X, Y - векторные пространства

$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times Y \to \mathbb{R}$,

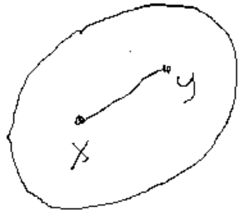
$\langle x, y\rangle = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow y = 0$

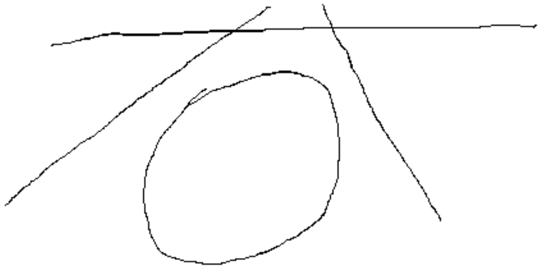
$\langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in Y \Rightarrow x = 0$

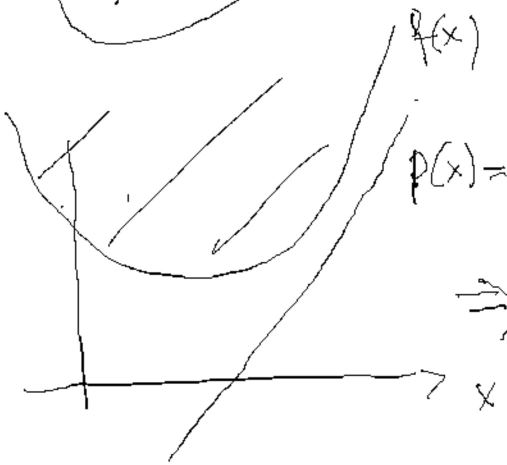
$\sigma(X, Y)$, $\sigma(Y, X)$

$(X, \sigma(X, Y))^* = Y$, $(Y, \sigma(Y, X))^* = X$

X, X^*, $\langle x, x^*\rangle$ - значение $x^* \in X^*$ на $x \in X$







$p(x) = \langle x, y \rangle - \alpha$, $f(x) \geq \langle x, y \rangle - \alpha$

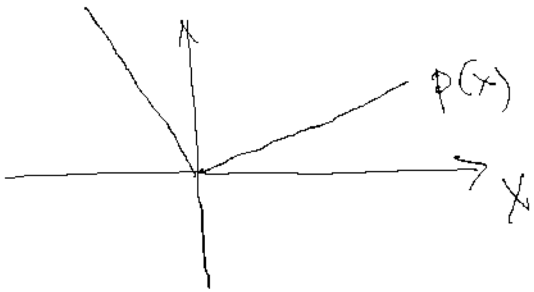
$$\Rightarrow \alpha \geq \sup_{x \in X} \left(\langle x, y \rangle - f(x) \right) = f^*(y)$$

$$f(x) = \sup_{\substack{y \in Y \\ \alpha \geq f^*(y)}} \left(\langle x, y \rangle - \alpha \right) = \sup_{y \in Y} \left(\langle x, y \rangle - f^*(y) \right) = f^{**}(x)$$

Теорема (Фенхеля-Моро)

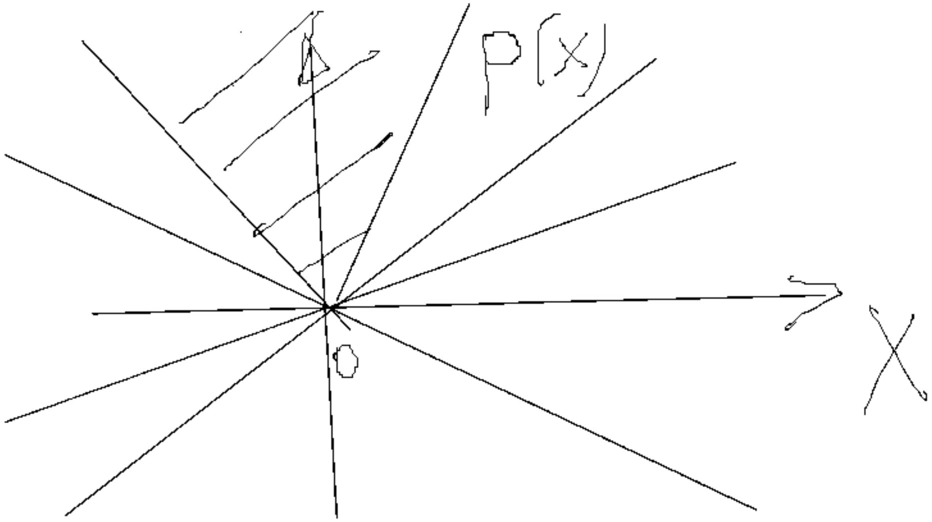
$f = f^{**}$

— " —

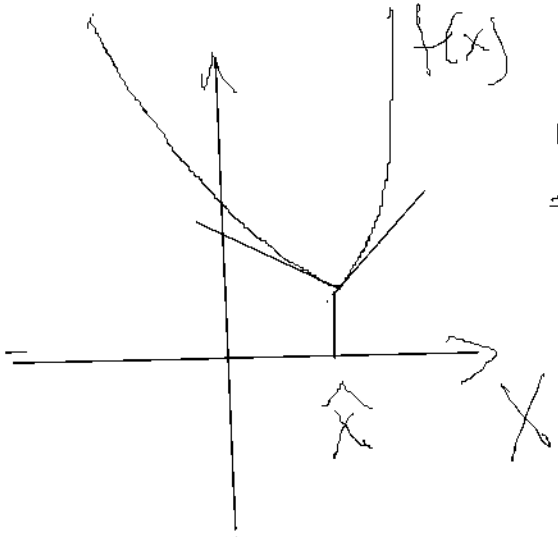


$A \subset X$, $s_A(y) = \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle$

$$s_{(A_1 + A_2)}(y) = s_{A_1}(y) + s_{A_2}(y)$$



$$\partial p = \partial p(0) = \{ y \in Y : \langle x, y \rangle \le p(x), \ \forall x \in X \}$$



$$f'(\hat{x}; x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\hat{x} + tx) - f(\hat{x})}{t}$$

$$\partial f(\hat{x}) = \partial f'(\hat{x}; 0)$$

$$\partial f(\hat{x}) = \{ y \in Y : f(x) - f(\hat{x}) \geq \langle x - \hat{x}, y \rangle, \forall x \in X \}$$

Теорема

1) Сублинейна функция $p : X \to \mathbb{R}$ замкнута тогда и только тогда, когда

$$p = S \partial p.$$

2) Множество $A \subset X$ выпукло и замкнуто тогда и только тогда, когда

$$A = \partial S A$$

Теорема (Моро-Рокафеллара)

Пусть f_1 и f_2 — выпуклые функции на X, $\hat{x} \in X$ и f_1 непрерывна в $\hat{x}$.

Тогда

$$\partial(f_1+f_2)(\hat{x}) = \partial f_1(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x}).$$

Доказательство.

$$\partial(f_1+f_2)(\hat{x}) = \partial (f_1+f_2)'(\hat{x};0) =$$

$$= \partial \left(f_1'(\hat{x};0) + f_2'(\hat{x};0)\right).$$

Обозначим $p_i = f_i'(\hat{x};0)$, $i = 1,2$.

Надо доказать, что $\partial(p_1+p_2) = \partial p_1 + \partial p_2$

$$\partial(p_1+p_2) \overset{1)}{=} \partial(S\partial p_1 + S\partial p_2) \overset{5}{=}$$

$$= \partial S(\partial p_1 + \partial p_2) \overset{2)}{=} \partial p_1 + \partial p_2. \quad \square$$

Теорема (Дубовицкого-Милютина)

Пусть функции f_1 и f_2 — выпуклые функции на X, непрерывные в $\hat{x}$.

Тогда

$$\partial \max(f_1, f_2)(\hat{x}) = \mathrm{co}\left(\partial f_1(\hat{x}) \cup \partial f_2(\hat{x})\right)$$

Доказательство

$$s(\mathrm{co}(A_1 \cup A_2)) = \max(sA_1, sA_2) \quad (*)$$

Снова $p_i = f_i'(\hat{x}; 0)$, $i = 1, 2$

$$\partial \max(p_1, p_2) \overset{1)}{=} \partial \max(s\partial p_1, s\partial p_2) \overset{(*)}{=}$$

$$= \partial s(\mathrm{co}(\partial p_1 \cup \partial p_2)) \overset{2)}{=} \mathrm{co}(\partial p_1 \cup \partial p_2). \square$$