Дальнейшее развитие формализма Лагранжа

Е. Р. Аваков

ВОРКШОП ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ, ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ, ПОСВЯЩЕННЫЙ ЮБИЛЕЮ Д.Ф.-М.Н., ПРОФЕССОРА ТИХОМИРОВА ВЛАДИМИРА МИХАЙЛОВИЧА

(5 – 6 ДЕКАБРЯ 2024 Г., ДИСТАНЦИОННЫЙ ФОРМАТ)

Пусть задан набор функций
$f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 0, ..., k,\ \ x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим следующую задачу

Задача на минимум с ограничениями типа равенств

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

Для этой задачи хорошо известен

Принцип Лагранжа (правило множителей Лагранжа)

Пусть $\widehat{x}$ точка локального минимума в задаче (1), и функции $f_i, i = 1, ..., k$, дифференцируемы в этой точке. Тогда найдутся не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda_0 \geq 0$ и $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ такие, что

$$\lambda_0 f_0'(\widehat{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0. \tag{2}$$

Если ввести функцию Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i(x)$, то уравнение (2) запишится в виде

$$\mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$.

При этом справедливо следующее условие второго порядка на языке функции Лагранжа:

Условие второго порядка

Для любого вектогра $h \in \mathbb{R}^n : f_i'(\widehat{x})h = 0, \;\; i = 1, ..., k$, найдутся не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda_0 \geq 0$ и $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, удовлетворяющие равенству (2) и такие, что

$$\mathcal{L}_{xx}(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda)[h, h] \geqslant 0 \tag{3}$$

Положим $F = (f_1, \dots, f_k)$, $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Формализм Лагранжа

$$\mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda) = 0. \tag{2}$$

$$\forall h \in \operatorname{Ker} F'(\widehat{x}) \;\; \exists(\lambda_0, \lambda) \text{ из } (2) : \;\; \mathcal{L}_{xx}(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda)[h, h] \geqslant 0. \tag{3}$$

Регулярный случай

$\operatorname{Im} F'(\widehat{x}) = \mathbb{R}^k$ $\Leftrightarrow$ градиенты $f_i'(\widehat{x})$ - линейно независимы. Тогда $\lambda_0 \neq 0$ в (2) и можно положить $\lambda_0 = 1$. Неравенство в (3) справведливо $\forall h \in \operatorname{Ker} F'(\widehat{x})$ с одним и тем же наборо мнабором множителей Лагранжа λ

Нерегулярный случай

$\operatorname{Im} F'(\widehat{x}) \neq \mathbb{R}^k$ $\Leftrightarrow$ градиенты $f_i'(\widehat{x})$ - линейно зависимы. Тогда (2) и (3) справедливы с $\lambda_0 = 0$.

Для описания необходимых условий содержательных в нерегулярном случае (для анормальных задач) введем следующий важный для дальнейшего конус заданный в фиксированной точке $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$

$$H(\widehat{x}) = \{\, h \in \mathbb{R}^n \mid F'(\widehat{x})h = 0,\ \ F''(\widehat{x})[h,h] \in \mathrm{Im} F'(\widehat{x}) \,\}.$$

или через исходные данные задачи (1)

$$H(\widehat{x}) = \{\, h \in \mathbb{R}^n \mid f_i'(\widehat{x})h = 0,\ i = 1, ..., k,\ \ \sum_{i=0}^{k} \mu_i^j f_i''(\widehat{x})[h,h] = 0,\\ j = 1, ..., r \,\},$$

где $\mu^j = (\mu_1^j, ..., \mu_k^j)$ – полная ситема линейно независимых решений следующей линейной системы уравнений.

$$\sum_{i=0}^{k} \mu_i^j f_i'(\widehat{x}) = 0.$$

Theorem 1

Пусть $\widehat{x}$ – точка локального минимума в задаче (1). Тогда, если функция f_0 дифференцируема, а функции f_i, $i = 1, ...k$, дважды дифференцируемы в точке $\widehat{x}$, то для любого элемента $h \in H(\widehat{x})$ найдутся множители Лагранжа $\lambda_i = \lambda_i(h)$, $i = 1, ..., k$, и не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda_0 = \lambda_0(h)$ и $\mu_i = \mu_i(h)$, $i = 1, ..., k$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i'(\widehat{x}) = 0, \tag{4}$$

$$\lambda_0 f_0'(\widehat{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i'(\widehat{x}) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i''(\widehat{x}) h = 0. \tag{5}$$

Если f_0 дважды, а f_i трижды дифференцируемы в точке $\widehat{x}$, то

$$\lambda_0 f_0''(\widehat{x})[h, h] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i''(\widehat{x})[h, h] + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i'''(\widehat{x})[h, h, h] \geqslant 0. \tag{6}$$

Если ввести функцию Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i(x)$, то уравнение (2) запишится в виде

$$\mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda) = 0. \tag{7}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$. Если ввести обобщенную функцию Лагранжа вида

$$\mathcal{L}_2(x, \lambda_0, \lambda, \mu, h) = \mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \langle f_i'(x), h \rangle,$$

то соотношения (4)-(6) примут вид

Соотношения теоремы 1

$$\mathcal{L}_x(\widehat{x}, 0, \mu) = 0$$

$$\mathcal{L}_{2x}(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda, \mu.h) = 0$$

$$\mathcal{L}_{2xx}(\widehat{x}, \lambda_0, \lambda, \frac{1}{3}\mu, h)[h, h] \geqslant 0$$

Пример 1.

$$f_0(x_1, x_2) \to \min, \quad f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + g(x_1, x_2) = 0, \tag{8}$$

где $g'(0) = g''(0) = 0$.
Положим $x = (x_1, x_2)$. Мы хотим исследовать на минимум точку $\widehat{x} = 0$. Применим необходимые условия содержащиеся в теореме 1. Легко показать, что в этом случае

$$H(0) = \{\, h = (h_1, h_2) \mid h_1^2 - h_2^2 = 0 \,\} = \{\, h = (h_1, h_2) \mid h_2 = \pm h_1 \,\}$$

Соотношение (4), очевидно, выполняется для любого μ_1. Из условия (5) получаем, что для любого $h \in H(0)$ найдутся не равные одновременно нулю $\lambda_0 = \lambda_0(h)$ и $\mu_0 = \mu_1(h)$ такие, что

$$\begin{cases} \lambda_0 f_{0x_1}(0) + \mu_1 h_1 = 0 \\ \lambda_0 f_{0x_2}(0) - \mu_1 h_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно $\lambda_0 \neq 0$, так как иначе $\mu_1 = 0$ при $h \neq 0$. Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда при $h_2 = h_1 = 1$ из (9) получаем

$$f_{0x_1} = -\mu_1 = -f_{0x_2}$$

С другой стороны при $h_2 = -h_1 = 1$ из (9) аналогично имеем

$$f_{0x_1} = f_{0x_2}$$

Следовательно, окончательно, получаем следующее новое содержательное необходимое условие первого порядка для задачи (8) в точке $\widehat{x} = 0$

$$f_0'(0) = 0 \tag{10}$$

Легко показать, что соотношение (6) также дает новое необходимое условие но уже второго порядка для задаче (8) в точке $\widehat{x} = 0$ вида

$$f_0''(0)[h, h] \geq 0, \quad \forall h \in H(0) \tag{11}$$

Пример 2.

$$
\begin{aligned}
&f_0(x_1, x_2, x_3) \to \min, \\
&\qquad f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + g_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \\
&\qquad\qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 + g_2(x_1, x_2, x_3) = 0,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Предположим, кроме того, что $f_{0x_1}(0) \neq 0$. Легко показать, что для данного примера

$$
\begin{aligned}
H(0) = \{\, h = (h_1, h_2, h_3) \mid h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 0,\ h_1 h_3 = 0 \,\} = \\
\{\, h = (h_1, h_2, h_3) \mid h_1 = 0,\ h_3 = \pm h_2 \,\}
\end{aligned}
$$

Соотношение (4), очевидно, выполняется для любого μ_1, μ_2. Из условия (5) получаем, что для любого $h \in H(0)$ найдутся не равные одновременно нулю $\lambda_0 = \lambda_0(h)$, $\mu_1 = \mu_1(h)$ и $\mu_2 = \mu_2(h)$ такие, что

$$
\begin{cases}
\lambda_0 f_{0x_1}(0) + \mu_1 h_1 + \mu_2 h_3 = 0 \\
\lambda_0 f_{0x_2}(0) + \mu_1 h_2 = 0 \\
\lambda_0 f_{0x_3}(0) - \mu_1 h_3 + \mu_2 h_1 = 0
\end{cases}
\tag{13}
$$

Следовательно $\lambda_0 \neq 0$, так как иначе $\mu_1 = \mu_2 = 0$ при $h_2 \neq 0$ и $h_3 \neq 0$. Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда при $h_1 = 0$, $h_3 = h_2 = 1$ из второго и третьего уравнения в(13) получаем

$$f_{0x_2} = -\mu_1 = -f_{0x_3}$$

С другой стороны при $h_3 = -h_2 = -1$ из из второго и третьего уравнения в (9) аналогично имеем

$$f_{0x_2} = f_{0x_3}$$

Следовательно, окончательно, получаем следующее новое содержательное необходимое условие первого порядка для задачи (12) в точке $\widehat{x} = 0$

$$f_{0x_2} = f_{0x_3} = 0 \tag{14}$$

Легко показать, что соотношение (6) также дает новое необходимое условие но уже второго порядка для задаче (12) в точке $\widehat{x} = 0$ вида

$$f_0''(0)[h,h] + \frac{1}{3}\mu_2(h)g_2'''(0)[h,h,h] \geq 0, \quad \forall h \in H(0) \tag{15}$$

Приведем теперь аналогичные необходимые условия для общей постановки задачи. Пусть X и Y — банаховы пространства, $f_0\colon X \to \mathbb{R}$ и $F\colon X \to Y$. Рассмотрим следующую задачу

$$f_0(x) \to \min, \quad F(x) = 0 \tag{16}$$

Фиксируем точку $\widehat{x}$. Конус $H(\widehat{x})$ определим определим аналогисным образом, что и выше

$$H(\widehat{x}) = \{\, h \in X \mid F'(\widehat{x})h = 0,\ F''(\widehat{x})[h,h] \in \mathrm{Im} F'(\widehat{x}) \,\}.$$

Положим

$$L(\widehat{x}, h) = \mathrm{Im} F'(\widehat{x}) + \mathrm{Im} F''[h, \mathrm{Ker} F'(\widehat{x})]$$

Theorem 2

Пусть $\widehat{x}$ - точка локального минимума в задаче (16). Тогда, если функционал f_0 дифференцируем, а отображение F дважды дифференцируемо в точке $\widehat{x}$, то для любого $h \in H(\widehat{x})$, для которого множество $L(\widehat{x}, h)$ замкнутое подпространство, найдутся множитель Лагранжа $y_1^* = y_1^*(h) \in Y^*$ и не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda_0 = \lambda_0(h) \geq 0$ и $y_2^* = y_2^*(h) \in Y^*$ такие, что

$$(F'(\widehat{x}))^* y_2^* = 0,$$

$$\lambda_0 f'(\widehat{x}) + (F'(\widehat{x}))^* y_1^* + (F''(\widehat{x})h)^* y_2^* = 0$$

Если при этом, если f_0 дважды, а F трижды дифференцируемы в точку $\widehat{x}$, то

$$\lambda_0 f''(\widehat{x})[h, h] + \langle y_1^*, F''(\widehat{x})[h, h]\rangle + \frac{1}{3}\langle y_2^*, F'''(\widehat{x})[h, h, h]\rangle \geq 0 \quad .$$