКФ «Каталог», 2003.—90 с.
3. Жданов В. С. Гамалеев А. С. Оптимальное налогообложение и определение реальной ситуации ухода в «теневую экономику» производственной фирмы // Сборник материалов. Всероссийская науч.-практ. конф. «Охрана, безопасность и связь».—Воронеж, 220.—Ч. 1.—С. 107-108.
4. Жданов В. С. Родин В. А., Синегубов С. В. Математическое моделирование определенных задач налоговой службы // Сборник материалов. Всероссийская науч.-практ. конф. «Охрана, безопасность и связь».—Воронеж, 2002.—Ч. 1.—С. 107-108.

Струков Владимир Сергеевич  
Воронеж, Воронежский институт МВД России  
Родин Владимир Александрович  
Воронеж, Воронежский институт МВД России  
E-mail: v\_rodin@mail.ru



# Оглавление

|                   |   |
|-------------------|---|
| Предисловие ..... | 3 |
|-------------------|---|

## ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

|                                                                                                                                                   |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| <b>Абанин А. В., Андреев А. В.</b> Функции регулярного роста<br>для хермандеровских алгебр целых функций, порожденных<br>нерадиальным весом ..... | 7 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|

|                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Абанин А. В., Никишин Ф. И.</b> К задаче о базисности полиномов Якоби в пространстве ультрадифференцируемых на отрезке функций ..... | 12 |
| Введение .....                                                                                                                          | 12 |
| 1. Базисность полиномов Якоби в пространстве $\mathcal{E}_{(\Omega)}[-1;1]$ .....                                                       | 13 |
| 2. Сравнение с подходом Г. И. Баликова .....                                                                                            | 18 |
| Литература .....                                                                                                                        | 19 |

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Брайчев Г. Г.</b> Об асимптотическом поведении выпуклых функций и их производных ..... | 21 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Иванова О. А., Мелихов С. Н.</b> О представлении аналитических функций рядами из квазимономов ..... | 30 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Климентов С. Б.</b> Представления второго рода для классов Харди и <i>ВМО</i> обобщенных аналитических функций ..... | 38 |
| Введение. Основные определения .....                                                                                    | 38 |
| 1. Формулировка основных результатов .....                                                                              | 41 |
| 2. Вспомогательные сведения .....                                                                                       | 43 |
| 3. Доказательства основных результатов .....                                                                            | 46 |
| Литература .....                                                                                                        | 54 |

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Коробейник Ю. Ф.</b> О некоторых свойствах гармонических и субгармонических функций ..... | 55 |
| 1. Постановка задачи .....                                                                   | 55 |
| 2. Случай $m = 2$ .....                                                                      | 56 |
| 3. Представляющие системы в $Hr(G)$ .....                                                    | 63 |
| 4. Замечание о многомерном случае .....                                                      | 65 |

|                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Литература .....                                                                                                      | 66  |
| <b>Тюриков Е. В.</b> Об одном случае смешанной граничной задачи                                                       |     |
| И. Н. Векуа .....                                                                                                     | 67  |
| 1. Постановка задачи .....                                                                                            | 67  |
| 2. Вспомогательная задача Римана — Гильберта в классе ограниченных решений .....                                      | 69  |
| 3. Геометрические результаты .....                                                                                    | 73  |
| Литература .....                                                                                                      | 74  |
| <b>Щерстюков В. Б.</b> Обобщенный индекс конденсации последовательности положительных чисел .....                     | 75  |
| Введение .....                                                                                                        | 75  |
| 1. Индекс $\Omega$ -конденсации .....                                                                                 | 77  |
| 2. Признак полной регулярности роста произведения (1) .....                                                           | 81  |
| Литература .....                                                                                                      | 83  |
| <br><b>ЧАСТЬ II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ</b>                                                                            |     |
| <b>Абанин А. В.</b> Ультрасреднения и преобразование Фурье ..                                                         | 87  |
| 1. Теории ультрасреднений и их сравнение .....                                                                        | 87  |
| 2. Преобразование Фурье и теория Берлинга — Бьорка .....                                                              | 92  |
| Литература .....                                                                                                      | 102 |
| <b>Абанина Д. А.</b> Преобразование Коши функционалов на пространствах ультраджетов .....                             | 104 |
| Введение .....                                                                                                        | 104 |
| 1. Пространства ультраджетов .....                                                                                    | 104 |
| 2. Преобразование Коши функционалов из $\mathcal{E}'_{(\Omega)}(K)$ .....                                             | 110 |
| Литература .....                                                                                                      | 112 |
| <b>Закиров Б. С.</b> Измеримые расслоения решеток Орлича — Канторовича .....                                          | 113 |
| 1. Предварительные сведения .....                                                                                     | 114 |
| 2. Решетки Орлича — Канторовича, ассоциированные с $\mathbf{L}_0$ -значной мерой .....                                | 119 |
| 3. Измеримые расслоения банаховых решеток Орлича — Канторовича, ассоциированных с $\mathbf{L}_0$ -значной мерой ..... | 124 |
| Литература .....                                                                                                      | 129 |
| <b>Кодзоева Ф. Д.</b> Двойственность и интерполяция весовых аналитических пространств Бесова на единичном диске ..... | 131 |
| Введение .....                                                                                                        | 131 |
| 1. Вспомогательные сведения .....                                                                                     | 132 |
| 2. Интерполяция пространств Бесова .....                                                                              | 132 |
| 3. Двойственность пространств Бесова .....                                                                            | 134 |
| Литература .....                                                                                                      | 136 |
| <b>Кондаков В. П.</b> Бесконечномерная голоморфность и суперанализ .....                                              | 137 |
| 1. Пространства голоморфных функций и их отдельные свойства .....                                                     | 138 |
| 2. Предварительные сведения о борнологиях в пространствах Кёте ...                                                    | 145 |

|                                                                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3. Замечания о строении пространств голоморфных функций, определенных на пространствах Фреше .....                                               | 148 |
| 4. Базисы в пространствах голоморфных функций, определенных на пространствах Кёте .....                                                          | 157 |
| 5. Построение алгебр типа Грассмана с бесконечным числом образующих в пространствах голоморфных функций и соответствующих суперпространств ..... | 169 |
| Литература .....                                                                                                                                 | 171 |

### ЧАСТЬ III. ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

|                                                                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Ганиев И. Г., Сададдинова С. С.</b> Сильно и равномерно непрерывные полугруппы операторов в пространствах Банаха — Канторовича ..... | 175 |
| Введение .....                                                                                                                          | 175 |
| 1. Предварительные сведения .....                                                                                                       | 176 |
| 2. Полугруппа операторов в пространствах Банаха — Канторовича .....                                                                     | 178 |
| 3. Сильно и равномерно непрерывные полугруппы операторов в пространствах Банаха — Канторовича .....                                     | 180 |
| Литература .....                                                                                                                        | 185 |
| <b>Кусраев А. Г.</b> Ортосимметричные билинейные операторы в векторных решетках .....                                                   | 186 |
| Введение .....                                                                                                                          | 186 |
| Глава 1. Билинейные операторы в векторных решетках .....                                                                                | 189 |
| 1.1. Классы билинейных операторов .....                                                                                                 | 189 |
| 1.2. Ортосимметричные билинейные операторы .....                                                                                        | 193 |
| 1.3. Продолжение орторегулярных билинейных операторов .....                                                                             | 195 |
| Глава 2. Неравенства типа Гёльдера для ортосимметричных билинейных операторов .....                                                     | 197 |
| 2.1. Однородное функциональное исчисление в векторных решетках .....                                                                    | 197 |
| 2.2. Калибры и неравенства типа Гёльдера .....                                                                                          | 201 |
| 2.3. Обобщенные неравенства Гёльдера и Миньковского .....                                                                               | 204 |
| Глава 3. Операторы, сохраняющие порядковые отрезки .....                                                                                | 206 |
| 3.1. Квадраты векторных решеток .....                                                                                                   | 206 |
| 3.2. Билинейные операторы Магарам .....                                                                                                 | 209 |
| 3.3. Теорема Радона — Никодима .....                                                                                                    | 211 |
| Глава 4. Операторы, сохраняющие дизъюнктность .....                                                                                     | 213 |
| 4.1. Раздельно нерасширяющие операторы .....                                                                                            | 213 |
| 4.2. Билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктность .....                                                                              | 216 |
| 4.3. Мультипликативное представление .....                                                                                              | 219 |
| Литература .....                                                                                                                        | 222 |
| <b>Ситник С. М.</b> Операторы преобразования и их приложения ..                                                                         | 226 |
| Введение .....                                                                                                                          | 226 |
| 1. Операторы преобразования для операторов Штурма — Лиувилля ..                                                                         | 229 |
| 2. Операторы преобразования Векуа — Эрдейи — Лаундеса .....                                                                             | 235 |
| 3. Операторы преобразования для общих дифференциальных операторов с переменными коэффициентами .....                                    | 237 |

|                                                                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4. Операторы преобразования типа Сонина и Пуассона .....                                                                                           | 243 |
| 5. Связь операторов преобразования с дробным интегродифференцированием .....                                                                       | 247 |
| 6. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи .....                                                                                                 | 255 |
| 7. В поисках вольтерровых унитарных операторов преобразования ...                                                                                  | 262 |
| 8. Операторы преобразования для некоторых сингулярных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами .....                               | 265 |
| 9. Композиционный метод построения операторов преобразования различных классов .....                                                               | 268 |
| 10. Некоторые приложения метода операторов преобразования .....                                                                                    | 271 |
| 11. Избранные задачи .....                                                                                                                         | 274 |
| Литература .....                                                                                                                                   | 275 |
| <b>Фетисов В. Г.</b> Нелинейные уравнения с оператором внутренней суперпозиции .....                                                               | 294 |
| Введение .....                                                                                                                                     | 294 |
| 1. Вспомогательные сведения и результаты .....                                                                                                     | 295 |
| 2. Положительное решение функционально-интегрального уравнения Урысона с атомическим оператором, содержащим оператор внутренней суперпозиции ..... | 297 |
| Литература .....                                                                                                                                   | 299 |
| <b>Филиппенко В. И.</b> О ранге спектральной матрицы-функции симметрического дифференциального оператора .....                                     | 300 |
| <b>Шабаршина И. С.</b> К задаче об асимптотическом интегрировании одного дифференциального уравнения третьего порядка с большим параметром .....   | 313 |
| <b>ЧАСТЬ IV. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ</b>                                                                                                      |     |
| <b>Астахов В. И., Кочубей Т. В., Шапошников К. С.</b><br>О дуальности некоторых задач теории потенциала для магнитного поля .....                  | 325 |
| Введение .....                                                                                                                                     | 325 |
| 1. Постановка задач для магнитного поля .....                                                                                                      | 325 |
| 2. Преобразование уравнений и задач .....                                                                                                          | 328 |
| 3. Решение полученных задач .....                                                                                                                  | 329 |
| Литература .....                                                                                                                                   | 331 |
| <b>Васильев И. Е., Васильев Е. И., Ключев Р. В., Котова О. А.</b> Математическая модель расчета фВП в несинусоидальность напряжения .....          | 332 |
| <b>Васильев И. Е., Сахаров Д. С., Ключев Р. В.</b> Вероятностная модель расчета надежности в системе электроснабжения городов .....                | 338 |
| <b>Думачев В. Н., Малыхин В. И., Родин В. А.</b> О пограничных значениях налогообложения модели Неймана .....                                      | 344 |

---

|                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Введение .....                                                                           | 344        |
| 1. Стационарные траектории в модели Неймана .....                                        | 345        |
| 2. Налог на прибыль .....                                                                | 346        |
| 3. Суммарное налогообложение .....                                                       | 347        |
| 4. Современная стоимость суммарного налогообложения .....                                | 351        |
| 5. Суммарное НДС .....                                                                   | 352        |
| 6. Акцизный налог .....                                                                  | 352        |
| 7. Выводы .....                                                                          | 353        |
| Литература .....                                                                         | 354        |
| <b>Науменко Я. А. Уравнения вихревых токов на сингулярных</b><br><b>носителях .....</b>  | <b>355</b> |
| Введение .....                                                                           | 355        |
| 1. Основные положения .....                                                              | 355        |
| 2. Свойства оператора $K$ .....                                                          | 358        |
| 3. Исследование интегральных уравнений .....                                             | 359        |
| 4. Численный метод и примеры расчетов .....                                              | 362        |
| Литература .....                                                                         | 363        |
| <b>Струков В. С., Родин В. А. Стационарные траектории мо-</b><br><b>дели Солоу .....</b> | <b>365</b> |
| 1. Стационарные траектории в модели Солоу .....                                          | 365        |
| 2. Описание модели Неймана .....                                                         | 365        |
| 3. Стационарные траектории в модели Неймана .....                                        | 366        |
| 4. Описание модели Солоу .....                                                           | 371        |
| 5. Стационарные траектории в модели Солоу .....                                          | 372        |
| 6. Налог в модели Солоу .....                                                            | 373        |
| 7. Выводы .....                                                                          | 375        |
| Литература .....                                                                         | 376        |

Научное издание

**ИССЛЕДОВАНИЯ ПО  
СОВРЕМЕННОМУ АНАЛИЗУ И  
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ  
МОДЕЛИРОВАНИЮ**

под редакцией  
Ю. Ф. Коробейника и А. Г. Кусраева

*Утверждено к печати  
Ученым советом Института  
прикладной математики и информатики  
Владикавказского научного центра  
Российской академии наук*

Компьютерная верстка  
*М. Д. Бичкаева  
Е. Р. Кайтмазова*

Подписано в печать 27.02.2008. Формат бумаги  $60 \times 84^{1/16}$ .

Печать офсетная. Усл. п. л. 22,32.

Тираж 200 экз. Заказ № 1057.

Владикавказский научный центр,  
362008, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ОАО «Издательско-полиграфическое  
предприятие им. В. А. Гассиева»,  
362021, г. Владикавказ, ул. Тельмана, 16

