Продолжения однопараметрических операторных полугрупп на пополнения архимедовых векторных решеток

Э.Ю. Емельянов
Институт математики им. С.Л. Соболева

OTDE-Workshop посвященный юбилею профессора
Владимира Михайловича Тихомирова

5 - 6 декабря 2024 г.

Введение и краткая предыстория вопроса

Под полугруппой на векторном пространстве X мы понимаем (индексированное временным параметром) семейство $(T_s)_{s\geq 0}$ линейных операторов на X, обладающее полугрупповым свойством

$$T_{s+t} = T_s T_t \qquad (s, t \in \mathbb{R}_+),$$

и такое, что $T_0 = I_X$ — тождественный оператор на X.

Полугруппы на X находятся в тесной связи с **задачей Коши**

$$\frac{d}{dt}f = Af, \quad f(0) = f_0 \in X,$$

где f_0 — начальное состояние, а A — плотно определенный (в смысле подходящей сходимости на X) оператор.

Теория **сильно непрерывных полугрупп** (C_0-полугрупп) на банаховых пространствах — это классический, хорошо развитый раздел функционального анализа.

Если X — банахово пространство и A — замкнутый, плотно определенный оператор, для которого существуют константы $\omega \in \mathbb{R}$ и $M \geq 1$ такие, что

$$\{\lambda > \omega\} \subseteq \rho(A) \text{ и } \|[(\lambda - \omega) R(\lambda, A)]^n\| \leq M \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

где $\rho(A)$ — дополнение к спектру A и $R(\lambda, A) = (\lambda I_X - A)^{-1}$, то полугруппа $(T_s)_{s \geq 0}$ получается аппроксимацией подходящими равномерно непрерывными полугруппами $\left(e^{sA_n}\right)_{s \geq 0}$ в сильной операторной топологии.

Образно, но неформально: $(T_s)_{s \geq 0} = \left(e^{sA}\right)_{s \geq 0}$.

В общем случае полугруппа $(T_s)_{s\geq 0}$ на X описывает

эволюцию состояний в пространстве X,

которое может не иметь подходящей топологии для построения необходимого в задаче Коши оператора A.

В случае локально выпуклого пространства состояний прогресс был достигнут давно в работах

- I. Miyadera, Semi-groups of operators in Frechet space and applications to partial differential equations (1959),
- H. Komatsu, Semi-groups of operators in locally convex spaces (1964),
- K. Singbal-Vedak, A note on semi-groups of operators on a locally convex space (1965),
- T. Komura, Semigroups of operators in locally convex spaces (1968),
- S. Ouchi, Semi-groups of operators in locally convex spaces (1973),

и других авторов.

Недавнее продвижение связано с работами:

- M. Kandić & M. Kaplin, Relatively uniformly continuous semigroups on vector lattices. JMAA (2020);

- M. Kaplin & M. Kramar Fijavž, Generation of relatively uniformly continuous semigroups on vector lattices. Analysis Math. (2020);

- J. Glück & M. Kaplin, Order boundedness and order continuity properties of positive operator semigroups. Quaest. Math. (2024).

В этих статьях рассмотрен случай порядковой топологии (которая может не быть локально выпуклой, например, на $L^p(\mathbb{R})$, $0 < p < 1$).

Во второй статье проделано непосредственное построение генератора полугруппы на равномерно полной архимедовой векторной решетке путем перехода к пределу в смысле сходимости с регулятором (в отсутствие сильной порядковой единицы эта сходимость не задается никакой векторной топологией).

Определенный интерес представляет построение генератора продолжения полугруппы, заданной на плотной (в подходящем смысле) подрешетке.

Для сходимости по норме продолжение с сохранением сильной непрерывности в нуле до C_0-полугруппы тривиально для ограниченных по норме в некоторой окрестности нуля полугрупп.

В настоящем докладе рассматривается вопрос о продолжимости полугруппы с архимедовой векторной решетки на ее порядковое/равномерное пополнение и обсуждается возможность продолжения с сохранением непрерывности в нуле по отношению к порядковой/равномерной сходимости.

Всюду далее буквой X обозначается **архимедова векторная решетка**, X^δ — ее прядковое пополнение, и X^r — пополнение по отношению к сходимости с регулятором. Начнем с краткого обсуждения вопроса о продолжении полугруппы на X^δ.

Условия продолжимости полугруппы на порядковое пополнение

Для продолжения полугруппы $(T_s)_{s\geq 0}$, заданной на X, до полугруппы $(T_s^\delta)_{s\geq 0}$ на X^δ, надо продолжить каждый оператор T_s до оператора T_s^δ на X^δ. В силу известного результата

- A.I. Veksler, On homomorphisms between classes of regular operators in K-lineals and their completions, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (1960).

достаточно, чтобы все операторы T_s были регулярными и порядково непрерывными.

Условие регулярности операторов T_s не является обременительным, поскольку порядковая непрерывность $T_s : X \to X$ равносильна порядковой непрерывености $T_s : X \to X^\delta$ (т.к. X — **регулярная подрешетка** X^δ).

Поскольку X^δ — K-пространство, регулярность $T_s : X \to X^\delta$ равносильна порядковой ограниченности $T_s : X \to X^\delta$, что в свою очередь равносильно порядковой ограниченности $T_s : X \to X$.

Более того, и от требования порядковой ограниченности $T_s : X \to X$ легко отказаться в силу теоремы Абрамовича – Сироткина об автоматической порядковой ограниченности порядково непрерывных операторов

- Y. Abramovich & G. Sirotkin, On order convergence of nets. Positivity (2005).

Отметим, что продолжения T_s^δ единственны и порядково непрерывны на X^δ.

Суммируя выше сказанное, получаем:

Теорема 1. *Всякая полугруппа* $(T_s)_{s\geq 0}$ **порядково непрерывных** *операторов на* X *единственным образом продолжается до полугруппы* $\left(T_s^\delta\right)_{s\geq 0}$ *порядково непрерывных операторов на* X^δ*.*

Представляется важным выяснить, при каких дополнительных условиях рассматриваемое продолжение сохраняет порядковую/равномерную непрерывность полугруппы $(T_s)_{s \geq 0}$ (в нуле), то есть, следующие свойства:

(oc) для любых $x \in X$ и $s \geq 0$, $T_{s+h}x \xrightarrow{\text{o}} T_s x$ при $h \to 0$;

(oc)$_0$ для всякого $x \in X$, $T_h x \xrightarrow{\text{o}} x$ при $h \downarrow 0$;

(ruc) для любых $x \in X$ и $s \geq 0$, $T_{s+h}x \xrightarrow{\text{ru}} T_s x$ при $h \to 0$;

(ruc)$_0$ для всякого $x \in X$, $T_h x \xrightarrow{\text{ru}} x$ при $h \downarrow 0$.

Заметных продвижений в изучении продолжимости на пополнения с сохранением этих свойств пока нет.

Легко видеть, что

$$\mathbf{(ruc)} \Rightarrow \mathbf{(ruc)}_0; \quad \mathbf{(oc)} \Rightarrow \mathbf{(oc)}_0; \quad \mathbf{(ruc)} \Rightarrow \mathbf{(oc)}; \quad \mathbf{(ruc)}_0 \Rightarrow \mathbf{(oc)}_0.$$

К вопросу об обращении первой из этих импликаций мы вернемся в конце доклада.

Условия продолжимости полугруппы на (ru)-пополнение

Рассмотрим полугруппу $(T_s)_{s\geq 0}$ на X. Для ее продолжения до полугруппы $\left(T_s^{(r)}\right)_{s\geq 0}$ на X^r надо продолжить каждый T_s до оператора $T_s^{(r)}$ на X^r. Вкратце коснемся строения X^r.

Подрешетка Z архимедовой решетки Y называется

r-**полной в** Y,

если для всякой (ru)-фундаментальной сети (x_α) в Z с регулятором $u \in Y$ найдутся $x \in Z$ и $w \in Y$ такие, что $x_\alpha \xrightarrow{\text{ru}} x(w)$. Тогда $x_\alpha \xrightarrow{\text{ru}} x(u)$. Кроме того, предел x единственен в силу архимедовости.

Отметим, что ru-полнота секвенциальна, а именно, Z является ru-полной в Y т. и т.т., когда всякая ru-фундаментальная последовательность из Z ru-сходится к некоторому Z.

Согласно лемме 2 работы E.E. & S. Gorokhova, Free uniformly complete vector lattices, Positivity (2024):

$$X \quad \text{ru-полна в себе} \iff \text{всякий главный идеал}$$

$$I_z \text{ решетки X полон в норме } \|x\|_z := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : |x| \le \lambda|z|\} \iff$$

$$I_z \quad \text{ru-полон в себе для любого } z \in X.$$

(По теореме Крейнов — Какутани, такой I_z будет решеточно изоморфен $C(K)$ для некоторого Хаусдорфова компакта K).

Определение 2. *Полная в себе векторная решетка Y*

называется ru-**пополнением** X*, если существует решеточное вложение $J : X \to Y$ такое, что для всякой полной в себе векторной решетки Z и всякого решеточного гомоморфизма $T : X \to Z$ найдется единственнй решеточный гомоморфизм $S : Y \to Z$ такой, что $S \circ J = T$.*

ru-Пополнение X^r существует и единственно, с точностью до решеточного гомоморфизма. Оно может быть реализовано, как пересечение всех полных в себе векторных подрешеток некоторой полной в себе векторной решетки Y, содержащей X, напр., можно взять $Y = X^\delta$ (см. предложение 1 из E.E.&S.G.(2024)).

Кроме того, в силу леммы 4 из E.E.&S.G.(2024),

$$X^r = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Ord}} X_\gamma = X_{\omega_1}, \text{ где}$$

$$X_1 := X,$$

$$X_{\beta+1} := \{x \in Y : x_n \xrightarrow{\text{ru}} x(x_1), \quad (x_n) \text{ in } X_\beta\}, \text{ и}$$

$$X_\gamma := \bigcup_{\beta < \gamma} X_\beta, \text{ если ординал } \gamma \text{ предельный.}$$

Теперь рассмотрим вопрос продолжения полугруппы $(T_s)_{s\geq 0}$ на X до полугруппы $(T_s^r)_{s\geq 0}$ на X^r. Стоит отметить, что, если $(T_s)_{s\geq 0}$ состоит из решеточных гомоморфизмов, то, по определению X^r, всякий T_s продолжается до единственного решеточного гомоморфизма T_s^r на X^r, отсюда вытекает и полугруповое свойство $(T_s^r)_{s\geq 0}$. Этот факт обобщается на положительные полугруппы.

Теорема 3. *Всякая положительная полугруппа* $(T_s)_{s\geq 0}$ *на* X *единственным образом продолжается до положительной полугруппы* $(T_s^r)_{s\geq 0}$ *на* X^r.

Доказательство этой теоремы основано на пошаговом продолжении полугруппы $(T_s)_{s\geq 0}$ на этажи X^r вплоть до X_{ω_1}.

Поскольку X^r можно отождествить с пересечением всех полных в себе векторных подрешеток X^δ, следующий результат легко получить с использованием теоремы 1.

Теорема 4. *Всякая полугруппа $(T_s)_{s\geq 0}$ порядково непрерывных операторов на X единственным образом продолжается до положительной полугруппы $(T_s^r)_{s\geq 0}$ на X^r.*

Пока неизвестно, можно ли ослабить условие теоремы 3 до условия порядковой ограничености всех T_s.

Условия при которых выполняется $(\mathbf{ruc})_0 \Rightarrow (\mathbf{ruc})$

Напомним классическое определение [Definition VI.5.1.] из монографии B. Z. Vulikh, Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces, (1967).

Определение 5. *Векторная решетка* X *имеет свойство* (R) (*кратко,* $X \in$ (R)) *если для всякой последовательности* (y_k) *из* X *найдутся* $y \in X$ *и посдедовательность* (λ_k) *ненулевых скаляров такие, что* $|\lambda_k y_k| \leq y$ *при всех* k.

В работе M. Kandić & M. Kaplin (2020) дана следующая характеризация свойства (R).

Утверждение 6. *Равносильны следующие условия.*

$i)$ $X \in$ (R).

$ii)$ *Всякое счетное семейство* ru-*сходящихся последовательностей в* X *имеет общий регулятор сходимости.*

$iii)$ *Всякое счетное семейство* ru-*сходящихся сетей в* X *имеет общий регулятор сходимости.*

Свойство (R) поднимается с X на X^r. Более того

Утверждение 7. *Равносильны следующие условия.*

$i)$ $X \in$ (R).

$ii)$ $X_\beta \in$ (R) *для некоторого ординала* β.

$iii)$ $X_\beta \in$ (R) *для всякого ординала* β.

$iv)$ $X^r \in$ (R).

В предлжении 3.5 работы M. Kandić & M. Kaplin (2020) показано, что $(T_s)_{s\geq 0} \in \textbf{(ruc)}_0 \iff (T_s)_{s\geq 0} \in \textbf{(ruc)}$ для всякой положительной полугруппы $(T_s)_{s\geq 0}$ на X.

Вопрос, при каких условиях требование положительности полугруппы можно ослабить до порядковой ограниченности всех T_s, пока открыт.

В заключение приведем теорему о продолжении в доказательстве которой использованы утверждения 6 и 7.

Теорема 8. *Пусть* $(T_s)_{s\geq 0}$ — *положительная полугруппа на архимедовой векторной решетке* X *со свойством* (R) *такая, что* $(T_s)_{s\geq 0} \in \mathbf{(ruc)}_0$. *Тогда* $(T_s^r)_{s\geq 0} \in \mathbf{(ruc)}$.

Список литературы

[1] Abramovich, Y., Sirotkin, G. On order convergence of nets. Positivity (2005).

[2] Emelyanov, E., Gorokhova, S. Free uniformly complete vector lattices. Positivity 28, 48 (2024).

[3] Glück, J., Kaplin, M. Order boundedness and order continuity properties of positive operator semigroups. Quaestiones Mathematicae 47(S1), 153–168 (2024).

[4] Kandić, M., Kaplin, M. Relatively uniformly continuous semigroups on vector lattices. J. Math. Anal. Appl., 489, 124139 (2020).

[5] Kaplin, M., Kramar Fijavž, M. Generation of relatively uniformly continuous semigroups on vector lattices. Analysis Math., 46, 293–322 (2020).

[6] Veksler, A. I. On homomorphisms between classes of regular operators in K-lineals and their completions. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (1960).

[7] Vulikh, B.Z. Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces, Wolters-Noordhoff Scientific Publications. (1967).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!