Некоммутативная версия теоремы Радона-Никодима для одного класса вполне положительных отображений

А. К. Гутнова

Северо-Осетинский государственный университет,
Владикавказ, Россия

Воркшоп по функциональному анализу, теории приближений и теории экстремальных задач, посвященный юбилею д.ф.-м.н., профессора Тихомирова Владимира Михайловича
(5 – 6 декабря 2024 г., дистанционный формат)

Содержание

Содержание

C^*-алгебра

Определение

Инволюция алгебры A - это сопряженно-линейное отображение $a \mapsto a^*$ такое, что $a^{**} = a$ и $(ab)^* = b^* a^*$ для любых $a, b \in A$.
Пара $(A, *)$ называется *инволютивной алгеброй* или **-алгеброй*.

Определение

Банаховой $*$-алгеброй называется $*$-алгебра A, наделенная полной субмультипликативной нормой ($||ab|| \leq ||a|| \cdot ||b||$), удовлетворяющей условию: $||a^*|| = ||a||, a \in A$.
C^*-алгеброй называется банахова $*$-алгебра, в которой $||a^* a|| = ||a||^2 (a \in A)$.

Примеры C^*-алгебр

Пример 1 - коммутативная C^*-алгебра

Множество $C(Q)$, где $Q = [0, 1]$, ограниченных непрерывных комплекснозначных функций на Q является коммутативной C^*-алгеброй.

Пример 2 - некоммутативная C^*-алгебра

Рассмотрим гильбертово пространство H. Множество $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов на H является некоммутативной C^*-алгеброй.

Вполне положительное отображение

Определение

Элемент $a \in A$ C^*-алгебры A называется *положительным*, если $a = a^*$ и $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$, где $\sigma(a)$ — это спектр элемента a.

Для C^*-алгебры A через $M_n(A)$ обозначим C^*-алгебру всех квадратных $n \times n$ матриц с элементами из A.

Определение

Линейное отображение $\varphi \colon A \to B$, действующее между C^*-алгебрами A и B, называется:

- *положительным*, если $\varphi(A_+) \subset B_+$;
- *вполне положительным*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $\varphi_n \colon M_n(A) \to M_n(B)$, заданное правилом $\varphi_n\left((a_{ij})_{i,j=1}^n\right) = (\varphi(a_{ij}))_{i,j=1}^n$, является положительным.

Изучение вполне положительных отображений в операторных алгебрах и модулях представляет большой интерес для теории квантовой информации и теории квантовых вычислений:

- J. Watrous. The Theory of Quantum Information.//Cambridge University Press. 2018.
- A. Holevo. Quantum System, Chanells, Information: A Mathematical Introduction.//De Gruyter. 2019.
- M. A. Nielsen, I. L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information.//Cambridge University Press. 2000.

В середине прошлого столетия Стайнспрингом было установлено, что вполне положительное отображение $\varphi\colon A \to B(H)$, заданное на C^*-алгебре A со значениями в $B(H)$ — алгебре ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, имеет вид $\varphi(\cdot) = S^*\pi_\varphi(\cdot)S$, где $\pi_\varphi\colon A \to B(K)$ — это *-гомоморфизм алгебры A в $B(K)$ для некоторого гильбертова пространства K и $S\colon H \to K$ — линейный ограниченный оператор из H в K:

- F. Stinespring. Positive functions on C^*-algebras.//Proc. Amer. Math. Soc. 6:2 (1955), 211–216.

n-вполне положительное отображение

Квадратную $n \times n$ матрицу $[\varphi] := (\varphi_{ij})_{i,j=1}^n$ непрерывных линейных отображений, действующих между C^*-алгебрами A и B, можно рассматривать как линейное отображение $[\varphi]\colon M_n(A) \to M_n(B)$ матричных алгебр, заданное правилом

$$[\varphi]((a_{ij})_{i,j=1}^n) = (\varphi_{ij}(a_{ij}))_{i,j=1}^n.$$

Определение

Говорят, что матрица $(\varphi_{ij})_{i,j=1}^n$ задает *n-вполне положительное отображение* из A в B, если отображение $[\varphi]\colon M_n(A) \to M_n(B)$ является вполне положительным.

n-вполне положительные матричные отображения, заданные на C^*-алгебрах, были исследованы в следующих работах:

- A. Kaplan. Multi-states on C^*-algebras.//Proc. Amer. Math. Soc. 106:2 (1989), 437–446.
- C. Y. Suen. An $n \times n$ matrix of linear maps of a C^*-algebra.//Proc. Amer. Math. Soc. 112:3 (1991), 709–712.
- J. Heo. Completely multi-positive linear maps and representations on Hilbert C^*-modules.//J. Operator Theory, 41:1(1999), 3–32.

Гильбертов C^*-модуль

Определение

Комплексное векторное пространство $\mathcal{M}$, являющееся также правым A-модулем над C^*-алгеброй A, называется предгильбертовым A-модулем, если найдется полуторалинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to A$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ для любого $x \in \mathcal{M}$;
2. $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$ для любых $x, y \in \mathcal{M}$;
3. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ для любого $x \in \mathcal{M}$;
4. $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$ для любых $x, y \in \mathcal{M}$ и $a \in A$.

Будем говорить, что $\mathcal{M}$ — это *гильбертов C^*-модуль над алгеброй A*, если $\mathcal{M}$ является банаховым пространством относительно нормы, задаваемой правилом $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in \mathcal{M}$.

Примеры гильбертовых C^*-модулей

Пример 3

Каждая C^*-алгебра A является гильбертовым C^*-модулем над A. Полуторалинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon A\times A\to A$ задается формулой

$$\langle a, b\rangle = a^* b, \ \ a, b \in A.$$

Пример 4

Пусть A — C^*-алгебра и $n\in\mathbb{N}$. Положим $\mathcal{M} := A^n$. Тогда $\mathcal{M}$ является гильбертовым C^*-модулем над A, причем полуторалинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathcal{M}\times\mathcal{M}\to A$ имеет вид

$$\langle \xi, \psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i, \ \ \xi = (a_1, \dots, a_n), \ \ \psi = (b_1, \dots, b_n),$$

где $a_i, b_i \in A, \ 1 \le i \le n$.

Примеры гильбертовых C^*-модулей

Пример 5

Пусть H и K — гильбертовы пространства. Тогда $B(H, K)$ является гильбертовым C^*-модулем над алгеброй $B(H)$, причем полуторалинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon B(H, K) \times B(H, K) \to B(H)$ задается формулой

$$\langle T, S\rangle = T^*S; \quad T, S \in B(H, K).$$

История гильбертовых C^*-модулей

Понятие гильбертова C^*-модуля впервые было введено И.Капланским:

- I. Kaplansky. Modules over operator algebras. Amer. J. Math., 75, (1953). 839-858.

Гильбертовы C^*-модули являются естественным обобщением как гильбертовых пространств, так и C^*-алгебр. Данная теория является активно развивающейся областью функционального анализа, имеющая многочисленные приложения. Количество публикаций по данным еще 1996 года составляло около 500 наименований. За последние десятилетия активность в этой области еще более возросла.

Приложения гильбертовых C^*-модулей

Теория гильбертовых C^*-модулей имеет многочисленные приложения в функциональном анализе, в некоммутативной теории вероятностей, в квантовой теории поля.

- Michael Skeide, Hilbert Modules and Applications in Quantum Probability. Докторская диссертация (монография). 2001.

Современный рафинированный подход к теории гильбертовых C^*-модулей позволяет интерпретировать их как обобщенные гомоморфизмы, действующие между C^*-алгебрами. Такая точка зрения способствовала полному описанию на языке некоммутативной геометрии так называемой Стандартной Модели элементарных частиц.

- A.Connes, M. Marcolli. Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives. AMS. 2007.
- Walter D. van Suijlekom. Noncommutative Geometry and Particle Physics. Springer, 2015.

Морфизм

Определение

Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — гильбертовы C^*-модули над алгебрами A и B соответственно. Пара линейных отображений (Π, π), где $\Pi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и $\pi\colon A \to B$, называется *морфизмом* модулей, если π — это *-гомоморфизм и равенство $\langle \Pi(x), \Pi(y) \rangle = \pi(\langle x, y \rangle)$ выполняется для любых элементов $x, y \in \mathcal{M}$. Морфизм модулей называется *изоморфизмом*, если Π — это биекция, и π является *-изоморфизмом C^*-алгебр A и B.

Действие группы на модуль

Определение

Будем говорить, что локально компактная группа G (γ, α)-действует на гильбертовом C^*-модуле $\mathcal{M}$, если существуют:

- гомоморфизм $\gamma\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ группы G в группу $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ всех автоморфизмов гильбертова C^*-модуля $\mathcal{M}$;
- гомоморфизм $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(A)$ группы G в группу $\mathrm{Aut}(A)$ всех автоморфизмов C^*-алгебры A

такие, что для любого $x \in \mathcal{M}$ отображение $g \mapsto \gamma_g(x)$ из G в $\mathcal{M}$ непрерывно, и для любого $g \in G$ пара (γ_g, α_g) является изоморфизмом гильбертова C^*-модуля $\mathcal{M}$.

Определение

Пусть A — C^*-алгебра, H, K — гильбертовы пространства, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над A и G — локально компактная группа, (γ, α)-действующая на $\mathcal{M}$. Набор данных $\big((\Pi, \pi), \upsilon, \vartheta, H, K\big)$, где:

- (Π, π) — морфизм гильбертовых C^*-модулей $\mathcal{M}$ и $B(H, K)$,
- $\upsilon\colon G \to U(H)$ — унитарное представление группы G в H,
- $\vartheta\colon G \to U(K)$ — унитарное представление группы G в K,

такие, что равенство $\Pi(\gamma_g(x)) = \vartheta_g \Pi(x) \upsilon_g^*$ выполняется для любых $x \in \mathcal{M}$ и любых $g \in G$, называется (υ, ϑ)-ковариантным представлением $\mathcal{M}$ в гильбертовой паре H и K.

$[\varphi]$-вполне положительный набор

Теперь мы готовы определить основной объект нашего исследования.

Определение

Пусть A — C^*-алгебра, H и K — гильбертовы пространства, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над A, G — локально компактная группа (γ, α)-действующая на $\mathcal{M}$ и $n \in \mathbb{N}$. Семейство (конечный набор) $[\Phi] = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ линейных отображений $\Phi_i \colon \mathcal{M} \to B(H, K)$, $1 \leq i \leq n$, называется *$[\varphi]$-вполне положительным*, (υ, ϑ)-ковариантным относительно действия (γ, α), если существуют:

- унитарный гомоморфизм $\upsilon \colon G \to U(H)$;
- унитарный гомоморфизм $\vartheta \colon G \to U(K)$;
- n-вполне положительное отображение $[\varphi] = (\varphi_{ij})_{i,j=1}^n$ из A в $B(H)$

такое, что равенство $(\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle)_{i,j=1}^n = (\varphi_{ij}\langle x, y \rangle)_{i,j=1}^n$ выполняется для любых $x, y \in \mathcal{M}$ и, кроме того, $\Phi_i(\gamma_g(x)) = \vartheta_g \Phi_i(x) \upsilon_g^*$ для любых элементов $g \in G$, $x \in \mathcal{M}$ и любых индексов $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ковариантное представление Стайнспринга

Определение

Набор данных $((\pi_\Phi, \pi_\varphi), \upsilon^\Phi, \vartheta^\Phi, H_\Phi, K_\Phi, V_1^\Phi, \ldots, V_n^\Phi, W^\Phi)$, удовлетворяющий условиям:

1. H_Φ, K_Φ — гильбертовы пространства,
2. $V_1^\Phi, \ldots, V_n^\Phi \in B(H, H_\Phi)$; $\quad W^\Phi \in B(K, K_\Phi)$ — линейные ограниченные операторы такие, что:
   a. $\varphi_{ij}(a) = (V_i^\Phi)^* \pi_\varphi(a) V_j^\Phi$ для любого $a \in A$ и для любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$;
   b. $\Phi_i(x) = (W_i^\Phi)^* \pi_\Phi(x) V_i^\Phi$ для любых $x \in \mathcal{M}$ и для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$;
   c. $\upsilon_g^\Phi V_i^\Phi = V_i^\Phi \upsilon_g$ для любых $g \in G$ и для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$;
   d. $\vartheta_g^\Phi W_i^\Phi = W_i^\Phi \vartheta_g$ для любых $g \in G$ и для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$;

называется ковариантным представлением Стайнспринга, ассоциированным с вполне положительным семейством $[\Phi] = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ линейных отображений из $\mathcal{M}$ в $B(H, K)$, (υ, ϑ)-ковариантным относительно действия (γ, α).

Ковариантное представление Стайнспринга

Определение

Если кроме того выполняются условия:

- (a) линейная оболочка множества $\left\{\pi_\varphi(a)V_i^\Phi\xi : \ a \in A, \xi \in H, i \in \{1, \ldots, n\}\right\}$ плотна в H_Φ;
- (b) линейная оболочка множества $\left\{\Phi_i(x)\xi : x \in \mathcal{M}, \xi \in H, i \in \{1, \ldots, n\}\right\}$ плотна в K_Φ.

то ковариантное представление Стайнспринга называется минимальным.

В дальнейшем множество всех n-элементных ковариантных вполне положительных наборов линейных отображений из $\mathcal{M}$ в $B(H, K)$ обозначается $CP_n^G(\mathcal{M}, B(H, K))$.

Вполне положительные отображения в гильбертовых C^*-модулях

Обобщенная конструкция Стайнспринга в контексте теории гильбертовых и крейновых C^*-модулей была изучена в работах ряда авторов:

- J. Murphy. Positive definite kernels and Hilbert C^*-modules.//Proc. Edinburgh Math. Soc. 40 (1997), 367–374.
- M. D. Asadi. Stinespring's theorem for Hilbert $C^\star$-modules.//J. Operator Theory, 62:2 (2009), 235–238.
- J. Heo, J. P. Hong, U. C. Ji. On KSGNS representation on Krein C^*-modules.//J. Math. Phys. 51:5(2010), 13.
- M. Joita. Covariant version of the Stinespring type theorem for Hilbert C^*-modules.//Cent. Eur.J.Math. 9:4 (2011), 803–813.
- R. Bhat, G. Ramesh, K. Sumesh. Stinespring's theorem for maps on Hilbert C^*-modules.//J. Operator Theory, 68:1(2012), 173–178.

- И. Н. Малиев, М. А. Плиев. О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными C^*-алгебрами.//Известия Вузов. Математика, 12(2012), 51–58.
- M. S. Moslehian, M. Joita, U. C. Ji. KSGNS type construction for α-completely positive maps on Krein C^*-modules.//Complex Anal. Oper. Theory. 10:3 (2016), 617–638.
- M. S. Moslehian, A. Kusraev, M. Pliev. Matrix KSGNS construction and a Radon-Nikodym type theorem.//Indag. Math. 28:5 (2017), 938–952.
- А. В. Калиниченко, И. Н. Малиев, М. А. Плиев. Модульные полуторалинейные формы и обобщенное представление Стайнспринга.//Известия Вузов. Математика 12 (2018), 50–59.

Содержание

Определение

Пусть $[\Phi] = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ и $[\Psi] = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ — наборы вполне положительных линейных отображений из $\mathcal{M}$ в $B(H, K)$, ассоциированных с $[\varphi]$ и $[\psi]$ соответственно, (υ, ϑ)-ковариантные относительно (γ, α)-действия локально компактной группы G. Будем говорить, что пары $[\Phi]$ и $[\Psi]$ связаны отношением $\sim$, и писать $[\Phi] \sim [\Psi]$, если

$$\langle \Phi_i(\gamma_g(x)), \Phi_j(\gamma_g(x))\rangle = \langle \Psi_i(\gamma_g(x)), \Psi_j(\gamma_g(x))\rangle$$

для любых элементов $x \in \mathcal{M}$, $g \in G$ и любых индексов $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Отметим, что бинарное отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $CP_n^G(\mathcal{M}, B(H, K))$.

Определение

Будем говорить, что ковариантные представления Стайнспринга

$$((\pi_\Phi, \pi_\varphi), \upsilon^\Phi, \vartheta^\Phi, H_\Phi, K_\Phi, V_1^\Phi, \dots, V_n^\Phi, W^\Phi),$$

и

$$((\rho_\Phi, \rho_\varphi), u^\Phi, v^\Phi, \mathcal{H}_\Phi, \mathcal{K}_\Phi, \mathcal{V}_1^\Phi, \dots, \mathcal{V}_n^\Phi, \mathcal{W}^\Phi),$$

ассоциированные с $[\varphi]$-вполне положительным (υ, ϑ)-ковариантным семейством $[\Phi] = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, унитарно эквивалентны, если существуют унитарные операторы

$$U_1 \colon H_\Phi \to \mathcal{H}_\Phi \text{ и } U_2 \colon K_\Phi \to \mathcal{K}_\Phi$$

такие, что выполняются следующие условия:

1. $U_2 \pi_\Phi(x) = \rho_\Phi(x) U_1$ для любых $x \in \mathcal{M}$;
2. $U_1 \pi_\varphi(a) = \rho_\varphi(a) U_1$ для любых $a \in A$;
3. $u_g^\Phi U_1 = U_1 \upsilon_g^\Phi$ и $v_g^\Phi U_2 = U_2 \vartheta_g^\Phi$ для любых $g \in G$;
4. $\mathcal{W}^\Phi = U_2 W^\Phi$ и $\mathcal{V}_i^\Phi = U_1 V_i^\Phi$ для любых $i \in \{1, \dots, n\}$.

Определение

Пусть наборы $[\Phi]$ и $[\Psi]$, ассоциированные с $[\varphi]$ и $[\psi]$, принадлежат $CP_n^G(\mathcal{M}, B(H,K))$. Будем говорить, что набор $[\Phi]$ мажорирует набор $[\Psi]$, и писать $[\Psi] \preceq [\Phi]$, если неравенство

$$\big(\langle \Psi_i(\gamma_g(x)), \Psi_j(\gamma_g(x))\rangle\big)_{i,j=1}^n \le \big(\langle \Phi_i(\gamma_g(x)), \Phi_j(\gamma_g(x))\rangle\big)_{i,j=1}^n$$

выполняется для любых $x \in \mathcal{M}$ и $g \in G$. Неравенство понимается в смысле частичного порядка в C^*-алгебре $M_n(A)$.

Определение

Пусть $\Pi\colon \mathcal{M} \to B(H,K)$ — (υ, ϑ)-ковариантное представление гильбертова C^*-модуля $\mathcal{M}$ в гильбертовой паре H и K. Множество

$$\begin{aligned}\Pi(\mathcal{M})'_G := \{T \oplus N \in B(H \oplus K) :\ & T\upsilon_g = \upsilon_g T,\ N\vartheta_g = \vartheta_g N,\ g \in G;\\ & \Pi(x)T = N\Pi(x),\ \Pi(x)^* N = T\Pi(x)^*,\ x \in \mathcal{M}\}\end{aligned}$$

называется G-коммутантом $\Pi(\mathcal{M})$.

Лемма

Пусть набор $[\Phi] \in CP_n^G(\mathcal{M}, B(H,K))$ представлен минимальным ковариантным представлением Стайнспринга

$$((\pi_\Phi, \pi_\varphi), \upsilon^\Phi, \vartheta^\Phi, H_\Phi, K_\Phi, V_1^\Phi, \ldots, V_n^\Phi, W^\Phi)$$

и $T \oplus N \in \pi_\Phi(\mathcal{M})'_G$ является положительным оператором в $B(H_\Phi \oplus K_\Phi)$. Тогда существует n-вполне положительное отображение $[\psi] \colon M_n(A) \to M_n(B)$ такое, что семейство $[\Psi] = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ линейных отображений из в $B(H,K)$, заданное для произвольного $i \in \{1, \ldots, n\}$ формулой

$$\Psi_i(x) := (W_i^\Phi)^* \sqrt{N} \pi_\Phi(x) \sqrt{T} V_i^\Phi, \tag{1}$$

является $[\psi]$-вполне положительным набором.

В дальнейшем построенное вполне положительное семейство $[\Psi]$ будем обозначать через $[\Phi^{T\oplus N}]$.

Некоммутативная теорема Радона-Никодима

Теорема

Пусть $[\Phi], [\Psi] \in CP_n^G(\mathcal{M}, B(H,K))$ и $[\Psi] \preceq [\Phi]$. Тогда существует положительный линейный оператор $D_\Phi^\Psi \in (\pi_\Phi(\mathcal{M})'_G)$ такой, что $[\Psi] \sim [\Phi\sqrt{D_\Phi^\Psi}]$.

Оператор D_Φ^Ψ, построенный в Теореме, называется *ковариантной производной Радона-Никодима* набора $[\Psi]$ относительно набора $[\Phi]$.

Содержание

Классическая теорема Радона-Никодима выводится из ее некоммутативной версии. Приведем некоторые вспомогательные сведения из теории векторных решеток.

Определение

Два элемента x, y векторной решетки E называются дизъюнктными (обозначение $x \perp y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Пусть D — подмножество векторной решетки E. Тогда его дизъюнктное дополнение D^d задается равенством

$$D^d := \{y \in E : \ y \perp x, \ \forall x \in D\}.$$

Множество D^{dd} задается очевидным образом $D^{dd} := (D^d)^d$.

Определение

Измеримой парой (X, Σ) будем называть множество X с выделенной в нем σ-алгеброй подмножеств Σ. Векторное пространство всех конечных σ-аддитивных знакопеременных мер (зарядов) на Σ будем обозначать через $M(X)$.

Отметим, что $M(X)$ является порядково полной векторной решеткой относительно частичного порядка $\leq$, задаваемого правилом

$$\nu \leq \mu \Leftrightarrow \nu(A) \leq \mu(A), \ A \in \Sigma.$$

Положительный конус векторной решетки $M(X)$ обозначается $M(X)_+$.

- A. C. Zaanen. Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces.//Springer, 1997. (Теорема 27.3)

В простейшем коммутативном случае оператор D_{Φ}^{Ψ} можно интерпретировать как классическую производную Радона-Никодима меры ν относительно меры μ при условии абсолютной непрерывности ν от μ.

Теорема

Пусть (X, Σ) — измеримая пара, $\mu \in M(X)_{+}$ — положительная σ-аддитивная мера на Σ и $\nu \in M(X)$ — заряд, абсолютно непрерывный относительно μ. Тогда найдется функция $g \in L_1(X, \Sigma, \mu)$ такая, что справедливо равенство

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Спасибо за внимание!