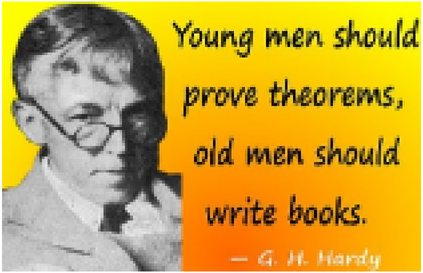
Неравенство Карлсона и теория экстремума

К. Ю. Осипенко

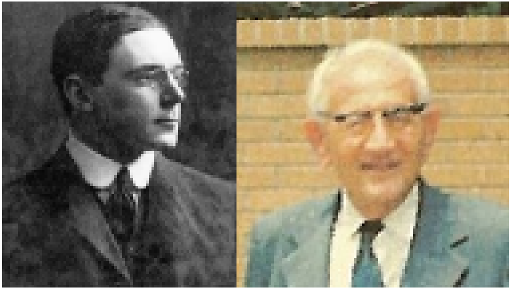
МГУ
e-mail: kosipenko@yahoo.com

ВОРКШОП ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ, ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ, ПОСВЯЩЕННЫЙ ЮБИЛЕЮ Д.Ф.-М.Н., ПРОФЕССОРА ТИХОМИРОВА ВЛАДИМИРА МИХАЙЛОВИЧА

Владимир Михайлович Тихомиров



Годфри Харди
1877–1947



Джон Литллвуд Джордж Полиа
1887–1977 1887-1985

В 1934 году Фритц Карлсон (1888–1952) получил следующее неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sqrt{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/4}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2\right)^{1/4}.$$

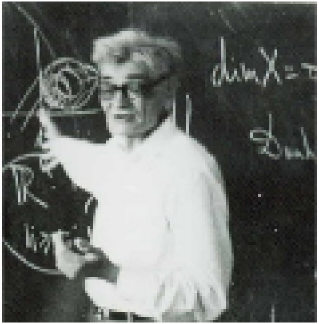
Здесь $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и не все равны нулю, а константа $\sqrt{\pi}$ — точная. Это неравенство привлекло внимание многих математиков. Харди в 1936 году дал два простых доказательства этого неравенства. Основная идея одного из его доказательств использовалась многими математиками, обобщающими это неравенство.

F. Carlson.

Fotografi.

1888–1952

Виктор Иосифович Левин
1909–1988



Сергей Борисович Стечкин
1920–1995

Приведем это доказательство для интегрального аналога неравенства Карлсона

$$\int_0^{+\infty} x(t)\,dt \le \sqrt{\pi}\left(\int_0^{+\infty} x^2(t)\,dt\right)^{1/4}\left(\int_0^{+\infty} t^2x^2(t)\,dt\right)^{1/4}.$$

Для любого $\lambda > 0$ из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\left(\int_0^{+\infty} x(t)\,dt\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \sqrt{1+\lambda^2t^2}\,x(t)\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2t^2}}\,dt\right)^2$$
$$\le \int_0^{+\infty}(1+\lambda^2t^2)x^2(t)\,dt\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\lambda^2t^2}\,dt = \frac{\pi}{2\lambda}(S+\lambda^2T),$$

где

$$S = \int_0^{+\infty} x^2(t)\,dt, \quad T = \int_0^{+\infty} t^2x^2(t)\,dt.$$

Положив $\lambda = (S/T)^{1/4}$ (считая $x \neq 0$), получаем

$$\left(\int_0^{+\infty} x(t)\, dt\right)^2 \leq \pi\sqrt{ST}.$$

Константа является точной и достигается на функциях вида

$$x(t) = \frac{C}{1 + \lambda^2 t^2}.$$

Решение, основанное на общем подходе в теории экстремума

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_0^{+\infty} x(t)\,dt \to \max, \quad \int_0^{+\infty} x^2(t)\,dt \le a, \quad \int_0^{+\infty} t^2x^2(t)\,dt \le b.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = \int_0^{+\infty} (-x(t) + \lambda_1 x^2(t) + \lambda_2 t^2 x^2(t))\,dt.$$

Нетрудно убедиться, что для всех $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$\mathcal{L}(\widehat{x}, \lambda_1, \lambda_2) \le \mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2),$$

где

$$\widehat{x}(t) = \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2 t^2)}.$$

Из условий дополняющей нежесткости

$$\int_0^{+\infty} \widehat{x}^2(t)\,dt = a, \quad \int_0^{+\infty} t^2\widehat{x}^2(t)\,dt = b,$$

получаем

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} b^{1/4} a^{-3/4}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{1/4} b^{-3/4}.$$

В силу достаточных условий теоремы Каруша–Куна–Таккера

$$\int_0^{+\infty} x(t)\,dt \le \int_0^{+\infty} \widehat{x}(t)\,dt = \sqrt{\pi}(ab)^{1/4}.$$

Пусть $1 \le q < p, r < \infty$, T — конус в $\mathbb{R}^d$, $|\psi|$ — однородная функция порядка η, $|\varphi_j|$, $j = 1, \ldots, l$, однородные функции порядка ν, $|\varphi_j|$, $j = l+1, \ldots, n$, — однородные функции порядка ν_1,

$$\gamma = \frac{\nu_1 - \eta - d(1/q - 1/r)}{\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)}.$$

Предположим, что $\gamma \in (0, 1)$. Положим

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Тогда имеет место точное неравенство

$$\|\psi x\|_{L_q(T)} \le K \max_{1 \le j \le l} \|\varphi_j x\|^{\gamma}_{L_p(T)} \max_{l+1 \le j \le n} \|\varphi_j x\|^{1-\gamma}_{L_r(T)},$$

где

$$K = \left(\frac{l}{\gamma}\right)^{\gamma/p} \left(\frac{n-l}{1-\gamma}\right)^{(1-\gamma)/r} \times \left(\frac{B\,(q^*\gamma/p, q^*(1-\gamma)/r)\,\mathcal{I}}{|\nu_1 - \nu + d(1/r - 1/p)|(\gamma r + (1-\gamma)p)}\right)^{1/q^*},$$

а B — B-функция Эйлера.
При тех же условиях $1 \le q < p, r < \infty$ имеет место точное неравенство

$$\|\psi x\|_{L_q(T)} \le K_1 \|\varphi_0 x\|_{L_p(T)}^{\gamma_1} \left(\sum_{j=1}^{d} \|\varphi_j x\|_{L_r(T)}^r\right)^{(1-\gamma_1)/r},$$

где постоянные γ_1 и K_1 того же вида, что γ и K.

При всех $2 \le p \le \infty$ и $\nu > \eta \ge 0$ имеет место точное неравенство

$$\|(-\Delta)^{\eta/2}x\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le K_2\|Fx\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\gamma_2}\left(\sum_{j=1}^{d}\left\|\frac{\partial^\nu x}{\partial t_j^\nu}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\right)^{(1-\gamma_2)/2}.$$