ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2018, том 480, № 1, с. 21–24

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5 + 517.987

УКЛОНЕНИЯ СУММ ФЕЙЕРА И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ФОН НЕЙМАНА

© 2018 г. А. Г. Качуровский[1,2,*], К. И. Книжов[2,**]

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 08.12.2017 г.

Поступило 18.12.2017 г.

Уклонения сумм Фейера непрерывных 2π-периодических функций и скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана вычисляются фактически по одним и тем же формулам (интегрированием ядер Фейера). Это даёт возможность, например, выводить из результатов С.Н. Бернштейна по гармоническому анализу более чем столетней давности оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана для многих популярных в приложениях динамических систем – с точным старшим членом асимптотики.

DOI: 10.7868/S0869565218130042

1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ – пространство с вероятностной мерой, T – его эндоморфизм, т.е. такое отображение $T\colon \Omega \to \Omega$, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$, и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. Через U_T обозначим изометрический оператор, действующий в (комплексном) гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T f = f \circ T$; положим

$$A_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f.$$

Тогда статистическая эргодическая теорема фон Неймана утверждает существование предела в $L_2(\Omega)$

$$\lim_{n\to\infty} A_n f = f^*,$$

причём f^* оказывается ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов оператора U_T, и выполняется равенство

$$\int_\Omega f^* d\lambda = \int_\Omega f\, d\lambda.$$

Определим теперь корреляционные коэффициенты $b_k f$ вектора f: $b_k f = (U_T^k f, f)$ при $k \ge 0$, и $b_k f = \overline{b_{-k} f}$ при $k < 0$. Как хорошо известно (см., например, [1, глава 1, § 7]), корректно определена (единственная) спектральная мера σ_f, т.е. такая конечная борелевская мера на единичной окружности, что

$$b_k f = \int_{(-\pi,\pi]} e^{ikx} d\sigma_f(x)$$

для всех целых k (так что корреляционные коэффициенты являются её коэффициентами Фурье в комплексной форме).

Пусть $L_2^0(\Omega)$ – подпространство функций с нулевым средним в $L_2(\Omega)$. Поскольку $f - f^* \in L_2^0(\Omega)$, то и $A_n(f - f^*) \in L_2^0(\Omega)$ для всех натуральных n. Положим

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \quad 0 < |x| \le \pi.$$

Заметим, что Φ_n отличается от $(n-1)$-го ядра Фейера K_{n-1} (см., например, [2, гл. I, § 47]) лишь коэффициентом $\Phi_n = 2K_{n-1}$. Как хорошо известно (теорема 18.2.1 в [3]), для каждой $g \in L_2^0(\Omega)$

$$\|A_n g\|_2^2 = \frac{1}{n}\int_{(-\pi,\pi]} \Phi_n(x) d\sigma_g(x);$$

поэтому в случае, когда мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна (с плотностью ρ) относительно меры Лебега, для всех натуральных n получаем

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = \|A_n(f - f^*)\|_2^2 = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x)\rho(x)dx. \tag{1}$$

[1] Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

[2] Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

*E-mail: agk@math.nsc.ru

**E-mail: kirillknizhov@mail.ru

Заметим, что переход от σ_f к σ_{f-f^*} осуществляется простым отбрасыванием сосредоточенной в точке 0 меры $\sigma_f\{0\} = \|f^*\|_2^2$ (поскольку f^* и есть ортогональная проекция f на подпространство собственных векторов оператора U_T, отвечающих собственному значению 1; по этой же причине верно равенство $\|f\|_2^2 = \|f - f^*\|_2^2 + \|f^*\|_2^2$).

Скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана измеряют скоростью сходимости величин $\|A_nf - f^*\|_2^2$ к нулю при $n \to \infty$; см. обзоры [4, 5].

2. Пусть L – множество всех 2π-периодических интегрируемых по Лебегу на $[-\pi, \pi]$ функций ρ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для каждой функции $\rho \in L$ рассмотрим её частичные суммы Фурье $S_k(x)$ и суммы Фейера

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x).$$

Как хорошо известно (Л. Фейер, 1904 г.), в случае непрерывности ρ её суммы Фейера $\sigma_n(x)$ поточечно всюду сходятся к $\rho(x)$ равномерно по x при $n \to \infty$; величины $|\sigma_n(x) - \rho(x)|$ и называют уклонениями сумм Фейера. Хорошо известна также (см., например, соотношение (47.4) в [2, гл. I, § 47]) формула для точного вычисления сумм Фейера:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\rho(x + t)dt$$

для всех $x \in (-\pi, \pi]$; в частности, при $x = 0$ получаем

$$\sigma_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\rho(t)dt. \qquad (2)$$

Сопоставление равенств (1) и (2) немедленно даёт любопытную формулу, связывающую нормы отклонений эргодических средних A_nf от их предела f^* в эргодической теореме фон Неймана – и значения $\sigma_n(0)$ сумм Фейера в точке 0 для плотности ρ спектральной меры σ_{f-f^*} (в случае, когда эта плотность существует):

$$\|A_nf - f^*\|_2^2 = \frac{2\pi}{n}\sigma_n(0). \qquad (3)$$

Эта формула показывает, что задача оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана фактически совпадает с классической задачей гармонического анализа оценки уклонений сумм Фейера.

В разделе 3 ниже мы покажем, как из оценок С.Н. Бернштейна (1912 г.) уклонений сумм Фейера для гёльдеровских функций могут быть получены оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана для многих популярных в приложениях динамических систем. И обсудим далее в разделе 4 как, наоборот, эргодические оценки В.П. Леонова (1961 г.) позволяют уточнять эти оценки С.Н. Бернштейна из гармонического анализа более чем столетней давности.

3. Если для 2π-периодической функции h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для некоторых констант $0 < \alpha < 1$ и $M \geq 0$ при всех x, y верно неравенство $|h(x) - h(y)| \leq M\,|x - y|^\alpha$, то говорят, что функция принадлежит классу Гёльдера с показателем α и коэффициентом M, и пишут $h \in H_M^\alpha$. Если коэффициент M несущественен, то пишут просто $h \in H^\alpha$; в случае $\alpha = 1$ такая функция называется липшицевой.

Доказательство следующей теоремы можно найти, например, в [6, глава VIII, § 2].

Т е о р е м а 1 (С.Н. Бернштейн, 1912 г.). *Для любой функции $\rho \in H_M^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, при всех x для всех натуральных n*

$$|\sigma_n(x) - \rho(x)| < C_\alpha M n^{-\alpha},$$

где C_α – константа, зависящая только от α; можно положить $C_\alpha = \dfrac{\pi \cdot 2^\alpha}{1 - \alpha^2}$.

Точное значение константы C_α (также равномерное по H_M^α) было найдено С.М. Никольским в [7]. В [6, глава VIII, § 2] приводится аналогичный результат С.Н. Бернштейна и для липшицевых функций, с чуть лучшей асимптотикой $|\sigma_n(x) - \rho(x)| = O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ при $n \to \infty$ (точное значение соответствующей константы также было найдено С.М. Никольским в [7]).

Перед применением теоремы 1 к оценке скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана необходимо убедиться, что исследуемая динамическая система имеет абсолютно непрерывную по отношению к мере Лебега спектральную меру σ_{f-f^*}, с плотностью ρ класса H^α для некоторого $0 < \alpha < 1$. Это позволяет сделать, например, следующая теорема Г. Лоренца (G. Lorentz), доказательство которой имеется в [2, глава II, § 3].

Т е о р е м а 2 (Г. Лоренц, 1948 г.). *Если для функции $\rho \in L$ её коэффициенты Фурье удовлетворяют асимптотическому соотношению $c_n = O(n^{-1-\alpha})$ при $n \to \infty$, где $0 < \alpha < 1$, то $\rho \in H^\alpha$.*

Пусть теперь наша динамическая система такова, что $b_n(f - f^*) = O(n^{-1-\alpha})$ при $n \to \infty$, где $0 < \alpha < 1$. Поскольку числовой ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(f - f^*)$ абсолютно сходится, то функциональный ряд $\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(f-f^*)e^{ikx}$ равномерно по x сходится к некоторой непрерывной функции $\rho(x)$, являющейся плотностью меры σ_{f-f^*}. По теореме 2 немедленно заключаем, что $\rho \in H_M^{\alpha}$, где $M \geq 0$ – некоторая константа. По теореме 1 получаем неравенство $|\sigma_n(0)-\rho(0)| < C_\alpha M n^{-\alpha}$, что с учётом (3) даёт

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1}\right| < 2\pi C_\alpha M n^{-1-\alpha},$$

т.е.

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)n^{-1} + O(n^{-1-\alpha}) \qquad (4)$$

при $n \to \infty$; здесь $2\pi\rho(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(f-f^*)$ – очевидно точный коэффициент при старшем члене асимптотики скорости сходимости.

В обзоре [5] приведены многочисленные примеры популярных в приложениях динамических систем (среди которых некоторые известные бильярды и системы Аносова) со степенным и экспоненциальным убыванием корреляционных коэффициентов $b_n(f-f^*)$, для которых немедленно применима приведённая выше конструкция оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана.

4. Пусть теперь корреляционные коэффициенты $b_n(f-f^*)$ убывают при $n \to \infty$ настолько быстро, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} kb_k(f-f^*)$ абсолютно сходится. Как показал В.П. Леонов в [8], в этом случае спектральная мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега с непрерывно дифференцируемой плотностью ρ, и справедливо следующее уточнение на этот случай асимптотического соотношения (4), со вторым членом асимптотики, порядка $\frac{1}{n^2}$:

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 - \frac{2\pi\rho(0)}{n} + \frac{2\pi(\rho')^c(0)}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{|k|>n}(|k|-n)b_k(f-f^*) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (5)$$

при $n \to \infty$; здесь $(\rho')^c$ – функция, тригонометрически сопряжённая (см. [2, глава VIII], например) к ρ' (доказательство (5) в такой именно формулировке было дано в [9]).

Переформулировка с помощью (3) этого утверждения на языке уклонений сумм Фейера функции ρ в точке 0 даёт соотношение

$$\sigma_n(0) - \rho(0) + \frac{(\rho')^c(0)}{n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\sum_{|k|>n}(|k|-n)c_k = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n \to \infty$ (в случае, когда для коэффициентов Фурье c_k функции $\rho \in L$ ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} kc_k$ абсолютно сходится).

Поскольку для каждой функции $\rho(x) \in L$ её суммы Фейера в любой точке x_0 очевидно равны соответствующим суммам Фейера функции $r(x) = \rho(x_0 + x)$ в точке 0:

$$\sigma_n(x_0, \rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\rho(x_0+t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)r(t)dt = \sigma_n(0, r),$$

то перевод выкладок из [8] на язык уклонений сумм Фейера доказывает следующую теорему (передоказанную и обобщённую четырьмя годами позже в [10]).

Т е о р е м а 3. *Пусть $\rho(x) \in L$, $\sigma_n(x)$ – её суммы Фейера, $x_0 \in \mathbb{R}$, и c_k – коэффициенты Фурье функции $r(x) = \rho(x_0 + x)$. Тогда если ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} kc_k$ абсолютно сходится, то функция ρ непрерывно дифференцируема, и*

$$\sigma_n(x_0) - \rho(x_0) + \frac{(\rho')^c(x_0)}{n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\sum_{|k|>n}(|k|-n)c_k = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n \to \infty$, где $(\rho')^c$ – тригонометрически сопряжённая к ρ' функция; при этом

$$\rho(x_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k,$$

$$(\rho')^c(x_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|c_k.$$

Тем самым в [8] фактически была уточнена теорема 1 для классов функций, более регулярных, чем гёльдеровские и липшицевы (что, по-видимому, на несколько лет опередило появление соответствующих работ из гармонического анализа). Например, в случае аналитичности функции ρ

(что эквивалентно экспоненциальному убыванию её коэффициентов Фурье c_n при $n \to \infty$, см. [2, глава I, § 25]) теорема 3 даёт убывание уклонений сумм Фейера с асимптотикой $\frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ (и с экспоненциально быстрым выходом на эту асимптотику, без каких-либо ещё степенных её членов, что довольно неожиданно). Любопытно, что неулучшаемость асимптотики $\frac{1}{n}$ уклонений сумм Фейера в классе аналитических функций отмечалась ещё в [6, глава VIII, § 2]: там была приведена в качестве примера функция $\rho(x) = 1 - \cos x$, для которой $\sigma_n(0) - \rho(0) = \frac{1}{n}$ для всех натуральных n (здесь, как нетрудно проверить, $(\rho')^c(0) = -1$, и все коэффициенты Фурье c_k функции ρ равны 0 при $|k| > 1$). Тем не менее, аналога теоремы 3 (хотя бы для аналитических функций) в [6] ещё не было.

5. Представляет естественный интерес численное значение коэффициента $(\rho')^c(x_0)$ в утверждении теоремы 3. В [8] аналогичный коэффициент (константа $2\pi(\rho')^c(0)$ в соотношении (5)) был выписан в виде суммы ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k$, и было приведено (без доказательства) его интегральное представление

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho(t) + \rho(-t) - 2\rho(0)}{4\sin^2\frac{t}{2}} dt.$$

Доказательство этого представления сразу следует из того, что, как было замечено в [9], здесь $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k = 2\pi(\rho')^c(0)$; более общее же интегральное представление для всех x_0 в условиях теоремы 3

$$2\pi(\rho')^c(x_0) = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho(x_0 + t) + \rho(x_0 - t) - 2\rho(x_0)}{4\sin^2\frac{t}{2}} dt$$

является немедленным следствием теоремы 3.3 в [11, глава IV, § 3] (как интегральное представление тригонометрически сопряжённой к непрерывной функции ρ' через её первообразную ρ).

Из этого представления немедленно следует, например, что оба коэффициента ($2\pi\rho(0)$ и $2\pi(\rho')^c(0)$) в асимптотическом соотношении (5) не могут зануляться одновременно. Действительно, если $\rho(0) = 0$, то $(\rho')^c(0) = 0$ только в вырожденном случае $\rho \equiv 0$ (так как плотность ρ спектральной меры неотрицательна).

Теорема 3.1 в [11, глава IV, § 3] даёт ещё одно любопытное интегральное представление обсуждаемого здесь коэффициента:

$$2\pi(\rho')^c(x_0) = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho'(x_0 + t) - \rho'(x_0 - t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} dt,$$

интеграл в правой части которого является особым интегралом Лузина (формула (15) в [12, глава V, § 69]) функции ρ'.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
3. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
4. *Качуровский А.Г.* // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 73–124.
5. *Качуровский А.Г., Подвигин И.В.* // Тр. ММО. 2016. Т. 77. № 1. С. 1–66.
6. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 688 с.
7. *Никольский С.М.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4. № 6. С. 501–508.
8. *Леонов В.П.* // Теория вероятностей и ее применения. 1961. Т. 6. № 1. С. 93–101.
9. *Качуровский А.Г., Седалищев В.В.* // Мат. сб. 2011. Т. 202. № 8. С. 21–40.
10. *Тригуб Р.М.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29. № 3. С. 615–630.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.
12. *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 550 с.