ЮФМИ

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGH EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE — THE AFFILIATE OF VSC RAS
NORTH-CAUCASUS CENTER FOR MATHEMATICAL RESEARCH VSC RAS
SCIENTIFIC AND EDUCATIONAL MATHEMATICAL CENTER NOSU
NORTH-OSSETIAN REPUBLICAN INSTITUTE
FOR ADVANCED TRAINING OF EDUCATIONAL WORKERS
THE INSTITUTE OF MATHEMATICS, MECHANICS
AND COMPUTER SCIENCE NAMED AFTER I. I. VOROVICH

TRENDS IN SCIENCE • THE SOUTH OF RUSSIA

MATHEMATICAL FORUM

Volume 15

ORDER ANALYSIS AND RELATED QUESTIONS OF MATHEMATICAL MODELLING. OPERATOR THEORY AND DIFFERENTIAL EQUATIONS:

Theses of Reports
of the XVII International Conference
(Russia, Village Dzinaga, June 29 – July 05, 2023)

Vladikavkaz
2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ — ФИЛИАЛ ВНЦ РАН
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВНЦ РАН
НАУЧНО — ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР СОГУ
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ИНСТИТУТ
ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ РАБОТНИКОВ ОБРАЗОВАНИЯ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
НАУК ИМЕНИ И. И. ВОРОВИЧА ЮФУ

ИТОГИ НАУКИ • ЮГ РОССИИ

СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ

Том 15

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

Тезисы докладов
XVII Международной научной конференции
(РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

Владикавказ
2023

ББК 22.12+22.16+22.18
УДК 510.12

Редакторы серии:
д. ф.-м. н., профессор Ю. Ф. Коробейник,
д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраев

Редакторы тома:
к. пед. наук В. С. Абатурова,
д. ф.-м. н., доцент Р. Ч. Кулаев,
д. ф.-м. н., профессор Ю. Г. Никоноров

Конференция состоялась при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации: соглашение № 075-02-2023-914 — направления «Функциональные пространства и теория операторов», «Математическое моделирование», «Проблемы математического образования»; соглашение № 075-02-2023-939 — направление «Дифференциальные и интегральные уравнения».

Математический форум. Т. 15. Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2023.—250 с.—(Итоги науки. Юг России).

Настоящий сборник представляет собой пятнадцатый том серии «Математический форум», в который вошли тезисы докладов Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVII: Теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.).

Mathematical Forum. Vol. 15. Order Analysis and Related Questions of Mathematical Modelling. Operator Theory and Differential Equations: Theses of Reports of the XVII International Conference (Russia, Village Dzinaga, June 29 – July 05, 2023).—Vladikavkaz: SMI VSC RAS.—250 p.—(Trends in Science: The South of Russia).

This collection is the fifteenth volume in "Mathematical Forum" series, which includes theses of reports of the International Conference "Order Analysis and Related Questions of Mathematical Modelling, XVII: Operator Theory and Differential Equations" (Russia, village Dzinaga, June 29 – July 05, 2023).

ISBN 978-5-904695-47-7
© ЮМИ ВНЦ РАН, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Абасов Н. М., Плиев Т. М. Критерий диффузности ортогонально аддитивного оператора 14

Абатурова В. С. Формирование и развитие научного стиля мышления школьников 16

Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. Траектории локального инфимума в оптимальном управлении 18

Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Karimov Kh. On dimension of the space of derivations on commutative regular algebras 20

Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. On perfect and almost perfect homogeneous polytopes 22

Боровских А. В. Геометрия группы ли в групповом анализе одномерного кинетического уравнения 24

Ватульян А. О., Нестеров С. А. Идентификация переменных характеристик для моделей связанных полей 26

Гарманова Т. А., Казимиров Д. Д., Шейпак И. А. Точные оценки функций и производных высокого порядка в пространствах Соболева .. 28

Emelyanov E. Yu. Quasi-KB and quasi-Levi operators in Banach lattices .. 30

Ikromova D. I. On the sharp estimates for the fourier transform of measures supported to surfaces related with E_8 type singularities 32

Kulaev R. Ch. On disconjugacy of differential equations on a graph 34

Kusraev A. G. Some algebraic problems via Boolean valued analysis 36

Миллионщиков Д. В. Алгебра дифференциальных операторов и комбинаторика 38

Осипенко К. Ю. Точные неравенства для производных и преобразования Фурье 39

Плиев М. А. Латеральный порядок в векторных решетках и ортогонально аддитивные операторы 41

Умаров Х. Г. Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для модельного уравнения в частных производных третьего порядка 42

СЕКЦИЯ I
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА
И ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Абрамова Е. В., Сивкова Е. О. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для полуплоскости 45

Andreeva T. M., Drobotov Yu. E. The surjectivity and injectivity of convolution operators. some interdisciplinary corollaries 47

Балащенко В. В. Обобщенные эрмитовы структуры на нильпотентных и разрешимых группах Ли 48

Бедрицкий А. С. О функториальных свойствах Ω-насыщения топологического пространства 50

Volchkova N. P., Volchkov Vit. V. On a generalization of the Blaschke–Privalov formula for the Laplacian 52

Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. On the problem of extension to functions with zero integral moments over ball of fixed radius 54

Гаджимирзаев Р. М. Сходимость ряда Фурье по полиномам Мейкснера — Соболева и аппроксимативные свойства его частичных сумм 55

Грищенко Э. Б., Джусоева Н. А. Об осколочной компактности оператора Немыцкого 57

Gorokhova S. G. Limitedly L-weakly compact operators 59

Djumamuratov R. T. automorphisms of algebras of locally measurable operators with respect to a type I von Neumann algebras 61

Джусоева Н. А., Мазлоева М. Б. Критерий непрерывности ортогонально биаддитивного оператора 62

Закирова Г. Б. Симметричные пространства Банаха — Канторовича 64

Закиров Б. С., Чилин В. И. Решетки Лоренца — Канторовича 66

Кораблина Ю. В. О компактности классических операторов в весовых пространствах целых функций 68

Магомед-Касумов М. Г. Равномерная сходимость рядов Фурье — Якоби к абсолютно непрерывным функциям 70

Марковский А. Н. О разложении функции на полигармонические слагаемые 72

Пасенчук А. Э. Об абстрактном операторе Теплица в некоторых топологических пространствах на окружности. Обратимость и спектр 74

Подвигин И. В. О равномерной степенной сходимости на подпространствах в эргодической теореме фон Неймана 76

Tashpulatov S. M. Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of six-electron systems in the hubbard model. Third triplet state 78

Унучек С. А. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по конечному набору неточно заданных коэффициентов Фурье 80

Хабибуллин Б. Н. Нижние огибающие по выпуклым конусам в проективных пределах векторных решеток 82

Шах-Эмиров Т. Н. О сходимости рядов Фурье — Якоби в пространствах Лебега с переменным показателем 84

Юсупов Г. А. Наилучшее полиномиальное приближение аналитических функций и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди 86

СЕКЦИЯ II

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Алмасри А., Цибулин В. Г. Исследование мультистабильности в конечномерной модели «хищник–жертва» 89

Беспалов М. С. Диагонализация оператора дискретного преобразования Крестенсона 91

Булгакова И. Н. Интегральные оценки качества принятия управленческих решений в структурированной экономической системе с обратной связью 93

Ватульян А. О., Юров В. О. О реконструкции переменных свойств электроупругого стержня 95

Вирченко Ю. П., Mahari Tewolde Amanuel. Бифуркация распределения вероятностей электрической прочности многослойной полимерной пленки 96

Вирченко Ю. П., Ченцова В. В. Интегро-дифференциальное уравнение переноса тепла в теории теплового пробоя полупроводниковой пленки 98

Гуц А. К., Володченкова Л. А. Математическое моделирование плодородия почвы, использующее теорию катастроф 100

Diyorov A. M., Rozikov U. A. Evolutionary behavior in a three-locus system 102

Зеленчук П. А., Цибулин В. Г. Численно-аналитическое исследование модели идеального свободного распределения в системе хищник–жертва 104

Зизов В. С. Об оценке минимальной площади схемной реализации симметрических функций 106

Каюмов Ш., Куралов Б. А., Эсанов Э. А., Бувашеров Д. Применение многопараметрических математических моделей задачи фильтрации флюидов в многослойных пористых средах 108

Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. Математическая модель для нахождения инвариантных солитонов Риччи на метрических группах Ли 110

Костина Н. Н., Костин А. В. О моделях цифровых симуляторов 111

Костин А. В. Неевклидовы интерпретации теорем о циклах 113

Кузнецов А. В. Создание случайных математических выражений 114

Лекомцев Д. Г. Применение прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений при моделировании фильтрационных течений методом дискретных особенностей 116

Litvinov V. L., Litvinova K. V. Mathematical modeling of oil and gas production based on the construction of self-simular traveling wave solutions for two-component filtration equations 118

Музаев И. Д., Харебов К. С., Музаев Н. И. Математическое моделирование эффективного способа селективного забора воды из промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема ... 120

Переварюха А. Ю. Модель динамики восстановления инвазионной популяции после кризиса «бутылочного горлышка» 122

Potapov V. N. Shaping algorithm for high order QAM 124

Радионов А. А., Тимченко В. Ю., Панаэтова О. С., Минасян Д. Г. О нестационарных режимах течения воздуха в 3Д-модели горного ущелья идеализированного профиля 126

Радионов А. А., Тимченко В. Ю. Изменчивость характеристик тропопаузы в равнинных и предгорных районах по данным ERA-5 (Copernicus) в Северо-Кавказском регионе 128

Ревина С. В. Описание области диффузионной неустойчивости для систем реакции-диффузии 129

Söderbacka G. J. Review of the behaviour of a model of type many predators–one prey 131

Субботин В. И. О существовании RR-многогранника, связанного с икосододекаэдром 133

Томаев М. Р., Тотиева Ж. Д. Теоретико-численное определение ядра памяти для уравнения вязкоупругости 135

СЕКЦИЯ III
ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Абатурова В. С., Малова И. Е. О роли международной научной конференции в развитии исследовательской методической деятельности учителя математики 138

Арзикулов А. У. Измерения и оценивания знания студентов по математическому анализу 140

Бегиева Т. Б. Методика изучения начал анализа в средней школе 142

Голицына М. Г. Дистанционное преподавание высшей математики: чему полезному нас научил период ковида 144

Гончарова М. Н., Сетько Е. А. О разработке и использовании в учебном процессе цифрового учебно-методического комплекса по дисциплине «Математика» 146

Деза Е. И., Стесева О. И. Методические особенности изучения дифференциальных уравнений в курсе «численные методы» для студентов педвузов 148

Караева Д. А. Анализ графиков: различные способы решения задачи 10 ЕГЭ по математике профильного уровня 149

Litvinov V. L. Applied approach to providing higher mathematics to students of engineering and technical specialties 151

Налбандян Ю. С. О работе с информацией в интернете и корректных библиографических ссылках 152

Оськин А. Ф., **Оськин Д. А.** Онтологический подход к созданию электронных учебно-методических комплексов по математике 154

Охват Л. П. Игра как способ систематизации и обобщения знаний на уроках математики 155

Сагитов А. А. Проблемы математического образования 157

Удовенко Л. Н., Шабанова М. В. Использование GeoGebra в обучении решению алгебраических задач с параметром 159

СЕКЦИЯ IV
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Алзамили Х. Ф. Н. Об одной теореме о среднем для сингулярного параболического уравнения 162

Асхабов С. Н. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки четвертого порядка 164

Ашуров Р. Р., Меражов Н. И. Об одной начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии с дробной производной Капуто 166

Бабаев А. Б. О принадлежности пространству Зигмунда решений краевой задачи для уравнения Пуассона 168

Баззаев А. К. О сходимости локально-одномерных схем для дифференциальных уравнений дробного порядка 170

Басков О. В., Потапов Д. К. О решениях модельной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром и разрывной правой частью 172

Ветохин А. Н. О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем на Канторовом множестве 174

Галкин В. Д., Потапов Д. К., Ноздринова Е. В. Круговая схема Флейтас градиентно-подобных потоков поверхности 176

Дзарахохов А. В., Шишкина Э. Л. Задача для смешанного уравнения с дробной степенью оператора Бесселя 178

Добролюбова А. Л. Топологическая сопряженность простейших неособых трехмерных потоков 180

Durdiev D. K., Rahmonov A. A., Boltaev A. A. Convolution Kernel determination problem in the Moore–Gibson–Thompson equation 182

Дурдиев Д. К., Турдиев Х. Х. Обратная коэффициентная задача для волнового уравнения дробного времени с начально-краевыми условиями переопределения интегрального типа 183

Дурдиев У. Д. Обратная задача по определению неизвестного коэффициента уравнения колебания балки в бесконечной области 185

Кабанцова Л. Ю. Математическое ожидание решения системы дифференциальных уравнений в частных производных со случайными коэффициентами 187

Куракин Л. Г., Курдоглян А. В. Бифуркации в окрестности косимметричного равновесия системы с обратимой косимметрией 189

Куракин Л. Г., Островская И. В. Резонансы в проблеме устойчивости некоторых стационарных конфигураций точечных вихрей 190

Курина Г. А., Хоай Н. Т. Проекторный подход к асимптотическому решению сингулярно возмущенных задач в критическом случае 192

Lukianenko V. A., Grebeneva A. A. Solvability of the phenomenological spin combustion equation 194

Машков Е. Ю. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов 196

Моршнева И. В. Пересечение бифуркаций в динамических системах с симметрией 198

Недин Р. Д. О некоторых задачах реконструкции начальных напряжений в упругих телах 199

Ноздринова Е. В. Решение 33-й проблемы Палиса-Пью для градиентно-подобных диффеоморфизмов 201

Островская И. В., Куракин Л. Г. О влиянии циркуляции на устойчивость правильного многоугольника из вихревых нитей и цилиндра, подвижного и неподвижного 203

Панов Е. Ю. О задаче Римана для нелинейного вырождающегося параболического уравнения 205

Плаксина В. П. О разрешимости функционально-дифференциального уравнения на геометрическом графе 206

Плаксина И. М. О разрешимости одного функционально-дифференциального уравнения 208

Плышевская С. П. Исследование локальной динамики семейств уравнений Кана — Хилларда 210

Половинкина М. В., Половинкин И. П. О восстановлении решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности по данным измерений 211

Поляков Д. М. О спектральных характеристиках самосопряженного оператора четвертого порядка с краевыми условиями типа Неймана .. 213

Прядиев В. Л. Колебания упруго опёртой струнной сетки 215

Rahmonov A. A. Determination of a coefficient and kernel in a two-dimensional fractional integro-differential equation 217

Рыхлов В. С. Обобщенное решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной 219

Samatov B. T., Turgunboeva M. A. Solution of a linear L-catch differential game with non-inertial objects under geometric constraints ... 221

Семенов В. И. Некоторые новые инструменты для изучения свойств решений уравнений Навье — Стокса в задаче Коши 223

Сташ А. Х. О спектрах характеристик колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений 224

Суяров Т. Р. Обратная задача для двумерного волнового уравнения с дробным производным по времени Римана — Лиувилля 226

Тотиева Ж. Д. Двумерная обратная задача для уравнения несвязной термоупругости с памятью 228

Уртаева А. А. Спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка на сети 230

Хуштова Ф. Г. Третья краевая задача в полуполосе для уравнения дробной диффузии 232

Цехан О. Б. О действии групп линейных преобразований на множестве линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем 234

Цопанов И. Д. О приближенном вычислении собственных значений одной нелокальной задачи 236

Шамолин М. В. Инвариантные формы диссипативных систем с конечным числом степеней свободы 238

Шишкина Э. Л. Задача Коши для дробного дифференциального уравнения 240

Шубин Д. Д. Классификация НМС-потоков с единственной скрученной седловой орбитой на ориентируемых 4-многообразиях 242

Явруян О. В. Об особенностях исследования обратных коэффициентных задач для плоских анизотропных волноводов 244

Список сокращений 246

Пленарные доклады

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

КРИТЕРИЙ ДИФФУЗНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНОГО ОПЕРАТОРА

Н. М. Абасов (Россия, Москва; МГТУ им. Н. Э. Баумана),
Т. М. Плиев (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Введение и предварительные сведения. Ортогонально аддитивные операторы (ОАО) естественно возникают в теории нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений, теории динамических систем и выпуклой геометрии. Порядковые свойства ортогонально аддитивных операторов (ОАО) в векторных решетках изучались в работах [1–3].

Приведем некоторые предварительные сведения, более подробную информацию можно найти в [5].

Пусть E — векторная решетка и X — действительное векторное пространство. Отображение $T : E \to X$ называется *ортогонально аддитивным оператором*, если $T(x \sqcup y) = Tx + Ty$ для любых дизъюнктных $x, y \in E$. Из определения следует, что $T(0) = 0$. Пусть E, F — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор $T\colon E \to F$ называется:

1. *положительным*, если $T(E) \subset F_+$;

2. *регулярным*, если $T = S_1 - S_2$, где S_1, S_2 — положительные ортогонально аддитивные операторы из из E в F;

3. *сохраняющим дизъюнктность*, если $Tx \perp Ty$ для любых дизъюнктных элементов $x, y \in E$.

Пусть E, F — векторные решетки, причем F порядково полна. В работе [2] установлено $\mathscr{OA}_r(E, F)$ является порядково полной векторной решеткой. Пусть E, F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна. Регулярный ОАО $T\colon E \to F$ называется *диффузным*, если $T \perp S$ для любого $S \in \mathscr{OA}_{\mathrm{dpo}}(E, F)$. Множество всех диффузных ортогонально аддитивных операторов из E в F обозначается $\mathscr{OA}_{\mathrm{dif}}(E, F)$. Продолжая линию исследования, начатую в [4], мы установим необходимые и достаточные условия диффузности регулярного ортогонально аддитивного оператора, действующего из векторной решетки E в порядково полную векторную решетку F.

Результат. Пусть E — векторная решетки и $x \in E$. Семейство $(x_i)_{i=1}^n$ попарно дизъюнктных элементов E такое, что $x = \bigsqcup_{i=1}^n x_i$ называется *конечным дизъюнктным разбиением* x. Множество всех конечных дизъюнктных разбиений x обозначается $\Theta(x)$. Заметим, что существует естественный частичный порядок $\preceq$ на $\Theta(x)$, именно

$$\xi = (x_i)_{i=1}^n \preceq (y_j)_{j=1}^m = \zeta \Leftrightarrow x_i = \bigsqcup_{j(i)}^{k(i)} y_{j_i}$$

для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ и некоторого множества $\{j(i), \dots, k(i)\} \subset \{1, \dots, m\}$. Напомним, что частично упорядоченное множество $(X, \leqslant)$ называется направленным вверх, если для любых $x, y \in X$ найдется элемент $z \in X$ такой, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$. Отметим, что множество $(\Theta(x), \preceq)$ направлено вверх для любого элемента x произвольной векторной решетки E. С каждым оператором $T \in \mathscr{OA}_r(E, F)$ можно связать отображение $\mathfrak{d}_T \colon E \to F$, заданное следующей формулой:

$$\mathfrak{d}_T(x) := \bigwedge_{(x_i)_{i=1}^n \in \Theta(x)} \bigvee_{i=1}^{n} |T| x_i, \quad x \in E.$$

Ниже приведен критерий диффузности регулярного ортогонально аддитивного оператора.

Теорема 1. *Пусть E, F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна и $T \colon E \to F$ — регулярный ортогонально аддитивный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *T — диффузный оператор;*
2. *$\mathfrak{d}_T(x) = 0$ для любого $x \in E$.*

Литература

1. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M.* The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators // Positivity.—2021.—№ 2.—P. 291–327.
2. *Pliev M., Ramdane K.* Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices // Mediter. J. Math.—2018.—№ 2.—Article № 55.
3. *Pliev M.* On C-compact orthogonally additive operators // J. Math. Anal. Appl.—2021.—Vol. 494, № 1.—124594.
4. *Huijsmans C. B., de Pagter B.* Disjointness preserving and diffuse operators // Compositio Math.—1991.—Vol. 79.—P. 351–374.
5. *Pliev M., Popov M.* Orthogonally additive operators on vector lattices // Trends in Math.—Berlin:n Springer Int. Publ., 2022.—P. 321–351.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ФОРМИРОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ НАУЧНОГО СТИЛЯ МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ

В. С. Абатурова (Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; СКЦМИ ВНЦ РАН)

Введение. Одной из актуальных проблем в школьном математическом образовании остается проблема разработки научной методологии и эффективных современных методик обучения школьников математическому моделированию, направленных на формирование устойчивого умения строить и исследовать математические модели реальных ситуаций и процессов на языке разделов математики, изучаемых в школьном курсе на базовом (в массовой школе) и профильном (в классах углубленного изучения математики) уровнях (алгебра и начала анализа, теория вероятностей, геометрия). По результатам анализа данных, полученных нами в ходе опросов учителей математики и школьников на протяжении более пятнадцати лет в ходе образовательных, просветительских и научно-практических мероприятий, а также на основе анализа результатов ЕГЭ по математике на протяжении всех лет его проведения, выявлено, что одними из самых сложных заданий для школьников, независимо от уровня ЕГЭ (база, или профиль), являются текстовые (сюжетные) задачи. Возникает вопрос — в чем причина этой проблемы и как ее можно решить?

Материалы и методы. Для нахождения ответа на данный вопрос нами была проанализирована научная и учебно-методическая литература; изучены учебники по математике для основной и старшей школы разных авторских коллективов, изданные в последние двадцать и более лет, в том числе советские учебники и новые учебники, соответствующие ФГОС ООО и ФГОС СОО; проведены в РСО-А мероприятия ЮМИ ВНЦ РАН для учителей математики (сезонные школы — летние, весенние, осенние; научно-практические конференции, методические воркшопы и интенсивы, семинары и лектории), нацеленные на повышение их исследовательской методической компетенции; мероприятия для школьников основной и старшей школы (сезонные школы — зимние, весенние, осенние, конкурсы исследовательских работ, командные турниры и олимпиады), нацеленные на развитие математического мышления и исследовательской деятельности школьников, включая олимпиадное направление.

Результаты исследования. Исследование показало, что умение школьников анализировать реальные ситуации и моделировать их математическими средствами напрямую связано с развитием у них научного стиля мышления, который формируется при систематическом применении научного метода при решении различных задач. Такая связь обусловлена соответствием этапов общего научного метода и частного метода математического моделирования:

Этапы	**Структура научного метода**	**Структура метода математического моделирования при решении задач**
I этап	Постановка задачи	Постановка проблемы
II этап	Наблюдения, эксперименты; анализ результатов, поиск закономерностей	Анализ данных задачи, поиск закономерностей
III этап	Выдвижение гипотезы	Формализация проблемы, построение математической модели
IV этап	Построение теории	Внутримодельное решение
V этап	Проверка гипотезы, вывод	Интерпретация математической модели, проверка ее адекватности
VI этап	Принятие гипотезы, в случае ее подтверждения (задача решена) или непринятие гипотезы и возвращение ко второму этапу алгоритма (продолжение решения задачи)	Тестирование математической модели и дальнейшее ее совершенствование (чувствительность модели и т. п.)

Для формирования у школьников научного стиля мышления нами были определены и реализованы следующие организационные и педагогические условия: создана региональная интегрированная научно-образовательная среда «школьник–студент–учитель–профессор» с серией научно-практических, образовательных и просветительских мероприятий; разработано и реализовано содержание образовательных курсов и модулей для учителей математики и школьников в рамках серии проводимых мероприятий.

Заключение. Дальнейшая работа будет направлена на обобщение результатов исследования с целью построения концепции формирования научного стиля мышления школьников средствами обучения их математическому моделированию реальных ситуаций и процессов на базе математического содержания школьного курса математики и курсов дополнительного образования, выходящих за рамки школьной математики.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ТРАЕКТОРИИ ЛОКАЛЬНОГО ИНФИМУМА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Е. Р. Аваков (Россия, Москва; ИПУ РАН),
Г. Г. Магарил-Ильяев (Россия, Москва, МГУ;
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

В докладе будет введено понятие траектории локального инфимума для задачи оптимального управления (обобщающее понятие оптимальной траектории), сформулированы для нее необходимые условия и приведены примеры, показывающие, что эти условия усиливают и обобщают принцип максимума Понтрягина — классические необходимые условия для оптимальной траектории.

Рассматривается следующая задача оптимального управления

$$f_0(x(t_1)) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad u(t) \in U \ \text{ для п. в. } \ t \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad f_1(x(t_1)) = 0, \dots, f_m(x(t_1)) = 0, \tag{3}$$

где U — подмножество $\mathbb{R}^r$, $\varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ — отображение переменных t, x, u, непрерывное вместе со своей частной производной по x, $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, — непрерывно дифференцируемые функции и $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Пара $(x(\cdot), u(\cdot)) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ называется *допустимой* для задачи (1)–(3), если она удовлетворяет условиям (2) и (3). В этом случае функцию $x(\cdot)$ называем *допустимой траекторией*.

Допустимая траектория $\widehat{x}(\cdot)$ называется *оптимальной траекторией* для задачи (1)–(3), если она доставляет локальный минимума функционалу f_0 на множестве D всех допустимых траекторий для данной задачи, рассматриваемое как подмножество пространства $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ с индуцированной из этого пространства метрикой.

Функция $\widehat{x}(\cdot) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ называется *траекторией локального инфимума* для задачи (1)–(3), если она доставляет локальный минимума функционалу f_0 на замыкании множества D.

Ясно, что $\widehat{x}(\cdot)$ может не принадлежать D, но она, очевидно, является равномерным пределом функций из D. Кроме того, понятно, что $\widehat{x}(\cdot)$ является точной нижней гранью функционала f_0 по всем допустимым траекториям из некоторой окрестности $\widehat{x}(\cdot)$ (откуда и название этой функции).

Легко видеть, что если $\widehat{x}(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (1)–(3), то $\widehat{x}(\cdot)$ — траектория локального инфимума в этой задаче. С другой стороны, если $\widehat{x}(\cdot)$ — траектория локального инфимум в задаче (1)–(3) и допустима, то $\widehat{x}(\cdot)$ — оптимальная траектория в данной задаче.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathscr{A}_k = \big\{\overline{\alpha}(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \dots, \alpha_k(\cdot)) \in (L_\infty([t_0, t_1]))^k : \overline{\alpha}(t) \in \Sigma^k \text{ п. в. на } [t_0, t_1]\big\},$$

где

$$\Sigma^k = \left\{ \overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k_+ : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}.$$

Определим множество $\mathscr{U} = \{u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r) : u(t) \in U \text{ п. в. на } [t_0, t_1]\}$.

Сопоставим задаче (1)–(3) следующую задачу оптимального управления:

$$f_0(x(t_1)) \to \min, \tag{4}$$

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i(t)\varphi(t, x, u_i), \quad \overline{u}(\cdot) \in \mathscr{U}^k, \ \overline{\alpha}(\cdot) \in \mathscr{A}_k, \tag{5}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad f_1(x(t_1)) = 0, \ldots, f_m(x(t_1)) = 0, \tag{6}$$

где $\overline{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_k(\cdot))$ и $\overline{\alpha}(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \ldots, \alpha_k(\cdot))$, которую называем *выпуклым расширением* задачи (1)–(3) или просто *выпуклой* задачей. Ясно, что при $k = 1$ эта задача совпадает с исходной задачей (1)–(3).

Здесь управлениями являются пары $(\overline{u}(\cdot), \overline{\alpha}(\cdot)) \in \mathscr{U}^k \times \mathscr{A}_k$. Понятия допустимой тройки и допустимой траектории определяются также как и для задачи (1)–(3).

Теорема. *A) Если $\widehat{x}(\cdot)$ — траектория локального инфимума в задаче* (1)–(3)*, то для любых $k \in \mathbb{N}$, $\widehat{\overline{u}}(\cdot)$ и $\widehat{\overline{\alpha}}(\cdot)$ таких, что тройка $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\overline{u}}(\cdot), \widehat{\overline{\alpha}}(\cdot))$ допустима для выпуклой задачи* (4)–(6)*, найдется ненулевой набор $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in (\mathbb{R}^{m+1})^*$, $\lambda_0 \geqslant 0$, и функция $p(\cdot) \in AC([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$, удовлетворяющие условиям:*

$$\dot{p}(t) = -p(t) \sum_{i=1}^k \widehat{\alpha}_i(t)\varphi_x\big(t, \widehat{x}(t), \widehat{u}_i(t)\big), \quad p(t_1) = -\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\widehat{x}(t_1)),$$

$$\max_{u \in U} \big\langle p(t), \varphi(t, \widehat{x}(t), u) \big\rangle = \big\langle p(t), \dot{\widehat{x}}(t) \big\rangle \ \text{ п. в. на } [t_0, t_1].$$

B) Если U компактно, то $\widehat{x}(\cdot)$ — допустимая траектория для выпуклой задачи (4)–(6) *при $k \leqslant n + 1$.*

Если траектория локального инфимума является, в частности, оптимальной траекторией, то условия в пункте A) этой теоремы содержат классический принцип максимума Понтрягина, а также и другие соотношения, которые, как будет показано на примерах, могут давать дополнительную информацию об оптимальной траектории, и тем самым данная теорема усиливает принцип максимума Понтрягина.

Если локальный инфимум не является оптимальной траекторией, то полученные необходимые условия представляют собой инструмент для нахождения траекторий, «подозрительных» на траекторию локального инфимум, который применяется во многом также как принцип максимума Понтрягина для нахождения процессов, подозрительных на оптимальность.

Литература

1. *Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г.* Локальный инфимум и семейство принципов максимума в оптимальном управлении // Мат. сб.—2020.—Т. 211, № 6.—С. 3–39.

ON DIMENSION OF THE SPACE OF DERIVATIONS ON COMMUTATIVE REGULAR ALGEBRAS

Sh. A. Ayupov (Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz),
K. K. Kudaybergenov (Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz),
Kh. Karimov (Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz)

Let $\mathscr{A}$ be an algebra. Recall that a linear mapping $D : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ is called a derivation if it satisfies the identity $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ for all $x, y \in \mathscr{A}$. Each element $a \in \mathscr{A}$ defines a derivation $\mathrm{ad}(a) : D : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ given by $\mathrm{ad}(a)(x) = ax - xa$, $x \in \mathscr{A}$. Such derivations $\mathrm{ad}(a)$ are called inner derivations. It is clear that if $\mathscr{A}$ is commutative, all inner derivations are zero, in other words, all non zero derivations of a commutative algebras are outer.

In 2000, the first author of the present note proposed a program for study of derivations on algebras of measurable operators affiliated a with von Neumann algebra and formulated a problem concerning innerness of derivations on these algebras [1]. This problem have had a significant impact on the theory of algebras of unbounded operators. Moreover, in 2014, one of the founders of the modern theory of operator algebras, R. V. Kadison, in a joint work with Zh. Liu [2], drew attention to the relevance of this problem in the particular case of II_1 von Neumann algebras. Nowadays Ayupov–Kadison–Liu problem has been completely solved [3] and its solution depends on commutativity of underlying von Neumann algebras. Roughly speaking, in a non-commutative case all derivations are inner, that is, each derivation is represented as a commutator of a fixed element of the algebra. But in the commutative case the picture is completely different and there are many non-inner (i. e. non-zero) derivations.

Regular algebras (in the sense of von Neumann) first appeared in the papers of J. von Neumann (see [4]). One of important classes of *-regular rings are the *-algebra of operators affiliated with a finite von Neumann algebra. It is well-known that if a von Neumann algebra M is abelian, then it is $*$-isomorphic to the algebra $L_\infty(\Omega)$ of all (classes of equivalence of) essentially bounded measurable complex-valued functions on a measure space (Ω, Σ, μ) and therefore, $S(M) \cong S(\Omega)$ is the algebra of all measurable complex functions on Ω. In 2006 A. F. Ber, F. A. Sukochev, V. I. Chilin [5] and A. G. Kusraev [6] independently proved that $S(\Omega)$ admits a non zero derivations if and only if the Boolean algebra of all idempotents $\nabla(S(\Omega))$ of $S(\Omega)$ is not atomic. In [7] it was shown that the dimension of the linear space of all derivations on the algebra $S(0, 1)$ is uncountable.

In [8] we have introduced a new notion of transcendence degree of a commutative unital regular algebra. The transcendence degree of a commutative unital regular algebra is one of the important invariants of such algebras togehter with Boolean algebra of its idempotents. For example, if (Ω, Σ, μ) is a Maharam homogeneous measure space, then two homogeneous unital regular subalgebras of $S(\Omega)$ are

isomorphic if and only if their Boolean algebras of idempotents are isomorphic and their transcendence degrees coincide.

In the present note we give the dimension formula for the space of all derivations on homogenuous commutative regular subalgebras of algebra of measurable functions on Maharam measure space.

Theorem. *Let (Ω, Σ, μ) be a Maharam homogeneous measure space with a finite countable-additive measure μ. Assume that $\mathscr{A}$ is a homogeneous regular unital subalgebra in $S(\Omega)$ of infinite transcendence degree and with the homogeneous Boolean algebra of idempotents $\nabla(\mathscr{A})$ of infinite weight. Then*

$$\dim \mathrm{Der}(\mathscr{A}) = \tau(\nabla(\mathscr{A}))^{\mathrm{trdeg}(\mathscr{A})}.$$

References

1. *Ayupov Sh. A.* Derivations in Algebras of Measurable Operators // Dokl. Uzbek Akad. Nauk.—2000.—Vol. 56, № 3.—P. 14–17.
2. *Kadison R. V., Liu Z.* A Note on Derivations of Murray–von Neumann Algebras // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.—2014.—Vol. 111, № 6.—P. 2087–2093.
3. *Ber A. F., Kudaybergenov K. K., Sukochev F. A.* Derivations of Murray–von Neumann Algebras // J. Reine Angew. Math.—2022.—Vol. 791, № 10.—P. 283–301.
4. *von Neumann J.* Continuous geometry.—Princeton, N. J: Princeton Univ. Press, 1960.
5. *Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A.* Non-Trivial Derivations on Commutative Regular Algebras // Extracta Math.—2006.—Vol. 21, № 2.—P. 107–147.
6. *Kusraev A. G.* Automorphisms and Derivations on a Universally Complete Complex F-Algebra // Siberian Math. J.—2006.—Vol. 47, № 1.—P. 77–85.
7. *Ber A. F.* Derivations on Commutative Regular Algebras // Siberian Adv. Math.—2011.—Vol. 21, № 3.—P. 161–169.
8. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Karimov Kh. K.* Isomorphisms of Commutative Regular Algebras // Positivity.—2022.—Vol. 26, № 11.—23 p.

ON PERFECT AND ALMOST PERFECT HOMOGENEOUS POLYTOPES

V. N. Berestovskii (Russia, Novosibirsk; IM SB RAS),
Yu. G. Nikonorov (Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS)

In this talk we present some recent results obtained in [1]. A finite metric space (M, d) is homogeneous if its isometry group acts transitively on M. In [2–4], the authors obtained the complete description of the metric properties of the vertex sets of regular and semiregular polytopes in Euclidean spaces from the point of view of the normal homogeneity and the Clifford–Wolf homogeneity, see also the survey [5] for additional results on polytopes with normal homogeneous or Clifford–Wolf homogeneous vertex sets and [6] for the corresponding results on normal homogeneous and Clifford–Wolf homogeneous Riemannian manifolds. Some properties of m-point homogeneous finite subspaces of Euclidean spaces were discussed in [7].

We consider Euclidean space $\mathbb{R}^n$ with the standard inner product. Recall that a polytope P in $\mathbb{R}^n$ is *homogeneous* (or *vertex-transitive*) if its symmetry (isometry) group acts transitively on the set of its vertices. Hence, a convex polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ is homogeneous if and only if its vertex set with the metric d, induced by the Euclidean metric in $\mathbb{R}^n$, is homogeneous.

Proposition 1 [2]. *Let $M = \{x_1, \dots, x_q\}$, $q \geqslant n+1$, be a finite homogeneous metric subspace of Euclidean space $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Then M is the vertex set of a convex polytope P, that is situated in some sphere in $\mathbb{R}^n$ with radius $r > 0$ and center $x_0 = \frac{1}{q} \cdot \sum_{k=1}^{q} x_k$.*

This result shows that *the theory of convex polytopes* is very important for the study of finite homogeneous subspaces of Euclidean spaces. Let us recall the definition of *almost perfect polytope*, that appeared for the first time in [4].

Definition 1.We will call a nondegenerate homogeneous polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ *almost perfect*, if every second order hypersurface in $\mathbb{R}^n$, containing all vertices of P and symmetric with respect to the center of P, coincides with the circumscribed hypersphere of P.

Definition 2.We will call a nondegenerate homogeneous polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ *perfect*, if every second order hypersurface in $\mathbb{R}^n$, containing all vertices of P, coincides with the circumscribed hypersphere of P.

Obviously, every perfect homogeneous polytope is almost perfect. Moreover, we have the following results.

Lemma 1. *A homogeneous polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ is (almost) perfect if and only if any ellipsoid E in $\mathbb{R}^n$ (with center coinciding with the center of P), which includes all vertices of P, coincides with the circumscribed hypersphere of P.*

Lemma 2. *Let P be a non-degenerate homogeneous (bounded) polytope in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, which is centrally symmetric with respect to the origin $O \in \mathbb{R}^n$. Then every second order hypersurface in $\mathbb{R}^n$, containing all vertices in P, is symmetric with respect to the center O.*

Corollary 1. *If a homogeneous polytope P in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, is almost perfect and centrally symmetric with respect to its center, then P is perfect.*

Important examples of homogeneous polytopes are regular and semiregular polytopes. Any one-dimensional polytope is a closed segment, bounded by two endpoints. It is regular by definition. Two-dimensional regular polytopes are regular polygons on Euclidean plane. For other dimensions, regular polytopes are defined inductively. A convex n-dimensional polytope for $n \geqslant 3$ is called *regular*, if it is homogeneous and all its facets are regular polytopes congruent to each other. This definition is equivalent to other definitions of regular convex polytopes. We also recall the definition of semiregular convex polytopes. For $n = 1$ and $n = 2$, semiregular polytopes are defined as regular. A convex n-dimensional polytope for $n \geqslant 3$ is called *semiregular* if it is homogeneous and all its facets are regular polytopes. The following problem is very natural.

Problem 1. Find all perfect and all almost perfect polytopes among regular and semiregular polytops.

The main result of [1] is as follows.

Theorem 1 [1]**.** *Let P be a regular polytope in Euclidean space $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Then the following assertions hold.*

1. *P is perfect exactly in the following cases: a regular m-gon in $\mathbb{R}^2$ for $m \geqslant 5$; the dodecahedron and the icosahedron in $\mathbb{R}^3$; the 24-cell, the 120-cell, and 600-cell in $\mathbb{R}^4$.*

2. *P is not perfect but is almost perfect if and only if it is a regular triangle in $\mathbb{R}^2$.*

3. *P is not almost perfect exactly in the following cases: the n-dimensional cube and the n-dimensional orthoplex for $n \geqslant 2$; the n-dimensional regular simplex for $n \geqslant 3$.*

It should be noted that [1] contains also the classification of perfect and almost perfect polytopes among all semiregular polytopes excepting Archimedean solids and two four-dimensional Gosset polytopes. We hope that a complete classification of perfect and almost perfect semiregular polytopes will lead to the discovery of new interesting effects and will make it possible to advance in solving related problems.

References

1. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Finite Homogeneous Metric Spaces // Siberian Math. J.—2019.—Vol. 60, № 5.—P. 757–773.
2. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics.—Springer Monographs in Mathematics. Cham: Springer, 2020.—XXII+482 pp.
3. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Finite Homogeneous Subspaces of Euclidean Spaces // Siberian Adv. Math.—2021.—Vol. 31, № 3.—P. 155–176.
4. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Semiregular Gosset Polytopes // Izv. Math.—2022.—Vol. 86, № 4.—P. 667–698.
5. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On Finite Homogeneous Metric Spaces // Vladikavkaz Math. J.—2022.—Vol. 2, № 2.—P. 51–61.
6. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On m-Point Homogeneous Polytopes in Euclidean Spaces // Filomat.—2023.—Vol. 37, № 25.—(Accepted).—(See also arXiv: 2206.13096).
7. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Perfect and Almost Perfect Homogeneous Polytopes // J. Math. Sci.—(To appear).—(See also arXiv:2304.12211).

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ГЕОМЕТРИЯ ГРУППЫ ЛИ В ГРУППОВОМ АНАЛИЗЕ ОДНОМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А. В. Боровских (Россия, Москва, МГУ;
Владикавказ, НОМЦ СОГУ)

Попытки дать геометрическую интерпретацию групповой классификации [1–2] одномерного кинетического уравнения $f_t+cf_x+(Ff)_c=0$ обнаружили иное понимание группы Ли как геометрического объекта [3], чем то, которое было связано с работами Э. Картана [4–6].

Пусть G — n-мерная группа, реализованная как множество в $\mathbb{R}^n$, соответствующие переменные мы будем обозначать через $x=(x^1,\dots,x^n))$; $\{\Xi_\alpha=\xi^i_\alpha\partial_i(x)\}_{\alpha=1}^n$ — базис соответствующей порождающей алгебры.

Теорема 1. *Множество метрик $g_{ij}(x)dx^idx^j$, заданных на G и остающихся инвариантными при действии этой группы, образует линейное пространство размерности $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли размерности n, алгебра Ли которой имеет базис $\Xi_\alpha=\xi^i_\alpha(x)\partial_i$ и структурные константы $C^\gamma_{\alpha\beta}$. На этой группе существует ровно n линейных дифференциальных форм, инвариантных относительно этой алгебры.*

Следствие 1. *Все метрические формы из формулировки теоремы 1, инвариантные относительно алгебры, имеют вид квадратичной формы $ds^2{=}q_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$ от линейных дифференциальных форм $\omega^\alpha=\omega^\alpha_idx^i$, $\alpha=1,\dots,n$, с постоянными коэффициентами $q_{\alpha\beta}$.*

Обозначим через ω^i_α матрицу, обратную к матрице ω^α_i, задающей инвариантные дифференциальные формы $\omega^\alpha=\omega^\alpha_idx^i$. Тогда для операторов $\Omega_\alpha=\omega^i_\alpha\partial_i$ выполнено $[\Xi_\alpha,\Omega_\beta]=0$.

Определение 1. Алгебру, образованную решениями Ω системы уравнений $[\Xi_\alpha,\Omega]=0$, мы назовем двойственной к алгебре, образованной операторами Ξ_α.

Замечание 1. Двойственная алгебра в принципе не совпадает с исходной.

Замечание 2. Инвариантные относительно Ξ_α формы ω^β являются формами Маурера — Картана для алгебры с базисом Ω_β. Аналогично, формы Маурера — Картана алгебры с базисом Ξ_α оказываются инвариантными относительно Φ_β, так что здесь действительно наблюдается определенная двойственность.

Пусть

$$\frac{dx^1}{\phi^1(x)}=\dots=\frac{dx^n}{\phi^n(x)} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-939.

— уравнение семейства кривых, инвариантного относительно группы G. Умножением (1) на подходящий множитель можно добиться, чтобы $\omega_i^\alpha \phi^i$ оказались константами. Обозначим их через λ^α.

Для любой инвариантной метрики $ds^2 = q_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$ единичный касательный вектор $\tau = (\tau^i)$ к кривой (1) имеет вид

$$\tau^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{\phi^i(x)}{\sqrt{Q}}, \quad Q = q_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta,$$

и поэтому на касательном векторе τ соответствующая линейная форма оказывается постоянной: $\omega_i^\alpha \tau^i = \frac{\lambda^\alpha}{\sqrt{Q}}$.

Замечание 3. Вектор $\phi^i = \lambda^\alpha \omega_\alpha^i$ является линейной комбинацией векторных полей, порождающих двойственную алгебру Ф, поэтому изучаемые нами траектории, инвариантные относительно алгебры Ξ, являются траекториями однопараметрической подгруппы, порожденной оператором из двойственной алгебры.

Обозначим через $\tau_N = (\tau_N^k)$ репер Френе, занумерованный индексом $N = 1, \ldots, n$, и, соответственно, $\lambda_N^\alpha = \omega_i^\alpha \tau_N^i$.

Теорема 3. *В терминах величин λ_N^α система Френе имеет вид*

$$\frac{d\lambda_N^\gamma}{ds} + H_{\alpha\beta}^\gamma \lambda_N^\alpha \lambda_1^\beta = -\varkappa_{N-1}\lambda_{N-1}^\gamma + \varkappa_N \lambda_{N+1}^\gamma,$$

где $H_{\alpha\beta}^\gamma$ — постоянные, определяемые формулой

$$H_{\alpha\beta}^\gamma = -\frac{1}{2}\left[q^{\gamma\sigma}q_{\mu\beta}C_{\alpha\sigma}^{*\mu} + C_{\alpha\beta}^{*\gamma} + q^{\gamma\sigma}q_{\alpha\nu}C_{\beta\sigma}^{*\nu}\right],$$

$C_{\alpha\beta}^{*\gamma}$ — структурные константы алгебры с базисом Ω_α.

Следствие 2. *Для всех инвариантных кривых все кривизны и все величины λ_N^α являются постоянными.*

Полученные результаты позволили дать геометрическую интерпретацию групповой классификации одномерного кинетического уравнения $f_t + cf_x + (Ff)_c = 0$.

Литература

1. *Платонова К. С., Боровских А. В.* Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Условия сохранения физического смысла моментных величин // Теорет. и мат. физика.—2018.—Т. 195, № 3.—С. 452–483.
2. *Платонова К. С., Боровских А. В.* Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Инварианты и проблема замыкания моментной системы // Теорет. и мат. физика.—2021.—Т. 208, № 3.—С. 367–386.
3. *Боровских А. В.* Геометрия группы Ли. Инвариантные метрики и динамические системы, двойственная алгебра и их приложения в групповом анализе одномерного кинетического уравнения // Теорет. и мат. физика.—(В печати).
4. *Картан Э.* Геометрия групп преобразований // Геометрия групп Ли и симметрические пространства (сборник статей) / Пер. с франц.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.—С. 7–111.
5. *Розенфельд Б. А., Замаховский М. П.* Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства.—М.: МЦНМО, 2003.—560 с.
6. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства / Пер. с англ.—М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2005.—608 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ МОДЕЛЕЙ СВЯЗАННЫХ ПОЛЕЙ[1]

А. О. Ватульян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
С. А. Нестеров (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

В настоящее время в различных областях техники широко используются функционально-градиентные материалы (ФГМ) — композиционные материалы, термомеханические характеристики которых являются непрерывными функциями пространственных координат. Поэтому не возникает концентрации напряжений на поверхности раздела материалов, как в случае слоистых материалов. Отказ от положения об однородности материала позволяет правильно оценить влияние функционально-градиентных свойств материала и более точно проводить анализ НДС конструкций. Процесс изготовления ФГМ является достаточно сложным технологическим процессом, состоящим из ряда этапов. При этом на последнем этапе характеристики изготовленных материалов могут отличаться от заданных. В силу переменности характеристик они не могут быть определены из простых макроэкспериментов. Поэтому требуется создание методов идентификации переменных характеристик материалов на основе аппарата коэффициентных обратных задач (КОЗ) термомеханики по дополнительной информации о граничных физических полях.

Из-за некорректности и нелинейности КОЗ в настоящее время актуальной задачей является построение экономных и устойчивых алгоритмов их решения. Большинством исследователей решение КОЗ теплопроводности и теории упругости сводится к решению соответствующих задач в экстремальной постановке, что приводит к минимизации функционала невязки, как правило, градиентными методами или генетическими алгоритмами. Однако для ряда материалов необходимо учитывать связанность полей и решать КОЗ термоупругости и термоэлектроупругости, которые исследованы в основном для слабонеоднородных материалов [1].

В последние годы для решения нелинейных КОЗ механики используется подход, основанный на построении итерационного процесса, на каждом этапе которого решается операторное уравнение, устанавливающее связь между коэффициентами дифференциальных операторов и дополнительной информацией. Авторами был разработан и апробирован численный метод решения одномерных нелинейных КОЗ механики связанных полей, в том числе электроупругости, пороупругости [2], термоупругости и термоэлектроупругости [3]. Для этого на основе слабой постановки прямой задачи и линеаризации были получены операторные уравнения для нахождения поправок материальных характеристик

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00265, в Южном федеральном университете.

в итерационном процессе. В [3] разработаны методы исследования прямых задач термомеханики для стержневых, плоских и цилиндрических неоднородных конструкций. Первый метод состоит в совместном применении сведения задачи для стержня к системе интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 2-го рода и обращении трансформант Лапласа на основе теории вычетов. Второй метод основан на совместном применении метода пристрелки к канонической системе ОДУ 1-го порядка и обращение трансформант на основе разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра.

Настоящий доклад представляет собой обзор полученных авторами результатов по решению КОЗ термоупругости и термоэлектроупругости для стержневых, плоских и цилиндрических конструкций. Для решения обратной задачи в итерационном процессе получены ИУФ 1-го рода для нахождения поправок термомеханических характеристик. Проведены вычислительные эксперименты по идентификации переменных свойств термоупругих тел (стержня, слоя, трубы, конечного цилиндра, прямоугольника) и термоэлектроупругих тел (стержня, слоя, бесконечного цилиндра). При этом восстанавливалась, как одна характеристика, так и две характеристики. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижению функционалом невязки предельного значения. Восстанавливались как гипотетические законы неоднородности в классах степенных, экспоненциальных и тригонометрических функций, так и законы, моделирующие материальные характеристики реальных ФГМ.

В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что: 1) монотонные функции восстанавливаются лучше немонотонных; 2) в случае реконструкции характеристик слоистых материалов наибольшая погрешность возникала в окрестностях точек сопряжения; 3) теплофизические характеристики и упругие модули восстанавливаются с небольшой погрешностью, как при отсутствии зашумления входной информации, так и при наличии шума; 4) пьезомодули восстанавливаются с большей погрешностью, чем упругие модули; 5) успешная реконструкция коэффициента температурных напряжений и пирокоэффициента возможна только при больших значениях параметра термомеханической и теплоэлектрической связанности.

Литература

1. *Ломазов В. А.* Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред.—Орел: Изд-во ОрелГТУ, 2002.—168 с.
2. *Ватульян А. О.* Коэффициентные обратные задачи механики.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019.—272 с.
3. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Коэффициентные обратные задачи термомеханики.—Ростов н/Д.–Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2022.—178 с.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ И ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА[1]

Т. А. Гарманова (Россия, Москва; МГУ),
Д. Д. Казимиров (Россия, Москва; МГУ),
И. А. Шейпак (Россия, Москва; МГУ)

Рассматривается пространство Соболева $\mathring{W}_p^n[0;1]$, состоящее из вещественных функций y, обладающих абсолютно непрерывными производными до порядка $n-1$, таких, что $y^{(n)} \in L_p[0;1]$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$ и выполняются краевые условия $y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$).

Для произвольной точки $a \in (0;1)$ изучаются величины $A_{n,k,p}(a)$, наименьшими возможными в неравенствах

$$y^{(k)}(a) \leqslant A_{n,k,p}(a)\big\|y^{(n)}\big\|_{L_p[0;1]}, \quad y \in \mathring{W}_p^n[0;1],\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Также целью является получение точных констант вложения пространства $\mathring{W}_p^n[0;1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0;1]$

$$\Lambda_{n,k,\infty} := \max_{a\in[0;1]} A_{n,k,p}(a).$$

Определим $\mathscr{P}_m$ — пространство вещественных многочленов

$$\mathscr{P}_m = \left\{ \sum_{j=0}^{m} c_j x^j, \quad x, c_j \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant j \leqslant m \right\}$$

степени не выше m. Также рассмотрим сплайны вида

$$\frac{(x-a)_-^{n-k-1}}{(n-k-1)!} := \begin{cases} \frac{(x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}, & x \in [0;a], \\ 0, & x \in (a;1]. \end{cases}$$

Теорема 1. *Для величин $A_{n,k,p}(a)$ справедливо равенство*

$$A_{n,k,p}(a) = \min_{u\in P_{n-1}} \left\| \frac{(x-a)_-^{n-k-1}}{(n-k-1)!} - u \right\|_{L_p'[0;1]}.$$

Заметим, что случай $p = 2$ изучен в [1] при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Далее нас интересует случай $p = \infty$. На основании результатов о наилучшем приближении многочленами характеристической функции в $L_1[0;1]$ (см. [2]) доказана следующая теорема.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 20-11-20261. Работа первого автора поддержана фондом «Базис».

Теорема 2. *Если $k = n - 1$ четно, то точка $a = \frac{1}{2}$ является точкой глобального максимума функции $A_{n,n-1,\infty}$. Если $k = n - 1$ нечетно, то точка $a = \frac{1}{2}$ является точкой локального минимума функции $A_{n,n-1,\infty}$.*

При четном n точками глобального максимума функции $A_{n,n-1,\infty}$ являются точки $\sin^2 \frac{\pi n}{4(n+1)}$ и $\sin^2 \frac{\pi(n+2)}{4(n+1)}$ (ближайшие к $\frac{1}{2}$ точки из множества $\left\{a_j = \sin^2 \frac{\pi j}{2(n+1)}\right\}_{j=1}^{n}$). Таким образом,

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ нечетно},$$

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)} \sin \frac{\pi n}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ четно}.$$

Свойства функций $A_{n,0,\infty}$ ($k = 0$) можно описать в терминах ядра Пеано [3].

Теорема 3.

$$A_{n,0,\infty}(a) = \frac{V_n(2a-1)}{2^n}, \quad a \in [0;1],$$

где

$$V_n(t) = \frac{2\sqrt{2}(n+1)}{\pi n!} \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{1-(t+ix\sqrt{1-t^2})^{2(n+1)}}\, dx$$

— ядро Пеано.

Теорема 4.

$$\Lambda_{n,0,\infty} = A_{n,0,\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{V_n(0)}{2^n} = \frac{n+1}{\pi n! 2^{2(n-1)}} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{1+(-1)^n x^{2(n+1)}}\, dx.$$

Литература

1. *Гарманова Т. А., Шейпак И. А.* О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения.—2021.—Т. 55, вып. 1.—С. 43–55.
2. *Дейкалова М. В.* Интегральное приближение характеристической функции сферической шапочки алгебраическими многочленами // Тр. ИММ УрО РАН.—2010.—Т. 16, № 4.—С. 144–155.
3. *Fiedler H., Jukart W. B.* Best L_1-Approximation by Polinomials // J. Approx. Theory.—1983.—Vol. 37.—P. 260–292.

QUASI-KB AND QUASI-LEVI OPERATORS IN BANACH LATTICES[1]

E. Yu. Emelyanov (Russia, Novosibirsk; IM SB RAS)

Various operator versions of Banach lattice properties like the property to be a KB-space were introduced and studied recently (see, e.g. [1–3]). The main idea lies in a redistribution of topological and order properties between domain and range of operators. As the order convergence is not topological in every infinite dimensional vector lattice [4], most important operator versions emerge when the order and norm convergences are involved simultaneously. The case of positive operators is of special interest. We denote by $\mathrm{L}(E,F)$ the space of all linear bounded operators between Banach lattices E and F. Given a subset P of $\mathrm{L}(E,F)$. An operator $T:E\to F$ is a *regularly* P*-operator* (shortly, $T\in \text{r-P}(E,F)$, if there exist two positive operators $T_1,T_2\in \mathrm{P}$ satisfying $T=T_1-T_2$.

Theorem 1 [5, Theorem 6]**.** *Let* P *be a closed subspace of* $\mathrm{L}(E,F)$*. Then the formula*

$$\|T\|_{\text{r-P}}=\inf\{\|S\|:\pm T\leqslant S\in \mathrm{P}\}$$

defines a complete norm on $\text{r-P}(E,F)$ *satisfying*

$$\|T\|_{\text{r-P}}\geqslant \|T\|_r\geqslant \|T\| \quad (\forall\, T\in \text{r-P}(E,F)),$$

where $\|\cdot\|_r$ *is the regular norm. Furthermore, if* F *is Dedekind complete and* P *possesses the domination property (i. e.* $0\leqslant S\leqslant T\in \mathrm{P}$ *implies* $S\in \mathrm{P}$*) then* $\|T\|_{\text{r-P}}=\|T\|_r$ *for* $T\in \text{r-P}(E,F)$ *and* $\text{r-P}(E,F)$ *is an order ideal in* $\mathrm{L}_r(E,F)$*.*

Определение 1 (*An adapted version of Definition* 1.1 *from* [1]). An operator $T\in \mathrm{L}(E,F)$ is:

(i) a KB*-operator* (shortly, $T\in \mathrm{L}_{KB}(E,F)$) if, for every norm-bounded increasing net $(x_\alpha)_\alpha$ in E_+, there is an (not necessarily unique) $x\in E$ with $\|Tx_\alpha-Tx\|\to 0$.

(ii) a *quasi* KB*-operator* (shortly, $T\in \mathrm{L}_{q-KB}(E,F)$) if T takes norm-bounded increasing nets in E_+ onto norm Cauchy nets in F.

(iii) a *Levi operator* (shortly, $T\in \mathrm{L}_{Levi}(E,F)$) if, for every norm-bounded increasing net x_α in E_+, there exists an $x\in E$ with $Tx_\alpha\xrightarrow{o}Tx$.

(iv) a *quasi Levi operator* (shortly, $T\in \mathrm{L}_{q-Levi}(E,F)$) if T takes norm-bounded increasing nets in E_+ onto o-Cauchy nets in F.

Theorem 2. *If* F *is Dedekind complete then* $\text{r-L}_{qKB}(E,F)$ *is norm-closed operator ideal of the Banach lattice* $(\mathrm{L}_r(E,F),\|\cdot\|_r)$ *for every* E*.*

We show that each r-compact operator T in a Banach lattice E is an r-quasi KB-operator, and prove the following theorem.

[1]The work was carried out in the framework of the State Task to the Sobolev Institute of Mathematics, project FWNF-2022-0004.

Theorem 3 [6, Corollary 1]**.** *Let E be a Banach lattice with order continuous norm. The following conditions are equivalent.*

1) *E is a KB-space.*
2) $\mathrm{L}(E) = \mathrm{L}_{KB}(E)$.
3) $\mathrm{L}_{qKB}(E) = \mathrm{L}_{KB}(E)$.
4) $\text{r-L}_{qKB}(E) = \text{r-L}_{KB}(E)$.
5) $(\mathrm{L}_{qKB})_+(E) = (\mathrm{L}_{KB})_+(E)$.
6) *Every positive compact operator in E is a KB-operator.*

References

1. *Alpay S., Emelyanov E., Gorokhova S.* $o\tau$-Continuous, Lebesgue, KB, and Levi operators between vector lattices and topological vector spaces // Results Math.—2022.—Vol. 77, Article no. 117.—25 p.
2. *Bahramnezhad A., Azar K. H.* KB-operators on Banach lattices and their relationships with Dunford–Pettis and order weakly compact operators // University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin. Series A: Applied Mathematics and Physics.—2018.—Vol. 80, № 2.—P. 91–98.
3. *Gorokhova S., Emelyanov E.* On operators dominated by Kantorovich–Banach operators and Levy operators in locally solid lattices // Vladikavkaz Math. J.—2022.—Vol. 24, № 3.—P. 55–61 (in Russian). Translation in: Sib. Math. J.—2023.—Vol. 64, № 3.—P. 720–724.
4. *Dabboorasad Y. A., Emelyanov E. Y., Marabeh M. A. A.* Order convergence is not topological in infinite-dimensional vector lattices // Uzb. Mat. Zh.—2020.—Vol. 1.—P. 159–166.
5. *Alpay S., Emelyanov E., Gorokhova S.* Enveloping norms on the spaces of regularly P-operators in Banach lattices.—URL: arxiv.org/abs/2212.00441.
6. *Emelyanov E.* Algebras of Lebesgue and KB regular operators on Banach lattices.—URL: arxiv.org/abs/2203.08326.

ON THE SHARP ESTIMATES FOR THE FOURIER TRANSFORM OF MEASURES SUPPORTED TO SURFACES RELATED WITH E_8 TYPE SINGULARITIES

D. I. Ikromova (Uzbekistan, Samarkand; SamSU)

Let $S \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth surface, and $\varphi \in C_0^\infty(S)$ be a smooth function with compact support. Consider the signed measure $d\mu(X) := \varphi(X)dS$, where dS is the induced Lebesgue measure on the surface S. Surely, if φ is a non-negative function, then we deal with the Borel's surface-carried measure. The Fourier transform of the signed measure $d\mu$ is determined by the following integral:

$$\widehat{d\mu}(\xi) := \int\limits_S e^{iX\cdot\xi}\, d\mu(X), \tag{1}$$

whatbcorresponds to the Fourier transform of the distribution with compact support given by the signed measure $d\mu$ (see [1]), where $X\cdot\xi$ is the inner product of the vectors X and ξ.

We consider the problem: *Find the GLB (greatest lower bound) p_S of the following set*

$$\left\{p \in [1,\, \infty) :\ \textit{it holds the inclusion: } \widehat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3) \textit{ for any } \varphi \in C_0^\infty(S)\right\},$$

where $L^p(\mathbb{R}^3)$ is the space of integrable functions with degree $p (1 \leqslant p < \infty)$, of course, if $p = \infty$, then we are dealing with the space of essentially bounded functions. Similarly one can define $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Such kind of problems had been considered by many researchers beginning from the classical papers by I. M. Vinogradov [2] and Hua-Lo-Gen [3].

The number p_S is called to be an exact integrability index of the Fourier transform of the signed measure $d\mu$ concentrated on the surface S.

Here, we consider the case of surfaces in $\mathbb{R}^3$ given as the graph of a function ϕ i. e. $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \phi(x_1, x_2)\}$, the function ϕ, with $\phi(0) = 0$ and $\nabla\phi(0) = 0$, has a singularity of type E_8 at the origin of $\mathbb{R}^2$, in the sense of Arnol'd's classification Theorem, wherein the support of the density function φ belongs to a sufficiently small neighborhood of the origin.

We will show that, there is a function having a singularity of type E_8 at the origin for which $p_S = 3$.

The following Proposition gives a classification of the function ϕ with respect to linear change of variables.

Proposition. *Let ϕ be a smooth function that satisfies the conditions: $\frac{\partial^2\phi(0,0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}} = 0$, for any $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ with $\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 2$ (where $\mathbb{Z}_+$ is the set of all non-negative integer numbers), and $\phi_3(x_1, x_2)$ is the cub of a nontrivial linear*

function and also $h(\phi) < 2$. Then there is a linear coordinate system of $\mathbb{R}^2$, in which the function ϕ can be written as:

$$\phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - \psi(x_1))^3 + x_2 b_1(x_1) + b_0(x_1), \tag{1}$$

where b, b_0, b_1 and ψ are smooth functions with $b(0,0) \neq 0$, and $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, as well as $b_1(x_1) = x_1^{k_1}\beta_1(x_1)$, $b_0(x_1) = x_1^{k_0}\beta_0(x_1)$. Here β_1, β_0 are smooth functions.

Moreover, either

(i) $k_0 = 4, k_1 \geqslant 4$, and also $\beta_0(0) \neq 0$ (singularity of type E_6);

(ii) $k_0 \geqslant 5, k_1 = 3$ and also $\beta_1(0) \neq 0$ (singularity of type E_7);

(iii) $k_0 = 5, k_1 \geqslant 5$, and also $\beta_0(0) \neq 0$ (singularity of type E_8).

(See [4] for a definition of the height of a smooth function).

The main results of the thesis are contained in the following Theorem, which shows that the sharp L^p bound of the Fourier transform of charge depends on the function ψ.

Theorem. *Let $S \subset \mathbb{R}^3$ be a smooth surface defined as the graph of a function $x_3 = \phi(x_1, x_2)$, where ϕ is a smooth function that satisfies the conditions:*

(i) $\phi(0,0) = 0, \quad \nabla\phi(0,0) = 0$;

(ii) *ϕ has a singularity of type E_8, while in the formula* (1) *the function ψ satisfies the condition: $|\psi''(0)| + |\psi'''(0)| \neq 0$.*

Then there exists a neighborhood U of the origin such that for of all $\varphi \in C_0^\infty(U)$ the inclusion $\widehat{d\mu} \in L^{3+0}(\mathbb{R}^3)$ holds true, and if $\varphi(0) \neq 0$, then $\widehat{d\mu} \notin L^3(\mathbb{R}^3)$. So, in this case $p_S = 3$.

Note that the condition $|\psi''(0)| + |\psi'''(0)| \neq 0$ is essential. It can be seen from the simple example: $\phi(x_1, x_2) := x_2^3 + x_1^5$. Then it can be shown that $\widehat{d\mu} \notin L^{22/7}(\mathbb{R}^3)$.

Литература

1. *Palamodov V. P.* Generalized functions and harmonic analysis. Commutative harmonic analysis–3 // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.—Moscow: VINITI, 1991.—Vol. 72.—P. 5–134 (in Russian).
2. *Vinogradov I. M.* The Method of Trigonometric Sums in the Theory of Numbers.— Moscow: Nauka, 1971 (in Russian).
3. *Hua Loo-keng.* On the Number of Solutions of Tarry's Problem // Acta Sci. Sinica.—1952.—Vol. 1, № 1.—P. 1–76.
4. *Varchenko A. N.* Newton Polyhedra and Estimates of Oscillating Integrals // Funct. Anal. Appl.—1976.—Vol. 18.—P. 175–196.

ON DISCONJUGACY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ON A GRAPH[1]

R. Ch. Kulaev (Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS)

We study properties of a fourth-order differential operator on a graph, which is a model of the planar Euler–Bernoulli beam system.

Denote by $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ a simple connected and finite metric graph without loops, with a finite set of vertices $V(\Gamma)$ and a set of edge points $E(\Gamma)$. An edge of a graph is an open interval of finite length, and a vertex of a graph is an endpoint of one or more edges. For any $a \in V(\Gamma)$ by $I(a)$ we denote the index set of the edges incident to a vertex a, and by $|I(a)|$ denote the number of elements of the set $I(a)$. Elements of the sets $J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| \geqslant 2\}$ and $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| = 1\}$ are called *interior* and *boundary* vertices, respectively. We assume that $\Gamma = E(\Gamma) \cup V(\Gamma)$, and Γ is a tree.

We study a fourth-order differential equation on a graph Γ:

$$Lu \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\,\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) - \frac{d}{d\Gamma}\left(q(x)\,\frac{du}{d\Gamma}\right) + r(x)u = f(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

where $\partial\Gamma$ is the set of boundary vertices of Γ. At the interior points of the edges, the derivative $du/d\Gamma$ has the classical form u', and at the nodes of the network equation (1) is given by sets of conditions adequate to various types of beam connection [1–3]. At the boundary vertices (1) is given by boundary conditions. More precisely:

the equations on the edges have the form

$$\left(p_i(x)u_i''\right)'' - \left(q_i(x)u_i'\right)' + r_i(x)u_i = f(x), \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \tag{2}$$

where $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $q \in C^1[E(\Gamma)]$, and $r, f \in C[\Gamma]$, p is positive, and q, r are nonnegative;

at each vertex $c \in J(\Gamma)$, we impose the following conditions:

$$u \in C(\Gamma), \quad \text{geometric conditions, typical for connecting beams;} \tag{3}$$

and the transmission conditions

$$\sum_{i \in I(c)} \left[(p_i u_i'')'(c) - (q_i u_i')(c)\right] + (r_i u_i)(c) = f(x), \quad a \in J(\Gamma); \tag{4}$$

at each boundary vertex $a \in \partial\Gamma$, we impose the condition

$$\vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = f(a), \tag{5}$$

[1]This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 075-02-2023-939.

where $\beta, \vartheta : \partial\Gamma \to \mathbb{R}_+$, and $\beta(a) + \vartheta(a) > 0$ for each $a \in \partial\Gamma$.

For each vertex $a \in \partial\Gamma$, we define the function w_a that is a solution of the homogeneous equation $Lu = 0$ on Γ satisfying the following boundary condition

$$w(a) = 1, \quad w\big|_{\partial\Gamma\setminus a} = 0. \tag{6}$$

Definition. The differential operator L is said to be *disconjugate* on a graph Γ if for each vertex $a \in \partial\Gamma$ the corresponding solution w_a is uniquely determined and positive on Γ.

Theorem 1. *If the differential operator L is disconjugate on Γ, then the Green function of problem* (1), (6) *is strictly positive in $\Gamma \times \Gamma$.*

Denote by L_0 the differential operator generated by (1)–(5) with the coefficient function $\beta \equiv 0$ on $\partial\Gamma$ (see (5)).

Theorem 2 (maximum principle)**.** *Assume that the differential operator L_0 is disconjugate on Γ. Then any nontrivial solution of the boundary problem*

$$Lu(x) \geqslant 0, \quad x \in \Gamma, \ u\big|_{\partial\Gamma} \geqslant 0,$$

is positive in Γ for all admissible coefficient functions ϑ, β in (5).

References

1. *Borovskikh A. V., Lazarev K. P.* Fourth-Order Differential Equations on Geometric Graphs // J. Math. Sci.—2004.—Vol. 119, № 6.—P. 719–738.
2. *Kulaev R. Ch.* The Qualitative Theory of Fourth-Order Differential Equations on a Graph // Mediterr. J. Math.—2022.—Vol. 19, № 73.–P. 1–15.
3. *Xu G. Q., Mastorakis N. E.* Differential Equations on Metric Graph.—Wseas Press, 2010—242 p.

SOME ALGEBRAIC PROBLEMS VIA BOOLEAN VALUED ANALYSIS[1]

A. G. Kusraev (Russia, Vladikavkaz; NCCMR VSC RAS)

The purpose of this note is to consider two algebraic problems that arise in functional analysis. The research method is Boolean valued analysis [1].

Abramovich and Kitover in [2, Problem B] raised the question as to whether the vector lattices X and Y are lattice isomorphic whenever X and Y are d-isomorphic, that is, there exists a linear disjointness preserving operator $T : X \to Y$ such that T^{-1} is also disjointness preserving? A negative answer was given in the same work, see [2, Theorem 13.4]. The problem has a negative solution even in the class of band preserving operators (d-isomorphisms), see [1, Theorem 4.6.7]: A vector sublattice $W_0 \subset W$ can be chosen to be d-isomorphic to the ambient vector lattice W. Thus, a natural question arises: How many distinct vector sublattices can a vector lattice have, each of which is d-isomorphic to the original vector lattice?

Chilin and Karimov [3] obtained a classification result for laterally complete modules over universally complete f-algebras. They introduced the concept of the *passport* and proved that two such modules are isomorphic if and only if their passport coincide. Another natural question is whether this result is valid for a wider class of modules over semiprime rationally complete commutative rings.

We follow [1] as regards the prerequisites of Boolean algebras and [4] as regards rings and modules. A detailed presentation of the results can be found in [5].

Definition 1. An *annihilator ideal* of K is a subset of the form $S^\perp := \{k \in K : (\forall\, s \in S)\ ks = 0\}$ with a nonempty subset $S \subset K$. A subset S of K is called *dense* provided that $S^\perp = \{0\}$; i. e., the equality $k \cdot S := \{k \cdot s :\ s \in S\} = \{0\}$ implies $k = 0$ for all $k \in K$. A ring K is said to be *rationally complete* whenever, to each dense ideal $J \subset K$ and each group homomorphism $h : J \to K$ such that $h(kx) = kh(x)$ for all $k \in K$ and $x \in J$, there is an element r in K with $h(x) = rx$ for all $x \in J$.

Definition 2. A K-module X is *separated* provided that for every dense ideal $J \subset K$ the identity $xJ = \{0\}$ implies $x = 0$. Recall that a K-module X is *injective* whenever, given a K-module Y, a K-submodule $Y_0 \subset Y$, and a K-homomorphism $h_0 : Y_0 \to X$, there exists a K-homomorphism $h : Y \to X$ extending h_0.

Definition 3. A family $\mathscr{E}$ in a K-module X is called *K-linearly independent* or simply *linearly independent* whenever, for all $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, and $e_1, \dots, e_n \in \mathscr{E}$, the equality $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0$ implies $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. An inclusion maximal K-linearly independent subset of X is called a *Hamel K-basis* for X.

Every unital separated injective K-module X has a Hamel K-basis. A K-linearly independent set $\mathscr{E}$ in X is a Hamel K-basis if and only if for every $x \in X$ there

[1]The research was executed with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 075-02-2023-914.

exist a partition of unity $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{P}(K)$ and a family $(\lambda_{k,e})_{k\in\mathbb{N},e\in\mathscr{E}}$ in K such that $\pi_k x=\sum_{e\in\mathscr{E}}\lambda_{k,e}\pi_k e$ $(k\in\mathbb{N})$ and for every $k\in\mathbb{N}$ the set $\{e\in\mathscr{E}:\lambda_{k,e}\neq 0\}$ is finite.

Definition 4. Let γ be a cardinal. A K-module X is said to be *Hamel γ-homogeneous* whenever there exists a Hamel K-basis of cardinality γ in X. For $\pi\in\mathbb{P}(X)$ denote by $\varkappa(\pi)$ the least cardinal γ for which πX is Hamel γ-homogeneous. Say that X is *strictly Hamel γ-homogeneous* whenever X is Hamel γ-homogeneous and $\varkappa(\pi)=\gamma$ for all nonzero $\pi\in\mathbb{P}(X)$.

Let X be a universally complete vector lattice with an order unit e. Then there exists a unique multiplication on X that makes X an f-algebra having e as ring unit. The subspace $K\subset X$ consisting of elements $x\in X$ of the form $x=\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi e$, where $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ is an arbitrary partition of unity in the Boolean algebra of band projections $\mathbb{P}(X)$. Then K is a semiprime rationally complete commutative ring and X is a separated injective module over K.

Теорема 1. *Assume that a real universally complete vector lattice X is strictly Hamel $\varkappa$-homogeneous for some infinite cardinal $\varkappa$. Then there exists a family $(X_\alpha)_{\alpha\leqslant\varkappa}$ of component-wise closed and laterally complete vector sublattices $X_\alpha\subset X$ satisfying the conditions:*

(1) $X=\big[\bigoplus_{\alpha\leqslant\varkappa}X_\alpha\big]_\sigma$ *and* $X=X_\alpha^{\perp\perp}$ *for all* $\alpha\leqslant\varkappa$.

(2) *The canonical projection* $\pi_\alpha:X\to X_\alpha$ *are all band preserving.*

(3) X_α *is d-isomorphic to* X *for all* $\alpha\leqslant\varkappa$.

(4) X_α *is not Dedekind complete and hence not lattice isomorphic to* X *for all* $\alpha\leqslant\varkappa$.

Theorem 2. *Let K be a semiprime rationally complete commutative ring and let X be a separated injective module over K. There exists a partition of unity $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in $\mathbb{P}(K)$ with Γ a set of cardinals such that $e_\gamma X$ is strictly Hamel γ-homogeneous for all $\gamma\in\Gamma$. Moreover, X is isomorphic to $\prod_{\gamma\in\Gamma}e_\gamma X$ and the partition of unity $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ is unique up to permutation.*

Definition 5. The partition of unity $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in $\mathbb{P}(K)$ in Theorem 2 is called the *passport* of the K-module X and is denoted by $\Pi(X)$.

Theorem 3. *Faithful separated injective K-modules X and Y are isomorphic if and only if their passports coincide, that is,* $\Pi(X)=\Pi(Y)$.

The proofs are based on the following fact: If K and X are the same as in Theorem 2, and $\mathscr{K}$ and $\mathscr{X}$ are the corresponding Boolean valued representations, then $\mathscr{X}$ is a vector space over the field $\mathscr{K}$. Therefore, by Boolean valued transfer principle, we can use within an appropriate Boolean valued model that $\mathscr{X}$ has a Hamel basis and all Hamel bases of $\mathscr{X}$ have the same cardinality.

References

1. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: South Math. Inst. VNC RAS, 2014.—400 p.
2. *Abramovich Y. A., Kitover A. K.* Inverses of Disjointness Preserving Operators.—Providence, R. I., 2000.—164 p.—(Mem. Amer. Math. Soc., 143 (679)).
3. *Chilin V. I., Karimov J. A.* Laterally complete $C_\infty(Q)$-modules // Vladikavkaz Math. J.—2014.—Vol. 16, № 2.—P. 69–78.
4. *Lambek J.* Lectures on Rings and Modules.—Toronto: Blaisdel, 1966.
5. *Kusraev A. G.* Some algebraic aspects of Boolean valued analysis // Operator Theory and Harmonic Analysis.—Springer, 2021.—P. 333–344.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

АЛГЕБРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И КОМБИНАТОРИКА

Д. В. Миллионщиков (Россия, Москва, МГУ; РГУНиГ)

Формализм универсальных обертывающих алгебр Ли оказывается эффективным и полезным в ряде задач молекулярной лазерной спектроскопии высокого разрешения, связанных с канонической теории возмущений Ван Флека. Напомним известные коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \quad [K_+, K_-] = -2K_0.$$

Тройные блоки вида $K_0^a K_+^b K_-^c$ будут составлять бесконечный базис в универсальной обертывающей алгебре Ли $U(\mathfrak{sl}(2))$

Теорема 1 [1]. *Имеет место следующая комбинаторная формула для произведения т. н. лестничных операторов*

$$K_0^a K_+^b K_-^c \cdot K_0^d K_+^e K_-^f = \sum_{k=0}^{d} \sum_{m=0}^{\min(c,e)} \sum_{r=0}^{m} \sum_{q=0}^{r} \alpha(k,m,r,q) K_0^{a+d-k+q} K_+^{b+e-m} K_-^{c-m+f},$$

$$\alpha(k,m,r,q) = \binom{d}{k} (b-c)^k \binom{e}{m} \frac{c!}{(c-m)!} (-1)^{m-r} s(m,r) 2^q \binom{r}{q} (c-e-2b)^{r-q},$$

где символы $s(m,r)$ обозначают числа Стирлинга первого рода.

Элементы D-матрицы Вигнера заданы не в стандартном базисе $\mathfrak{sl}(2)$

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm;$$
$$[J_+, D^1_{0,1}] = 0, \quad [J_+, D^1_{0,0}] = -\sqrt{2} \cdot D^1_{0,1}, \quad [J_+, D^1_{0,-1}] = -\sqrt{2} \cdot D^1_{0,0},$$
$$[J_z, D^1_{0,1}] = D^1_{0,1}, \quad [J_z, D^1_{0,0}] = 0, \quad [J_z, D^1_{0,-1}] = -D^1_{0,-1},$$
$$[J_-, D^1_{0,1}] = -\sqrt{2} \cdot D^1_{0,0}, \quad [J_-, D^1_{0,0}] = -\sqrt{2} \cdot D^1_{0,-1}, \quad [J_-, D^1_{0,-1}] = 0.$$

Теорема 2 [2]. *Верна следующая комбинаторная формула при $\varepsilon = -1, 0, 1$.*

$$J_z^a J_+^b J_-^c D^1_{0,\varepsilon} = \sum_{\theta=-1}^{1} (-\sqrt{2})^{\varepsilon+\theta} D^1_{0,\theta} (J_z+\theta)^a \sum_{k=-1}^{\min\{\varepsilon,\theta\}} 2^{-k} \tbinom{c}{\varepsilon-k} \tbinom{b}{\theta-k} J_+^{b-\theta+k} J_-^{c-\varepsilon+k}.$$

Литература

1. *Xuanhao C., Krasnoshchekov S., Pupyshev V., Millionshchikov D.* Normal ordering of the $su(1,1)$ ladder operators for the quasi-number states of the Morse oscillator // Physics Letters, Section A.—2020.—Vol. 384.—P. 1–8.
2. *Xuanhao C., Efremov I., Millionshchikov D., Krasnoshchekov S.* Normal Ordering of the Angular Momentum Cylindrical Ladder Operators and their Products with Wigner D-functions // J. Chem. Phys.—2023.—Vol. 158, № 10.—101101. DOI: 10.1063/5.0142809.

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

К. Ю. Осипенко (Россия, Москва; МГУ)

Под неравенствами для производных колмогоровского типа на прямой традиционно понимают неравенства вида

$$\big\|x^{(k)}(\cdot)\big\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant K\big\|x(\cdot)\big\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R})}\big\|x^{(n)}(\cdot)\big\|^{\beta}_{L_r(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

где $0 \leqslant k < n$ — целые, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $\alpha, \beta \geqslant 0$. При этом считается, что функции $x(\cdot) \in L_p(\mathbb{R})$ имеют $(n-1)$-ую производную, локально абсолютно непрерывную на $\mathbb{R}$, и $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(\mathbb{R})$. Неравенства (1) с наименьшей константой K называются точными. В 1939 году Колмогоровым были найдены точные константы в (1) при $p = q = r = \infty$ в общем случае, т. е. при любых $n \geqslant 2$ и $0 < k < n$. Этот результат является наиболее ярким в данной проблематике, поэтому точные неравенства вида (1) часто называют неравенствами типа Колмогорова.

Точным неравенствам для производных посвящено довольно много работ, но результаты, аналогичные по своей завершенности колмогоровскому, получены на прямой лишь еще в трех случаях ($p = q = r = 2$ — Харди — Литтлвуд — Полиа (1934), $p = q = r = 1$ — Стейн (1957), $p = r = 2$, $q = \infty$ — Тайков (1968)).

В работе [1], занимаясь задачей об оптимальном восстановлении производных по неточно заданному преобразованию Фурье, авторы доказали, что при всех $2 < p \leqslant \infty$ и всех $0 \leqslant k < n$ имеет место точное неравенство

$$\big\|x^{(k)}(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant K\big\|Fx(\cdot)\big\|^{\frac{n-k}{n+\frac12-\frac1p}}_{L_p(\mathbb{R})}\big\|x^{(n)}(\cdot)\big\|^{\frac{k+\frac12-\frac1p}{n+\frac12-\frac1p}}_{L_2(\mathbb{R})},$$

где

$$K = \sqrt{\frac{n+\frac12-\frac1p}{k+\frac12-\frac1p}}\left(\frac{\sqrt{k+\frac12-\frac1p}\,B^{\frac12-\frac1p}}{\sqrt{2\pi}(n-k)^{1-\frac1p}}\right)^{\frac{n-k}{n+\frac12-\frac1p}},$$

$$B = B\left(\frac{k+\frac12-\frac1p}{(n-k)\big(1-\frac2p\big)}, 2\frac{1-\frac1p}{1-\frac2p}\right),$$

$B(\cdot,\cdot)$ — B-функция Эйлера, а $Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $x(\cdot)$.

В связи с получением этого точного неравенства возник вопрос о нахождении точных неравенств вида

$$\big\|x^{(k)}(\cdot)\big\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant K\big\|Fx(\cdot)\big\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R})}\big\|x^{(n)}(\cdot)\big\|^{\beta}_{L_r(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

В докладе приводятся результаты относительно точных неравенств вида (2) и их обобщений на многомерный случай. В частности приведен следующий результат из работы [2].

Определим оператор $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}$, $n \geqslant 0$ (n — не обязательно целое), следующим образом:

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}} x(\cdot) = F^{-1}\big(|\xi|^n F x(\xi)\big)(\cdot), \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2}.$$

Положим

$$\gamma = \frac{n - k - \frac{d}{2}}{n + d\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)}, \quad \widetilde{q} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \gamma\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\big)}, \quad I_0 = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\big(\frac{d}{2}\big)}.$$

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \geqslant 0$, $k + p > 1$, а $n > k + \frac{d}{2}$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\big\|(-\Delta)^{\frac{k}{2}} x(\cdot)\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant K_p(k, n, I_0) \big\|Fx(\cdot)\big\|^{\gamma}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \big\|(-\Delta)^{\frac{n}{2}} x(\cdot)\big\|^{1-\gamma}_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$K_p(k, n, I) = \frac{\gamma^{-\frac{\gamma}{p}} (1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{2}}}{(2\pi)^{d\frac{2n-k-\frac{d}{p}}{2n+d(1-\frac{2}{p})}}} \left(\frac{B\left(\widetilde{q}\frac{\gamma}{2} + 1, \widetilde{q}\frac{1-\gamma}{2}\right) I}{2\big(n - k - \frac{d}{2}\big)} \right)^{\frac{1}{\widetilde{q}}}.$$

Литература

1. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
2. *Osipenko K. Yu.* Inequalities for derivatives with the Fourier transform // Appl. Comp. Harm. Anal.—2021.—Vol. 53.—P. 132–150.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ЛАТЕРАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ И ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ[1]

М. А. Плиев (Россия, Владикавказ;
СКЦМИ ВНЦ РАН)

Введение и предварительные сведения. Латеральный порядок в векторных решетках попал в поле зрения исследователей относительно недавно [1]. На языке латерального порядка и связанных с ним латеральных конструкций можно описывать многие свойств ортогонально аддитивных операторов.

Будем говорить, что элементы x, y векторной решетки E *дизъюнктны* и писать $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. Предположим, что $x \in E$. Элемент $z \in E$ называется *осколком* x, если $z \perp (x - z)$. Множество всех осколков элемента $x \in E$ обозначается $\mathfrak{F}_x$.

Подмножество D векторной решетки E называется *латеральным идеалом*, если выполняются следующие условия:

• если $x \in D$, то $y \in D$ для любого $y \in \mathscr{F}_x$;

• если $x, y \in D$, $x \perp y$, то $x + y \in D$.

Для положительного ортогонально аддитивного оператора $T\colon E \to F$ множество $\ker T := \{x \in E : Tx = 0\}$ является латеральным идеалом. Возникает естественный вопрос — верно ли, что для произвольного латерального идеала D в векторной решетке E найдутся: векторная решетка F и положительный ортогонально аддитивный оператор $T\colon E \to F$ такие, что $\ker T = D$?

Результат. Следующая теорема указывает, что каждый латеральный идеал D в векторной решетке E является ядром положительного ортогонально аддитивного оператора $T\colon E \to F$ для некоторой векторной решетки F.

Теорема 1. *Пусть E — векторная решетка и D — латеральный идеал в E. Тогда найдется порядково полная векторная решетка F и положительный ортогонально аддитивный оператор $T\colon E \to F$ такой, что* $\ker T = D$.

Литература

1. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M.* The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators // Positivity.—2021.—№ 2.—P. 291–327.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашения № 075-02-2023-914.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Х. Г. Умаров (Россия, Грозный, АН ЧР; ЧГПУ)

Для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка

$$u_{tt} - \alpha u_{txx} - \beta u_{tx} + \gamma u_t = \sigma'(u_x)\, u_{xx}, \tag{1}$$

где штрих в уравнении обозначает дифференцирование по u_x, коэффициенты α, β, γ — известные положительные числовые параметры, нелинейность $\sigma(\cdot)$ — заданная функция, исследована разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси.

Уравнение (1) обобщает уравнение колебаний кручения цилиндрического вала при учете внутреннего и внешнего затухания и модерирует распространение продольных волн напряжения вдоль одномерного вязкоупругого стержня, материал которого подчиняется закону деформирования среды Фойхта — Кельвина.

Получены условия существования глобального решения ($t \geqslant 0$) и разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке.

Задача Коши исследуется в банаховом пространстве $C\left[R^1\right]$ непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют оба предела при $x \to \pm\infty$, полагая, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и искомое классическое решение $u = u(t,x)$, $(t,x) \in \overline{R}^1_+ \times R^1$, $\overline{R}^1_+ = [0, +\infty[$, вместе с частными производными входящими в уравнение, для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат $C\left[R^1\right]$.

Нелинейность уравнения $\sigma(r)$, $r \in R^1$, — дважды непрерывно дифференцируемая функция, модуль которой $|\sigma(r)|$ при $r \geqslant 0$ является непрерывной неубывающей функцией и справедливы оценки:

$$\sup_{x \in R^1} \left|\sigma^{(i)}(g(x))\right| \leqslant \left|\sigma^{(i)}\left(\sup_{x \in R^1} |g(x)|\right)\right|, \quad i = \overline{0,2}, \ \ \forall\, g(x) \in C\left[R^1\right]. \tag{2}$$

Наряду с уравнением (1) рассматривается и уравнение

$$v_{tt} - \alpha v_{txx} - \beta v_{tx} + \gamma v_t = \partial_x^2 \sigma(v), \tag{3}$$

получающееся из (1) после дифференцирования его обеих частей по x и последующей замены $v = u_x$.

Теорема 1. *Пусть параметры α, β удовлетворяют условию $\alpha \geqslant \beta^2$, начальные функции удовлетворяют условиям $\varphi(x) \in C^{(3)}\left[R^1\right]$, $\psi(x) \in C^{(1)}\left[R^1\right]$, а нелинейность $\sigma(\cdot)$ подчиняется требованиям* (2)*, тогда на отрезке $t \in [0, t_0]$ существует единственное классическое решение задачи Коши для уравнения* (3)*:*

$v = v(t,x)$, *для которого справедлива оценка* $\|v(t,x)\|_C \leqslant H(t)$, $t \in [0,t_0]$, *в которой как мажоранта нормы решения, так и длина отрезка* t_0 *определяется параметрами* α, β, γ *уравнения* (1), *начальными функциями* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и нелинейностью* $\sigma(\cdot)$.

Лемма. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть классические решения* $u(t,x)$ *и* $v(t,x)$ *уравнений* (1) *и* (3) *и их частные производные* $u_t(t,x)$ *и* $v_t(t,x)$ *для всех значений* $t \in [0,t_0]$ *по переменной* x *принадлежат пересечению пространств* $C\left[R^1\right]$ *и* $W_2^1\left(R^1\right)$. *Тогда из существования локального классического решения* $v = v(t,x)$, $t \in [0,t_0]$, *уравнения* (3), *следует существование соответствующего классического решения* $u = u(t,x)$ *уравнения* (1) *на том же отрезке* $[0,t_0]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы* 1 *и пусть параметры уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* α, $\gamma \geqslant 2$ *и* $\beta \leqslant 1$, *а начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют условию* $\gamma\|\varphi\|^2_{W_2^1}+\alpha\|\varphi'\|^2_{W_2^1}+2\|\psi\|^2_2 \geqslant 2(\varphi+\varphi'',\psi)$, *тогда существует единственное глобальное классическое решение* $u = u(t,x) \in C\left[R^1\right] \cap W_2^1\left(R^1\right)$, $t \geqslant 0$, $x \in R^1$, *задачи Коши для уравнения* (1), *для которого в пространстве* $C\left[R^1\right]$ *справедлива оценка* $\|u(t,x)\|_C = \sup_{x\in R^1}|u(t,x)| \leqslant c_1 e^{c_2 t}$, $c_{1,2} = \text{const} \geqslant 0$, *причем частные производные решения* $u_x(t,x)$, $u_t(t,x)$, $u_{tx}(x,t)$ *для* $t \geqslant 0$, $x \in R^1$ *также принадлежат пересечению* $C\left[R^1\right] \cap W_2^1\left(R^1\right)$.

Достаточные условия возникновения разрыва второго рода для функционала

$$f_1(t) = (u,u) + (u_x,u_x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(u^2+u_x^2\right)dx, \quad t \in [0,t_0], \tag{4}$$

т. е. условия разрушения решения уравнения (1) на некотором конечном временном отрезке получены в теореме 3.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы и теоремы* 1 *и пусть параметры* α, β, γ, *нелинейность* $\sigma(\cdot)$ *и начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют требованиям:*

$$\alpha > 1 + 2\max_{\tau\in[0,t_0]}\left|\sigma'(H(\tau))\right|, \quad \gamma > 1,\ \beta < 1,$$

$$f_1{}''(0) + h_{25}f_1(0) + h_{34} \geqslant 0,$$

$$f_1'(0) > \left(4h_{37}/(h_{33}-4) + 2\sqrt{h_{40}/(h_{33}-4)}\right)f_1(0) > 0,$$

в которых постоянные величины $h_i = h_i(\alpha,\beta,\gamma;\varphi,\psi;\sigma)$ *определяются в ходе доказательства теоремы, тогда решение разрушается за конечное время* T_0 *и для времени существования решения справедлива оценка сверху*

$$t_0 < T_0 = (f_1(0))^{1-h_{33}/4}/h_{41},$$

притом для функционала (4) *имеет место оценка снизу*

$$f_1(t) \geqslant e^{4h_{37}t/(h_{33}-4)}\Big/\left[(f_1(0))^{1-h_{33}/4} - h_{41}t\right]^{4/(h_{33}-4)}.$$

Секция I

Функциональные пространства и теория операторов

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Е. В. Абрамова (Россия, Москва; НИУ «МЭИ»),
Е. О. Сивкова (Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; Москва, НИУ «МЭИ»)

Пусть r — целое неотрицательное число. Обозначим через $\mathscr{W}_2^r(\mathbb{R})$ ($\mathscr{W}_2^0(\mathbb{R}) = L_2(\mathbb{R})$) соболевское пространство функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, а через $W_2^r(\mathbb{R})$ — класс функций

$$W_2^r(\mathbb{R}) = \left\{ f(\cdot) \in \mathscr{W}_2^r(\mathbb{R}) : \left\| f^{(r)}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1 \right\}.$$

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \end{cases}$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$ и $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$, заключающуюся в нахождении такой гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, что $u(\cdot, y) \in L_2(\mathbb{R})$ для любого $y > 0$, $\sup_{y>0} \|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$ и $u(\cdot,y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. В этом случае решение задачи Дирихле единственно и выражается интегралом Пуассона

$$u(x, y; f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{(y-t)^2 + x^2} \, f(t) \, dt.$$

Ставится следующая задача. Пусть на прямой $y = A > 0$ имеется возможность измерить решение задачи Дирихле в метрике $L_2(\mathbb{R})$ с точностью до $\delta > 0$, т. е. известна функция $g(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что

$$\left\| u(\cdot, A; f) - g(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta$$

при некотором $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$. По этой информации мы хотим восстановить (по возможности наилучшим образом) решение задачи Дирихле на прямой $y = a$, где $0 < a < A$.

Под этим мы понимаем нахождение величины

$$E(W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}),\, g(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \\ \|u(\cdot, A; f) - g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta}} \left\| u(\cdot, a; f) - m(g(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $m \colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, и тех отображений $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается.

Каждое отображение m можно воспринимать как метод восстановления решения задачи Дирихле на прямой $y = a$, а выражение под знаком нижней грани — как погрешность такого метода. Методы $\widehat{m}$, на которых достигается нижняя грань, называются *оптимальными методами восстановления*, величина $E(W_2^r(\mathbb{R}), \delta)$ — *погрешностью оптимального восстановления*.

Введем некоторые обозначения. Рассмотрим функцию $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную формулой $\varphi(\xi) = \xi^{2r} e^{2A|\xi|}$. Ясно, что для любого $\delta > 0$ существует единственное $\xi_0 = \xi_0(\delta) > 0$ такое, что $\varphi(\xi_0) = \delta^{-2}$.

Положим

$$\widehat{\lambda}_1(\delta) = \frac{r + a\xi_0}{r + A\xi_0}\, e^{2(A-a)\xi_0}, \quad \widehat{\lambda}_2(\delta) = \frac{(A-a)\xi_0^{1-2r}}{r + A\xi_0}\, e^{-2a\xi_0}$$

и

$$D = \Big\{\xi \in \mathbb{R} : \widehat{\lambda}_2(\delta)\xi^{2r} e^{2a|\xi|} \leqslant 1\Big\}.$$

Если $F\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ — преобразование Фурье, то $F[f](\cdot)$ обозначает преобразование Фурье функции $f(\cdot)$.

Теорема. *Пусть $\delta > 0$. Справедливы следующие утверждения.*

$$E(W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \xi_0^{-r} e^{-a\xi_0}.$$

Множество измеримых функций $\omega(\cdot)$ на $\mathbb{R}$, равных нулю вне D и таких, что

$$\frac{|\omega(\xi)|^2 e^{2A|\xi|}}{\widehat{\lambda}_1(\delta)} + \frac{|1 - \omega(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\delta)\, \xi^{2r}} \leqslant e^{2a|\xi|}$$

для п. в. $\xi \in D$, непусто, и для каждой такой функции $\omega(\cdot)$ метод $\widehat{m}_\omega$, определенный формулой

$$\widehat{m}_\omega(g(\cdot))(\cdot) = (K * g)(\cdot),$$

где $F[K](\xi) = \omega(\xi) e^{(A-a)|\xi|}$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}$, является оптимальным.

Заметим, что оптимальные методы определены корректно. Действительно, так как функция $\omega(\cdot)$ равна нулю вне отрезка D, то преобразование Фурье функции $K(\cdot)$ также равно нулю вне D и, очевидно, ограничено на D. Следовательно, $F[K](\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ и поэтому $K(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, а тогда $\widehat{m}_\omega(g(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ как свертка двух функций из $L_2(\mathbb{R})$.

Отметим еще, что оптимальные методы линейны и представляют собой «сглаживание» исходного наблюдения.

Литература

1. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 5.— С. 37–54.
2. *Magaril-Il'yaev G. G., Sivkova E. O.* Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data // Eurasian Math. J.—2019.—Т. 10, № 4.—С. 75–84.
3. *Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2020.—Т. 60, № 10.—С. 1711–1720.

THE SURJECTIVITY AND INJECTIVITY OF CONVOLUTION OPERATORS. SOME INTERDISCIPLINARY COROLLARIES[1]

T. M. Andreeva (Russia, Rostov-on-Don; SFedU),
Yu. E. Drobotov (Russia, Rostov-on-Don, SFedU;
Vladikavkaz, NCCMR VSC RAS)

Let G denote a convex bounded region in the complex plane $\mathbb{C}$, $H(G)$ be the space of all functions which are holomorphic in G, and $V = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ represent the sequence of functions, continuous in G and increasing throughout n. V defines the space $VH(G) := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{v_n}(G)$, where

$$H_{v_n}(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_{v_n} := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{e^{v_n(z)}} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

The presented paper considers the solutions of the convolution equation

$$\mu * f = g \tag{1}$$

where $\mu : VH(G + K) \to VH(G)$ is an analytical functional with the support in K, while K is a convex compact in G.

The general results of the study are based on the rigorous proof of the conditions for the convolution operator to be surjective between the considered spaces [1, 2]. They are applied to the following Cauchy problem:

$$\mu * f(z) = h(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\frac{\partial^k f(z)}{\partial z}\Big|_{z=0} = \varphi_k, \quad k < m.$$

with respect to an additional condition that provides its injectivity, and the properties of the solution are discussed. Some interdisciplinary issues are considered which come down to the qualitative properties of the mappings described in the talk.

Литература

1. *Abanin A. V, Andreeva T. M.* On the surjectivity of the convolution operator in spaces of holomorphic functions of a prescribed growth // Vladikavkaz Math. J.—2018.—Vol. 20, № 2.—P. 3–15. DOI: 10.23671/VNC.2018.2.14713.
2. *Abanin A. V., Andreeva T. M.* Analytic Description of the Spaces Dual to Spaces of Holomorphic Functions of Given Growth on Caratheodory Domains // Math. Notes.—2018.—Vol. 104, № 3.—P. 323–335. DOI: 10.1134/S0001434618090018.

[1]The research of Yu. E. Drobotov was supported by TUBITAK and Russian Foundation for Basic Research under the grant № 20-51-46003, and by the Ministry of science and higher education of the Russian Federation, agreement № 075-02-2023-914.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ОБОБЩЕННЫЕ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА НИЛЬПОТЕНТНЫХ И РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ[1]

В. В. Балащенко (Беларусь, Минск; БГУ)

Почти эрмитовы структуры J ($J^2 = -id$, $g(JX, JY) = g(X, Y)$) на римановых многообразиях (M, g), интенсивно изучаемые и используемые в приложениях с 1970-х, почти сразу были обеспечены широким спектром инвариантных примеров на однородных многообразиях (А. Грей, В. Ф. Кириченко и др.). В 1980-х В. Ф. Кириченко создал обширную концепцию обобщенной эрмитовой геометрии [1], в которой фундаментальным объектом стали метрические f-структуры К. Яно ($f^3 + f = 0$, $g(fX, Y) + g(X, fY) = 0$), естественно обобщающие почти эрмитовы структуры.

Впоследствии В. Ф. Кириченко, А. С. Грицансом, В. В. Балащенко были введены специальные классы метрических f-структур, в т. ч. с использованием композиционного тензора f-структуры, имеющего следующий вид (см. [1, 2]):

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} f \left(\nabla_{fX}(f) fY - \nabla_{f^2X}(f) f^2 Y \right),$$

где ∇ — связность Леви-Чивита метрики g. Так, эрмитовы f-структуры (Hf-структуры) задаются требованием $T(X, Y) = 0$. Структуры класса $G_1 f$ ($G_1 f$-структуры) определяются условием $T(X, X) = 0$. Далее, для киллинговых f-структур ($Killf$-структур) определяющее условие $\nabla_X(f)X = 0$. Приближенно келеровы f-структуры (NKf-структуры) задаются условием $\nabla_{fX}(f)fX = 0$, а обобщенные приближенно келеровы f-структуры ($GNKf$-структуры) — условием $f\nabla_{fX}(f)fX = 0$. Последние 3 типа f-структур обобщают в разной степени важнейший класс приближенно келеровых почти эрмитовых структур.

В отличие от почти эрмитовых структур, инвариантные примеры для классов метрических f-структур появились не сразу, а лишь в начале 2000-х. Оказалось, что канонические f-структуры [3] на естественно редуктивных однородных k-симметрических пространствах позволяют предъявить обширный ресурс инвариантных NKf-структур, Hf-структур, а также структур иных классов в обобщенной эрмитовой геометрии (см., например, [2]). Более того, техника канонических структур позволила построить левоинвариантные f-структуры многих указанных типов на нильпотентных и разрешимых группах Ли, метрика которых не является естественно редуктивной.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 годы «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание «Структуры, связанные с алгебраическими, линейными и конечно порожденными группами, конечномерными алгебрами, топологическими пространствами и однородными многообразиями», НИР «Структуры на линейных алгебраических группах, обобщенных главных G-расслоениях, однородных многообразиях и группах Ли», № гос. регистрации 20211882.

Для разрешимых групп Ли первой из рассмотренных стала группа гиперболических движений плоскости (известный пример О.Ковальского 3-мерного риманова 4-симметрического пространства). Доказано, что каноническая f-структура на этой группе является эрмитовой f-структурой, однако не является ни интегрируемой, ни приближенно келеровой (см. [2]). Обобщением этого примра стала разрешимая группа Ли $(G_n \equiv \mathbb{R}^{2n+1}, g)$, которая является однородным римановым $(2n+2)$-симметрическим пространством (конструкция М. Божека, 1980). Используя технику канонических структур, предъявлена на этой группе обобщенная эрмитова структура $(g, f_1, \ldots, f_n, T)$ ранга n (совм. с Д. В. Вылегжаниным, см. в [2]), реализующая идею В. Ф. Кириченко в самом общем виде.

Важную роль играют левоинвариантные f-структуры на нильпотентных группах Ли, среди которых особо можно выделить разного рода обобщения классической 3-мерной группы Гейзенберга. Одним из самых интересных примеров в этом направлении стали канонические f-структуры на 6-мерной обобщенной (в смысле А.Каплана) группе Гейзенберга, реализованной как однородное риманово 4- и 6-симметрическое пространство [2, 4]. Отметим, что эта группа Ли явилась первым мотивирующим примером геодезически орбитального пространства, метрика которого не является естественно редуктивной, что стало основой крупного научного направления (см. [5]).

Для левоинвариантных f-структур на нильпотентных группах Ли индекса 2 получен ряд общих результатов, отражающих их связь с классами обобщенной эрмитовой геометрии (совм. с П. А. Дубовиком). Наряду с этим, филиформные группы Ли, которые имеют максимальный индекс нильпотентности, также обладают f-структурами отмеченных выше классов NKf, Hf и др. В частности, рассмотрены в этом смысле все 6-мерные филиформные группы Ли [6].

Недавние исследования связаны с построением левоинвариантных метрических f-структур на всех 3-мерных разрешимых группах Ли. На этих группах предъявлены левоинвариантные метрические f-структуры практически всех упомянутых выше классов в обобщенной эрмитовой геометрии (совм. с В. Н. Куницей).

Литература

1. *Кириченко В. Ф.* Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1983.—Т. 47, № 6.—С. 1208–1223.
2. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
3. *Балащенко В. В., Степанов Н. А.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф–пространствах // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 11.—С. 3–34.
4. *Balashchenko V. V.* Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group // Kragujevac Journal of Mathematics.—2011.—Vol. 35, № 2.—P. 209–222.
5. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Римановы многообразия и однородные геодезические.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—414 с.
6. *Дубовик П. А.* Эрмитовы f-структуры на 6-мерных филиформных группах Ли // Изв. вузов. Математика.—2016.—№ 7.—С. 34–43.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О ФУНКТОРИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ Ω-НАСЫЩЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. Бедрицкий (Беларусь, Минск; БГУ)

Исследование функториальных свойств Ω-насыщения было начато докладчиком в статье [1] (совместно с В. Л. Тимоховичем). Доказано, что конструкция Ω-насыщения определяет ковариантный функтор из некоторой категории, содержащей регулярные топологические пространства в качестве объектов, в категорию **TOP** топологических пространств и непрерывных отображений. Доклад посвящен обобщению полученных в [1] результатов для случая топологических T_1-пространств.

Все рассматриваемые далее пространства считаем удовлетворяющими аксиоме отделимости T_1. Множество A назовем дискретом в X, если A счетно, дискретно (как подпространство) и замкнуто в X. Семейство всех дискретов пространства X обозначим через Δ, $[\,\cdot\,]_X$ — оператор замыкания в пространстве X.

Определение 1 [2]. Пространство Y назовем насыщением пространства X, если $X \subset Y$ (т. е. X — подпространство в Y), X всюду плотно в Y, любое бесконечное множество $A \subset X$ имеет предельную точку в Y и любое замкнутое счетно-компактное в X множество замкнуто и в Y.

В работе [3] рассмотрены насыщения пространства X, названные там Ω-насыщениями, которые определенным образом канонически (т. е. тождественно на X) вкладываются в волмэновское расширение ωX. Там же определено Ω-насыщение $s_\Delta X$:

$$s_\Delta X = X \cup \left(\bigcup_{A \in \Delta} [A]_{\omega X} \right),$$

являющееся максимальным по включению среди всех Ω-насыщений пространства X.

Через $\mathrm{Cov}(A, X)$ обозначим семейство всех покрытий множества A открытыми в X множествами.

Пусть $F \underset{cl}{\subset} X$ (т. е. F замкнуто в X).

Определение 2 [1]. Покрытие $\alpha \in \mathrm{Cov}(F, X)$ назовем F-Δ-крупным, если для каждого дискрета $A \in \Delta$ пересечение $F \cap A$ покрывается конечным числом элементов α.

Совокупность всех F-Δ-крупных покрытий множества F обозначим через $B\,\mathrm{Cov}(F, X)$.

Определение 3 [1]. Множество F назовем Δ-компактным, если из любого покрытия $\alpha \in B\,\mathrm{Cov}(F, X)$ выделяется конечное подсемейство, покрывающее F.

Рассматриваемые далее отображения считаем непрерывными.

Определение 4. Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ назовем вполне Δ-согласованным, если $[f(F)]_Y$ Δ-компактно для любого замкнутого в X Δ-компактного множества F.

Замечание. Понятие вполне Δ-согласованного отображения является усилением введенного в [1] понятия Δ-согласованного отображения.

Определение 5. Скажем, что отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию H^*_Δ, если для любых Δ-компактного множества $F \underset{cl}{\subset} X$ и конечного покрытия $v \in \mathrm{Cov}([f(F)]_Y, Y)$ можно выбрать конечное покрытие $u \in \mathrm{Cov}(F, X)$ и каждому $U \in u$ поставить в соответствие $V_U \in v$ таким образом, что $[f(F')]_Y \subset V_U$ для любого Δ-компактного множества $F' \underset{cl}{\subset} X$, лежащего в U.

Замечание. Условие H^*_Δ является усилением условия H_Δ, определенного в [1].

Теорема 1. *Класс T_1-пространств (в качестве объектов) и класс вполне Δ-согласованных отображений, удовлетворяющих условию H^*_Δ (в качестве морфизмов), образуют категорию.*

Обозначим эту категорию через **K**.

Теорема 2. *Пусть отображение $X \xrightarrow{f} Y$ вполне Δ-согласовано и удовлетворяет условию H^*_Δ. Тогда существует и единственно его непрерывное продолжение $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$.*

Важное замечание. В случае регулярности пространства Y условия полной Δ-согласованности и H^*_Δ будут необходимыми для существования непрерывного продолжения на Ω-насыщения.

Далее определим отображение s_Δ из категории **K** в категорию **TOP**, поставив в соответствие каждому объекту X из **K** его Ω-насыщение $s_\Delta X$, а каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ из **K** — его непрерывное продолжение $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$.

Итогом наших рассмотрений является следующая

Теорема 3. *Отображение s_Δ является ковариантным функтором из категории **K** в категорию **TOP**.*

Литература

1. *Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л.* Функториальные свойства Ω-насыщения топологического пространства // Журн. БГУ. Математика. Информатика.—2023.—№ 1.—С. 31–37.
2. *Голдовт И. Ю., Тимохович В. Л.* Насыщения топологических пространств и проблема Морита // Докл. АН БССР.—1977.—Т. 21, № 9.—С. 777–780.
3. *Кукрак Г. О., Тимохович В. Л.* О счетнокомпактифицируемости в смысле Морита // Журн. БГУ. Математика. Информатика.—2021.—№ 1.—С. 46–53.

ON A GENERALIZATION OF THE BLASCHKE–PRIVALOV FORMULA FOR THE LAPLACIAN

N. P. Volchkova (Russia, Donetsk; DonNTU),
Vit. V. Volchkov (Russia, Donetsk; DonSU)

Let $n \geqslant 2$, $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ and $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ be the spaces of distributions and compactly supported distributions on $\mathbb{R}^n$ respectively, $\mathscr{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ be the space of all radial distributions in $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{T}$ be the Fourier–Bessel transform of a distribution $T \in \mathscr{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{Z}_+(\widetilde{T})$ be the set of all zeros of an even entire function $\widetilde{T}$ lying in the half-plane $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ and not belonging to the negative part of the imaginary axis. If $T_1, T_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ and at least one of these distributions has compact support then their convolution $T_1 * T_2$ is a distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ acting according to the rule

$$\langle T_1 * T_2, \varphi\rangle = \langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle\,, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

where $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ is the space of finite infinitely differentiable functions on $\mathbb{R}^n$.

Let r be a fixed positive number, χ_r be the indicator of the ball $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, σ_r be the surface delta function concentrated on the sphere $|x| = r$. We set

$$\mathscr{A}_r = \delta - \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}}\,\sigma_r, \quad \mathscr{T}_r = \delta - \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}\,\chi_r,$$

where δ is the Dirac delta function with support at zero. We note that for $f \in C(\mathbb{R}^n)$,

$$(f * \mathscr{A}_r)(x) = f(x) - \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=r} f(y)\, d\sigma(y),$$

$$(f * \mathscr{T}_r)(x) = f(x) - \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}} r^n} \int\limits_{|y-x|<r} f(y)\, dy.$$

The Laplace operator of a function $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ satisfies the classical Blaschke equality

$$\Delta f(x) = -\lim_{\rho\to 0} \frac{2n}{\rho^2}\,(f * \mathscr{A}_\rho)(x).$$

Similarly, the Privalov formula

$$\Delta f(x) = -\lim_{\rho\to 0} \frac{2n+4}{\rho^2}\,(f * \mathscr{T}_\rho)(x), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

is valid (see [1, Chap. II]).

We study the problem on reconstruction the Laplace operator Δf from known convolutions $f * \mathscr{A}_r$ and $f * \mathscr{T}_r$. We have proven that the Laplace operator of an

arbitrary distribution $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ can be expanded into an unconditionally convergent series

$$\Delta f = \sum_{\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Theta}_{1,r})} \sum_{\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Theta}_{2,r})} \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2-\mu^2)\widetilde{\Theta}_{1,r}'(\lambda)\widetilde{\Theta}_{2,r}'(\mu)} \times \\ \times \Big(a(\Delta)(f * \mathscr{A}_r) * \Theta^{\mu}_{2,r} - b(\Delta)(f * \mathscr{T}_r) * \Theta^{\lambda}_{1,r}\Big)$$

in the space $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, where

$$a(z) = (z+1)(z+4), \quad b(z) = (z-1)(z-4),$$

$\Theta_{1,r}$, $\Theta_{2,r}$ and $\Theta^{\lambda}_{1,r}$, $\Theta^{\mu}_{2,r}$ are explicitly constructed radial distributions supported in the ball $\overline{B}_r$.

For other results related to reconstructing of a function from given convolutions, see [2–4] and the references there.

References

1. *Timan A. F., Trofimov V. N.* Introduction to the Theory of Harmonic Functions.—M.: Nauka, 1968.—208 p.
2. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.—454 p.
3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.—London: Springer, 2009.—672 p.
4. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.—Basel: Birkhäuser, 2013.—592 p.

ON THE PROBLEM OF EXTENSION TO FUNCTIONS WITH ZERO INTEGRAL MOMENTS OVER BALL OF FIXED RADIUS

V. V. Volchkov (Russia, Donetsk; DonSU),
Vit. V. Volchkov (Russia, Donetsk; DonSU)

Let $n \geqslant 2$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $A \subset \overline{B}_R$. We consider the problem of extending a function $f \in C(A)$ to a continuous function on $\overline{B}_R$ with zero integral moments over ball of fixed radius r lying in B_R. The case when A is the union of a finite number of diameters of the ball $\overline{B}_R$ is studied.

We denote by $M_r(B_R)$ the set of functions $f \in L_{loc}(B_R)$ such that

$$\int\limits_{|x|\leqslant r} f(x+y)\,dx = \int\limits_{|x|\leqslant r} x_j f(x+y)\,dx = 0$$

for all $y \in B_{R-r}$ and all $j \in \{1,\dots,n\}$.

Let $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. For a non-empty set $E \subset \mathbb{S}^{n-1}$ we put

$$A_{R,E} = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x = t\sigma,\, t \in [-R,R],\, \sigma \in E\big\}.$$

The set $A_{R,E}$ is the union of the segments that are the diameters of the ball $\overline{B}_R$.

Theorem 1. *Let $R \in [0,2r]$ and assume that the set $E \subset \mathbb{S}^{n-1}$ is finite.*

(i) *If $r < R < 2r$, then any function $f \in C(A_{R,E})$ can be extended to a function of class $M_r(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$.*

(ii) *If $R = 2r$, then in order for a function $f \in C(A_{R,E})$ to be extended to a function of class $M_r(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$, it is necessary and sufficient that $f(0) = 0$.*

For results related to the continuation of functions with zero integrals over balls of fixed radius, see [1–3] and the references there.

References

1. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.—454 p.
2. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.—London: Springer, 2009.—672 p.
3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.—Basel: Birkhäuser, 2013.—592 p.

СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА – СОБОЛЕВА И АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЕГО ЧАСТИЧНЫХ СУММ

Р. М. Гаджимирзаев (Россия, Махачкала; ДФИЦ РАН)

Пусть $\alpha > -1$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta = 1/N$, $N \geqslant 1$,

$$\rho_N(x) = e^{-x}\,\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}\left(1-e^{-\delta}\right)^{\alpha+1},$$

$1 \leqslant p < \infty$, $l^p_{\rho_N}(\Omega)$ — пространство дискретных функций f, заданных на сетке $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ и для которых

$$\|f\|^p_{l^p_{\rho_N}(\Omega)} = \sum_{x\in\Omega_\delta} |f(x)|^p \rho_N(x) < \infty,$$

а $W^r_{l^p_{\rho_N}(\Omega_\delta)}$ — подпространство в $l^p_{\rho_N}(\Omega_\delta)$. Далее, следуя [1], через $\{m^\alpha_{n,N}(x)\}$ обозначим систему модифицированных полиномов Мейкснера, ортонормированных на Ω_δ относительно веса $\rho_N(x)$.

Рассмотрим систему полиномов $\{m^{\alpha,r}_{n,N}(x)\}$, порожденную системой $\{m^\alpha_{n,N}(x)\}$ посредством равенств:

$$m^{\alpha,r}_{n,N}(x) = \frac{(Nx)^{[n]}}{n!}, \quad n = \overline{0, r-1}, \tag{1}$$

$$m^{\alpha,r}_{n,N}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t\in\Omega^x_\delta}\left(Nx-1-Nt\right)^{[r-1]} m^\alpha_{n-r,N}(t), \quad x \geqslant r\delta,\ n \geqslant r. \tag{2}$$

где $x^{[n]} = x(x-1)\dots(x-n+1)$, $\Omega^x_\delta = \{0, \delta, \dots, x-r\delta\}$. Заметим, что $m^{\alpha,r}_{n,N}(x) = 0$ при $n \geqslant r$, $x \in \{0, \delta, \dots, (r-1)\delta\}$.

Из (1) и (2) вытекает следующее свойство:

$$\Delta^\nu_\delta m^{\alpha,r}_{n,N}(x) = \begin{cases} m^{\alpha,r-\nu}_{n-\nu,N}(x), & 0 \leqslant \nu \leqslant r-1, r \leqslant n, \\ m^\alpha_{n-r,N}(x), & \nu = r \leqslant n, \\ m^{\alpha,r-\nu}_{n-\nu,N}(x), & \nu \leqslant n < r, \\ 0, & n < \nu \leqslant r. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что система $\{m^{\alpha,r}_{n,N}(x)\}$ полна в пространстве $W^r_{l^2_{\rho_N}(\Omega_\delta)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g\rangle_S = \sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k_\delta f(0)\Delta^k_\delta g(0) + \sum_{x\in\Omega_\delta}\Delta^r_\delta f(x)\Delta^r_\delta g(x)\rho_N(x).$$

Ряд Фурье функции $f \in W^r_{l^2_{\rho_N}(\Omega_\delta)}$ по этой системе имеет следующий вид:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k_\delta f(0)\, \frac{(Nx)^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} c^\alpha_{r,k}(f)\, m^{\alpha,r}_{k,N}(x), \tag{3}$$

где

$$c^\alpha_{r,k}(f) = \sum_{t\in\Omega_\delta} \Delta^r_\delta f(t)\, m^\alpha_{k-r,N}(t)\, \rho_N(t), \quad k \geqslant r.$$

Из неравенства Гельдера следует, что коэффициенты $c^\alpha_{r,k}(f)$ существуют для любой функции $f \in W^r_{l^p_{\rho_N}(\Omega_\delta)}$, $p \geqslant 1$. В связи с этим возникает вопрос о сходимости ряда Фурье (3) к функции $f \in W^r_{l^p_{\rho_N}(\Omega_\delta)}$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\alpha > -1$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда, если $f \in W^r_{l^p_{\rho_N}(\Omega_\delta)}$, то при $p \geqslant 2$ ряд (3) сходится поточечно к f на Ω_δ. Если же $1 \leqslant p < 2$, то существуют сетка Ω_δ и функция $f \in W^r_{l^p_{\rho_N}(\Omega_\delta)}$, ряд Фурье которой расходится в некоторой точке $x_0 \in \Omega_\delta$.*

Далее, через $S^{\alpha,r}_{n+r,N}(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (3):

$$S^{\alpha,r}_{n+r,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k_\delta f(0)\, \frac{(Nx)^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{n+r} c^\alpha_{r,k}(f)\, m^{\alpha,r}_{k,N}(x),$$

для которой при $x \in \{0, \delta, \dots, (r-1)\delta\}$ имеет место равенство $S^{\alpha,r}_{n+r,N}(f,x) = f(x)$.

Рассмотрим задачу об оценке величины $e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \big| f(x) - S^{0,r}_{n+r,N}(f,x) \big|$. Как известно, с помощью неравенства Лебега

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \big| f(x) - S^{0,r}_{n+r,N}(f,x) \big| \leqslant E^r_{n+r}(f,\delta)(1 + \lambda^r_{n,N}(x))$$

эта задача сводится к оценке функции Лебега

$$\lambda^r_{n,N}(x) = \frac{(e^\delta - 1)^{r+1}}{e^\delta}\, e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} (Nx)^{[r]} \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \left| K^r_{n,N}(t - r\delta, x - r\delta) \right|,$$

где $\Omega_{r,\delta} = \{r\delta, (r+1)\delta, \dots\}$. Основным результатом является следующая

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $n \leqslant \lambda N$, $\nu = 4n + 2r + 2$. Тогда имеют место следующие оценки:*

1) если $x \in \left[r\delta, \frac{\nu}{2}\right]$, то $\lambda^r_{n,N}(x) \leqslant c(\lambda, r) \ln(n+1)$;

2) если $x \in \left(\frac{\nu}{2}, \frac{3\nu}{2}\right]$, то

$$\lambda^r_{n,N}(x) \leqslant c(\lambda, r) \left[\ln(n+1) + \left(\frac{\nu}{\nu^{\frac{1}{3}} + |x - \nu|} \right)^{\frac{1}{4}} \right];$$

3) если $x \in \left(\frac{3\nu}{2}, \infty\right)$, то $\lambda^r_{n,N}(x) \leqslant c(\lambda, r)\, n^{-\frac{r}{2}+\frac{7}{4}} x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{4}}$.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках.—Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.—255 с.

ОБ ОСКОЛОЧНОЙ КОМПАКТНОСТИ ОПЕРАТОРА НЕМЫЦКОГО[1]

Э. Б. Грищенко (Россия, Владикавказ; СОГУ),
Н. А. Джусоева (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Введение и предварительные сведения. Теория ортогонально аддитивных операторов (ОАО) в функциональных пространствах и векторных решетках в последнее время привлекает внимание ряда исследователей [1–3]. Типичным примером ОАО является нелинейный оператор суперпозиции, естественно возникающий в различных областях современного анализа [4].

Приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. За подробной информацией мы отсылаем читателя монографиям [4, 5].

Пусть $E(X)$ — пространство Кете — Бохнера и Y — векторное пространство. Оператор $T\colon E(X) \to Y$ называется *ортогонально аддитивным*, если

$$T(f \sqcup g) = Tf + Tg \text{ для любых дизъюнктных } f, g \in E(X).$$

Ортогонально аддитивный оператор $T\colon E(X) \to Y$ называется *осколочно компактным*, если $T(\mathfrak{F}_f)$ относительно компактное подмножество Y для любой $f \in E(X)$.

Пусть (A, Σ, μ) — пространство с конечной мерой X — банахово пространство. Носителем $\operatorname{supp} f$ сильно измеримой вектор-функции $f\colon A \to X$ называется μ-измеримое множество

$$\operatorname{supp} f := \{t \in A : f(t) \neq 0\}.$$

Пусть теперь E — порядковый идеал в $L_0(\mu)$ и X — банахово пространство. Функция $N : A \times X \to X$ называется:

1. *суперпозиционно измеримой* (или *супер-измеримой* для краткости), если $N(\cdot, f(\cdot)) \in L_0(\mu, X)$ для любой $f \in L_0(\mu, X)$
2. $E(X)$*-супер-измеримой*, если $N(\cdot, f(\cdot)) \in E(X)$ для любой $f \in E(X)$;
3. *нормализованной*, если $N(t, 0) = 0$ для μ-почти всех $t \in A$.

Пусть (A, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, E — банахово идеальное пространство на (A, Σ, μ) с порядково непрерывной нормой, X — банахово пространство и $N : A \times X \to X$ — нормализованная $E(X)$-супер-измеримая функция. Тогда существует оператор $T_N\colon E(X) \to E(X)$, заданный по следующему правилу

$$T_N(f)(t) = N(t, f(t)), \quad f \in E(X).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-939.

Оператор T_N, известный в литературе как оператор Немыцкого, является одним из наиболее важных объектов бесконечномерного нелинейного анализа [4, 6].

Результат. Ниже приведен критерий осколочной компактности оператора Немыцкого.

Теорема 1. *Пусть (A, Σ, μ) — пространство с конечной безатомной мерой, E — банахово идеальное пространство на (A, Σ, μ) с порядково непрерывной нормой, X — банахово пространство и $N : A \times X \to X$ — нормализованная $E(X)$-супер-измеримая функция. Тогда для нелинейного оператора суперпозиции $T_N \colon E(X) \to E(X)$ эквивалентны следующие условия:*

1. *T_N является осколочно компактным оператором;*
2. *$N(\cdot, f(\cdot)) = 0$ для любой вектор-функции $f \in E(X)$.*

Литература

1. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M.* The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators // Positivity.—2021.—№ 2.—P. 291–327.
2. *Pliev M.* On C-compact orthogonally additive operators // J. Math. Anal. Appl.—2021.—Vol. 494, № 1.—124594.
3. *Pliev M., Popov M.* Orthogonally additive operators on vector lattices // Trends in Mathematics.—Berlin: Springer Int. Publ., 2022.—P. 321–351.
4. *Appell J., Zabrejko P. P.* Nonlinear Superposition Operators.—Cambridge University Press, 1990.
5. *Lin P. K.* Köthe–Bochner Function Spaces.—Birkhäuser, 2004.
6. *Runst T., Sickel W.* Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators and Nonlinear Partial Differential Equations. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications.—1996.

LIMITEDLY L-WEAKLY COMPACT OPERATORS

S. G. Gorokhova (Russia, Vladikavkaz; SMI VSC RAS)

L-weakly compact operators were introduced by P. Meyer-Nieberg [1] in the early seventies of the last century in order to diversify the concept of weakly compact operators via imposing Banach lattice structure on the range of operators. Limited operators and Bourgain–Diestel operators were introduced a decade later. Since then, these operators attract permanent attention and inspire many researchers. In the last decade further classes of related operators were introduced and studied by K. Bouras, M. Moussa, A. Elbour, and many others (see, e. g. [2, 3]). In the present talk we discuss a new class of limitedly LW-operators following to the recent work [4].

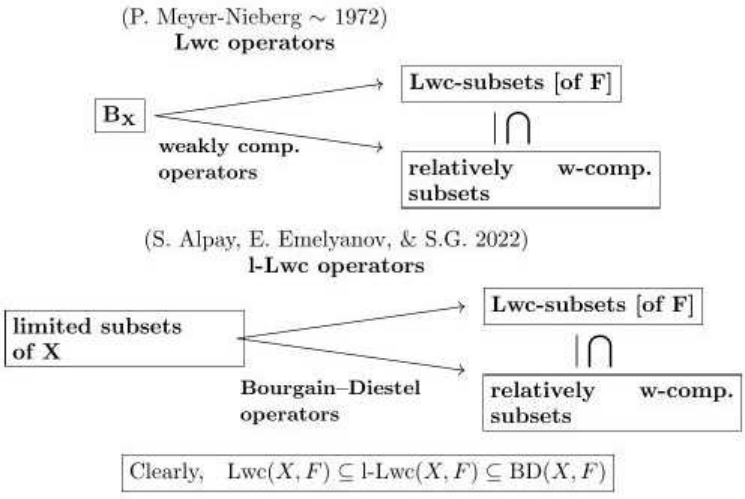
Definition 1 (P. Meyer-Nieberg [1]). Let X be a Banach space and let F be a Banach lattice. A bounded subset A of F is an Lwc-*set* whenever every disjoint sequence in the solid hull $\mathrm{sol}\,(A)$ of A is norm null.

An operator $T : X \to F$ is an Lwc-*operator* if $T(B_X)$ is an Lwc-subset of F.

Definition 2. A bounded subset A of a Banach space X is called *limited* if each w*-null sequence in X' is uniformly null on A.

Definition 3 (G. Emmanuele [5]). Let X and Y be Banach spaces. An operator $T : X \to Y$ is called a *Bourgain–Diestel operator* (briefly, a BD-operator) if T carries limited sets onto relatively weakly compact sets.

Here, we present a new class of operators (see [4]). These operators lie strictly between L-weakly compact operators and the Bourgain–Diestel operators. It refines the class of Bourgain–Diestel operators in the same manner as L-weakly compact operators refine weakly compact operators. Details are given in the diagrams below.



Definition 4. An operator $T : X \to F$ is *limitedly* L-*weakly compact* (briefly $T \in$ l-Lwc(X, F)), if T carries limited subsets of X onto Lwc-subsets of F.

In general, the inclusion Lwc$(X, F) \subseteq$ l-Lwc(X, F) is proper.

Example 1. Since each limited subset of c_0 is relatively compact, and since each relatively compact subset of c_0 is an Lwc-set, then $I_{c_0} \in$ l-Lwc(c_0). However, B_{c_0} is not an Lwc-set in c_0, and hence $I_{c_0} \notin$ Lwc(c_0).

The inclusion l-Lwc$(X, F) \subseteq$ BD(X, F) is also proper.

Example 2. Since c is separable, limited subsets of c coincide with relatively compact subsets, and hence $I_c \in$ BD(c). However, the singleton $\{(1, 1, 1, \dots)\}$ is limited yet not an Lwc-set in c. Thus $I_c \notin$ l-Lwc(c).

Main results. Theorem 1 restates the definition of l-Lwc-operators in very practical way, with no use of both limited and l-Lwc-sets.

Theorem 1 [4, Lemma 2.3.1]**.** *$T \in$ l-Lwc(X, F) if and only if $T' f_n \overset{w^*}{\to} 0$ in X' for each disjoint bounded sequence (f_n) in F'.*

Theorem 2 establishes the domination property for limitedly L-weakly compact operators.

Theorem 2 [4, Proposition 2.3.2]**.** *Let $0 \leqslant S \leqslant T \in$ l-Lwc(E, F) then $S \in$ l-Lwc(E, F).*

Theorem 3 gives conditions on a Banach lattice E under that the linear span r-l-Lwc(E) of positive limitedly L-weakly compact operators is a Banach lattice algebra.

Theorem 3 [4, Theorem 2.3.7]**.** *Let E be a Banach lattice. The following statements hold*

(i) The set r-l-Lwc(E) *is a subalgebra of the algebra* $\mathrm{L}_r(E)$ *of all regular operators on E. Moreover,*

$$\text{r-l-Lwc}(E) = \mathrm{L}_r(E) \iff I_E \in \text{l-Lwc}(E).$$

(ii) If E is Dedekind complete, then r-l-Lwc(E) *is a closed lattice subalgebra and order ideal of the Banach lattice algebra* $(\mathrm{L}_r(E),\ \|\cdot\|_r)$.

References

1. *Meyer-Nieberg P.* Über Klassen Schwach Kompakter Operatoren in Banachverbänden // Math. Z.—1974.—Vol. 138.—P. 145–159.
2. *Bouras K., Lhaimer D., Moussa M.* On the Class of Almost L-Weakly and Almost M-Weakly Compact Operators // Positivity.—2018.—Vol. 22.—P. 1433–1443.
3. *Elbour A., Afkir F., Sabiri M.* Some Properties of Almost L-Weakly and Almost M-Weakly Compact Operators // Positivity.—2020.—Vol. 24.—P. 141–149.
4. *Alpay S., Emelyanov E., Gorokhova S.* Generalizations of L- and M-Weakly Compact Operators.—arxiv.org/abs/2206.02718v5.
5. *G. Emmanuele.* The (BD) property in $L_1(\mu, E)$ // Indiana Univ. Math. J.—1987.—Vol. 36.—P. 229–230.

AUTOMORPHISMS OF ALGEBRAS OF LOCALLY MEASURABLE OPERATORS WITH RESPECT TO A TYPE I VON NEUMANN ALGEBRAS

R. T. Djumamuratov (Uzbekistan, Nukus; KarSU)

Let $\mathscr{A}$ be an algebra. A one-to-one linear mapping $T : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ is called an automorphism if $T(xy) = T(x)T(y)$ for all $x, y \in \mathscr{A}$. Given an invertible element $a \in \mathscr{A}$ one can define an automorphism T_a of $\mathscr{A}$ by $T_a(x) = axa^{-1}$, $x \in \mathscr{A}$. Such automorphisms are called inner automorphisms of $\mathscr{A}$. It is clear that for a commutative (abelian) algebra $\mathscr{A}$ all inner automorphisms are trivial, i. e. act as the unit operator. In the general case inner automorphisms are identical on the center of $\mathscr{A}$. Essentially different classes of automorphisms are those which are generated by automorphisms of the center $Z(\mathscr{A})$ of $\mathscr{A}$. In some cases such automorphisms ϕ on $Z(\mathscr{A})$ can be extended to automorphisms T_ϕ of the whole algebra $\mathscr{A}$ (see e. g. Kaplansky [4, Theorem 1]).

Note that an algebra $LS(M)$ — of all locally measurable operators affiliated with a von Neumann algebra M and its subalgebras present non commutative counterparts of the algebra $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Let $E(M)$ be a central extension of a von Neumann algebra M. We show that if M is of a type I, then each automorphism T of $E(M)$ which acts identically on the center $Z(E(M))$ of $E(M)$ is inner. Further for homogeneous type I von Neumann algebras M every automorphism ϕ of the center $Z(E(M))$ of $E(M)$ can be extended to an automorphism T_ϕ of the whole $E(M)$.

In the present note we give a general form of automorphisms of the algebra $LS(M)$ for type I von Neumann algebras M.

Theorem 1. *If M is a type I von Neumann algebra, then each automorphism T of $E(M)$ can be uniquely represented in the form*

$$T = T_a \circ T_\phi,$$

where T_a is an inner automorphism implemented by an element $a \in E(M)$, and T_ϕ is an automorphism generated by an automorphism ϕ of the center of $\mathrm{E}(M)$.

References

1. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Derivations on the Algebra of Measurable Operators Affiliated with a Type I von Neumann Algebra // Siberian Adv. Math.—2008.—Vol. 18.—P. 86–94.
2. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Structure of Derivations on Various Algebras of Measurable Operators for Type I von Neumann Algebras // Func. Anal.—2009.—Vol. 256.—P. 2917–2943.
3. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Derivations on Algebras of Measurable Operators // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat.—2010.—Vol. 13.—P. 305–337.
4. *Kaplansky I.* Algebras of Type I // Ann. Math.—1952.—Vol. 56.—P. 460–472.
5. *Muratov M. A., Chilin V. I.* Algebras of Measurable and Locally Measurable Operators.—Kiev: Inst. of Math. Ukrainian Acad. of Sci., 2007.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

КРИТЕРИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНО БИАДДИТИВНОГО ОПЕРАТОРА[1]

Н. А. Джусоева (Россия, Владикавказ; СОГУ),
М. Б. Мазлоева (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Введение. Теория ортогонально аддитивных операторов в упорядоченных пространствах является в настоящее время активно развивающейся областью функционального анализа [1–3]. Ортогонально биаддитивные операторы (ОБАО) в функциональных пространствах стали изучаться во второй половине прошлого столетия [4]. Исследование данного класса операторов под углом зрения теории векторных решеток и упорядоченных пространств было продолжено в статье [5]. Там же было показано, что при достаточно общих условиях векторное пространство $\mathscr{OBA}_r(E,F;W)$ всех регулярных ортогонально биаддитивных операторов, заданных на декартовом произведении $E\times F$ векторных решеток E и F и принимающих значения в порядково полной векторной решетке W является порядково полной векторной решеткой. Этот результат открывает путь к дальнейшему изучению решеточной структуры пространства операторов.

Предварительные сведения. Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения. За подробностями мы отсылаем читателя к недавнему обзору [3].

Пусть E, F — векторные решетки и W — векторное пространство. С оператором $T\colon E\times F\to W$ ассоциированы два семейства *частичных* операторов $T_x\colon F\to W$, $x\in E$ и $T_y\colon E\to W$, $y\in F$ заданных формулами:

$$T_x(v):=T(x,v),\ \ v\in F;\quad T_y(u):=T(u,y),\ \ u\in E.$$

Будем говорить, что $T\colon E\times F\to W$ — *ортогонально биаддитивный оператор* (ОБАО), если все частичные операторы $T_x\colon F\to W$, $x\in E$ и $T_y\colon E\to W$, $y\in F$ ортогонально аддитивны. Пусть E, F, W — векторные решетки. Ортогонально биаддитивный оператор $T:E\times F\to W$ называется:

1) *положительным*, если $T(x,y)\geqslant 0$ для любых $(x,y)\in E\times F$;

2) *регулярным*, если $T=S_1-S_2$, где S_1, S_2 — положительные ОБАО из $E\times F$ в W;

3) *латерально непрерывным*, если каждую латерально сходящуюся сеть $((x,y)_\alpha)_{\alpha\in A}=(x_\alpha,y_\alpha)_{\alpha\in A}$ в $E\times F$ такую, что $(x,y)_\alpha\xrightarrow{lat}(x,y)$ оператор переводит в порядково сходящуюся сеть $(T(x_\alpha,y_\alpha))_{\alpha\in A}$ в W и $T(x_\alpha,y_\alpha)\xrightarrow{o}T(x,y)$.

Подмножество $\mathscr{I}$ векторной решетки $E\times F$ называется *частичным латеральным идеалом*, если выполняются следующие условия:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-939.

1. если $(x, y) \in \mathscr{I}$, то $(z, w) \in \mathscr{I}$ для любых $(z, w) \in \mathfrak{F}_{(x,y)}$;
2. если $(x_1, y), (x_2, y) \in \mathscr{I}$, где $x_1 \perp x_2$, то $(x_1 \sqcup x_2, y) \in \mathscr{I}$;
3. если $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathscr{I}$, где $y_1 \perp y_2$, то $(x, y_1 \sqcup y_2) \in \mathscr{I}$.

Результат. Ниже приведен критерий латеральной непрерывности положительного ортогонально биаддитивного оператора .

Теорема 1. *Пусть E, F, W — векторные решетки, причем решетка W порядково полна и $T\colon E \times F \to W$ — положительный ортогонально биаддитивный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *T — латерально непрерывный оператор;*

2. *частичный латеральный идеал $\mathrm{Ker}(S)$ является частичной латеральной полосой для любого $S \in \mathscr{I}_T$ ($\mathscr{I}_T$ — порядковый идеал, порожденный T в $\mathscr{OBA}_r(E, F)$).*

Литература

1. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M.* The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators // Positivity.—2021.—№ 2.—С. 291–327.
2. *Pliev M.* On C-compact orthogonally additive operators // J. Math. Anal. Appl.—2021.—Т. 494, № 1.—124594.
3. *Pliev M., Popov M.* Orthogonally additive operators on vector lattices // Trends in Mathematics.—Berlin: Springer Int. Publ., 2022.—С. 321–351.
4. *Mizel V. J.,Sundaresan K.* Representation of additive and biadditive functionals // Arch. Ration. Mech. Anal.—1968.—№ 6.—С. 102–126.
5. *Dzhusoeva N., Kulaev R., Pliev M.* Orthogonally bi-additive operators // J. Funct. Spaces.—2021.—124594.

СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА — КАНТОРОВИЧА

Г. Б. Закирова (Узбекистан, Ташкент; ТГТУ)

Пусть B — произвольная полная булева алгебра с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$. Обозначим через $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$ алгебру всех непрерывных функций $x : Q(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, определенных на стоуновском компакте $Q(B)$, отвечающем булевой алгебре B, которые принимают значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$. Через $C(Q(B))$ обозначается банахова алгебра всех непрерывных действительных функций на $Q(B)$ с равномерной нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t\in Q(B)} |x(t)|$.

Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с σ-конечной мерой, $L^0(\Omega)$ — алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на (Ω, Σ, μ). Относительно естественного частичного порядка $f \leqslant g \Leftrightarrow g - f \geqslant 0$ почти всюду, алгебра $L^0(\Omega)$ является порядково полной векторной решеткой, а множество $B(\Omega)$ всех идемпотентов из $L^0(\Omega)$ образует полную булеву алгебру относительного частичного порядка, индуцируемого из $L^0(\Omega)$. Положим $L^0(\Omega)_+ := \{f \in L^0(\Omega) : f \geqslant 0\}$.

Пусть $m : B \to L^0(\Omega)$ — строго положительная $L^0(\Omega)$-значная мера на B, обладающая свойством Магарам, т. е. для любых $e \in B$, $f \in L^0(\Omega)$, $0 \leqslant f \leqslant m(e)$, существует такое $q \in B$, $q \leqslant e$, что $m(q) = f$ (такие меры называют мерами Магарам). В этом случае [1] существует единственный инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$ такой, что $\nabla(m) = \varphi(B(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. Кроме того, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с подалгеброй $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$ в алгебре $L^0(B)$ и является правильной векторной подрешеткой в $L^0(B)$ (это означает, что точные верхние и нижние границы для ограниченных подмножеств из $L^0(\nabla(m))$ совпадают в $L^0(B)$ и в $L^0(\nabla(m))$). При этом $L^0(B)$ является $L^0(\nabla(m))$-модулем.

Обозначим через $L^1(B, m)$ пространство всех функций из $L^0(B)$, интегрируемых по $L^0(\Omega)$-значной мере m. Для любого $x \in L^1(B, m)$ отображение $\|x\|_{1,m} = \int |x| dm$ определяет L^0-значную норму в $L^1(B, m)$, относительно которой $L^1(B, m)$ является пространством Банаха — Канторовича (см. [2, п. 6.1.10]).

Элемент $x \in L^0(B)$ называют $L^0(\Omega)$-*ограниченным,* если $|x| \leqslant f$ для некоторого $f \in L^0(\Omega)_+$. Ясно, что множество $L^\infty(B, L^0(\Omega))$ всех $L^0(\Omega)$-ограниченных элементов из $L^0(B)$ является подалгеброй в $L^0(B)$, а также порядково полной векторной подрешеткой в $L^0(B)$, при этом $L^0(\Omega) \subset L^\infty(B, L^0(\Omega))$ и $C(Q(B)) \subset L^\infty(B, L^0(\Omega))$.

Для каждого $x \in L^\infty(B, L^0(\Omega))$ положим

$$\|x\|_{\infty, L^0(\Omega)} = \inf \big\{ f \in L^0(\Omega)_+ : |x| \leqslant f \big\}.$$

Известно, что пара $(L^\infty(B, L^0(\Omega)), \|\cdot\|_{\infty, L^0(\Omega)})$ является пространством Банаха — Канторовича [3].

$L^0(\Omega)$-значной невозрастающей перестановкой элемента $x \in L^0(B)$ называется отображение $m(x,t) : (0,\infty) \to L^0(\Omega)$, определяемое равенством

$$m(x,t) = \inf\big\{\|xe\|_{\infty,L^0(\Omega)} : e \in B,\, xe \in L^\infty(B, L^0(\Omega)),\, m(\mathbf{1}-e) \leqslant t\cdot\mathbf{1}\big\},\quad t>0.$$

Пусть E — ненулевой $L^0(\nabla(m))$-подмодуль в $L^0(B)$ со свойством идеальности, т. е. из $|x| \leqslant |y|$, $x \in L^0(B)$, $y \in E$ следует $x \in E$. Рассмотрим $L^0(\Omega)$-значную монотонную норму $\|\cdot\|_E$ на E, наделяющую E структурой пространства Банаха — Канторовича.

Будем говорить, что E — симметричное пространство Банаха — Канторовича, если из равенств $m(x,t) = m(y,t)$ для всех $t>0$, где $x \in L^0(B)$, $y \in E$, следует, что $x \in E$ и $\|x|_E = \|y|_E$.

Важными примерами симметричных пространств Банаха — Канторовича являются пространства $L^p(B,m)$, $1 \leqslant p < \infty$ и $L^\infty(B, L^0(\Omega))$.

Полезными примерами симметричных пространств Банаха — Канторовича являются пересечение и сумма пространств $L^1(B,m)$ и $L^\infty(B, L^0(\Omega))$.

Теорема 1. (*i*) *Пара* $(L^1(B,m)\cap L^\infty(B,L^0(\Omega)), \|\cdot\|_{L^1\cap L^\infty})$ *является симметричным пространством Банаха — Канторовича, где*

$$\|x\|_{L^1\cap L^\infty} = \sup\big\{\|x\|_{1,m},\, \|x\|_{\infty,L^0(\Omega)}\big\},\quad x \in L^1(B,m)\cap L^\infty(B,L^0(\Omega)).$$

(*ii*) *Множество*

$$L^1(B,m) + L^\infty(B,L^0(\Omega)) = \big\{z = x+y,\, x \in L^1(B,m),\, y \in L^\infty(B,L^0(\Omega))\big\}$$

с $L^0(\Omega)$*-значной нормой*

$$\|z\|_{L^1+L^\infty} = \inf\big\{\|x\|_{1,m} + \|y\|_{\infty,L^0(\Omega)} : z = x+y,\, x \in L^1(B,m),\, y \in L^\infty(B,L^0(\Omega))\big\}$$

является симметричным пространством Банаха — Канторовича.

Следующая теорема является векторнозначным вариантом известного свойства классических симметричных функциональных пространств (см., например, [4, гл. II, § 4, теорема 4.1]).

Теорема 2. *Для любого симметричного пространство Банаха — Канторовича* E *верны следующие включения:*

$$L^1(B,m)\cap L^\infty\big(B,L^0(\Omega)\big) \subset E \subset L^1(B,m) + L^\infty\big(B,L^0(\Omega)\big).$$

Литература

1. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Разложимые меры со значениями в порядково полных векторных решетках // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т 10, № 4.—С. 31–38.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Zakirov B. S., Umarov Kh. R.* Duality for L^1-spaces associated with the Maharam measure // Bull. of National University of Uzbekistan. Math. Nat. Sci.—2021.—Vol. 4, № 1.—P. 64–76.
4. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978. —400 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

РЕШЕТКИ ЛОРЕНЦА — КАНТОРОВИЧА

Б. С. Закиров (Узбекистан, Ташкент; ТГТУ),
В. И. Чилин (Узбекистан, Ташкент; ИМ АН РУз)

Определяются невозрастающие перестановки измеримых функций, ассоциированные с векторнозначной мерой Магарам. С помощью этих перестановок строится новый класс решеток Банаха — Канторовича, являющихся аналогом классических функциональных пространств Лоренца.

Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с σ-конечной мерой, $L^0(\Omega)$ алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на (Ω, Σ, μ). Относительно естественного частичного порядка $f \leqslant g \Leftrightarrow g - f \geqslant 0$ почти всюду, алгебра $L^0(\Omega)$ является порядково полной векторной решеткой со слабой единицей $\mathbf{1}(\omega) \equiv 1$, а множество $B(\Omega)$ всех идемпотентов из $L^0(\Omega)$ образует полную булеву алгебру относительного частичного порядка, индуцируемого из $L^0(\Omega)$.

Рассмотрим произвольную полную булеву алгебру B с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$, и обозначим через $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$ алгебру всех непрерывных функций $x : Q(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, определенных на стоуновском компакте $Q(B)$, отвечающем булевой алгебре B, которые принимают значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$.

Пусть $m : B \to L^0(\Omega)$ — строго положительная $L^0(\Omega)$-значная мера на B, обладающая свойством Магарам, т. е. для любых $e \in B$, $f \in L^0(\Omega)$, $0 \leqslant f \leqslant m(e)$, существует такое $q \in B$, $q \leqslant e$, что $m(q) = f$ (такие меры называют мерами Магарам). В этом случае [1] существует единственный инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$ такой, что $\nabla(m) = \varphi(B(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. Кроме того, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с подалгеброй $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$ в алгебре $L^0(B)$ и является правильной векторной подрешеткой в $L^0(B)$ (это означает, что точные верхние и нижние границы для ограниченных подмножеств из $L^0(\nabla(m))$ совпадают в $L^0(B)$ и в $L^0(\nabla(m))$, и при этом отождествлении $L^0(B)$ становится $L^0(\nabla(m))$-модулем.

Положим $L^0(\Omega)_+ = \{f \in L^0(\Omega) : f \geqslant 0\}$ и обозначим через $L^0_{++}(\Omega)$ множество всех тех $f \in L^0(\Omega)_+$, для которых носитель

$$s(f) := \sup_{n \geqslant 1} \left\{|f| > n^{-1}\right\} = \mathbf{1}.$$

Каждая функция $f \in L^0_{++}(\Omega)$ обратима в алгебре $L^0(\Omega)$, т. е. существует такая функция $g \in L^0(\Omega)$, что $f \cdot g = \mathbf{1}$, при этом $g \in L^0_{++}(\Omega)$.

$L^0(\Omega)$-значной невозрастающей перестановкой элемента $x \in L^0(B)$ назовем отображение $m(x,t) : (0,\infty) \to L^0(\Omega)$, определяемое равенством:

$$m(x,t) = \inf\left\{\|xe\|_{\infty, L^0(\Omega)} : e \in B,\, xe \in L^\infty(B, L^0(\Omega)),\, m(\mathbf{1} - e) \leqslant t \cdot \mathbf{1}\right\}, \quad t > 0,$$

где

$$L^\infty\big(B, L^0(\Omega)\big) = \big\{x \in L^0(B) : |x| \leqslant f \text{ для некоторого } f \in L^0(\Omega)_+\big\}$$

есть пространство Банаха — Канторовича с $L^0(\Omega)$-значной нормой

$$\|x\|_{\infty, L^0(\Omega)} = \inf\big\{f \in L^0(\Omega)_+ : |x| \leqslant f\big\}, \quad x \in L^\infty(B, L^0(\Omega)).$$

Для фиксированных $x \in L^0(B)$, $f \in L^0_{++}(\Omega)$ положим

$$\xi(x, f) = \inf\big\{h \in L^0_{++}(\Omega) : m(\{|x| > h\}) \leqslant f\big\}.$$

Теорема 1. *Для любых $x \in L^0(B)$ и $t > 0$ верно равенство*

$$m(x, t) = \xi(x,\ t \cdot \mathbf{1}),$$

при этом $m\{|x| > \xi(x, t \cdot \mathbf{1})\} \leqslant t \cdot \mathbf{1}$.

Пусть Ψ — возрастающая вогнутая функция на $[0, \infty)$, для которой $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(t) > 0$ для всех $t > 0$. Обозначим через $(\mathbb{R}^+, \mathscr{A}, \nu)$ измеримое пространство с мерой Лебега ν на множестве $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ и рассмотрим функциональное пространство Лоренца (см. например, [2, гл. II, § 5])

$$\Lambda_\psi(\mathbb{R}^+) = \left\{f \in L^0(\mathbb{R}^+, \mathscr{A}, \nu) : \|f\|_{\Lambda_\Psi(\mathbb{R}^+)} = \int\limits_0^\infty f^*(t)\, d\Psi(t) < \infty\right\},$$

где $f^*(t) = \inf\{\tau > 0 : \nu(\{|f| > \tau\}) \leqslant t\}$ есть невозрастающая ν-перестановка функции f из $L^0(\mathbb{R}^+, \mathscr{A}, \nu)$, а $\int_0^\infty f^*(t) d\Psi(t)$ — несобственный интеграл Римана — Стилтьеса от f^* по возрастающей функции Ψ.

Положим

$$\Lambda_\Psi(B, m) = \big\{x \in L^0(B) : \xi(x,\ t \cdot \mathbf{1})(\omega) \in \Lambda_\Psi(\mathbb{R}^+) \text{ для } \mu\text{-п. в. } \omega \in \Omega\big\},$$

$$\big\|x\big\|_{\Lambda_\Psi(B,m)}(\omega) = \big\|\xi(x,\ t \cdot \mathbf{1})(\omega)\big\|_{\Lambda_\Psi(\mathbb{R}^+)}, \quad x \in \Lambda_\Psi(B, m).$$

Теорема 2. *Пара $(\Lambda_\Psi(B, m), \|\cdot\|_{\Lambda_\Psi})$ является решеткой Банаха — Канторовича.*

Решетку Банаха — Канторовича $(\Lambda_\psi(B, m), \|\cdot\|_{\Lambda_\psi})$ естественно называть *решеткой Лоренца — Канторовича, построенной по мере Магарам m.*

Литература

1. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Разложимые меры со значениями в порядково полных векторных решетках // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, № 4.—С. 31–38.
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978. —400 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О КОМПАКТНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Ю. В. Кораблина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается задача о компактности классических операторов, действующих в весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций. Ранее она изучалась в основном для линейных операторов, действующих на банаховых пространствах голоморфных функций в единичном круге [1].

Настоящая работа посвящена получению критериев компактности произвольного линейного оператора на абстрактном квазибанахвом пространстве в терминах дельта-функций и их конкретных реализаций в весовых пространствах целых функций (Бергмана, Харди, Блоха и Фока).

Пусть G — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G, с топологией равномерной сходимости на компактах из G, v — вес на G, т. е. непрерывная положительная на G функция. Порожденные этим весом банаховы пространства задаются следующим образом:

$$H_v(G) = \left\{ f \in H(G),\ \|f\|_{H_v(G)} = \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\},$$

$$H_{v,0}(G) := \left\{ f \in H(G) : \lim_{|z|\to\delta G} \frac{|f(z)|}{v(z)} = 0 \right\}.$$

Всюду далее X — квазибанахово пространство с квазинормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $H(G)$, содержащее полиномы, такое, что замкнутый единичный шар B_X в X является компактным подмножеством X с топологией равномерной сходимости τ_{uc} на компактах. X^* — сопряженное с X пространство линейных непрерывных функционалов на X с сопряженной нормой $\|\cdot\|^*$, а δ_z — дельта-функция Дирака для фиксированной точки $z \in G$, т. е. $\delta_z : f \mapsto f(z)$, $f \in H(G)$.

Приведем один из основных результатов общего характера, установленных в работе.

Теорема 1. *Пусть v — произвольный вес на G, $T : X \to H_{v,0}(G)$ — линейный оператор. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $T : X \to H_{v,0}(G)$ компактен.

(ii) $T : X \to H_v(G)$ компактен и $T(X) \subseteq H_{v,0}(G)$.

(iii) $\delta_z \circ T \in X^*$ при любом $z \in G$ и $\lim\limits_{|z|\to\delta G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} = 0$.

Отметим, что аналогичная теорема верна для пространства Блоха

$$B_v = \left\{ f \in H(\mathbb{D}),\ \|f\|_{B_v(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|f'(z)|}{v(z)} + |f(0)| < \infty \right\}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук, проект МК-160.2022.1.1.

с его замкнутым подпространством

$$B_{v,0}(\mathbb{D}) := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \lim_{|z|\to 1} \frac{|f^{'}(z)|}{v(z)} = 0 \right\}.$$

А ее применение к интегральному оператору Вольтерра $T_g : f \mapsto \int_0^z f(w)g'(w)dw$ и его союзному $S_g : f \mapsto \int_0^z f'(w)g(w)dw$, где g — фиксированная функция, влечет следующий результат.

Теорема 2. *Пусть v — произвольный вес на $\mathbb{D}$.*

(*a*) *Следующие условия эквивалентны:*

(*i*) $T_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен.*

(*ii*) $T_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ *компактен и* $T_g(X) \subseteq B_{v,0}(\mathbb{D})$.

(*iii*) $g'(z) \cdot \delta_z \in X^*$ *при любом* $z \in \mathbb{D}$ *и выполнено условие*

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0.$$

(*b*) *Следующие условия эквивалентны:*

(*i*) $S_g : X \to B_{v,0}(\mathbb{D})$ *компактен.*

(*ii*) $S_g : X \to B_v(\mathbb{D})$ *компактен и* $S_g(X) \subseteq B_{v,0}(\mathbb{D})$.

(*iii*) $g(z) \cdot \delta_z^{'} \in X^*$ *при любом* $z \in \mathbb{D}$ *и выполнено условие*

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z^{'}\|^*}{v(z)} = 0.$$

Наконец, показано, что результаты, полученные в данном направлении, применимы к ранее не исследовавшемся пространствам Фока

$$F_p^{\psi} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{p,\psi} := \left(\lambda_{\psi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \, e^{-p\psi(z)} \, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

где $dA(z)$ — мера Лебега в $\mathbb{C}$, а вес ψ — субгармоническая функция, удовлетворяющая условиям из [2, с.14]. Именно, установлены достаточные условия компактности указанных выше интегральных операторов.

Заметим, что некоторые из представленных результатов опубликованы в [3].

Литература

1. *Zorboska N.* Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // Integr. Equ. Oper. Theory.—2017.—Vol. 87, № 4.—P. 581–600.
2. *Абанин А. В., Кораблина Ю. В.* Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 3.—С. 5–17.
3. *Абанин А. В., Кораблина Ю. В.* Компактность линейных операторов на квазибанаховых пространствах голоморфных функций // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.—2022.—Вып. 4–1.—С. 83–89.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ — ЯКОБИ К АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫМ ФУНКЦИЯМ

М. Г. Магомед-Касумов (Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; Махачкала, ДФИЦ РАН)

Пусть $\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}\}$ — ортонормированная на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(x) = \rho(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha,\beta > -1$, система полиномов Якоби, $S_n^{\alpha,\beta}(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по системе $\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}\}$:

$$S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(x), \quad c_k(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(t)\,\rho(t)\,dt. \tag{1}$$

Обозначим через C пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций с нормой $\|f\|_C = \max_{[-1,1]}|f(x)|$ и через AC пространство абсолютно непрерывных на $[-1,1]$ функций с нормой $\|f\|_{AC} = |f(-1)| + \int_{-1}^{1}|f'(t)|dt$.

Через BV будем обозначать пространство функций, имеющих на $[-1,1]$ ограниченную вариацию $V(f) = \sup_P \sum_{i=0}^{n_P-1}\big|f(x_{i+1}) - f(x_i)\big|$, где супремум берется по всевозможным разбиениям $P = \{x_i\}$ отрезка $[-1,1]$.

Символом $U^{\alpha,\beta}$ будем обозначать класс функций f, определенных на отрезке $[-1,1]$ и таких, что ряд Фурье по системе полиномов Якоби $\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}\}$ равномерно сходится к f на отрезке $[-1,1]$, т. е. $\|S_n^{\alpha,\beta}(f) - f\|_C \to 0$, $n \to \infty$.

Через DL обозначим множество функций, удовлетворяющих на $[-1,1]$ условию Дини — Липшица: $\omega(f,1/n)\ln n \to 0$, $n \to \infty$, где

$$\omega(f,\delta) = \sup_{x,\,x+h\in[-1,1],\,h<\delta}\big|f(x+h) - f(x)\big|$$

— модуль непрерывности функции f.

Согласно теореме о равносходимости [1] условия равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе аналогичны условиям равномерной сходимости рядов Фурье — Якоби внутри интервала ортогональности $(-1,1)$. В частности, если $f \in DL$ или $f \in C \cap BV$, то ряд Фурье — Якоби функции f равномерно сходится к f на любом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$.

В некоторых случаях этих условий оказывается достаточно для равномерной сходимости рядов Фурье — Якоби на всем отрезке $[-1,1]$.

Теорема А (см., например, [2, с. 118]). *$DL \subset U^{\alpha,\beta}$ при $-1 < \alpha,\beta \leqslant -1/2$.*

Теорема В [3]. *$C \cap BV \subset U^{\alpha,\beta}$ при $-1 < \alpha,\beta < 1/2$, $|\alpha - \beta| < 1$.*

В общем случае приходится накладывать дополнительные условия. Отметим некоторые результаты, в которых в качестве дополнительного используется условие сходимости частичных сумм Фурье — Якоби на концах интервала ортогональности.

Теорема C [4]. *Если $f \in DL$ и последовательности $S_n^{\alpha,\beta}(f, \pm 1)$ сходятся, то $f \in U^{\alpha,\beta}$.*

Теорема D [5]. *Если $f \in C \cap BV$ и последовательности $S_n^{\alpha,\beta}(f, \pm 1)$ сходятся, то $f \in U^{\alpha,\beta}$.*

В работе [5] получены и более общие результаты, в которых рассматриваются условия, содержащие модуль непрерывности и модуль изменения функции.

Отметим также работу [6], в которой получены оценки скорости сходимости рядов Фурье — Якоби в зависимости от $x \in [-1, 1]$ и k-го модуля гладкости функции $f(t)$ и ее производных. Из результатов, полученных в [6] (см. также [7]), выводятся, в частности, следующие условия равномерной сходимости рядов Фурье на $[-1, 1]$.

Теорема E. *Пусть $q = \max\{\alpha, \beta\} > -1/2$. Если $\omega(f, 1/n)n^{q+1/2} \to 0$, $n \to \infty$, то $f \in U^{\alpha,\beta}$.*

Для конкретных значений параметров α, β вопросы равномерной сходимости соответствующих рядов Фурье — Якоби рассмотрены в работах [8–10].

Данная работа возникла как результат исследования существенности условий на показатели α, β в теореме B из статьи [3]. Пример, приведенный в [3] и показывающий существенность первого условия на α, β, оказался неверным. Другой пример в [3] показывает, что утверждение теоремы B перестает быть справедливым при $|\alpha - \beta| > 1$. Таким образом, остаются не рассмотренными случаи $\max\{\alpha, \beta\} \geqslant 1/2$ и $|\alpha - \beta| = 1$. Нам удалось получить окончательные условия на показатели α, β в том случае, когда вместо функций ограниченной вариации рассматриваются абсолютно непрерывные функции.

Теорема. *Включение $AC \subset U^{\alpha,\beta}$ имеет место тогда и только тогда, когда $-1 < \alpha, \beta \leqslant 1/2$, $|\alpha - \beta| \leqslant 1$.*

Литература

1. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: ГИФМЛ, 1962.—500 с.
2. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функции. Учебное пособие.—Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.—184 с.
3. *Зорщиков А. В.* О равномерности сходимости рядов Фурье по многочленам Якоби // Докл. АН СССР.—1967.—Т. 176, № 1.—С. 35-–38.
4. *Беленький А. М.* О равномерной сходимости рядов Фурье — Якоби на сегменте ортогональности // Мат. заметки.—1989.—Т. 46, № 6.—С. 18–25.
5. *Kvernadze G.* Uniform convergence of Fourier — Jacobi series // J. Approx. Theory.—2002.—Vol. 117.—P. 207–228.
6. *Бадков В. М.* Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье — Якоби // Сиб. мат. журн.—1968.—Т. 9, № 6.—С. 1263–1283.
7. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Приближение функций суммами Фурье — Якоби // Докл. АН СССР.—1966.—Т. 166, № 1.—С. 9–10.
8. *Natanson I. P.* Constructive Function Theory. Vol. 2.—N. Y.: Frederick Ungar, 1964.
9. *Suetin P. K.* Representation of continuous and differentiable functions by Fourier series of Legendre polynomials // Soviet Math. Dokl.–1964.—Vol. 5.—P. 1408–1410.
10. *Prasad J., Hayashi H.* On the uniform convergence of Fourier — Jacobi series // SIAM J. Numer. Anal.—1973.—Vol. 10, №. 1.—P. 23–27.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИИ НА ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИЕ СЛАГАЕМЫЕ

А. Н. Марковский (Россия, Краснодар; КубГУ)

1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $S = \partial Q$. Обозначим

$$e_m(Q) = \left\{ E_{m,n}(y-x) : \, x \in Q, \, y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{Q} \, \right\}, \quad m \geqslant 1,$$

множество сдвигов фундаментального решения m-гармонического уравнения в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ [1, с. 520] и $G_m(Q)$ — замыкание линейной оболочки $\operatorname{span}\{e_m(Q)\}$ в норме $L_2(Q)$. Полученное замкнутое множество $G_m(Q)$ будем называть *полигармоническим подпространством*.

2. Будем рассматривать разложение $L_2(Q) = G_m(Q) \oplus N_m(Q)$ для любого натурального m. Обозначим $\Delta : L_2(Q) \to N_1(Q)$ соответствующее расширение оператора Лапласа, а $\Delta^{-1} : N_1(Q) \to L_2(Q)$ — обратный оператор.

Обозначим $A_1(Q) = G_1(Q)$ подпространство гармонических функций, и

$$A_k(Q) = \left\{ f \in N_{k-1}(Q) : \, f = \Delta^{-(k-1)} g, \, g \in G_1(Q) \right\}, \quad k \geqslant 2.$$

Будем называть $A_k(Q)$ подпространством *строго* k-гармонических функций.

Теорема 1. *Пространство функций, суммируемых по области с квадратом, разлагается в ортогональную сумму строго полигармонических подпространств:*

$$L_2(Q) = \oplus_{k=1}^{\infty} A_k(Q). \tag{1}$$

Замечание. В частности, пространство m-гармонических функций $G_m(Q)$, $m \geqslant 2$, разлагается в конечную ортогональную сумму: $G_m(Q) = \oplus_{k=1}^{m} A_k(Q)$.

В работе [1] получен частный случай разложения (1) для полианалитических функций в единичном круге, а в [2] рассматривается случай L_p. В работе [3] на основе обобщения представления Альманси на бесконечное число слагаемых, получено представление вещественно аналитических функций в виде суммы не ортогональных полигармонических слагаемых.

3. Таким образом, для любой функции $f \in L_2(Q)$, согласно разложению (1), будем иметь сумму

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f), \tag{2}$$

где $a_k(f) \in A_k(Q)$, $k = 1, 2, \ldots$ Такое представление полезно, например, при решении краевых задач для полигармонических уравнений, а также может быть использовано в различных прикладных задачах.

4. Пусть y_j, $j = 1, 2, \ldots$, — некоторая последовательность точек в $Q^+ := \mathbb{R}^n \backslash Q$. Рассмотрим систему сдвигов фундаментального решения m-гармонического ($m = 1, 2, \ldots$) уравнения

$$\gamma_{m,j}(x) = E_{m,n}(y_j - x),\ x \in Q,\ j = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что для любого $j = 1, 2, \ldots$, $\gamma_{m,j} \in e_m(Q)$. Возникает естественный вопрос о плотности линейной оболочки системы $\{\gamma_{m,j}\}_{j=1}^{\infty}$ в $G_m(Q)$. Ответ дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Для всякого натурального m, система $\{\gamma_{m,j}\}_{j=1}^{\infty}$ полна и линейно независима в $G_m(Q)$, если последовательность точек сдвигов y_j является множеством единственности m-гармонических в Q^+ функций.*

Гармонический случай ($m = 1$) см. в [4], а бигармонический ($m = 2$) в [5].

5. Непосредственным следствием теоремы 2 является возможность аппроксимации системой $\{\gamma_{m,j}\}_{j=1}^{\infty}$ функций из пространства $G_m(Q)$. Зафиксируем $m > 1$ и $f \in L_2(Q)$, тогда $f = g_m + h_m$, где $g_m \in G_m(Q)$ и $h_m \in N_m(Q)$. Обозначим

$$g_m^N = \sum_{j=1}^{N} c_{m,j}\gamma_{m,j}$$

проекцию искомой функции g_m на конечномерное подпространство, натянутое на первые элементы системы $\gamma_{m,j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. В силу теоремы 2, $g_m^N \to g_m$, $N \to \infty$ в норме $L_2(Q)$. Искомые коэффициенты $c_{m,j}$ проекции g_m^N определяются посредством решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} c_{m,j}\left(\gamma_{m,i}, \gamma_{m,j}\right) = \left(f, \gamma_{m,i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

с матрицей Грама для линейно независимой системы функций $\gamma_{m,j}$. Последовательно для каждого $m = 1, 2, \ldots$ вычисляя коэффициенты $c_{m,j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, получим g_m^N — аппроксимации проекций функции f на подпространства $G_m(Q)$. И далее, согласно определению подпространств $A_k(Q)$ получим аппроксимации гармоник: $a_1^N(f) = g_1^N$ и $a_k^N(f) = g_k^N - g_{k-1}^N$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Литература

1. *Рамазанов А. К.* Представление пространства полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств. Приложение к рациональным аппроксимациям // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 5.—С. 741–759.
2. *Рамазанов А. К.* О строении пространств полианалитических функций // Мат. заметки.—2002.—Т. 72, № 5.—С. 750–764.
3. *Карачик В. В.* Об одном представлении аналитических функций гармоническими // Мат. тр.—2007.—Т. 10, № 2.—С. 142–162.
4. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики.—Краснодар: КубГУ, 2009.—111 с.
5. *Марковский А. Н.* Замкнутость бигармонической системы базисных потенциалов // Экологич. вест. НЦ ЧЭС—2020.—Т. 17, № 1/2.—С. 20–26.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ОБ АБСТРАКТНОМ ОПЕРАТОРЕ ТЕПЛИЦА В НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ОКРУЖНОСТИ. ОБРАТИМОСТЬ И СПЕКТР

А. Э. Пасенчук (Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ))

Пусть N, Z, R, C — множества натуральных, целых, вещественных, комплексных чисел соответственно. Положим $Z_+ = \{j \in Z : j \geqslant 0\}$, $Z_- = Z \backslash Z_+$, $\Gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$, $D^+ = \{z \in C : |z| < 1\}$, $D^- = \{z \in C : |z| > 1\}$, Пусть H — гильбертово пространство. Введем следующие гильбертовы пространства H-значных функций $C^m(\Gamma, H) = \left\{\varphi(\xi) = \sum_{j\in Z} \varphi_j \xi^j,\ \varphi_j \in H,\ \xi \in \Gamma :\ \sum_{j\in Z} (|j|+1)^2 \|\varphi_j\|^2 < \infty\right\}$ с поточечными линейными операциями и нормой $\left\|\sum_j \varphi_j \xi^j\right\|_m = \sqrt{\sum_{j\in Z} (|j|+1)^{2m} \|\varphi_j\|^2}$, $m \in Z_+$. Положим $C^{-m}(\Gamma, H) = (C^m(\Gamma, H))^*$, $m \in Z_+$. Пересечение $C^\infty(\Gamma, H) = \bigcap_{m\in Z_+} C^m(\Gamma, H)$ является счетно-гильбертовым пространством функций, топология в котором задается при помощи счетного набора норм $\|\cdot\|_m$, $m \in Z_+$, а сопряженное пространство $C^{-\infty}(\Gamma, H) = (C^\infty(\Gamma, H))^* = \bigcup_{m\in Z_+} C^{-m}(\Gamma, H)$.

В топологических пространствах $C^m(\Gamma, H)$, $m \in Z \bigcup \{\pm\infty\}$ формулами $P^\pm\left(\sum_{j\in Z} \varphi_j \xi^j\right) = \sum_{j\in Z_\pm} \varphi_j \xi^j$ определим, операторы проектирования $P^\pm$. Эти проекторы порождают подпространства: $C^m_+(\Gamma, B) = P^+(C^m(\Gamma, B))$, $\tilde{C}^\infty_-(\Gamma, B) = P^-(C^\infty(\Gamma, B))$, $C^m_-(\Gamma, B) = C \oplus \tilde{C}^m_-(\Gamma, B)$, $m \in Z \bigcup \{\pm\infty\}$.

Пусть A — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве H. Ниже мы рассматриваем оператор Теплица $T(a) = P^+ a(\xi)|_{ImP^+}$, $T(a) : C^{\pm\infty}_+(\Gamma, H) \to C^{\pm\infty}_+(\Gamma, H)$ в предположении, что символ оператора Теплица $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \operatorname{End} H)$.

Пусть банахова алгебра с единицей $\mathrm{A} \subseteq \operatorname{End} H$. Будем говорить, что функция $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathrm{A})$ допускает правую каноническую гладкую вырожденную факторизацию типа минус, если имеет место равенство $a(\xi) = a^-(\xi) \cdot a^+(\xi)$, причем компоненты факторизации $a^\pm(\xi)$ удовлетворяют условиям: $a^\pm(\xi) \in C^\infty_\pm(\Gamma, \mathrm{A})$ и операторы Теплица $T(a^\pm) : C^\infty_+(\Gamma, H) \to C^\infty_+(\Gamma, H)$ обратимы. Аналогичным образом определяется левая каноническая гладкая вырожденная факторизация типа минус и обе факторизации типа плюс. Тот факт, что функция $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathrm{A})$ допускает гладкую вырожденную факторизацию типа минус (плюс) будем обозначать следующим образом: $a(\xi) \in Fact^\pm(C^\infty(\Gamma, \mathrm{A}))$.

Теорема 1. *Оператор Теплица $T(a) : C^{\pm\infty}_+(\Gamma, H) \to C^{\pm\infty}_+(\Gamma, H)$, $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \operatorname{End} H)$ обратим тогда и только тогда, когда $a(\xi) \in \operatorname{Fact}^\mp(C^\infty(\Gamma, \operatorname{End} H))$.*

При выполнении некоторых условий множества $\operatorname{Fact}^\mp(C^\infty(\Gamma, A))$, где $A \subseteq \operatorname{End} H$ — коммутативная банахова алгебра с единицей, удается описать конструктивно. Это приводит к критерию обратимости оператора Теплица и описанию спектра. Будем говорить, что КБА $A \subseteq \operatorname{End} H$ слабо наполнена в $\operatorname{End} H$,

если из условий $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, A)$ и $a(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(C^\infty(\Gamma, \mathrm{End}\, H))$ следует, что $a(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(C^\infty(\Gamma, A))$.

Пусть A — КБА с единицей, $\mathrm{M}(\mathrm{A})$ — пространство максимальных идеалов этой КБА. Функции $a(\xi) = \sum_{j\in Z} a_j \xi^j \in C^\infty(\Gamma, \mathrm{A})$ поставим в соответствие семейство функций $a(\chi, \xi) = \sum_{j\in Z} \chi(a_j)\, \xi^j$, $\xi \in \Gamma$, $\chi \in \mathrm{M}(\mathrm{A})$. Из мультипликативности элементов $\mathrm{M}(\mathrm{A})$ следует, что если $a(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(C^\infty(\Gamma, \mathrm{A}))$, то $a(\chi, \xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(C^\infty(\Gamma, C))$ $(\forall \chi \in \mathrm{M}(\mathrm{A}))$.

Будем говорить, что слабо наполненная в $\mathrm{End}\, H$ КБА A обладает достаточным набором линейных мультипликативных функционалов, если из того, что $a(\chi, \xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(C^\infty(\Gamma, C))$ $(\forall \chi \in \mathrm{M(A)})$, следует, что $a(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(C^\infty(\Gamma, \mathrm{A}))$.

Теорема 2. *Пусть $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathrm{A})$, где $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{End}\, H$ — КБА с единицей, слабо наполненная в $\mathrm{End}\, H$, обладает достаточным набором линейных мультипликативных функционалов. Оператор Теплица $T(a(\xi)) : C_+^{\pm\infty}(\Gamma, H) \to C_+^{\pm\infty}(\Gamma, H)$ обратим, тогда и только тогда когда для любого фиксированного $\chi \in \mathrm{M}(\mathrm{A})$ обратим оператор $T(a(\chi, \xi)) : C_+^{\pm\infty}(\Gamma, C) \to C_+^{\pm\infty}(\Gamma, C)$.*

Пусть $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, C)$ и имеет на Γ конечное число нулей z_k порядков n_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, соответственно, $n(a) = \sum_{k=1}^s n_k$ — суммарное числом нулей этой функции. Если $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, C)$ и $n(a) < \infty$, то число $\kappa_c(a) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{a'(\xi)}{a(\xi)}\, d\xi$ называют сингулярным индексом этой функции.

Теорема 3. *Функция $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, C)$ допускает гладкую вырожденную факторизацию типа плюс (минус) тогда и только тогда, когда она имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядкови при этом имеет место равенство $\kappa_c(a) = n(a)$ $(\kappa_c(a) = -n(a))$.*

Будем обозначать через $\rho_{\pm\infty}(T(a))$ и $\sigma_{\pm\infty}(T(a))$ спектр и резольвентное множество оператора Теплица $T(a(\xi)) : C_+^{\pm\infty}(\Gamma, H) \to C_+^{\pm\infty}(\Gamma, H)$ с символом $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathrm{A})$. Пусть $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{End}\, H$ — КБА с единицей, слабо наполненная в $\mathrm{End}\, H$, обладает достаточным набором линейных мультипликативных функционалов. Из теоремы 3 вытекает следующее описание резольвентного множества. Имеют место следующие соотношения, описывающие резольвентное множество $\rho_{\pm\infty}(T(a)) = \bigcap_{\chi\in\mathrm{MA}} (N(a, \chi) \bigcap S_\pm(a, \chi))$, где $N(a, \chi) = \{\lambda \in C : n(a(\chi, \xi) - \lambda) < \infty\}$, $S_\pm(a, \chi) = \{\lambda \in C : \kappa_c(a(\chi, \xi) - \lambda) = \pm n(a(\chi, \xi) - \lambda)\}$. Разумеется, из этого описания следует, что $\sigma_{\pm\infty}(T(a)) = \overline{\bigcap_{\chi\in\mathrm{MA}} (N(a, \chi) \bigcap S_\pm(a, \chi))} = \bigcup_{\chi\in\mathrm{MA}} \overline{N(a, \chi)} \bigcup \overline{S_\pm(a, \chi)}$.

О РАВНОМЕРНОЙ СТЕПЕННОЙ СХОДИМОСТИ НА ПОДПРОСТРАНСТВАХ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ФОН НЕЙМАНА[1]

Подвигин И. В. (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН)

Доклад основан на недавних совместных работах с Качуровским, Тодиковым и Хакимбаевым [1] и [2], мотивированных результатом [3]. В этой работе Бен-Арци и Морисс обнаружили существование (степенной) равномерной сходимости на некоторых специальных подпространствах в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем. А именно, для некоторого банахова подпространства $\mathscr{X}$, плотно и непрерывно вложенного в гильбертово пространство $\mathscr{H}$, была получена следующая оценка норм отклонений для эргодических средних

$$P_{t,-t} = \frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t} U^\tau \, d\tau$$

унитарного потока U^τ от ортопроектора

$$P: \ \big\|P_{t,-t} - P\big\|_{\mathscr{X}\to\mathscr{H}} = \mathscr{O}\big(t^{-l}\big)$$

для некоторого $l = l(\mathscr{X}) > 0$ при $t \to \infty$.

В упомянутых работах мы с соавторами получили спектральные критерии такой равномерной степенной сходимости на подпространствах в $\mathscr{H}$ со своими нормами. А также дали полное описание всех таких (нормированных, со своими нормами) подпространств с равномерной степенной со всеми возможными показателями $\alpha \in [0,2]$ сходимостью. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in [0,2)$, $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{H}$ — его векторное подпространство со своей нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$.*

1. *Если существует константа $A > 0$ такая, что для всех $f \in \mathscr{X}$ при всех $\delta > 0$*

$$\sigma_{f-Pf}(-\delta,\delta] \leqslant A\big\|f\big\|_{\mathscr{X}}^2 \delta^\alpha,$$

то при всех $t > s$

$$\big\|P_{t,s} - P\big\|_{\mathscr{X}\to\mathscr{H}}^2 \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{2-\alpha}\, A(t-s)^{-\alpha}.$$

2. *Если для некоторой константы $B > 0$ при всех $t > s$ выполняется неравенство*

$$\big\|P_{t,s} - P\big\|_{\mathscr{X}\to\mathscr{H}}^2 \leqslant B(t-s)^{-\alpha},$$

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2022-0004).

то для всех $f \in \mathscr{X}$ спектральная мера σ_{f-Pf} имеет степенную особенность в нуле (с тем же показателем степени), т. е. при всех $\delta > 0$

$$\sigma_{f-Pf}(-\delta, \delta] \leqslant \frac{\rho(\alpha)}{2^\alpha} B \big\|f\big\|^2_{\mathscr{X}} \delta^\alpha.$$

При этом константа $\rho(\alpha) = \inf_{x>0} \frac{x^{2-\alpha}}{\sin^2 x}$ неулучшаема. Опишем случай $\alpha = 2$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{H}$ — его векторное подпространство со своей нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$.*

1. *Если существует константа $A > 0$ такая, что для всех $f \in \mathscr{X}$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^{-2}\, d\sigma_{f-Pf}(x) \leqslant A \big\|f\big\|^2_{\mathscr{X}},$$

то при всех $t > s$

$$\big\|P_{t,s} - P\big\|^2_{\mathscr{X}\to\mathscr{H}} \leqslant 4A(t-s)^{-2}.$$

2. *Если для некоторой константы $B > 0$ при всех $t > s$ выполняется неравенство*

$$\big\|P_{t,s} - P\big\|^2_{\mathscr{X}\to\mathscr{H}} \leqslant B(t-s)^{-2},$$

то для всех $f \in \mathscr{X}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^{-2}\, d\sigma_{f-Pf}(x) \leqslant 8B \big\|f\big\|^2_{\mathscr{X}}.$$

Теорема 3. *Пусть $\alpha \in [0, 2]$, $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{H}$ — его векторное подпространство со своей нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$. На пространстве $\mathscr{X}$ будет равномерная степенная с показателем α сходимость в теореме фон Неймана тогда и только тогда, когда $I - P$ является непрерывным вложением $\mathscr{X}$ в $\mathscr{X}_\alpha$ в случае $\alpha \in [0, 2)$, и, соответственно, непрерывным вложением $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ при $\alpha = 2$. Здесь*

$$\mathscr{X}_\alpha = \big\{ f \in \mathscr{H} \big|\ \exists\, A > 0\ \forall\, \delta > 0\ \ \sigma_f(-\delta, \delta] \leqslant A\delta^\alpha \big\}$$

с нормой

$$\big\|f\big\|^2_{\mathscr{X}_\alpha} = \inf\big\{ A \,|\, \forall\, \delta > 0\ \ \sigma_f(-\delta, \delta] \leqslant A\delta^\alpha \big\},$$

а $\mathscr{Y}$ состоит из векторов образа $\mathscr{R}(\mathbf{B})$ генератора $\mathbf{B}$ унитарного потока с нормой

$$\big\|f\big\|_{\mathscr{Y}} = \sup_{t>0} \left\| \int\limits_0^t U^\tau f\, d\tau \right\|_{\mathscr{H}}, \quad f \in \mathscr{R}(\mathbf{B}).$$

Отметим, что аналогичные результаты справедливы и для дискретного времени.

Литература

1. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Тодиков В. Э.* Uniform convergence on subspaces in von Neumann's ergodic theorem with continuous time // Сиб. электр. мат. изв.—2023.— Т. 20, № 1.—С. 183–206.
2. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Хакимбаев А. Ж.* Равномерная сходимость на подпространствах в эргодической теореме фон Неймана с дискретным временем // Мат. заметки.—2023.—Т. 113, № 5.—С. 713–730.
3. *Ben-Artzi J., Morisse B.* Uniform convergence in von Neumann's ergodic theorem in the absence of spectral gap // Ergodic Theory Dyn. Syst.—2021.— Vol. 41, № 6.—P. 1601–1611.

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF SIX-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. THIRD TRIPLET STATE

S. M. Tashpulatov (Uzbekistan, Tashkent; INP AS RUz)

We consider the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model and describe the structure of the essential spectra and discrete spectrum of the system for third triplet state. The Hamiltonian of the model has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}.$$

Here A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites, τ which means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, $\gamma = \uparrow$ or $\gamma = \downarrow$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. In the six electron systems has a octet state, quintet states, triplet states and singlet states. The energy of the system depends on its total spin S. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fo'ck space $\widetilde{\mathscr{H}_{as}}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\widetilde{\mathscr{H}_{as}}$. The third triplet state corresponds to the free motion of six electrons over the lattice and their interactions with the basic functions ${}^3t^1_{p,q,r,k,l,n\in Z^\nu} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\downarrow}a^+_{l,\downarrow}a^+_{n,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^3\mathscr{H}^1_t$, corresponding to the third triplet state is the set of all vectors of the form ${}^3\psi^1_t = \sum_{p,q,r,k,l,n\in Z^\nu} f(p,q,r,k,l,n)\,{}^3t^1_{p,q,r,k,l,n\in Z^\nu}$, $f \in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^6)$. We denote by ${}^3H^1_t$ the restriction of operator H to the subspace ${}^3\mathscr{H}^1_t$. Let $\mathscr{F} : l_2((Z^\nu)^6) \to L_2((T^\nu)^6) \equiv {}^3\widetilde{\mathscr{H}^1_t}$ be the Fourier transform, where T^ν is the $\nu-$ dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i. e. $\lambda(T^\nu) = 1$. We set ${}^3\widetilde{H}^1_t = \mathscr{F}\,{}^3H^1_t\mathscr{F}^{-1}$.

Theorem 1. *The Fourier transform of operator ${}^3H^1_t$ is an operator ${}^3\widetilde{H}^1_t = \mathscr{F}\,{}^3H^1_t\mathscr{F}^{-1}$ acting in the space $L^{as}_2((T^\nu)^6)$ be the formula*

$$\begin{aligned}{}^3\widetilde{H}^1_t\,{}^3\psi^1_t = h(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\chi)f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\chi) + U\int\limits_{T^\nu}\big[f(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s,\eta,\chi)+\\ + f(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s,\eta,\chi) + f(\lambda,\mu,s,\gamma+\theta-s,\eta,\chi) + f(\lambda,\mu,\gamma,s,\eta,\theta+\chi-s)+\\ + f(s,\mu,\gamma,\theta,\lambda+\eta-s,\chi) + f(\lambda,s,\gamma,\theta,\mu+\eta-s,\chi) + f(\lambda,\mu,s,\theta,\gamma+\eta-s,\chi)+\\ + f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,s,\eta+\chi-t)\big]\,ds,\end{aligned}$$

where

$$h(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\chi) = 6A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\lambda_i + \cos\mu_i + \cos\gamma_i + \cos\theta_i + \cos\eta_i + \cos\chi_i\big],$$

and L^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^6)$.

Theorem 2. *Let $\nu = 1$ and $U < 0$. Then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of seven segments:*

$$\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup$$
$$\cup [a+e+\widetilde{z}_2, b+f+\widetilde{z}_2] \cup [a+\widetilde{z}_2+z_3, b+\widetilde{z}_2+z_3] \cup [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup$$
$$\cup [c+z_1+z_3, d+z_1+z_3] \cup [e+z_1+\widetilde{z}_2, d+z_1+\widetilde{z}_2],$$

and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of no more then one eigenvalue $\sigma_{\rm disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{z_1+\widetilde{z}_2+z_3\}$, or $\sigma_{\rm disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \varnothing$, here and hereafter

$$a = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}, \quad b = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}, \quad c = -2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2},$$

$$d = -2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}, \quad e = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2}, \quad f = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2},$$

$$z_1 = 2A - 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}, \quad \widetilde{z}_2 = -2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}},$$

$$z_3 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}}, \quad \Lambda_1 = \lambda+\theta, \quad \Lambda_2 = \mu+\gamma, \quad \Lambda_3 = \eta+\chi.$$

Theorem 3. *Let $\nu = 1$ and $U > 0$. Then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of seven segments:*

$$\sigma_{ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\widetilde{z}_3, b+d+\widetilde{z}_3] \cup$$
$$\cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+\widetilde{z}_3, b+z_2+\widetilde{z}_3] \cup [c+e+\widetilde{z}_1, d+f+\widetilde{z}_1] \cup$$
$$\cup [c+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3, d+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3] \cup [e+\widetilde{z}_1+z_2, d+\widetilde{z}_1+z_2],$$

and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of more then one eigenvalue $\sigma_{\rm disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{\widetilde{z}_1+z_2+\widetilde{z}_3\}$, or $\sigma_{\rm disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \varnothing$, where

$$\widetilde{z}_1 = 2A + 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}, \quad z_2 = -2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}},$$

$$\widetilde{z}_3 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}}.$$

Theorem 4. *Let $\nu = 3$, $U > 0$, $\Lambda_1 = \lambda+\theta$, $\Lambda_2 = \mu+\gamma$, $\Lambda_3 = \eta+\chi$, $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$ and $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$.*

Then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of seven segments, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of no more one eigenvalue, or the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of four segments, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is empty set, or the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of two segments, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is empty set, or the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of single segment, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is empty set.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ НЕТОЧНО ЗАДАННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

С. А. Унучек (Россия, Москва; НИУ «МЭИ»)

Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}), \end{cases}$$

заключающуюся в нахождении функции $u(\cdot,\cdot)$ при заданном распределении температуры $f(\cdot)$ в начальный момент времени. Последнее понимается так: $u(\cdot, t) \to f(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{T})$.

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}\big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big),$$

где $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$, $k = 0, 1, \ldots$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$, $k = 1, \ldots$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности $u(\cdot,\tau)$, $\tau > 0$, для граничных значений из некоторого класса $W \subset L_2(\mathbb{T})$ по неточно заданному конечному числу коэффициентов Фурье решения $u(\cdot, T)$, $0 < \tau < T$. Для любой функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ положим $Ff(\cdot) = (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$, где $\{a_k\}_{k=0}^n$ и $\{b_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$. Через l_2^{2n+1} обозначим пространство векторов $a = (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ с нормой $\|a\|_{l_2^{2n+1}} = \big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \big(a_k^2 + b_k^2\big)\big)^{1/2}$.

Будем считать, что для любой начальной функции $f(\cdot) \in W$ нам известен вектор $\widetilde{a} \in l_2^{2n+1}$ такой, что $\|Fu(\cdot,T) - \widetilde{a}\|_{l_2^{2n+1}} \leqslant \delta$. Требуется по этой информации восстановить наилучшим образом решение $u(\cdot,\tau)$. Под методом восстановления m понимается отображение $m\colon l_2^{2n+1} \to L_2(\mathbb{T})$. Погрешность восстановления для метода m определим следующим образом:

$$e(W,\delta,n,m) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W,\ \widetilde{a}\in l_2^{2n+1},\\ \|Fu(\cdot,T)-\widetilde{a}\|_{l_2^{2n+1}}\leqslant\delta}} \big\|u(\cdot,\tau) - m(\widetilde{a})(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Нас будет интересовать оптимальная погрешность восстановления $E(W,\delta,n) = \inf_{m\colon l_2^{2n+1}\to L_2(\mathbb{T})} e(W,\delta,n,m)$, а также метод, на котором достигается нижняя грань (если таковой существует), называемый оптимальным.

Из общих результатов о задачах восстановления известно, что если W — центрально-симметричный класс, имеет место следующая оценка

$$E(W,\delta,n) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in W,\\ \|Fu(\cdot,T)\|_{l_2^{2n+1}}\leqslant\delta}} \big\|u(\cdot,\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{T})}. \tag{1}$$

Решим задачу оптимального восстановления на классе $W = BL_2(\mathbb{T}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}) : \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1\}$. Положим $x_k = e^{2k^2T}$, $y_k = e^{2k^2(T-\tau)}$. Рассмотрим вогнутую кривую $y = x^{1-\tau/T}$, $x \geqslant 0$. Очевидно, что точки $M_k = (x_k, y_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, лежат на этой кривой. Построим ломаную, соединяющую точки M_k и M_{k+1}, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Найдем минимальный номер k_0, удовлетворяющий условию

$$y_{k_0} - \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}\, x_{k_0} = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \left(y_k - \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} x_k \right).$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \dfrac{e^{2j^2(T-\tau)} e^{2(j+1)^2T} - e^{2(j+1)^2(T-\tau)} e^{2j^2T}}{e^{2(j+1)^2T} - e^{2j^2T}}, \ \delta \in \left[\sqrt{1/x_{j+1}}; \sqrt{1/x_j}\,\right], \ j < k_0, \\ e^{2{k_0}^2(T-\tau)} \dfrac{e^{2(n+1)^2\tau} - e^{2{k_0}^2\tau}}{e^{2(n+1)^2\tau}}, \ \delta \leqslant \sqrt{1/x_{k_0}}, \end{cases} \tag{2}$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \dfrac{e^{2(j+1)^2(T-\tau)} - e^{2j^2(T-\tau)}}{e^{2(j+1)^2T} - e^{2j^2T}}, \ \delta \in \left[\sqrt{1/x_{j+1}}; \sqrt{1/x_j}\,\right], \ j < k_0, \\ \dfrac{1}{e^{2(n+1)^2\tau}}, \ \delta \leqslant \sqrt{1/x_{k_0}} \end{cases}$$

Теорема 1. *При $\delta < 1$ погрешность оптимального восстановления $E(W, \delta, n) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1\delta^2 + \widehat{\lambda}_2}$, где $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ определены равенствами* (2). *Методы $m(\widetilde{a})(x) = \frac{\alpha_0\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k\widetilde{a}_k \cos kx + \beta_k\widetilde{b}_k \sin kx\right)$, где α_0, α_k, β_k, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что*

$$\begin{gathered} \frac{(e^{k^2(T-\tau)} - \alpha_k)^2}{e^{2k^2\,T}\,\widehat{\lambda}_2} + \frac{\alpha_k^2}{\widehat{\lambda}_1} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \\ \frac{(e^{k^2(T-\tau)} - \beta_k)^2}{e^{2k^2\,T}\,\widehat{\lambda}_2} + \frac{\beta_k^2}{\widehat{\lambda}_1} \leqslant 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \end{gathered} \tag{3}$$

являются оптимальными. При $\delta \geqslant 1$ $E(W, \delta, n) = 1$, а метод $m(\widehat{a})(x) = 0$ является оптимальным.

Литература

1. *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions.—Huntington, New York: Nova Science Publ., Inc., 2000.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. ГМ.* Выпуклый анализ и его приложения.—М: URSS, 2020.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54.
4. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении решений разностных уравнений по неточным измерениям // Проблемы мат. анализа.—2013.—Т. 69.—С. 47–54.
5. *Унучек С. А.* Оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности, точные на тригонометрических полиномах // Мат. заметки.—2023.—Т. 113, № 1.—С. 118–131.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

НИЖНИЕ ОГИБАЮЩИЕ ПО ВЫПУКЛЫМ КОНУСАМ В ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДЕЛАХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК[1]

Б. Н. Хабибуллин (Россия, Уфа; ИМВЦ УФИЦ РАН)

Для различных подмножеств из разнообразных упорядоченных пространств функций (или операторов) часто важно выявить условия на подклассы, при которых для каждой функции (оператора) из подмножества найдется нижняя огибающая из подкласса. Эти вопросы были рассмотрены недавно в [1–3] с указаниями их возможных применений к широкому кругу проблем прежде всего комплексного анализа. Приведем один из полезных для этого результатов.

Далее $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества всех соответственно *натуральных, вещественных, комплексных чисел*; $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant)$ над полем $\mathbb{R}$ с отношением порядка $\leqslant$ — *векторная решетка,* если существует *точная верхняя грань* $X\text{-}\sup F \in X$ для любого конечного $F \subset X$. Для пары векторных решеток X и Y через $\operatorname{lin}^+ Y^X$ обозначаем *выпуклый конус линейных положительных,* или *возрастающих, функций* $l\colon X \to Y$. Пусть $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность *векторных решеток* $(X_n, \leqslant_n)$, $\prod X_n := \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ — их произведение, и для $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \prod X_n$ полагаем $\operatorname{pr}_n x = x_n \in X_n$, а $x \leqslant x'$ в $\prod X_n$, если $\operatorname{pr}_n x \leqslant_n \operatorname{pr}_n x'$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$. Пусть $p_n \in \operatorname{lin}^+ X_n^{X_{n+1}}$ и $X_n\text{-}\sup p_n(F_{n+1}) = p_n\,(X_{n+1}\text{-}\sup F_{n+1})$ *для каждого конечного* $F_{n+1} \subset X_{n+1}$, а $\operatorname{proj}\lim X_n p_n := \left\{x \in \prod X_n :\ \operatorname{pr}_n x = p_n(\operatorname{pr}_{n+1} x) \text{ при всех } n \in \mathbb{N}_0\right\}$ с тем же отношением порядка $\leqslant$ — векторная решетка, называемая *проективным пределом последовательности* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *по* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Не умаляя общности, всегда можно считать, что $\operatorname{pr}_n X := \{\operatorname{pr}_n x :\ x \in X\} = X_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ [1–2, Предложение 3.1], [3, Предложение 2.1.1]. Подмножество $B \subset X$ *ограничено снизу* (*сверху*) *в* X, если существует $x \in X$, для которого $x \leqslant b$ (соответственно $b \leqslant x$) для всех $b \in B$, и B *ограничено в* X, если B ограничено и снизу, и сверху в X. Для *расширенной вещественной прямой* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ с обычным отношением порядка и *пустого множества* $\varnothing$, как всегда, $\inf\varnothing = +\infty = \sup\mathbb{R}$ и $\sup\varnothing = -\infty = \inf\mathbb{R}$.

Теорема [1–2, Теорема 2, Следствия 6.1 и 3.1], [3, Теорема 2.4.1, Следствия 2.4.1 и 2.1.1]. *Пусть* $H \subset X := \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ *— выпуклый конус и* $0 \in H$, *а для любой ограниченной в* X *последовательности* $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, $h^{(k)} \in H$, *существует принадлежащий* H *верхний предел*

$$\limsup_{k\to\infty} h^{(k)} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} h^{(k)} \in H.$$

Пусть также $S \subset X$ *— векторное подпространство, содержащее* H, *и при каждом* $n \in \mathbb{N}_0$ *для любого* $s_n \in \operatorname{pr}_n S$ *найдется такое* $h_n \in \operatorname{pr}_n H$, *что* $h_n \leqslant_n s_n$, *а для*

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

некоторой функции $q_0 \in \lin^+ \mathbb{R}^{X_0}$ *и для суперпозиции* $q := q_0 \circ \mathrm{pr}_0 \in \lin^+ \mathbb{R}^X$ *с* q_0 *при любой убывающей в* X *последовательности* $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *векторов* $h^{(k)} \in H$ *при конечности* $\inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{R}$ *эта последовательность* $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *ограничена снизу в* X *и* $q\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\right) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)})$. *Тогда для каждого* $s \in S$ *точная верхняя грань* $\sup\{q(h) :\ H \ni h \leqslant s\} \in \overline{\mathbb{R}}$ *равна точной нижней грани*

$$\inf\Big\{(l_n \circ \mathrm{pr}_n)(s) :\ n \in \mathbb{N}_0,\, l_n \in \lin^+ \mathbb{R}^{\mathrm{pr}_n S},\\ q(h) \leqslant (l_n \circ \mathrm{pr}_n)(h) \text{ при всех } h \in H\Big\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Приведем одно следствие для случая выпуклых подконусов в конусе субгармонических функций на области D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ размерности $d \in \mathbb{N}$ с *d-мерной мерой Лебега,* или *мерой евклидова объема*, $\mathfrak{m}_d$ на $\mathbb{R}^d$. Через $\overline{B}_x(r) \subset \mathbb{R}^d$ обозначаем *замкнутый шар радиуса* $r > 0$ *с центром* $x \in \mathbb{R}^d$, а для $\mathfrak{m}_d$-измеримой в окрестности $\overline{B}_x(r)$ вещественной ограниченной функции m через $m^{\bullet r}(x)$ обозначаем *интегральное среднее по* $\mathfrak{m}_d$ *от функции* m *на* $\overline{B}_x(r)$. *Постоянные* $c \in \overline{\mathbb{R}}$ рассматриваются и как *функции, тождественно равные* c.

Следствие. *Пусть* H *— выпуклый конус, состоящий из субгармонических функций на области* $D \subset \mathbb{R}^d$, *не содержащий постоянную* $-\infty$ *и содержащий постоянные* 0 *и* -1, *а также для любой последовательности функций из* H, *локально ограниченной сверху на* D, *верхняя регуляризация поточечного верхнего предела этой последовательности принадлежит выпуклому конусу* H, *когда верхний предел этой последовательности не константа* $-\infty$, u *и* M *— пара функций из* H, *а* $\mathfrak{m}_d$*-измеримая функция* $m\colon D \to \mathbb{R}$ *локально ограничена.*

Тогда существование функции $h \in H$, *с которой* $u + h \leqslant M + \limsup_{0<r\to 0} m^{\bullet r}$ *на* D, *равносильно существованию какого-нибудь шара* $\overline{B}_o(r) \subset D$, *для которого*

$$\sup_{\mu}\left(\int\limits_D u\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_D (M+m)\,\mathrm{d}\mu\right) < +\infty,$$

где точная верхняя грань $\sup_\mu$ *берется по всем положительным борелевским мерам* μ *с компактным носителем в* D, *удовлетворяющим ограничению*

$$\int\limits_{\overline{B}_o(r)} h\ \mathrm{d}\mathfrak{m}_d \leqslant \int\limits_D h\,\mathrm{d}\mu \quad \text{для всех функций} \quad h \in H.$$

Литература

1. *Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллина Э. Б.* Порядковые версии теоремы Хана — Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // Комплексный анализ. Мат. физика. Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»—М.: ВИНИТИ, 2019.—Т. 162.—С. 93–135.
2. *Khabibullin B. N., Rozit A. P., Khabibullina E. B.* Order versions of the Hahn–Banach theorem and envelopes. II. Applications to function theory // J. Math. Sci.—2021.—Т. 257, № 3.—С. 366–409.
3. *Хабибуллин Б. Н.* Огибающие в теории функций.—Уфа: РИЦ БашГУ, 2021.—140 с.

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ — ЯКОБИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров (Россия, Махачкала; ДФИЦ РАН)

Пусть $-1 < \alpha, \beta < -1/2$, $a, b > -1$, $\mu(x) = \mu(a, b, x) = (1-x)^a(1+x)^b$ — весовая функция, а $1 \leqslant p(x) < \infty$ — переменным показатель, измеримая на $[-1, 1]$ функция. Пространством Лебега с переменным показателем $L_\mu^{p(\cdot)}([-1, 1])$ назовем множество функций f, для которых имеет место неравенство

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^{p(x)} \mu(x)\, dx < \infty.$$

Пространство $L_\mu^{p(\cdot)}([-1, 1])$ нормируемо и одну из эквивалентных норм можно задать [1] следующим образом

$$\|f\|_{p(\cdot),\mu}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} \mu(x) dx \leqslant 1 \right\}.$$

Далее нам понадобятся полиномы Якоби, которые можно определить [2] с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\mu(\alpha, \beta, x)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \mu(\alpha, \beta, x) \sigma^n(x) \right\},$$

где $\sigma(x) = 1 - x^2$. При $\alpha, \beta > -1$, полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $\mu(\alpha, \beta, x)$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) \mu(\alpha, \beta, x)\, dx = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{nm},$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}.$$

При условии $p \geqslant 1$ для функции $f \in L_\mu^{p(\cdot)}([-1, 1])$ можно определить коэффициенты Фурье — Якоби

$$f_k^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}} \int_{-1}^{1} f(x) P_k^{\alpha,\beta}(x) \mu(\alpha, \beta, x)\, dx$$

и сопоставить ей ряд Фурье — Якоби

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x).$$

Определим также частичные суммы Фурье — Якоби

$$S_n^{\alpha,\beta}(f) = S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x).$$

Целью данной работы является исследование вопроса сходимости частичных сумм $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ к $f \in L_\mu^{p(x)}([-1,1])$ по норме пространства $L_\mu^{p(\cdot)}([-1,1])$. Для этого через $\mathscr{P}(-1,1)$ обозначим класс переменных показателей $p(x)$, заданных на $[-1,1]$ и удовлетворяющих условиям:

A) условие Дини — Липшица

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{d}{-\ln|x-y|}, \quad |x-y| \leqslant \frac{1}{2};$$

B) $\underline{p}([-1,1]) = \min_{x\in[-1,1]} p(x) > 1$;

C) для $p(x)$ существуют (произвольно малые) числа $\delta_i = \delta_i(p)$ $(i = 1,2)$ такие, что $p(x) = p(-1)$ для $x \in [-1, -1+\delta_1]$ и $p(x) = p(1)$ для $x \in [1-\delta_2, 1]$.

Основным результатом является следующая

Теорема. *Положим* $-1 < \alpha, \beta < -1/2$, $\mu(x) = \mu(a,b,x) = (1-x)^a(1+x)^b$, $p(x) \in \mathscr{P}(-1,1)$ *и* $1 < p(\pm 1) < \infty$. *Тогда*

$$\left\|S_n^{\alpha,\beta}(f)\right\|_{p(\cdot),\mu}([-1,1]) \leqslant c(\alpha,\beta,p)\|f\|_{p(\cdot),\mu}([-1,1]),$$

если

$$\left|\frac{a+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2}\right| < \frac{\alpha+1}{2},$$

$$\left|\frac{b+1}{p} - \frac{\beta+1}{2}\right| < \frac{\beta+1}{2}.$$

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

НАИЛУЧШЕЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЗНАЧЕНИЕ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

Г. А. Юсупов (Таджикистан, Душанбе; ТГПУ им. С. Айни)

В последнее время интенсивно изучается вопрос о наилучшем приближении аналитических в круге функций в различных банаховых пространств (см., например, [1–3] и библиографические комментарии к ним). В данной работе мы продолжим исследования в этом направление, а именно изучаем аппроксимативные свойства аналитических в единичном круге функций

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k,\quad z=\rho e^{it},\ 0\leqslant\rho<1,\ 0<t\leqslant 2\pi,$$

в пространстве Харди H_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, с конечной нормой [4]

$$\|f\|_p:=\|f\|_{H_p}=\lim_{\rho\to 1-0}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f(\rho e^{it})\right|^p dt\right\}^{1/p}.$$

Известно [5], что норма функций $f\in H_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, реализуется на угловых граничных значениях f, которых обозначим $F(t):=f(e^{it})$. Через $F^{(r)}(t)$ $(r=0,1,2,\dots)$ обозначим граничные значения функции $f^{(r)}(z)=d^rf/dz^r$, а через $H_p^{(r)}$, $1\leqslant p\leqslant 2$, обозначим множество функций $f\in H_p$, у которых $f^{(r)}\in H_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Величина $E_n(f)_p:=E(f;\mathscr{P}_{n-1})_{H_p}=\inf\left\{\|f-p_{n-1}\|_p:\ p_{n-1}\in\mathscr{P}_{n-1}\right\}$ называется наилучшее приближение функций $f\in H_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, подпространством $\mathscr{P}_{n-1}$ — комплексных алгебраических полиномов степени $\leqslant n-1$.

Если функция $f\in H_p$ имеет непрерывные граничные значения $F(t)$, то их гладкость характеризуем модулем непрерывности m-го порядка в обычном L_q-норме равенством $\omega_m(f,t)=\sup\left\{\left\|\Delta_h^m(f,\cdot)\right\|_q:\ |h|\leqslant t\right\}$, где $\triangle_h^m(f,t)=\sum\limits_{l=0}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}f(t+lh)$ — разность m-го порядка функции f с шагом h. Всюду далее полагаем $F^{(r)}(t)\neq\mathrm{const}$.

Для формулировки последующих результатов для произвольной функции $f\in H_2^{(r)}$ введем в рассмотрение экстремальную характеристику вида

$$\mathscr{B}_{m,n,r}(h)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup_{f\in H_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}\alpha_{n,r}\,E_{n-1}(f)_p}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^{2/m}(F^{(r)},t)dt\right)^{m/2}},\tag{1}$$

где $m,n,r\in\mathbb{N}$, $r<n$, $0<h\leqslant\pi/(n-r)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, а $\alpha_{n,r}=n(n-1)\dots(n-r+1)$.

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $r < n$, $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Тогда для любых чисел* $0 < h \leqslant \pi/(n-r)$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{B}_{m,n,r}(h) = \left\{ \frac{n-r}{(n-r)t - \sin(n-r)t} \right\}^{m/2}. \tag{2}$$

Существует функция $f_0 \in H_p^{(r)}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *для которой достигается верхняя грань в* (1), *реализующая равенство* (2).

Величины $b_n(\mathfrak{M}, H_p)$, $d^n(\mathfrak{M}, H_p)$, $d_n(\mathfrak{M}, H_p)$, $\lambda_n(\mathfrak{M}, H_p)$ называют бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским и линейным n-поперечниками множества $\mathfrak{M}$ в пространстве H_p (см., например [6]).

Пусть $\Phi(x)$ $(x \geqslant 0)$ — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Введем в рассмотрение следующий класс функций:

$$W_{m,h}^{(r)}\big(\Phi\big) = \left\{ f \in H_2^{(r)} : \left(\int_0^h \omega_m^{2/m}\big(F^{(r)}, t\big)\, dt \right)^{m/2} \leqslant \Phi(h) \right\}.$$

Далее полагаем $(1 - \cos t)_* := \{1 - \cos t, \text{ если } 0 < t \leqslant \pi;\ 2, \text{ если } t \geqslant \pi\}$.

Теорема 2. *Пусть мажоранта* $\Phi(h)$ *при любых* $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ $(n > r)$ *удовлетворяет условию*

$$\left\{ \frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(n-r)\big)} \right\}^{2/m} \geqslant \frac{n-r}{\pi} \int_0^h \big(1 - \cos(n-r)t\big)_*\, dt. \tag{3}$$

Тогда справедливы равенства

$$\delta_n\big(W_{m,h}^{(r)}\big(\Phi\big), H_2\big) = \alpha_{n,r}^{-1} \left\{ \frac{n-r}{2\pi} \right\}^{m/2} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r} \right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ — *любой из перечисленных выше* n*-поперечников. Множество мажорант, удовлетворяющих условию* (3), *не пусто.*

Литература

1. *Юсупов Г. А.* Минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Докл. АН Респ. Таджикистан.—2007.—Т. 50, № 11–12.—С. 811–818.
2. *Юсупов Г. А.* О некоторых экстремальных задачах наилучшего приближения в весовом пространстве Бергмана // Изв. Респ. Таджикистан. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук.—2009.—№ 1 (134).—С.18–30.
3. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Заргаров Дж. Дж.* О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН.—2021.—Т. 27, № 4.—С. 239–254.
4. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H_p.—М.: Мир.—1984.—256 с.
5. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций.—М.: Гостехиздат, 1950.—350 с.
6. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.—М.: МГУ, 1976.—325 с.

Секция II

Математическое моделирование

ИССЛЕДОВАНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ В КОНЕЧНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА»[1]

А. Алмасри (Сирия, Латакия, Тишринский университет; Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ),
В. Г. Цибулин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Проводится анализ мультистабильности в конечномерной модели, описывающей динамику трех популяций: жертва с логистическим ростом, потребляющий ее хищник и суперхищник, питающийся обоими видами. Математически задача описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассматриваемая модель при дополнительных условиях на параметры относится к классу косимметричных динамических систем [1], для которых возможно возникновение непрерывных семейств решений [2].

Рассматривается трофическая цепь, состоящая из жертвы $x(t)$, хищника $y(t)$ и суперхищника $z(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x\,(1-x) - \frac{xy}{1+b_1x} - \frac{xz}{1+b_1x},\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\eta_1 xy}{1+b_1x} - \frac{d_1yz}{1+b_2y+b_3z} - \mu_1 y,\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\eta_2 xz}{1+b_1x} + \frac{d_2yz}{1+b_2y+b_3z} - \mu_2 z.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь μ_1, μ_2 — коэффициенты естественной смертности хищника (y) и суперхищника (z), η_1, η_2 — коэффициенты пищевой ценности, d_1, d_2 — коэффициенты, описывающие контакты видов, b_j — коэффициенты функционального отклика Холлинга II рода и Беддингтона-ДеАнгелиса.

Для $b_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) получается система с мультистабильностью при выполнении условий на параметры:

$$\mu_2 = d_2\Big(1 + \frac{\mu_1}{d_1}\Big), \quad \eta_2 = d_2\Big(1 + \frac{\eta_1}{d_1}\Big).$$

В этом случае имеется косимметрия $L = \big[yz, -\frac{1}{d_1}xz, \frac{1}{d_2}xy\big]^T$ и семейство равновесий определяется явными формулами:

$$Q = \left[x \in \left[\frac{\mu_1}{\eta_1}, \frac{d_1+\mu_1}{d_1+\eta 1}\right],\ y = 1 + \frac{\mu_1}{d_1} - \Big(1 + \frac{\eta_1}{d_1}\Big)x,\ z = \frac{\eta_1 x - \mu_1}{d_1}\right]. \tag{2}$$

Семейство стационарных решений является устойчивым, реализация конкретного равновесия определяется начальными данными (см. рис. 1). Вычислительный эксперимент по установлению из различных начальных точек демонстрирует расслоение фазового пространства на континуум бассейнов. Найдены случаи, при которых установление происходит колебательно.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 23-21-00221, в Южном федеральном университете.

При $b_j \neq 0$ вычисляется косимметричный дефект [1] и в результате подстановки семейства получается селективная функция

$$S(x) = xyz\left(\frac{b_1 x(1-2x)}{1+b_1 x} - \frac{p_1(1-x)}{1-p_1}\right),$$

$$p_1 = b_2\Big(1+\frac{\mu_1}{\eta_1}\Big) - \frac{b_3\mu_1}{d_1} + \left[\frac{b_3\eta_1}{d_1} - b_2\Big(1+\frac{eta_1}{d_1}\Big)\right] x.$$

Анализ селективной функции проводится численно, найдены различные сценарии разрушения семейства. Изучено влияние параметров Холлинга на динамику системы. Например, на рис. 2 представлены фазовые портреты, где показано, что в результате разрушения семейства реализуется бистабильность: в зависимости от начальных данных может устанавливаться стационарное состояние с сосуществованием всех трех видов (точка M) или равновесие без суперхищника (точка E_2).

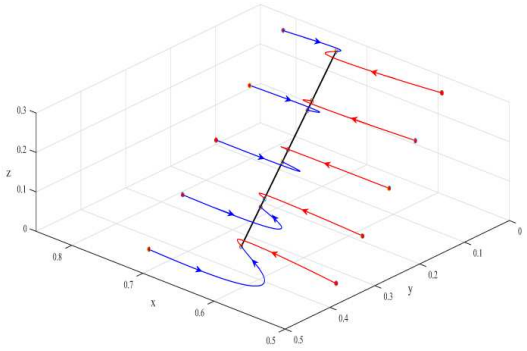


Рис. 1. Реализация равновесий семейства (черная прямая) для разных начальных условий (кружки) и параметры $\mu_1 = 0.2$, $\eta_1 = 0.3$, $d_1 = 0.09$, $d_2 = 0.1$, $b_j = 0$.

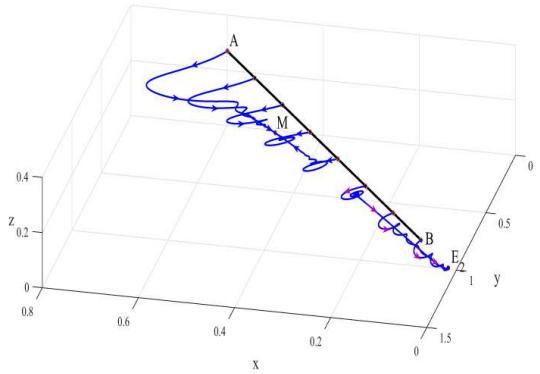


Рис. 2. Разрушение семейства равновесий (прямая AB) для разных начальных условий и параметры $\mu_1 = 0.02, \eta_1 = 1.1, d_1 = 2, d_2 = 1.1, b_1 = 0.5, b_2 = 0.1, b_3 = 0.1$.

Литература

1. *Юдович В. И.* Бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Докл. РАН.—2004.— Т. 398, № 1.—С. 57–61.
2. *Епифанов А. В., Цибулин В. Г.* О динамике косимметричных систем хищников и жертв // Компьютерные исследования и моделирование.—2017.—Т. 9, № 5.— С. 799–813.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРЕСТЕНСОНА

М. С. Беспалов (Россия, Владимир; ВлГУ)

Основными операторами применяемыми при цифровой обработке сигналов служат операторы дискретного преобразования Фурье (ДПФ), Уолша (ДПУ) и Крестенсона (ДПК). Матрица дискретного преобразования Крестенсона определяется в виде кронекеровой степени матрицы дискретного преобразования Фурье. Свойства ДПК с соответствующими видоизменениями повторяют свойства оператора ДПФ. Операторы ДПК практически привлекательны, поскольку применяются для обработки массивов большого объема и имеют преимущества перед ДПФ.

Задачи диагонализации дискретных преобразований Фурье и Уолша составляют важную часть теории этих операторов. В частности, оператор ДПФ есть оператор кручения порядка 4, а его собственные числа $\{1, i, -1, -i\}$ корни четвертой степени из единицы. Через равномерный базис из собственных векторов осуществляется процесс диагонализации оператора ДПФ.

Оператор ДПК также является оператором кручения порядка 4 с теми же собственными числами. В [1] описана общая методика получения базисов из собственных векторов для таких операторов через проекторы на собственные подпространства на примере оператора ДПФ. Однако, даже для ДПФ формальный подход к этой методике не гарантирует получение равномерного базиса. Тем более для ДПК этот общий метод приводит к громоздко представленным результатам. Интересный метод нахождения равномерного базиса собственных подпространств для оператора ДПУ-Пэли предложен в [2]. Но ДПУ есть оператор кручения второго порядка. Поэтому перенос этого метода на ДПК не столь очевиден и использует анализ орбит оператора из [3].

В докладе приводится результат исследования оператора ДПК вида $F_3 \oslash F_3$ второй b-степени [4] матрицы

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & q^2 & q \end{pmatrix},$$

где $q = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Столбцы матрицы F_3 принято называть дискретными экспоненциальными функциями (ДЭФ) и обозначать r^0, r, r^2 (воспринимая степени векторов относительно умножения по Адамару). Кроме данного базиса ДЭФ в трехмерном пространстве рассматривают стандартный базис $e_0 = (100)^T$, $e_1 = (010)^T$, $e_2 = (001)^T$. Пронормируем рассматриваемый оператор ДПК $J = \frac{1}{3} F_3 \oslash F_3$. В классе кронекеровых произведений этих базисов получим следующие орбиты этого оператора J: 1) $e_0 \otimes r^0$; 2) $e_0 \otimes r \to e_2 \otimes r^0 \to e_0 \otimes r^2 \to e_1 \otimes r^0$; 3) $e_1 \otimes r \to e_2 \otimes r^1 \to e_2 \otimes r^2 \to e_1 \otimes r^2$. Каждая из орбит 2 и 3 по методике из [3]

порождает по 4 ортогональных собственных вектора, по внешнему виду близкими друг другу. Пронормируем эти векторы и запишем по строкам в унитарную матрицу

$$U = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & a & -b & \sqrt{2} & b & -a \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & b & -a & -\sqrt{2} & a & -b \end{pmatrix},$$

где $a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

Известная формула диагонализации линейного оператора $D = U^T JU$ приводит к матрице

$$D = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -i, -i, -1, -1, i, i).$$

В [2] после проведения процесса диагонализации оператора ДПУ-Пэли были предложены два дополняющих фрейма Парсеваля для собственных подпространств этого оператора. В нашем случае четыре собственных подпространства, что позволяет выписать 4 фрейма Парсеваля. Представленную унитарную матрицу U разобьем на четыре дизъюнктивных подматрицы построчно, выделяя 3, 2, 2 и 2 строки соответственно. Девять столбцов каждой из этих четырех подматриц и будут составлять свой фрейм Парсеваля. Здесь выделим интересное наблюдение: два фрейма Парсеваля для подпространств с комплекными числами i и $-i$ будут совпадать с точностью до знаков векторов и их порядка. Наблюдение говорит о том, что для фрейма Парсеваля важно его упорядочение.

Подобные вычисления проделаны также для оператора $F_4 \oslash F_4$.

Интересно, что задача диагонализации оператора ДПУ-Адамара решается совсем другим методом. Аналогично и здесь, для основного оператора ДПК с матрицей в виде кронекеровой степени матрицы ДПФ данный прием не проходит.

Литература

1. *Беспалов М. С.* Дискретные и вероятностные модели: учеб. пособие.—Владимир: ВлГУ, 2017.—84 с.
2. *Беспалов М. С.* Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша // Пробл. передачи инф.—2010.—Т. 46, № 3.—С. 253–271.
3. *Беспалов М. С.* Операторы мультипликативного преобразования Фурье // Изв. вузов. Математика.—2006.—Т. 3 (526).—С. 9–23.
4. *Беспалов М. С.* О свойствах тензорного произведения матриц // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2014.—Т. 54, № 4.—С. 547–561.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В СТРУКТУРИРОВАННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

И. Н. Булгакова (Россия, Воронеж; ВГУ)

Рассматривается сложная организационно завершенная (структурированная) экономическая система, состоящая из элементов-звеньев (подсистем), взаимосвязанных в едином процессе управления материальными и сопутствующими потоками. С точки зрения общей теории управления, основные методы улучшения качества управления социально-экономическими системами базируются на создании и включении в реальную управленческую практику каналов обратной связи. Принципиальное отличие работы контура обратной связи в экономических системах от его работы в системах технических заключается в отсутствии автоматизма в реагировании регулятора управляющей подсистемы на изменение параметров выходов из управляемой подсистемы.

Материалы и методы. Любой процесс достижения цели всегда сопровождает процессом создания специализированной системы контроля, позволяющей в фиксированные моменты времени ответить на два вопроса: где по отношению к цели находится управляемая система и какие необходимо приложить усилия, чтобы система достигла данной цели. По отношению к экономической системе целесообразно поддерживаться такой модели контроля, которая непосредственно связывает вопросы контроля и оценки качества принятия управленческих решений. Подобная модель контроля достаточно хорошо строится на основании оценок трудности достижения цели, предложенных И. Б. Руссманом.

Понятие «трудность» исходит из соображений о том, что получить результат определенного качества тем труднее, чем ниже качество ресурсов, подаваемых на входе, и выше требования к качеству результат на выходе, при прочих равных условиях. Если есть система, на входе которой подается набор ресурсов, необходимых для достижения результата. Обозначив величиной μ_i оценку качества ресурса i, заданную в полуинтервале $0 < \mu_i \leqslant 1$. Так как не все значения качества ресурсов достижимы, имеет смысл ввести минимальное требование к качеству ресурса ε_i, так же заданное в полуинтервале $0 \leqslant \varepsilon_i < 1$. Невыполнение минимального требования к качеству автоматически ведет к невыполнению требований качества результата, поэтому $\varepsilon_i \leqslant \mu_i$. Сама трудность достижения рассчитывается как

$$0 \leqslant d_i \leqslant 1, \quad d_i = \frac{\mu_i(1-\varepsilon_i)}{\varepsilon_i(1-\mu_i)}.$$

При этом $d_i(0,0) = 0$ и $d_i(1,1) = 1$. Общая трудность контроля в M-подсистемах определяется выражением

$$d = 1 - \prod_{i=1}^{M}(1-d_i).$$

Результаты исследования. Рассмотрены возможности использования теории трудности достижения цели при принятии решения в управлении структурированной экономической системой с обратной связью. Предложены и обоснованы подходы к формированию интегральной оценки в случае многокритериальной оптимизации, а также введение параметров управления уровнем риска недостижения заданных целевых показателей в контур адаптивной обратной связи регулярной управленческой деятельности.

Литература

1. *Алексеев А. П., Абрамов Г. В., Булгакова И. Н.* Проблема анализа надежности многокомпонентных сетевых систем при внешних возмущениях // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сб. тр. Междунар. науч.-тех. конф., Воронеж, 18-–20 декабря 2017 года / Воронежский государственный университет.— Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации»; ООО «Вэлборн», 2017.— С. 1557–1564.
2. *Алексеев А. П., Абрамов Г. В., Булгакова И. Н.* Разработка критерия эффективности для сложных систем различны типов на основе интегральной оценки трудности достижения цели // Вестник Воронеж. ин-та ФСИН России.—2019.—№ 1.—С. 18–25.
3. *Булгакова И. Н.* Об одном подходе к формализации процедуры выбора поставщика с учетом контроля качества продукции // РИСК: Ресурсы, Информация, Снабжение, Конкуренция.—2022.—№ 3.—С. 6–13.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О РЕКОНСТРУКЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ[1]

А. О. Ватульян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
В. О. Юров (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассмотрены установившиеся колебания неоднородного (функционально-градиентного) электроупругого стержня [1, 2]. Для решения задачи о восстановлении двух функций (упругой податливости и пьезомодуля) рассмотрены две задачи отличающиеся типом граничных условий. В первой задаче рассматриваются колебания стержня под действием электрического нагружения посредством подачи разности потенциалов на электроды, нанесенные на торцы стержня. Во второй задаче рассмотрены колебания под действием силы, прикладываемой к торцу стержня. Причем другой торец стержня считаем защемленным. Электроды на торцах стержня отсутствуют. На основе решения первой задачи определяется характеристика тока, а из второй задачи амплитуда колебаний свободного торца стержня. Будем использовать эти две характеристики в качестве информации для решения обратной задачи.

Показано существование неединственного решения обратной задачи, и предложено условие обеспечивающее единственность, которое заключается в требовании положительности пьезомодуля.

Построены асимптотические разложения по частотному параметру для амплитудно частотной характеристики (АЧХ) тока и смещений. На основе полученных разложений находятся постоянные начальные приближения для искомых функций. Для этого задаются значения обеих АЧХ в точке, и решается возникающая алгебраическая система.

Обратная задача решается на основе итерационного алгоритма типа Ньютона. Начальное приближение задается в виде линейных функций, при этом используется метод минимизации функционала невязки. Для нахождения поправок построена система интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами, которая решается методом регуляризации А.Н.Тихонова. Выполнен анализ ядер ИУФ. Проведена серия вычислительных экспериментов.

Литература

1. *Ватульян А. О., Соловьев А. Н.* Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел.—Ростов н/Д.: ЮФУ, 2008.—175 с.
2. *Ватульян А. О., Юров В. О.* О колебаниях функционально-градиентных электроупругих стержней // Проблемы прочности и пластичности.—2022.—Т. 84, № 3.—С. 351–363.

[1]Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00265.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

БИФУРКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ПЛЕНКИ

Ю. П. Вирченко (Россия, Белгород; НИУ БелГУ),
Mahari Tewolde Amanuel (Россия, Белгород; НИУ БелГУ)

Рассмотрим математическую модель, в основе которой лежит случайное множество, пространством погружения которого является бесконечная пленка, ограниченная параллельными плоскостями, составленная из N слоев одинаковой толщины ‘d, занумерованных числом $m = 1, \dots, N$ в порядке их расположения в поперечном сечении. В каждом слое расположены полусферы случайного радиуса $\tilde{r}_{k_m}^{(m)} > 0$, $m = 1 \div N$ с плотностью распределения $w(r)$, сосредоточенной на $[0, d]$. Центр каждой полусферы, при фиксированном значении m, расположен на внешней плоскости предыдущего слоя. Центры всех полусфер в каждом из слоев составляют однородные пуассоновские точечные поля $\{\tilde{x}_{k_m}^{(m)}\}$, $m = 1 \div N$ с одинаковой плотностью. Поля с разными значениями m статистически не зависят друг от друга. Таким образом, стохастическая модель представлена расслоенным случайным точечным полем, определяемым реализациями $\{\langle \tilde{x}_{k_m}^{(m)}, \tilde{r}_{k_m}^{(m)} > 0 \rangle; m = 1 \div N\}$.

Пусть U — электрическая прочность полимерного материала пленки и U_0 — электрическая прочность воздуха, который находится внутри каждой из полусфер. Ввиду случайности расположения полусфер, напряжение электрического пробоя представляет собой случайную величину с плотностью $f(E)$. Так как электрическая прочность равна $UNd - (U - U_0)\tilde{r}_{i,j}$, где $\tilde{r}_{i,j}$ — суммарный «размер» воздушных включений в канале, по которому распространяется электронная лавина при возникновении электрического пробоя, то формула для случайного напряжения пробоя принимает вид

$$\widetilde{E} = E_0 - \nu \max_{\langle i,j \rangle} \tilde{r}_{i,j},$$

где $E_0 = UNd$ — напряжение электрического пробоя чистого полимерного материала, $\nu = U - U_0 > 0$ и случайная величина $\tilde{r}_{i,j}$ представляется суммой независимых, одинаково распределенных случайных величин, распределенных с плотностью $w(r)$.

Таким образом, вероятность $\Pr\{\widetilde{E} < E\}$ возникновения электрического пробоя в том случае, если $\widetilde{E}$ превысит некоторое напряжение E, сводится к определению распределения вероятностей максимума выборки независимых одинаково распределенных величин

$$\Pr\Big\{\widetilde{E} < E\Big\} = \Pr\Big\{ \max_i \tilde{r}_i > s \Big\},$$

где $s = (E_0 - E)/\nu$. Следовательно, плотность распределения случайной величины $\widetilde{E}$ равна

$$f(E) = \frac{d}{dE}\Pr\{\widetilde{E} < E\} = \nu^{-1} \cdot q_N(s)\Big|_{s=(E_0-E)/\nu},$$

где $ds/dE = -\nu^{-1}$ и $Q_N(s) = \Pr\{\tilde{r}_{0,0} < s\}$, $q_N(s) = dQ_N(s)/ds$. Ввиду указанной выше статистической независимости, вероятность $Q_N(s)$ состоит из суммы по k вероятностей случайных событий $\{\tilde{r}_{0,0} < s$ и k ячеек канала содержат дефекты$\}$, которые являются произведением независимых при $k > 0$ событий $\{\tilde{r}_{1,1} < s\}$ и $\{k$ слоев содержат полусферы $\}$. Тогда

$$\Pr\{k \text{ слоев содержат полусферы}\} = \binom{N}{k}(1-v)^{N-k}v^k.$$

Тогда, по формуле полной вероятности получаем,

$$Q_N(s) = \Pr\{\tilde{r}_{0,0} < s\} = (1-v)^N\theta(s) + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}v^k(1-v)^{N-k}\Pr\{\tilde{r}_{0,0} < s|k \neq 0\}.$$

Таким образом, искомая вероятность полностью определяется распределением вероятностей типичной случайной величины $\tilde{r}_{0,0}$. Это есть распределение вероятностей k независимых, одинаково распределенных с плотностью $w(r)$ случайных величин.

$$\Pr\{\tilde{r}_{0,0} \leqslant s|k \neq 0\} = \int_0^s \underbrace{(w * \ldots * w)}_{k}(r)\,dr\,,$$

$$q_N(s) = (1-v)^N\delta(s) + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}v^k(1-v)^{N-k}\underbrace{(w * \ldots * w)}_{k}(s),$$

где учено, что $d\theta(s)/ds = \delta(s)$ — функция Дирака.

Доказано, что в случае, если

$$w(r) = u_0\big[\exp(-\lambda r) - \exp(-\lambda d)\big], \quad u_0 = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda d}(1+\lambda d)},$$

при достаточно больших $\lambda > 0$ плотность $f(E)$ является убывающей при $r > 0$, а при достаточно малых λ эта плотность унимодальна с вершиной в точке $r_* > 0$. Таким образом, эта плотность испытывает бифуркацию при изменении параметра $\lambda > 0$. Эта бифуркация переводит унимодальную плотность в бимодальную.

Литература

1. *Braginskii R. P., Gnedenko B. V., Zaitseva G. M., Molchanov S. A.* Theoretical and statistical investigation of the defect set in enamel-laquer electrically insulting coatings // Soviet Math. Dokl.—1989.—Vol. 38, № 3.—P. 501–505.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ТЕОРИИ ТЕПЛОВОГО ПРОБОЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛЕНКИ

Ю. П. Вирченко (Россия, Белгород; НИУ БелГУ),
В. В. Ченцова (Россия, Белгород; НИУ БелГУ)

Изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (см. [1]) переноса тепла в полупроводниковой пленке включенной в состав электрической цепи

$$\rho c\dot{T} = \nabla(\varkappa(T)\nabla T) + \sigma(T)E^2(t)\,, \tag{1}$$

где к пленке приложена постоянная электродвижущая сила. Наличие падения электрического напряжения на пленку приводит к появлению электрического тока и, как следствие, к выделению джоулева тепла $\sigma(T)E^2(t)$ в каждой пространственной точке $\mathbf{r}$ внутри пленки. В уравнении (1) ρ — постоянная плотность материала, c — удельная теплоемкость, $\varkappa(T)$ — существенно зависящий от температуры T коэффициент теплопроводности материала. Кроме того, материал пленки обладает возрастающей зависимостью от температуры удельной проводимостью $\sigma(T)$. Вследствие постоянства электродвижущей силы и изменения сопротивления пленки, падение напряжения на пленку, которое определяется пространственно однородной внутри пленки напряженностью электрического поля $E(t)$, которая, таким образом, изменяется со временем. Зависимость $E(t)$ регулируется законом Кирхгофа так, что

$$E(t) = E\left(1 + (\bar{\sigma}|\Sigma|)^{-1}\int\limits_{\Sigma}\sigma(T(\mathbf{r}',t))d\mathbf{r}'\right)^{-1}. \tag{2}$$

Здесь $\bar{\sigma}$ — средняя электропроводность материала пленки, интегрирование производится по области Σ, представленной плоскостью пленки, и $|\Sigma|$ — площадь пленки, через которую протекает электрический ток.

Для одномерного варианта уравнения (1), при наличии интегрального члена (2), показано, что его решения $T(\mathbf{r},t)$ могут обладать обострением режима [2]. Имеется бифуркация перехода от эволюционного режима «стабилизации», когда решение $T(\mathbf{r},t)$ ограничено, к режиму с обострением.

При анализе используется аппроксимация общего решения уравнения с начальными данными, локализованными на компактном носителе посредством одномерных эталонных решений нелинейного уравнения теплопроводности [2]

$$\dot{u} = (uu_x)_x + u^2.$$

Эталонные решения рассматриваются как обобщенные, слабо разрывные, в состав которых входит решение в виде

$$u(x,t) = a(t) + b(t)\cos kx,$$

$k = \sqrt{2}/2$. При этом коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют следующей автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости коэффициентов (a, b)

$$\dot{a} = a^2 + \frac{1}{2}b^2\,, \quad \dot{b} = \frac{3}{2}ab. \tag{3}$$

Для построения аппроксимаций интерес представляет случай, когда $b > |a| > 0$. Так как при $a_0 > 0$ имеют место неравенства $\dot{a} \geqslant a^2$, $a_0^{-1} - a^{-1} > t$, $a(t) > \frac{a_0}{1-a_0 t}$,

$$\frac{\dot{b}}{b} = \frac{3}{2}\,a > \frac{3}{2}\frac{a_0}{1 - a_0 t},$$

$$b > b_0 1 - a_0 t^{-3/2},$$

то решения, наверняка, обладают обострением режима. Такое положение имеет при любом знаке a_0. В этом можно убедиться точным решением системы (3), посредством сведения ее одному однородному уравнению

$$\frac{da}{db} = \frac{1}{3}\,\frac{2a^2 + b^2}{ab}$$

для траекторий системы. В результате, получаем

$$b(t) = \mathrm{tg}\left[\frac{5C}{4}\,(t + t_*)\right]^{3/2},$$

где $t_* = (4/5C)\mathrm{arctg}\big[(b_0^{2/3} - C^2)/C\big]$. Зависимость от времени амплитуды $a(t)$ определяется интегрированием выражения

$$\dot{a} = b^{4/3}\left(\frac{3}{2}\,b^{2/3} - C^2\right).$$

Тогда коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ стремятся к бесконечности одновременно, и поэтому обладают одним и тем же временем обострения. Это время равно t^* и вычисляется явно из условия обращения $b(t^*) = \infty$ так, что оно обладает слабой зависимостью от начальных данных,

$$t^* = \frac{2\pi}{5C} - t_*.$$

При этом само эталонное решение $u(x, t)$ сосредоточено на периоде $L = 2\pi/k = 2\sqrt{2}\pi$, который можно назвать его *фундаментальной длиной* [2].

Литература

1. *Virchenko Yu. P., Vodyanitskii A. A.* Semiconductors materials heat breakdown under action of the penetrating electromagnetic radiation // Functional Materials.—1996.—Vol. 3, № 3.—P. 312–319.
2. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений.—М.: Наука, 1989.—484 с.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОДОРОДИЯ ПОЧВЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЕ ТЕОРИЮ КАТАСТРОФ[1]

А. К. Гуц (Россия, Сочи; ФИЦ СНЦ РАН),
Л. А. Володченкова (Россия, Омск; ОмГУ им. Ф. М. Достоевского)

Разрабатываются математические модели плодородия почвы в рамках теории катастроф. Используются высшие ростки катастроф. Рассматриваются различные варианты учета гумуса и антропогенных воздействий на почву, а также влияния растительности. Имеющееся в теории разнообразие канонических ростков катастроф и их универсальных деформаций позволяет избирательно подходить к формулировке моделей плодородия почвы для разных природно-климатических зон. Моделирование плодородия почвы предполагает выделение числовой переменной $x(t)$, значения которой коррелируют с данными признанной бонитировочной шкалы. Таких шкал может быть не одна, поскольку трудно составить единую бонитировочную шкалу, которая охватила бы все разнообразие почв России. Как правило, используются местные, региональные бонитировочные шкалы. Они могут содержать различное число параметров, характеризующих свойства почвы. Например, шкала А. С. Серого содержит 5 показателей состояния почвы (включая гумус), а шкала Н. С. Лебедева — 13 показателей (включая гумус). Эти параметры мы рассматриваем как управляющие параметры, входящие в системы дифференциальных уравнений для величины плодородия почвы $x(t)$, биомассы растений $b(t)$ и, возможно, для величины $y(t)$, которая как показано ниже может описывать гумус.

Предлагаемая модель содержит уравнения для плодородия почвы и для биомассы и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} = (x, y), \\ \dfrac{db}{dt} = R(b, x, y, v), \end{cases} \tag{1}$$

$$V(\mathbf{x}, u) = CG(l) + \underbrace{\lambda(u) y^2}_{\text{морсова часть}} + F(\mathbf{x}, u),$$

где $CG(l)$ — *росток катастрофы*, и $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — его *универсальная деформация* (возмущение).

В работе построены несколько моделей плодородия почвы для различных ростков катастрофы. Приведем лишь две модели системы «почва–растительность». Они интересны тем, что подсказывают, что гумус может быть переменной модели, а не только управляющим параметром.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № госрегистрации 122032300363-3).

1. Модель A_5 (бабочка, 4 параметра). При выборе ростка A_6 — «бабочка» с морсовой частью y^2 вида $V(x,y,u) = x^6 + y^2 + u_1x^4 + u_2x^3 + u_3x^2 + u_4x$, система (1) принимает вид (параметры u_i переобозначены, уточнено уравнение для биомассы):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x^5 + u_1x^3 + u_2x^2 + u_3x + u_4, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y, \\ \dfrac{db}{dt} = y\left(1 - \dfrac{b}{K}\right)b - wba, \end{cases}$$

где $w > 0$ — вода, точнее ее нехватка, и $a > 0$ — влияние человека, в данном случае — пагубное.

Мы видим, что $y(t) = Ce^{-2t}$, т. е. имеется компонента в почве, которая постоянно убывает. Что моделирует переменная y? Известно, что «если удобрения не применяются, то содержание гумуса снижается, и это подтверждают исследования во всех зонах нашей страны» [1]. Таким образом, переменная y соответствует гумусу. Иначе говоря, гумус — это не управляющий параметр u_5, а переменная модели. Управляющими параметрами служат по шкале А. С. Серого

$$u_1 = \textit{азот}, \quad u_2 = \textit{фосфор}, \quad u_3 = \textit{калий}, \quad u_4 = \textit{ММЗПВ}.$$

Построенная модель — это модель плодородия почвы *без внесения удобрений*. Более того, переменная y не входит в первое уравнение, т. е. гумус уже не влияет на плодородие. Система явно описывает истощение, умирание как почвы, так и растительности.

Модель A_5 можно переписать на случай 12 управляющих параметров из шкалы Н. С. Лебедева с переменной y (гумус), используя росток катастрофы A_{13}, также описывающую истощение почвы.

2. Модель $W_{1,0}$ (2 модуля a_1, a_2, 12 параметров). Более общая модель плодородия почвы, в которой гумус — переменная y, модуль a_1 — антропогенный фактор общего характера, а модуль a_2 — влияние людей на гумус, плюс 12 управляющих параметров, использует бимодальный росток катастрофы $W_{1,0}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\big[4x^3 + 2(a_1 + a_2y)xy^3 + u_1 + 2u_3x + u_4y + 2u_6xy + \\ \qquad\qquad + u_7y^2 + 2u_9xy^2 + u_{11}y^3 + u_{12}y^4\big], \\ \dfrac{dy}{dt} = -\big[a_2x^2y^3 + 3(a_1 + a_2y)x^2y^2 + 6y^5 + u_2 + u_4x + 2u_5y + u_6x^2 + \\ \qquad + 2u_7xy + 3u_8y^2 + 2u_9x^2y + 4u_{10}y^3 + 3u_{11}xy^2 + 4u_{12}xy^3\big], \\ \dfrac{db}{dt} = r(x)\left(1 - \dfrac{b}{K}\right)b - vba_1. \end{cases}$$

В работе изучаются свойства этой модели, показывается ее адекватность.

Литература

1. *Минеев В. Г.* Агрохимия.— М.: Изд-во МГУ, 2004.—92 с.

EVOLUTIONARY BEHAVIOR IN A THREE-LOCUS SYSTEM

A. M. Diyorov (Uzbekistan, Samarkand; Samarkand Branch TUIT),
U. A. Rozikov (Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz)

We consider a dynamical system generated by a three-parametric quadratic operator mapping 4-dimensional simplex to itself. This is an evolution operator of the frequencies of gametes in a three-locus system. We completely describe the set of all limit points of the dynamical system.

Consider three loci A (with alleles A_1, A_2), B (with alleles B_1, B_2) and C (with allel C_1). Then we have four gametes: A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2 and C_1C_1. Denote the frequencies of these gametes by x, y, u, v and w respectively.

Thus the vector (x, y, u, v, w) can be considered as a state of the system, and therefore, one takes it as a probability distribution on the set of gametes, i. e. as an element of 4-dimensional simplex, S^4. Recall that $(m-1)$-dimensional simplex is defined as

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \, x_i \geqslant 0, \, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}.$$

Following [1, Section 2.10] we define the frequencies (x', y', u', v', w') in the next generation as

$$A: \quad \begin{aligned} x' &= x + a \cdot (yu - xv) \\ y' &= y - a \cdot (yu - xv) \\ u' &= u - b \cdot (yu - xv) \\ v' &= v + b \cdot (yu - xv) \\ w' &= w, \end{aligned} \tag{1}$$

where $a, b \in [0, 1]$.

It is easy to see that this quadratic operator, A, maps S^4 to itself. Indeed, we have $x' + y' + u' + v' + w' = 1$ and each coordinate is non-negative, for example, we check it for y':

$$y' = y - a \cdot (yu - xv) = y(1 - au) + axv \geqslant y(1 - au) \geqslant 0,$$

these inequalities follow from the conditions that $x, y, u, v, a \in [0, 1]$, and therefore, we have $0 \leqslant au \leqslant 1$.

The operator (1), for any initial point (state) $t_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0, w_0,) \in S^4$, defines its trajectory: $\{t_n = (x_n, y_n, u_n, v_n, w_n)\}_{n=0}^{\infty}$ as

$$t_n = (x_n, y_n, u_n, v_n, w_n) = A^n(t_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Here A^n is the n-fold composition of A with itself:

$$A^n(\cdot) = \underbrace{A(A(A\dots(A}_{n\,\text{times}}(\cdot)))\dots).$$

The following theorem completely gives limit points of each trajectory:

Theorem. *For any initial point $(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0) \in S^4$ the following assertions hold*

1. *If $(x_0 + y_0)(u_0 + v_0) = 0$ then $(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0)$ is fixed point.*
2. *If $(x_0 + y_0)(u_0 + v_0) \neq 0$ then trajectory has the following limit:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n, u_n, v_n, w_n) =$$
$$= \big(B(x_0,u_0)(x_0+y_0), B(y_0,v_0)(x_0+y_0), B(x_0,u_0)(u_0+v_0), B(y_0,v_0)(u_0+v_0),$$
$$1-B(x_0,u_0)(x_0+y_0)-B(y_0,v_0)(x_0+y_0)-B(x_0,u_0)(u_0+v_0)-B(y_0,v_0)(u_0+v_0)\big),$$

where

$$B(x,u) = \frac{bx+au}{(u_0+v_0)a+(x_0+y_0)b}.$$

The results this theorem have the following biological interpretations:

Let $t = (x_0, y_0, u_0, v_0, w_0) \in S^4$ be an initial state (the probability distribution on the set $\{A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2, C_1\}$ of gametes). Theorem says that, as a rule, the population tends to an equilibrium state with the passage of time.

Part 1 of theorem means that if at an initial time we had only two gametes then the (initial) state remains unchanged.

Part 2 means that depending on the initial state future of the population is stable: gametes survive with probability

$$B(x_0,u_0)(x_0+y_0), B(y_0,v_0)(x_0+y_0), B(x_0,u_0)(u_0+v_0), B(y_0,v_0)(u_0+v_0),$$
$$1-B(x_0,u_0)(x_0+y_0)-B(y_0,v_0)(x_0+y_0)-B(x_0,u_0)(u_0+v_0)-B(y_0,v_0)(u_0+v_0)$$

respectively. From the existence of the limit point of any trajectory and from the explicit form of $\mathrm{Fix}(A)$ it follows that

$$\lim_{n\to\infty}(y_nu_n - x_nv_n) = 0.$$

This property, biologically means that the population asymptotically goes to a state of linkage equilibrium with respect to three loci.

References

1. *Ewens W. J.* Mathematical Population Genetics. Mathematical Biology.—Springer, 2004.
2. *Rozikov U. A.* Population Dynamics: Algebraic and Probabilistic Approach.—Singapore: World Sci. Publ., 2020.—460 p.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ИДЕАЛЬНОГО СВОБОДНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ ХИЩНИК–ЖЕРТВА[1]

П. А. Зеленчук (Россия, Ростов-на-Дону; ИММиКН ЮФУ),
В. Г. Цибулин (Россия, Ростов-на-Дону; ИММиКН ЮФУ)

Исследование пространственно-временной динамики взаимодействующих популяций на неоднородном ареале — одна из главных задач математической биологии [1]. Наиболее актуальными вопросами являются анализ системы «хищник–жертва» при наличии многофакторного таксиса [2] и поиск стратегий поведения, обеспечивающих максимальную приспособленность видов к окружающей среде обитания [3]. Одной из таких стратегий является идеальное свободное распределение (ИСР) [4], обеспечивающее ряд конкурентных преимуществ в борьбе за существование [5].

Модель системы «хищник–жертва» на основе уравнений реакции–диффузии–адвекции [6] с учетом многофакторного таксиса и произвольным функциональным откликом хищника $g(u, v)$ [7] представима в виде:

$$\begin{aligned} &\dot{u} = -q_1' + ua_1 f_n(u) - b_1 v g(u, v), \quad && q_1 = -k_1 u' + u\varphi_1', \\ &\dot{v} = -q_2' - a_2 v + b_2 v g(u, v), && q_2 = -k_2 v' + v\varphi_2'. \end{aligned} \tag{1}$$

где $u(x, t)$ и $v(x, t)$ — плотности популяций жертвы и хищника соответственно, точка означает производную по времени, а штрих — производную по x. Положительные коэффициенты a_i, b_i характеризуют прирост и убыль видов при локальном взаимодействии. В потоковых слагаемых q_i коэффициенты k_1, k_2 отвечают за диффузию, а функции φ_i за таксис. Рост популяции жертвы определяется степенной функцией:

$$f_n(u) = u^n \left(1 - \frac{u}{p}\right), \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \tag{2}$$

где $p(x)$ — ресурс жертвы. Функция $f_n(u)$ при $n = 0$ соответствует логистическому, а при $n = 1$ гиперболическому закону роста. Система (1) дополняется начальными условиями

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x), \tag{3}$$

и одним из видов граничных условий.

Будем называть распределение видов в системе «хищник–жертва» ИСР-подобным, если плотности жертвы и хищника пропорциональны функции ресурса. Пример такого распределения для кольцевого ареала $\Omega \in [0, 1]$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad v(0, t) = v(1, t), \quad q_1(0, t) = q_1(1, t), \quad q_2(0, t) = q_2(1, t), \tag{4}$$

[1]Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-21-00221.

построен в [2] при гиперболическом законе роста жертвы ($n = 1$), классическом функциональном отклике Лотки — Вольтерры $g(u, v) = u$ и функциях, характеризующие таксис,

$$\varphi_1 = \alpha_1 \ln p - \beta_1 \ln v, \quad \varphi_2 = \beta_2 \ln u. \tag{5}$$

При выполнении условий для параметров

$$k_1 = \alpha_1 - \beta_1, \quad k_2 = \beta_2, \tag{6}$$

нетривиальное ИСР-решение имеет вид:

$$\begin{gathered} u = \frac{\eta_2 p(x)}{\mu_2}, \quad v = \frac{\eta_1 \eta_2}{\mu_1 \mu_2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\mu_2}\right) p(x), \\ a_1 = \eta_1, \quad b_1 = \mu_1, \quad b_2 = \frac{\mu_2}{p(x)}, \quad a_2 = \eta_2. \end{gathered} \tag{7}$$

В работе строятся формальные асимптотические разложения стационарных решений одномерных систем для задачи Дирихле и условий периодичности.

Представлены численные решения, иллюстрирующие изменение распределений видов при нарушении условий на параметры, обеспечивающие ИСР. Для анализа решений при нарушении условий на коэффициенты, обеспечивающих ИСР, применяется численный подход на основе дискретизации со смещенными сетками.

Литература

1. *Ризниченко Г. Ю.* Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии.—М: Юрайт, 2020.—181 с.
2. *Зеленчук П. А., Цибулин В. Г.* Идеальное свободное распределение в модели «хищник–жертва» при многофакторном таксисе // Биофизика.—2021.—Т. 66, № 3.—С. 546–554.
3. *Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А.* Нелинейная динамика системы хищник–жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов // Изв. высш. учеб. заведений. Прикладная нелинейная динамика.—2021.—Т. 29, № 5.—С. 751–764.
4. *Cantrell R. S., Cosner C., DeAngelis D. L., Padron V.* The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy // J. Biological Dynamics.—2007.—Vol. 1, № 3.—P. 249–271.
5. *Cantrell R. S., Cosner C., Martinez S., Torres, N.* On a competitive system with ideal free dispersal // J. Diff. Eq.—2018.—Vol. 265, № 8.—P. 3464–3493.
6. *Ha T. D., Tsybulin V. G., Zelenchuk P. A.* How to model the local interaction in the predator–prey system at slow diffusion in a heterogeneous environment? // Ecological Complexity.—2022.—Vol. 52, art. 101026.
7. *Тютюнов Ю. В., Титова Л. И.* От Лотки — Вольтерра к Ардити — Гинзбургу: 90 лет эволюции трофических функций // Журнал общей биологии.—2018.—Т. 79, № 6.—С. 428–448.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ОБ ОЦЕНКЕ МИНИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ СХЕМНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. С. Зизов (Россия, Москва; ВМК МГУ)

Первая модель клеточных схем (КС) в стандартном базисе из функциональных и коммутационных элементов была предложена С. С. Кравцовым в 1967 г. [1]. Ее создание способствовало развитию исследований, связанных с решением различных задач синтеза, включая задачу индивидуального синтеза. Эта задача связана с изучением сложности (площади) $\mathbf{A(F)}$, которая определяется для системы булевых функций **БФ** $F = (f_1, f_m) \in P_2^m(n)$, где $P_2(n)$ — множество всех **БФ** от булевых переменных **БП** $X(n) = x_1, x_n$, и равна минимальной площади реализующих ее **КС**.

В 1980 г. К. Д. Томпсон [3] описал математическую модель, которая является основной для исследований в области ИС. Тем не менее, эту модель можно считать недостаточно полной, так как она не учитывает задержки при распространении сигналов через провода. В 1985 г. Б. Чазелле и М. Лоуис [4] предложили модель, которая учитывает задержки в схемах. Исследование обеих моделей, проведенное Г. Биларди, М. Працчи и Ф. П. Препарат [5], показало, что модель Томпсона не так хорошо учитывает задержки, но этого зачастую достаточно для расчётов в рамках монокристаллических ИС или для планирования частей более крупных ИС.

Так, в работе [1], а также в работах Н. А. Шкаликовой [2] был установлен порядок роста вида $n \cdot 2^n$ для площади $\mathbf{A(K(n))}$, вида $n \cdot 2^{2^n}$ для площади $A(\vec{f}_2(n))$ и вида $\log n \cdot 2^n$ для площади $\mathbf{A(S(n))}$ где множество $\mathbf{K(n)}$ состоит из всех элементарных конъюнкций ранга $\mathbf{n}$ от $\mathbf{БПХ(n)}$, т. е. $\vec{K}(n)$ является т.н. дешифратором порядка $\mathbf{n}$, а множество $S(n)$ состоит из всех симметрических **БФ** из $P_2(n)$.

В работе [3] были установлены асимптотически точные верхние и нижние оценки для площади схем, реализующих дешифратор порядка n, которые имеют вид $n2^{n-1}\big(1 \pm O\big(\frac{1}{n}\big)\big)$ и аналогично работе [4] могут считаться асимптотическими оценками высокой точности **АОСВТ**.

В работах [5, 6] были установлены верхние и нижние АОСВТ для сложности $A(\vec{P}_{2n}(n))$, т. е. для площади универсального многополюсника $\vec{P}_2(n)$ порядка n, в модели клеточных схем, имеющих вид

$$n \cdot 2^{2^n-1} - O(n^2) \leqslant A(\vec{P}_2(n)) \leqslant (n+6)2^{2^n-1} + \frac{3n}{2^n}\, 2^{2^n-1}.$$

Ранее в работе [4] исследовалась индивидуальная сложность симметрических функций. В частности, был доказан результат, что любая симметрическая функция S может быть реализована СФЭ с одним выходом, сложность которой оценивается линейно от числа переменных $L(S) = O(n)$ при одновременной оценке на глубину схемы $D(S) = O(\log n)$.

Следует отметить, что аналогичный результат является прямым следствием работы Лупанова [5], в которой исследовались асимптотически наилучшие методы синтеза формул. Данная тематика получила развитие в работе [6], где было показано, что верхняя оценка сложности для симметрических функций составляет $4,5n + o(n)$. Известна также и нижняя оценка, равная $2,5n - c$, показанная в работе [7].

В настоящей работе исследуется площадь клеточной схемы, реализующей все возможные симметрические функции, т. е. класс функций S_n, содержащий 2^{n+1} функции, каждая из которых определяется однозначно своими значения на т. н. слоях булева куба, т. е. всех тех множествах наборах, число единиц в которых попарно совпадает между собой.

Определение. *Симметрической функцией* $f(n)$ от n БП называет булева функция, значение которой не зависит от перестановки аргументов. Иными словами, для всех перестановок $\overline{x} = transposition(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значение функции не меняется $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Введем *функционал площади* **КСФКЭ**, который далее будет служить критерием их сложности. *Площадью* $A(\Sigma)$ клеточной схемы Σ называется площадь ее прямоугольной решетки, $A(\Sigma) = l(\Sigma)h(\Sigma)$, где $l(\Sigma)$ и $h(\Sigma)$ — горизонтальный и вертикальный линейные размеры решетки, называемые *длиной* и *высотой* схемы соответственно. Всюду далее не ограничивая общности будем считать, что $h(\Sigma) \leqslant l(\Sigma)$. При этом для системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ из $P_2^m(n)$ определим, как обычно, величину $A(F)$, равную минимальной площади **КСФКЭ**, реализующих F, которую будем называть *площадью* (сложностью) системы F.

Теорема 1. *Для площади КСФКЭ Σ, реализующей систему всех симметрических функций, верна нижняя оценка площади:* $A(\Sigma) \geqslant 2^n(\log n + O(1))$.

Литература

1. *Кравцов С. С.* О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики.—М.: Наука, 1967.—Вып. 19.—С. 285–292.
2. *Ложкин С. А., Зизов В. С.* Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2020.—Т. 162, № 3.—С. 322–334. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334.
3. *Muller D. E., Preparata F. P.* Bounds to complexities of networks for sorting and for switching // Journal of the ACM (JACM).—1975.—Vol. 22, № 2.—С. 195–201.
4. *Лупанов О. Б.* О реализации функций алгебры логики формулами ограниченной глубины в базисе $\wedge, \vee, \neg$ // Докл. Акад. наук.—1961.—Т. 136, № 5.—С. 1041–1042.
5. *Demenkov E. et al.* New upper bounds on the Boolean circuit complexity of symmetric functions // Information Processing Letters.—2010.—Т. 110, № 7.—С. 264–267.
6. *Stockmeyer L. J.* On the combinational complexity of certain symmetric Boolean functions // Math. Systems Theory.—1976.—Vol. 10, № 1.—С. 323–336.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Ш. Каюмов (Узбекистан, Ташкент; ТашГТУ),
Б. А. Куралов (Узбекистан, Ташкент; ТашГТУ),
Э. А. Эсанов (Узбекистан, Ташкент; ТашГТУ),
Д. Бувашеров (Узбекистан, Ташкент; ТашГТУ)

Задачи фильтрации флюидов в многослойных пористых средах изучается многими исследователями для неструктурированных (ньютонов ких и неньютоновских [1–2].), и для структурированных жидкостей [3–4], так как существует природные месторождение углеводородов указанного типа. Пористая среда как многослойные структура может быть гидродинамический связанными или несвязанными. Работе рассмотрена слоистые пласты состоящий из хорошо проницаемых $\Omega_{2\gamma}$, и плохо проницаемых пластов $\Omega_{2\gamma-1}$, $\Omega_{2\gamma+1}$. Предполагается область $D_{2\gamma}$ содержит структурированный флюид а верхние и нижние области ($\Omega_{2\gamma-1}$ и $\Omega_{2\gamma+1}$) заполнено аномальными флюидами. Математическая модель этой задачи следующие:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi_{zy}(|\Delta U_{2\gamma}|\,,\,\beta_e)\frac{\partial U_{2\gamma}}{\partial x}\right)+\varphi_{2\gamma-1}\left.\frac{\partial U_{2\gamma}}{\partial z}\right|_{z=h_{2\gamma-1}}-\varphi_{2\gamma+1}\left.\frac{\partial U_{2\gamma+1}}{\partial z}\right|_{z=h_{2\gamma+1}}=$$

$$=M_e\frac{\partial U_{2\gamma}}{\partial z}+f_{2\gamma}(x,t),\quad x\in\Omega_{2\gamma},\ \ z\in(H_{2\gamma-1};\ \ H_{2\gamma+1}),\ \ t>0,\ \ e=\overline{1,3}.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_{2\gamma-1}(z)\frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial z}\right)=M_{2\gamma-1}\frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial t},\quad z\in(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3):\ \gamma=\overline{1,3},\ \ t>0. \quad (1)$$

с начальными

$$U_{2\gamma}(x,\,0)=U_0(x),\quad U_{2\gamma-1}(x,z,0)=U_0(x,\,z)\quad(\gamma=\overline{1,3}). \quad (2)$$

и граничными

$$a_1\chi_{2\gamma}\left(|\Delta U_{2\gamma}|\,,\beta_l\right)\left.\frac{\partial U_{2\gamma}}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\psi_0(t),\quad a_2\chi_{2\gamma}\left(|\Delta U_{2\gamma}|\,,\,\beta_3\right)\left.\frac{\partial U_{2\gamma}}{\partial x}\right|_{x=L}=\psi_1(t), \quad (3)$$

$$a_0\varphi_1(z)\left.\frac{\partial U_1}{\partial z}\right|_{\substack{z=0\\ x\in[x_0,L]}}=0,\quad a_3\varphi_5(z)\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{\substack{z=H_5\\ x\in[x_0,\,L]}}=0, \quad (4)$$

а также условиями на границах зон:

$$\chi_{2\gamma}(|\Delta U_{2\gamma}|\,,\,\beta_1)\left.\frac{\partial U_{2\gamma}}{\partial x}\right|_{x=R_{2\gamma}-0}=\chi_{2\gamma}(|\Delta U_{2\gamma}|\,,\,\beta_2)\left.\frac{\partial U_{2\gamma}}{\partial x}\right|_{x=R_{2\gamma}+0}, \quad (5)$$

$$\chi_{2\gamma}(|\Delta U_{2\gamma}|\,,\,\beta_2)\,\frac{\partial U_{2\gamma}}{\partial x}\bigg|_{x=R_{2\gamma}-0} = \chi_{2\gamma}(|\Delta U_{2\gamma}|\,,\,\beta_3)\,\frac{\partial U_{2\gamma}}{\partial x}\bigg|_{x=R_{2\gamma}+0}, \tag{6}$$

$$U_{2\gamma}(x,\,t)|_{x=R_{2\gamma}-0} = U_{2\gamma}(x,\,t)|_{x=R_{2\gamma}+0}\,, \tag{7}$$

где функция$\chi_{2\gamma}(r)$ представляет собой многопараметрические функции [4, 5].

$$f_{2\gamma}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_r) q_{2\gamma}.$$

К задаче (1)–(7) будет дописано краевые условия в соответствие с выбором различного закона фильтрации, зависящие вида многопараметрические функции $\chi_{2\gamma}(r)$.

Задаче (1)–(7) коэффициенты μ_1, k_1, M_i $(i = \overline{1,5})$ аналогично работы [1–4]. Задача (1)–(7) нелинейно и для его решения применяется метод итерации, метод прямых и потоковой вариант сеточной прогонки [6–8].

Построенные вычислительные алгоритмы апробирован на тестовых данных и определена величины перетопков из плохо проницаемых пластов в хорошо проницаемые пласты и влияние их, на темпы продвижения неизвестных границы возмущения.

Литература

1. *Гусейн-заде М. А., Колосовская А. К.* Упругий режим в одно пластовых и многопластовых системах.—М.: Недра, 1972.—321 с.
2. *Аббасов М. Т., Кулиев А. М.* Методы гидродинамических расчетов разработки многопластовых месторождений нефти и газа.—Баку: ЭЛМ, 1976.—284 с.
3. *Мухиддинов Н. М.* Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа.—Ташкент: ФАН, 1978.—117 с.
4. *Каюмов Ш., Марданов А. П., Хаитов Т. О., Каюмов А. Б.* Математического моделирования структурированных флюидов в связанных пластах // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механике: Сб. тр. Междунар. науч. конф.—Воронеж, 2020.—С. 934–942.
5. *Qayumov Sh., Mardanov A. P., Xaitov T. O., Qayumov A. B.* Multiparameter mathematical models of the problem of problem of filtration of unstructured and structured fluids // E3S Web of conferences 264, 01030.—2021. DOI: 10.1051/e3sconf/202126401030.
6. *Qayumov Sh., Mardanov A. P., Xaitov T. O., Qayumov A. B.* Construction of two–dimensional multiparameter mathematical models of the problem of the theory on nonlinear filtration of fluids // International conference on Actual problems of applied mechanics–APAM-2021. AIP conf. prec. 2637, 040002.—2022. DOI: 10.1063/5/0119121.
7. *Каюмов Ш.* Математическое моделирование задач теории фильтрации со свободными границами.—Ташкент, 2017.—274 с.
8. *Samarski A. A.* The theory of Difference shemes / A. A. Samarski.—N. Y.–Basel: Marcel Dekker. Inc, 2001.—761 p.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ СОЛИТОНОВ РИЧЧИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ЛИ[1]

П. Н. Клепиков (Россия, Барнаул; АлтГУ),
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГУ),
О. П. Хромова (Россия, Барнаул; АлтГУ)

Одним из естественным обобщением метрик Эйнштейна являются солитоны Риччи. Если (псевдо)риманово многообразие является группой Ли, то говорят об инвариантных солитонах Риччи. Наиболее подробно инвариантные солитоны Риччи изучались в случае унимодулярных групп Ли с левоинваринтной римановой метрикой и в случае малой размерности. Так Л. Цербо доказал, что на унимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны [1]. В неунимодулярном случае аналогичный результат до размерности четыре был получен П. Н. Клепиковым и Д. Н. Оскорбиным [2].

Настоящая работа посвящена исследованию инвариантных солитонов Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с лоренцевой метрикой. В работе приводится математическая модель для нахождения инвариантных солитонов Риччи на метрических группах Ли. С помощью данной математической модели получена полная классификация инвариантных солитонов Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, определены инвариантные солитоны Риччи, отличные от тривиальных, дан ответ на гипотезу Л. Цербо в классе лоренцевых метрик.

Литература

1. *Cerbo L.F.* Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom.—2014.—Vol. 14, № 2.—P. 225–237.
2. *Клепиков П. Н., Оскорбин Д. Н.* Однородные инвариантные солионы Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия АлтГУ.—2015.—Т. 85, № 1/2.—С. 115–122.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00111.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О МОДЕЛЯХ ЦИФРОВЫХ СИМУЛЯТОРОВ[1]

Н. Н. Костина (Россия, Елабуга; ЕИ КФУ),
А. В. Костин (Россия, Елабуга; ЕИ КФУ)

Цифровые симуляторы стали неотъемлемым инструментом в подготовке специалистов в различных областях. В последнее десятилетие они стали внедрятся в подготовку будущих учителей [1]. Часть из них направлена на тренировку внимания и психологических качеств будущего учителя. Другие симуляторы предназначены для развития методических навыков в предметной области, либо совмещают те и другие функции [2–4]. Один из симуляторов [3], созданных в нашем вузе, представляет собой виртуальный класс их шести учеников, в котором будущему учителю требуется оценить решения нескольких задач, и дополнительно отметить, удовлетворяют ли они определенным критериям. После проверки одной задачи у всей группы ученикам присваиваются решения следующей задачи по алгоритму, близкому к марковской цепи, в зависимости от того, как было оценено решение им предыдущей задачи. Другой симулятор [4] предназначен для выработки навыков подведения учеников к получению решения задачи. Виртуальному ученику представляется задача. Далее последовательно реализуются реплики ученика и учителя, работающего на тренажере. В основе алгоритма лежит тернарное дерево, при прохождении по которому учитель либо подводит ученика к верному решению, либо нет.

В настоящее время мы работаем над созданием игрового симулятора, предназначенного для выработки навыков взаимодействия начинающего учителя с разными субъектами образовательного процесса. Известно, что около трети начинающих учителей уходят из профессии в первые три года, и почти половина — в первые пять лет. Одной из причин этого является низкая стартовая зарплата. Другой причиной является неумение эффективно реагировать на проблемные ситуации, возникающие при взаимодействии с учениками, родителями, коллегами, администрацией. По каждой категории субъектов определяются рейтинговые баллы. Кроме того вводится категория личного времени. При выборе решения проблемной ситуации рейтинги меняются. По сценарию при некоторых действиях учителя рейтинги меняются коррелированно. При выходе за пороговые значения учителю либо выносится предупреждение с рекомендациями, либо следует завершение игры, эквивалентное увольнению.

[1]Работа выполнена в рамках программы «ПРИОРИТЕТ–2030» Казанского федерального университета.

Литература

1. *Dieker L. A., Straub C., Hynes M., Hughes C. E., Bukathy C., Bousfield T., Mrstik S.* Using virtual rehearsal in a simulator to impact the performance of science teachers // International Journal of Gaming and Computer-Mediated Simulations.—2019.—Vol. 11, № 4.—P. 1–20.
2. *Galyamova E., Matveev S., Kiselev B.* Digital Simulators and Training Devices for Solving Geometric Problems // Lecture Notes in Networks and Systems.—2023.—Vol. 510.—P. 1005–1015.
3. *Kostin A. V., Kostina N. N., Minkin A. V.* On Algorithms of Digital Simulators in Education // Smart Innovation, Systems and Technologies.—2022.—Vol. 275.—P. 45–52.
4. *Kostin A. V., Kostina N. N., Minkin A. V., Anisimova E. S.* Modelado de simulacion en la formacion de futuros profesores de matematicas // Revista Dilemas Contemporaneos: Educacion, Politica y Valores.—2019.—Vol. 7, SI, № 30.—P. 1–16.

НЕЕВКЛИДОВЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТЕОРЕМ О ЦИКЛАХ[1]

А. В. Костин (Россия, Елабуга; ЕИ КФУ)

Для четырех окружностей ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, касающихся одной окружности ω на евклидовой плоскости, имеет место теорема Кези (Кейси, Casey), в которой длины отрезков общих касательных к парам окружностей ω_i, ω_j связаны таким же соотношением, как стороны и диагонали вписанного четырехугольника в теореме Птолемея. Наряду с окружностями и касательными расстояниями естественно рассматривать преобразования Лагерра, сохраняющие такие касательные расстояния. Эти преобразования можно интерпретировать как движения трехмерного псевдоевклидова пространства, а теоремы об окружностях, касающихся одной окружности, как теоремы о многоугольниках, вписанных в изотропные сферы псевдоевклидова пространства.

Гиперболическая версия теоремы Кези получена Н. В. Абросимовым и Л. А. Микайыловой [1]. Теорему о четырех окружностях, касающихся одной окружности на гиперболической плоскости, и касательных расстояниях между этими окружностями можно интерпретировать как теорему о четырехугольнике, вписанном в изотропную сферу трехмерного псевдогиперболического пространства [2]. В качестве абсолюта этого пространства выступает линейчатая квадрика, гомеоморфная тору. В аффинной карте она представляется однополостным гиперболоидом [3]. Изотропная сфера в аффинной карте может представляться конусом или цилиндром. Топологически она эквивалентна «пережатому» тору — тору, у которого один из меридианов стянут в точку.

У теоремы Кези и ее гиперболической версии есть различные аналоги и обобщения как по числу и типу циклов, так и по размерности. Некоторые из них рассмотрены в [4, 5]. Для них и для ряда других обобщений также можно построить «точечные» интерпретации в пространствах с индефинитной метрикой.

Литература

1. *Abrosimov N. V., Mikaiylova L. A.* Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сиб. электр. матем. изв.—2015.—Т. 12.—С. 354–360.
2. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога // Сиб. электр. матем. изв.—2016.—Т. 13.—С. 242–251.
3. *Скопец З. А., Яглом И. М.* Преобразования Лагерра плоскости Лобачевского и дробно-линейные преобразования двойного переменного // Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии.—Москва: Изд-во МГПИ, 1965.—С. 366–374.
4. *Костин А. В.* Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского // Сиб. электр. матем. изв.—2022.—Т. 19, № 2.—С. 404–414.
5. *Abrosimov N. V., Aseev V. V.* Generalizations of Casey's Theorem for Higher Dimensions // Lobachevskii J. Math.—2018.—Vol. 39.—P. 1–12.

[1]Работа выполнена в рамках программы «ПРИОРИТЕТ–2030» Казанского федерального университета.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

СОЗДАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

А. В. Кузнецов (Россия, Москва; ИПУ РАН)

Математические выражения могут казаться похожими друг на друга, а также простыми или сложными. Это имеет значение при поиске решений уравнений (решения похожих уравнений могут быть похожи), при доказательстве теорем (доказательства в какой-то мере сходных утверждений могут иметь общую схему). Также визуальная сложность математических выражений может повлечь ошибку в вычислениях или неправильный ответ в системе автоматического тестирования [1].

Создание случайных математических выражений заданной сложности может быть полезно в образовательном процессе для создания экзаменационных материалов [2]. Системы компьютерной алгебры используют определенную метрику сложности выражений при применении функций упрощения формул типа Simplify. Наконец, при поиске закономерностей в данных специалист обычно подбирает по точкам какую-то функцию, в некотором смысле похожую на ту, что хорошо приближает наборы точек в подобной конфигурации.

В силу перечисленных причин уже давно предпринимаются попытки формализовать понятия «сложности» и «сходства» для формул. Формула имеет представление в виде графа — синтаксического дерева (а именно, *binary expression tree*). В узлах дерева находятся символы переменных, математических операций или функций, ребра соответствуют порядку применению операций. Соответственно, попытки формализации лежат в области сравнения графов с маркированными узлами и ребрами.

Задача «символьной регрессии» [3], т. е. автоматического поиска формулы, соответствующей функции, наилучшим образом приближающей заданный набор данных, стоит несколько особняком. С ней вместе встречается и задача поиска оптимального пути, заданного в виде формулы и часто в связи с этими задачами применяются генетические алгоритмы поиска наилучшей формулы.

Одна из самых значительных проблем для математика — это то, что он сам не всегда знает, что именно он доказывает. Задача проверки истинности правильно сформулированных высказываний встречается в работе ученого не так и часто. Гораздо чаще встречается задача поиска неизвестного доказательства при помощи аналогий и неясных образов, всплывающих в разуме ученого [4]. Поиск доказательства подобным способом впервые был исследован еще в Талмуде, но с тех пор применение данного принципа в автоматическом доказывании теорем не особо развилось.

Автор рассматривает возможности сравнения не до конца сформулированных утверждений, недостаточно формализованных утверждений, а также утверждений, содержащих отсылку к бесконечным множествам утверждений, с целью упрощения автоматизированного поиска доказательства. Недостаточно формализованные утверждения представляются как класс графов, находящихся на

заданном расстоянии (в метрике графов) от данного. В утверждениях, содержащих бесконечные строки, указанные строки заменяются на специальные символы с повышенным или комплексным весом, который учитывается при вычислении расстояний между утверждениями.

Для поиска доказательства (т. е. неизвестной цепочки утверждений, представленных деревом или деревьями) применяется создание случайных деревьев, представляющих математические утверждения, близкие к заданной последовательности деревьев, на которую, по мнению ученого, похоже доказательство теоремы.

Также исследуется аналогичная в сущности задача поиска агентом оптимального маршрута в меняющемся примерно по известному образцу динамическому окружению или в подражание агенту, который ранее нашел оптимальный маршрут. В этом случае агент обладает некоторым запасом элементов маршрута, заданных формулами, из которых может быть склеен тот или иной маршрут в соответствии с наблюдаемой агентом обстановкой. Поведение агента может быть описано деревом принятия решений, которое в некоторой метрике близко к заданному дереву принятия решений.

Литература

1. *Bansal Akashdeep, Balakrishnan Meenakshi, Sorge Volker* Evaluating cognitive complexity of algebraic equations // Journal on Technology and Persons with Disabilities.—2021.—Vol. 9, № 13.—P. 170–200.
2. *Alavi Milani M. M. R., Hosseinpour S., Pehlivan H.* Rule-based production of mathematical expressions // Mathematics.—2018—Vol. 6, № 11.—P. 254. DOI: 10.3390/math6110254.
3. *Zelinka I., Kominkova-Oplatkova Z., Nolle L.* Analytic rogramming symbolic regression by means of arbitrary evolutionary algorithm // Journal of Simulation.—2005—Vol. 6.—P. 1473–8031.
4. *Schumann A., Kuznetsov A.V.* Foundations of mathematics under neuroscience conditions of lateral inhibition and lateral activation // International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems.—2018—Vol. 33, № 3.—P. 237–256.—DOI: 10.1080/17445760.2018.1439490.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМЫХ И ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Д. Г. Лекомцев (Россия, Орел; ОГУ им. И. С. Тургенева)

На текущий момент легкодоступные источники нефти близки к своему исчерпанию, вновь вводимые месторождения имеют крайне сложную геологическую структуру. Это повышает актуальность исследования движения флюида в пластах со сложной структурой. Также эта проблема актуальна для оптимизации работы водозаборов.

Следуя [1], задачу о работе скважины в анизотропном пласте грунта сведем к решению системы интегрального уравнения

$$f(\zeta) + 2\int\limits_{\sigma'_\Pi} f(\tau)\frac{\partial\Psi(\tau,\zeta)}{\partial l_\tau}\,dl_\tau = 2\left[\alpha'_\Pi(\zeta) + \varphi_0(\zeta)\right], \quad \zeta \in \sigma'_\Pi, \tag{1}$$

и интегрального соотношения

$$\int\limits_{\sigma'_\Pi} f(\tau)\frac{\partial\Psi(\tau,\zeta)}{\partial l_\tau}\,dl_\tau = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{D(K_S)}}\ln\left(R_C\sqrt{1-|\mu_0|^2}\right). \tag{2}$$

Здесь $f(\zeta)$ — функция класса Гельдера. Решим систему (1)–(2) численно относительно $f(\zeta)$ и дебита Q, входящего в $\varphi_0(\zeta)$. Воспользуемся методом дискретных особенностей [2]. С учетом [3], функцию, входящую в ядро интегралов (1) и (2), представим следующим образом:

$$\frac{\partial\Psi(\tau,\zeta)}{\partial l_\tau} = -\frac{1}{2\pi}\left[\left(V_\xi\frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} - V_\eta\right)\vec{e}_\xi + \left(V_\eta\frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} + V_\xi\right)\vec{e}_\eta\right]\cdot\vec{\tau},$$

где $D(K_S) = K_{11}K_{22} - (K_{12}+K_{21})^2/4$, $D(K_A) = (K_{12}-K_{21})^2/4$. Для характеристики вклада компонентов тензора введем коэффициенты $\alpha = K_{22}/K_{11}$, $\beta = K_S/K_{11}$, $\gamma = K_A/K_{11}$. Перейдем к системе $n+1$ линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$f_j + 2\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} f_j\Omega_{ji}\Delta l_j = 2\left[\alpha'_{\Pi i} - Q\Phi_{Ci}\right], \quad i = 1,\ldots,n. \tag{3}$$

Здесь

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2\pi}\left[\left(V_\xi\frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} - V_\eta\right)\xi'_{1j}(\theta_j) + \left(V_\eta\frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} + V_\xi\right)\eta'_{1j}(\theta_j)\right],$$

$$V_\xi = \frac{\xi_{1i} - \xi_{1j}}{(\xi_{1i} - \xi_{1j})^2 + (\eta_{1i} - \eta_{1j})^2}, \quad V_\eta = \frac{\eta_{1i} - \eta_{1j}}{(\xi_{1i} - \xi_{1j})^2 + (\eta_{1i} - \eta_{1j})^2}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \Omega_{*j} \Delta l_j = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{D(K_S)}} \ln\left(R_C\sqrt{1 - |\mu_0|^2}\right). \tag{4}$$

Здесь

$$\Omega_{*j} = -\frac{1}{2\pi}\left[\left(V_\xi\frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} - V_\eta\right)\xi'_{1j}(\theta_j) + \left(V_\eta\frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} + V_\xi\right)\eta'_{1j}(\theta_j)\right],$$

$$V_\xi = \frac{\xi_{10} - \xi_{1j}}{(\xi_{10} - \xi_{1j})^2 + (\eta_{10} - \eta_{1j})^2}, \quad V_\eta = \frac{\eta_{10} - \eta_{1j}}{(\xi_{10} - \xi_{1j})^2 + (\eta_{10} - \eta_{1j})^2}.$$

Вспомогательная система координат $O\xi_1\eta_1$ повернута относительно $O\xi\eta$ на угол ω, определяемый равенством $\operatorname{tg} 2\omega = b/a$ [3].

С целью изучения влияния анизотропии грунта на дебит Q введем величину ε (относительный дебит) [4]. Необходимость решать систему уравнений (3)–(4) ставит нас перед выбором метода решения (нахождения значения функций f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ и искомого дебита Q). В данной работе сравнивается решение одной и той же системы уравнений, полученное итерационным методом Гаусса — Зейделя и решение, которое дает метод Гаусса —Жордана, который относится к прямым методам. Рассматривается задача работы одиночной скважины в однородной анизотропной среде с круговым контуром питания. Далее выбираем $R_\Pi = 1$, $R_C = 10^{-3}R_\Pi$. Для метода Гаусса — Зейделя положим допустимое число итераций 1000, погрешность метода 10^{-4} [5].

Таблица 1. Сравнение относительного дебита ε, полученного различными численными методами решения

	Метод Гаусса — Жордана		Метод Гаусса — Зейделя	
n	$\alpha = 10$, $\beta = 0$	$\alpha = 10$, $\beta = 3$	$\alpha = 10$, $\beta = 0$	$\alpha = 10$, $\beta = 3$
100	2.030706699	1.298365166	2.030706740	1.298365246
200	2.030731346	1.298381139	2.030731389	1.298381219
400	2.030735752	1.298383790	2.030735795	1.298383871
800	2.030735914	1.298383651	2.030735958	1.298383732

Литература

1. *Пивень В. Ф.* Математические модели фильтрации жидкости.—Орел: Изд-во Орл. гос. ун-та, 2015.—408 с.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.
3. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычислительная механика сплошных сред.—2016.—Т. 9, № 4.—С. 389–399.
4. *Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г.* Численное исследование работы скважины с произвольным кусочно-гладким контуром питания в анизотропном неоднородном пласте // Вычислительная механика сплошных сред.—2022.—Т. 15, № 2.—С. 223–233.
5. *Турчак Л. И., Плотников П. В.* Основы численных методов.—М.: Физматлит, 2003.—304 с.

MATHEMATICAL MODELING OF OIL AND GAS PRODUCTION BASED ON THE CONSTRUCTION OF SELF-SIMULAR TRAVELING WAVE SOLUTIONS FOR TWO-COMPONENT FILTRATION EQUATIONS

V. L. Litvinov (Russia, Moscow; MSU),
K. V. Litvinova (Russia, Moscow; MSU)

The work is devoted to the construction of self-similar solutions of the "travelling wave" type of the equations of two-component filtration of solutions, accompanied by phase transitions. A model is considered that is widely used to solve the problems of predicting the development of oil and gas reservoirs. Within this model, two-component isothermal filtration is described by a system of non-linear partial differential equations, the solutions of which are characterized by the presence of discontinuities in component concentrations. It is assumed that the pressure is continuous, because filtration rates are small enough and the pressure has time to be established. If no particular assumptions are made about the properties of fluids (Amago's law, incompressibility of fluids, etc.), then in this general case the nonlinear equations of two-component filtration cannot be reduced to hyperbolic, parabolic, and elliptic ones. The study of multicomponent filtration, accompanied by phase transitions, in the general formulation is possible only with the involvement of mathematical modeling methods.

A model of two-component filtration with phase transitions is considered, which is widely used to solve problems of predicting the development of oil and gas reservoirs [1–3]. It is assumed that the filtration rates are low, and the mass transfer occurs quite intensively, so that phase equilibrium has time to be established in each elementary volume. Depending on the temperature and pressure conditions, a two-component mixture can be either in a single-phase state or in a two-phase state. In the second case, we will conditionally consider the denser phase to be liquid and mark the quantities corresponding to it with the index L, and the less dense phase, the gas phase and mark it with the index G.

Nonlinear equations of two-component filtration demonstrate the properties of hyperbolic, parabolic and elliptic types of equations. The solutions of the system of equations describing filtration are characterized by the presence of strong and weak concentration discontinuities propagating at a finite speed. The task becomes more complicated if phase transitions are present. Unpredictable changes in composition and phase saturation are one of the problems in the development of "carbonated"' oil and gas condensate deposits. Self-similar solutions are of great interest both for testing numerical algorithms [2] and for studying complex filtration flows. In underground hydrodynamics, self-similar solutions of filtration equations obtained for incompressible phases without phase transitions are well known. Such solutions are used to study the processes of oil displacement by water or compressed gas. However, phase compressibility often plays a significant role. In this work, no particular assumptions about the properties of fluids are made, i.e. fluids can be either compressible or incompressible, and phase transitions occur in the system.

References

1. *Koldoba A. V., Poveshchenko Yu. A., Samarskaya E. A., Tishkin V. F.* Methods of mathematical modeling of the environment.—M: Nauka, 2000.—254 p.
2. *Litvinov V. L., Litvinova K. V.* Construction of self-similar solutions of two-component filtration equations in oil and gas production modeling // Geometric methods in control theory and mathematical physics. III International Scientific Conference (Ryazan, April 26–30, 2021).—P. 61–62.
3. *Brusilovsky A. I.* Phase transformations in the development of oil and gas fields.—M.: Grail, 2002.—575 p.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО СПОСОБА СЕЛЕКТИВНОГО ЗАБОРА ВОДЫ ИЗ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ВОДОЕМА

И. Д. Музаев (Россия, Владикавказ, ГФИ ВНЦ РАН; Владикавказский филиал ФУ),
К. С. Харебов (Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН),
Н. И. Музаев (Россия, Владикавказ; ГФИ ВНЦ РАН)

Для охлаждения высокотемпературных тепловыделяющих элементов некоторых промышленных предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций в летнее время необходимо подавать воду из промежуточного слоя слоисто стратифицированного водоема, где вода бывает технически чистой и холодной по сравнению с верхним и нижним слоями водоема. При заборе воды из одного окно промежуточного слоя поверхности раздела слоев притягиваются к проему водозаборного окна. При этом даже при небольшом расходе забираемой воды в водозаборное окно начинает затекать вода из верхнего и нижнего слоев водоема, что нарушает селективный водозаборный процесс из промежуточного слоя водоема. Это может привести к развитию аварийной ситуации на предприятии. Проблема решается при компоновке вспомогательных двух окон в соответствии с рис. 1.

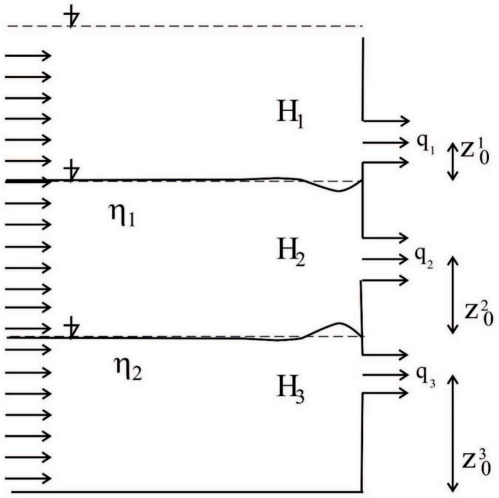


Рис. 1.

Обозначения:

H_1, H_2, H_3 — верхний, промежуточный и нижний слои водоема;

q_1, q_2, q_3 — расходы через верхнее, промежуточное и нижнее водозаборное окно соответственно;

η_1 — граница между верхним и промежуточным слоями;

η_2 — граница между нижним и промежуточным слоями;

z_0^1, z_0^2, z_0^3 — расстояние между η_1 и центром верхнего водозаборного окна;

z_0^2, z_0^3 — расстояние между η_2 и центром промежуточного водозаборного окна;

z_0^3 — расстояние между дном водоема и центром нижнего водозаборного окна.

Условия компоновки.

1. Верхнее и промежуточное окна расположены симметрично относительно поверхности раздела промежуточного и верхнего слоев.

2. Нижнее и промежуточное окна расположены симметрично относительно поверхности раздела промежуточного и нижнего слоев.

3. Вода из всех трех окон забирается синхронно с одинаковыми расходами.

Представленный гидродинамический процесс механико-математически смоделирован следующей контактной начально-краевой задачей гидродинамики поверхностных и внутренних гравитационных волн поставленной на базе безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости

$$\Delta\varphi_i(x, y, z_i, t) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|_{x=0} = -V_i; \quad \left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|_{x=L} = -U_i;$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right|_{y=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right|_{y=B} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_1}\right|_{z_1=H_1} = 0; \quad \left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_i}\right|_{z_i=0} = \left.\frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial z_{i+1}}\right|_{z_{i+1}=H_{i+1}};$$

$$\rho_i\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_i}\right) = \rho_{i+1}\left(\frac{\partial^2\varphi_{i+1}}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial z_{i+1}}\right)\Bigg|_{z_{i+1}=H_{i+1}};$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial z_3}\right|_{z_3=0} = 0; \quad \varphi_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0 \ \text{ при } \ t = 0;$$

$$i = \overline{1,3},$$

где приняты следующие обозначения: Δ — дифференциальный оператор Лапласа по пространственным координатам (x, y, z_i), φ_i — потенциал скорости движения воды в i-м слое, V_i — скорость забора воды из i-го слоя через i-е окно, ρ_i — плотность воды в i-м слое, t — время, $U_i(t)$ — скорость затекания воды в i-м слое при $x = L$, L и B — длина и ширина водоема, схематизированного в виде прямоугольного параллелепипеда, H_i — толщины слоев воды, — ускорение силы тяжести.

В результате решения поставленной начально-краевой задачи получены расчетные формулы, на основании которых доказано следующее утверждение. При предложенном способе забора воды обе поверхности раздела слоев практически остаются в первоначальном горизонтальном положении при сравнительно высоком расходе воды из промежуточного слоя водоема, и тем самым обеспечивается селективный водозаборный процесс.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИНВАЗИОННОЙ ПОПУЛЯЦИИ ПОСЛЕ КРИЗИСА «БУТЫЛОЧНОГО ГОРЛЫШКА»[1]

А. Ю. Переварюха (Россия, Санкт-Петербург; СПб ФИЦ РАН)

Работа относится к области математических моделей биофизики и исследует особые состояния в модели иммунных процессов и агрессивных инвазий с разрушением вселенцем среды. Цель работы — разработать ситуативную непрерывную модель одного из актуальных сценариев инвазионного процесса при создаваемых биотической средой факторах противодействия. Все агрессивные виды в результате инвазии сталкиваются ответом местных видов, адаптирующихся к ситуации. Значимость моделирования противодействия с адаптацией обоснована необходимостью биологической борьбы с чужеродными организмами, когда после вселения нежелательного вида проводится целенаправленная интродукция антагонистов. В этой роли часто используют специфических паразитов, динамику которых необходимо своевременно прогнозировать. В результате в некоторый момент после начала инвазии создается конкурентная система противоборства, которая, в отличие от известных хрестоматийных систем «хищники–жертва», имеет адаптационные механизмы. Рассматриваемая проблема отличается тем, что возникает вариативность итогового состояния, но полного подавления инвазивного вида не происходит. Данное состояние наиболее остро проявляется при ответе на острую вирусную инфекции, когда в результате процесса коэволюции инфекция превращается в хроническую и периодическими рецидивами. Иммунный ответ строго регулируется. Часто интенсивный иммунный ответ подавляется далее самим организмом и до победы над вирусом. Моделирование иммуного ответа чрезвычайно сложная проблема, мы применяем феноменологические сценарные модели [1]. Для построения иммунологических и инвазионных моделей необходимо адекватное включение фактора запаздывания в разные функциональные составляющие модели с целью оценить скорость прохождения возникающей депрессии. Оказываемое воздействие с запаздывающей активацией мы выразим нелинейной зависимостью, так как адаптирующееся давление является следствием трудно формализуемой многоуровневой схемы регуляции, но распространенной в сообществах с высоким индексом биоразнообразия. Время отставания начала реакции фактор, определяющий течение процесса, что не так критично для видов в экосистеме, но для иммунной системы регуляция скорости ответа это вопрос выживания и запаздывание более $\bar{\tau}$ станет фатальным.

Включение в модель запаздывания $x(t-\tau)$ способ разнообразить варианты поведения траектории, не расширяя структуру и не увеличивая размерность фазового пространства. Вопрос определения связи величины τ с какой-то непосредственной популяционной характеристикой далеко не закрыт [2]. Модификации

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 23-21-00339.

моделей с запаздыванием представляют значимость для исследования редких сценариев популяционной динамики, которые относим к типу экстремальных.

В предложенной нами модели получен вариант разрушения колебаний без необходимости дальнейшего увеличения r, $H = 1/3K$:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{\mathscr{K}}\right)(H - N(t-\gamma)), \quad \gamma < \tau. \tag{1}$$

Модель была основана на нашей идее, что для механизмов контроля имеет значение переход $N(t-\gamma)$ через предкритический порог H. Величина H трактовалось как мягкое пороговое состояние «преднасыщения» среды, когда при $N(t) \to H + \epsilon$ популяция вселенца уже начинает разрушительно воздействовать на среду [3]. В сценарии на динамику инвазионного процесса оказывает влияние отклонение $[H - N(t-\gamma)]$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. В иммунологической трактовке при такой вирусной нагрузке организм через небольшой интервал задержки сталкивается опасными симптомами. Модель (1) описала вычислительный сценарий с «выбросом» траектории из цикла. После образования колебаний при превышении значения в момент $\max N_*(t_{\max}; r\tau\gamma)$ предельного для экосистемы уровня траектория далее $N(t) \to \infty$ с остановкой расчетов. В модели (1) релаксационный цикл оказывается переходным режимом существования, а образование неограниченной траектории оценено нами как катастрофическая динамика.

Используем в новой форме модели вместо квадратичной зависимости логарифмическую форму регуляции. В таком варианте уравнения с внешним воздействием биотической среды дополнение модели фактором противодействия с отдельным запаздыванием изменит качественный характер решения:

$$\frac{dN}{dt} = r\ln\left(\frac{\mathscr{K}}{N(t-\tau)}\right) - \mathscr{Q}N(t-\nu). \tag{2}$$

Определим такое запаздывание адаптационным ν и будем отличать его от феноменологического регуляционного τ из уравнений Хатчинсона или Николсона. Для $f(N) = rN\ln(K/N)$ ордината точки перегиба N_p на кривой решения $\dot{N} = f(N)$ лежит ниже $K/2$, так как $f'(N_p) = 0$, $N_p = K/e$. В данной модификации мы используем в обозначение $\mathscr{K}$, так как достижение уровня может быть кратковременным при больших r. В вычислительном сценарии с (2) наблюдается гибель популяции агрессивного вселенца после двух максимумов осцилляций. При уменьшении r траектория демонстрирует обычные гармонические колебания $N_*(t; \tau r)$. Усовершенствуем (2) с включением нелинейности $F(N) = -\mathscr{Q}N^k(t-\nu)$, $\tau \geqslant \nu$, что обосновано ситуацией, когда текущее воздействие может определяться предшествующим состоянием популяции.

Литература

1. *Переварюха А. Ю.* Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели // Нелинейный мир.—2012.—Т. 10, № 4.—С. 255-262.
2. *Соловьева Т. Н.* Динамическая модель деградации запасов осетровых рыб со сложной внутрипопуляционной структурой // Информационно-управляющие системы.—2016.—№ 4.—С. 60–67.
3. *Переварюха А. Ю.* Хаотические режимы в моделях теории формирования пополнения популяций // Нелинейный мир.—2009.—Т. 7, № 12.—С. 925–932.

SHAPING ALGORITHM FOR HIGH ORDER QAM

V. N. Potapov (Russia, Novosibirsk; IM SB RAS)

High-order modulation is indispensable in mobile, satellite, cable, and fiber-optic communication to achieve a high spectral efficiency required for data transition. Probabilistic amplitude shaping is an effective approach to enhance the performance and the flexibility of bandwidth-efficient coded modulations. We study several approaches for the construction of shaping algorithms. This report is based on our own computational experiences and results of papers [1–5].

In mathematical terms, the signal shaping algorithm is an injective function f from binary words to sequences in alphabet A. The set A is called a constellation. A shaping spectral efficiency (SSE) is the ratio η between the average length of input binary words w_i (input blocks) and the average length of output sequence $f(w_i)$ of symbols (output blocks) from the constellation. In every practical implementation the final shaping algorithm should have input and output words with fixed lengths (fix-to-fix algorithm) but it is possible to use intermediate var-to-fix or fix-to-var methods.

We consider the constellations $A = \{\pm 1, \dots, \pm 2^k - 1\}$ in the case of pulse amplitude modulation (PAM2^k) or A^2 in the case of quadrature amplitude modulation (QAM2^{2k}) where $k = 3, 4, 5$. Define the energy of $a = (i, j) \in A^2$ by formula $e(a) = i^2 + j^2$. The mean energy of the output is equal to $E[f] = \sum_{a \in A} Pr(a)e(a)$. The special value $E_0(\eta) = \frac{2(2^\eta - 1)}{3}$ is called the mean energy of equiprobable QAM symbols for fixed η. The shaping gain (SG) is defined as

$$SG[f] = 10 \log_{10} \frac{E_0(\eta[f])}{E[f]},$$

where $\eta[f]$ is the SSE of f.

The Maxwell–Boltzmann probabilistic distribution is defined by $P(a, t) = 2^{-te(a)}/T(t)$, where $T(t) = \sum_{a \in A} 2^{-te(a)}$. For this distribution, we can define the values

$$\eta(t) = -\sum_{a \in A} P(a, t) \log P(a, t), \quad E_1(t) = \sum_{a \in A} P(a, t)e(a).$$

It is well known that this distribution provides a minimal mean energy $E_1(t)$ for any fixed SSE and, consequently, a maximal theoretical shaping gain, i. e.,

$$SG[f] \leqslant 10 \log_{10} \frac{E_0(\eta(t))}{E_1(t)}.$$

SG of a shaping algorithm is the first main parameter of the algorithm efficacy. The second important parameter is a complexity of this algorithm. It is easy to see that amid fix-to-fix algorithms the maximum SG is obtained by the numeration of all

output blocks with energy less than a threshold which depends on SSE. It is known that SG of this numeration converges to the Maxwell–Boltzmann upper bound as the block length tends to infinity. The computational complexity of this numeration grows exponentially with block length. Thus, practical shaping algorithms have to seek tradeoff between SG and computational complexity.

We developed a series of theoretical approaches to solve these problems. Computational experience shows that we achieve the same SG as the optimal numeration mentioned above. But our algorithm has significantly less computational complexity.

References

1. *Cho J.* Prefix-free Code Distribution Matching for Probabilistic Constellation Shaping // IEEE Trans. Commun.—2020.—Vol. 68 (2).—P. 670–682.
2. *Chivelli S., Secondini M.* Hierarchical Distribution Matching for Probabilistic Amplitude Shaping // Entropy.—2020.—Vol. 22—Paper 958.—P. 27.
3. *Yoshida T., Karlsson M., Agrell E.* Hierarchical Distribution Matching for Probabilistically Shaped Coded Modulation // J. Lightw. Technol.—2019.—Vol. 37 (6)—P. 1579–1589.
4. *Gultekin Y., Willems F., van Houtum W., Serbetli S.* Approximate Enumerative Sphere Shaping // Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory.—Vail: IEEE, 2018.—P. 676–680.
5. *Schmalen L.* Probabilistic Constellation Shaping: Challenges and Opportunities for Forward Error Correction // Proc. Opt. Fiber Commun. Conf.—San Diego: IEEE, 2018.—Paper 1323.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ ТЕЧЕНИЯ ВОЗДУХА В 3Д-МОДЕЛИ ГОРНОГО УЩЕЛЬЯ ИДЕАЛИЗИРОВАННОГО ПРОФИЛЯ

А. А. Радионов (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
В. Ю. Тимченко (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
О. С. Панаэтова (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
Д. Г. Минасян (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Изучение аэродинамики горных ущелий является актуальной научной задачей как с точки зрения фундаментальных вопросов механики жидкости и газа, так и с точки зрения прикладных задач, возникающих в связи с возрастающей экологической нагрузкой в горных территориях, безопасности строительства и жизнедеятельности и других задач.

Настоящая работа посвящена изучению горных ущелий нескольких идеализированных профилей, которые моделируются прямоугольной закрытой со всех сторон каверной 1 км высотой, 40 км длиной и шириной от 1 до 4 км (принималось 6 случаев: 1, 1.5, 2, 2.5, 3, и 4 км). Ось ущелья ориентирована с юга на север (на рисунках это вертикальное направление Ю-С). Граничные условия на боковых границах ставились на удалении не менее 15 км от каждого края каверны, а верхнее граничное условие ставилось на высоте 4 км над дном каверны, что позволяет надеяться, что граничные условия не сильно влияют на течение внутри каверны. Перепад давления, под действием которого поддерживается внешний ветер, задавался в виде градиента давления на входной и выходной границах. Все расчеты проводились в предположении геострофического баланса. Источник ЗВ располагается вблизи дна каверны, приблизительно посередине поперечного сечения по длине и ширине. Предварительно, каждый расчет тестировался для ровной поверхности с целью получения стационарного во времени течения (геострофический баланс для модели равнины).

Количество узлов сетки: 100 узлов по направлению Ox, перпендикулярному оси ущелья, из них 50 в области каверны; 340 узлов по направлению Oy, из них 300 в области каверны; 25 узлов по направлению Oz над областью каверны и 25 внутри каверны. Расстояния в метрах: длина каверны 100 км, горизонтальные участки вокруг каверны 10 км, высота каверны 1000 м, высота расчетной области над каверной 3000 м.

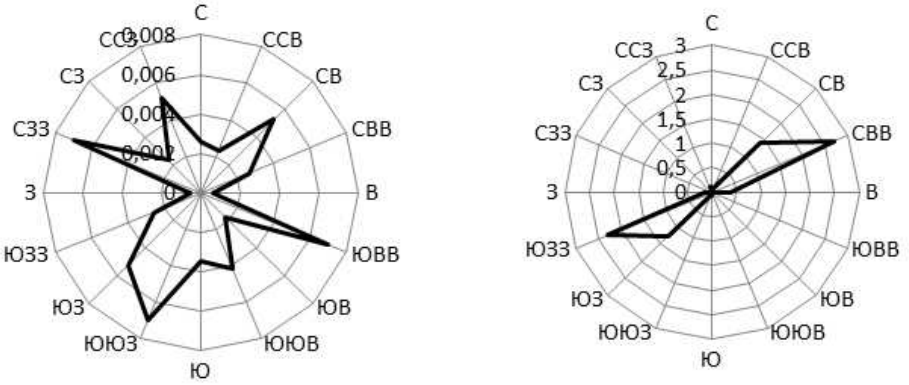
Используется солвер «pisoFoam» пакета OpenFOAM [`https://www.openfoam.com/`], предназначенный для описания нестационарных течений несжимаемой жидкости. В солвер добавлено слагаемое, учитывающее силу Кориолиса, а также уравнение для концентрации загрязняющего вещества в виде пыли [1, 2]. Использовалось RAS-моделирование атмосферной турбулентности.

Проведены шесть серий вычислительных экспериментов для шести ущелий, которые различаются шириной. Для каждого ущелья проведено 16 расчетов

с различными направлениями ветра на внешней границе. Результаты всех 16 расчетов анализировались совместно, для ущелья строилась роза ветров всем 16 расчетам, вычислялись частоты и амплитуды пульсаций скорости ветра, а также строилось среднее поле загрязняющего вещества (ЗВ) от источника, расположенного в центре ущелья.

Поскольку ЗВ переносится в основном ветром, то распределение ЗВ по склонам ущелья отражает наиболее часто дующие ветра в точке расположения источника. Другими словами, на прогноз ЗВ преимущественно влияет роза ветров, которая наблюдается в данной точке ущелья. Показано, что розы ветров приблизительно вытянуты вдоль оси ущелья.

При неизменных во времени граничных условиях, нестационарные течения наблюдаются при некоторых направлениях ветра в узких ущельях. Нестационарность течения в ущелье, вероятно, связана со сдвиговой неустойчивостью в возникающем струйном течении внутри ущелья, которое формируется после 10000 сек. расчета. На рис. 1 изображены частоты (слева) и амплитуды (справа) пульсаций, которые возникают внутри ущелья шириной 1500 м. Видно, что и частоты пульсаций и их максимальные амплитуды наблюдаются в направлениях ветра, приблизительно перпендикулярных оси ущелья.



Частота осцилляций Амплитуда осцилляций

Рис. 1. Характеристики пульсаций ветра в центре ущелья 1.5x1x40 км в точке, где расположен источник ЗВ. Значения получены по серии из 16 расчетов.

Литература

1. *Каменецкий Е. С., Радионов А. А., Тимченко В. Ю., Панаэтова О. С., Свердлик Г. И.* Математическое моделирование распределения пыли по склонам горного ущелья от хвостохранилища, расположенного в Алагирском ущелье // Горный информационно-аналитический бюллетень.—2020.—№ 11–1.—С. 118–134. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-111-0-118-134.
2. *Каменецкий Е. С., Радионов А. А., Тимченко В. Ю., Панаэтова О. С.* Математическое моделирование распределения химических веществ и твердой фазы хвостов, осаждающихся на горных склонах в районе Фиагдонского хвостохранилища РСО-Алания // Устойчивое развитие горных территорий.—2022.—Т. 14, № 3.—С. 349–361. DOI: 10.21177/1998-4502-2022-14-3-349-361.

ИЗМЕНЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК ТРОПОПАУЗЫ В РАВНИННЫХ И ПРЕДГОРНЫХ РАЙОНАХ ПО ДАННЫМ ERA-5 (COPERNICUS) В СЕВЕРО-КАВКАЗСКОМ РЕГИОНЕ

А. А. Радионов (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН),
В. Ю. Тимченко (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

На основе базы геониформационных данных ERA-5 (Copernicus) приведен анализ некоторых характеристик тропопаузы, ее высоты и мощности для 20 различных пространственных позиций Северо-Кавказского региона, РФ. Рассмотрены данные реанализа атмосферных параметров температуры и соответствующей ей высоте за период с 1997 по 2021 год включительно. Используется алгоритм определения холодной точки тропопаузы и ее мощности (вертикальное расстояние между ее верхней и нижней границами, определенными по доверительному интервалу).

Пространственное разрешение данных реанализа ERA-5 составляет по широте и долготе 0.25 градуса. На участке территории Северо-Кавказского региона отобраны точки, находящиеся в горной местности. Участок Главного Кавказского и Скалистого хребтов с преобладающей высотой свыше 2500 м (высокогорные районы РСО-Алания, Кабардино-Балкарии) — 6 точек; предгорные районы вблизи Лесистого и Сунженского хребтов с преобладающими высотами порядка $800 \div 1000$ м — 6 точек; локации в степных и аридных равнинных районах Ставропольского края и Калмыкии — 8 точек. Изученные локации расположены в средних широтах, от 43 до 46 градусов северной широты и от 43 до 46 градусов восточной долготы.

Показано, что в летний сезон тропопауза выше и меньшей мощности, а в холодные сезоны тропопауза ниже и имеет большую мощность. Для равнинных локаций период летней тропопаузы дольше, чем для локаций, расположенных в горной местности с преобладающей высотой над уровнем моря свыше 2500 м. Также показано, что для одного года сезонные изменения разнесенных по горизонтали локаций имеют схожий вид. Различия наблюдаются для локаций в высокогорной местности с коротким климатическим летом, для которых тропопауза имеет несколько большую мощность, но длительность летней узкой тропопаузы меньше, чем для равнинных локаций.

Проведены статистические оценки трендов изменения высоты и температуры холодной точки тропопаузы, определены статистические коэффициенты долговременных трендов изменения исследованных метеопараметров. Показано, что на продолжительном временном периоде тренды температуры холодной точки имеют отрицательный уклон, а тренды высоты холодной точки — положительный.

Литература

1. *Hersbach H. et al.* ERA5 hourly data on pressure levels from 1959 to present. Copernicus Climate Change Service (C3S) Climate Data Store (CDS). DOI: 10.24381/cds.bd0915c6.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ОПИСАНИЕ ОБЛАСТИ ДИФФУЗИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

С. В. Ревина (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ;
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассматривается система двух уравнений реакции-диффузии

$$u_t = \Delta u + f(u,v), \quad v_t = d\Delta v + g(u,v)$$

в m-мерной ограниченной области $\Omega \subset R^m$ при $t > 0$. Здесь $d > 0$ — безразмерный коэффициент диффузии; $f(u,v)$, $g(u,v)$ — слагаемые реакции. На границе области Ω заданы однородные краевые условия Неймана, где n — внешняя нормаль к границе

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Пусть система имеет пространственно-однородное стационарное решение (u_0, v_0). Предполагается, что слагаемые реакции $f(u,v)$, $g(u,v)$ зависят от двух параметров a, b.

Ставится задача нахождения области неустойчивости Тьюринга на плоскости этих параметров при фиксированном значении коэффициента диффузии. Рассуждения проходят также для однопараметрического случая.

Стационарное состояние системы называется неустойчивым по Тьюрингу, если оно устойчиво в бездиффузионном приближении, но теряет устойчивость при наличии диффузии в системе.

Если имеет место диффузионная неустойчивость и выполняются некоторые условия невырожденности, то происходит бифуркация Тьюринга, в результате которой рождаются пространственно-неоднородные структуры. При этом роль бифуркационного параметра играет коэффициент диффузии d.

Критическим называется такое значение коэффициента диффузии, при котором все собственные значения соответствующей линеаризованной системы лежат в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости, за исключением одного собственного занчения, которое равно нулю.

Необходимые условия диффузионной неустойчивости для системы двух уравнений реакции-диффузии хорошо известны. Достаточные условия, как правило, находятся численно.

Целью настоящей работы является аналитическое описание области необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга в конечномерном пространстве параметров системы.

Предложен подход, позволяющий дать классификацию областей неустойчивости для различных систем реакции-диффузии. Описание области неустойчивости Тьюринга дано в терминах собственных значений задачи Неймана для оператора Лапласа в рассматриваемой области.

Предложены замены переменных, которые позволяют упростить описание области неустойчивости Тьюринга, а также указать диапазон волновых чисел, при котором имеет место неустойчивость Тьюринга. Получены явные выражения кривых, ограничивающих область необходимых условий неустойчивости Тьюринга, а также область достаточных условий. Проведено сравнение областей необходимых и достаточных условий.

В частности, рассматривается одномерный случай. В этом случае можно проследить зависимость границ области неустойчивости от длины отрезка, которому принадлежит пространственная перменная.

Приведены примеры нахождения областей неустойчивости для классических систем: Шнакенберга, брюсселлятор, Гирера-Мейнхардта, БеддингтонадеАнгелиса. Для однопараметрической системы Гирера-Мейнхардта найдены вторичные стационарные пространственно-неоднородные решения, возникающие в результате диффузионной неустойчивости, получены условия мягкой и жесткой потери устойчивости.

Литература

1. *Lysenko S. A., Revina S. V.* The region of Turing instability in Schnakenberg system // Numerical Algebra with Applications. Proc. of Eighth China–Russia Conf.—Southern Federal University, 2019.—P. 130–134.
2. *Revina S. V., Ryabov A. S.* Turing instability in Gierer-Meinhardt system // Phisics and Mechanics of New Materials and their Applications. Abstracts and Schedule.—Kitakiyushu, 2021.—С. 227.
3. *Ревина С. В., Лысенко С. А.* Достаточные условия неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки.—2021.—Т. 31, вып. 3.—С. 424–442. DOI: 10.35634/vm210306.
4. *Ревина С. В.* Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 4.—С. 136–145. DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n.

REVIEW OF THE BEHAVIOUR OF A MODEL OF TYPE MANY PREDATORS–ONE PREY

G. J. Söderbacka (Finland, Turku; Åbo Akademi)

This is a review of most recent results on bifurcation and chaos in a known predator-prey system. The system of n competing predators feeding on the same prey is of the type

$$X_i' = p_i\,\varphi_i(S)\,X_i - d_i\,X_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1a}$$

$$S' = H(S) - \sum_{i=1}^{n} q_i\,\varphi_i(S)\,X_i, \tag{1b}$$

where the variable S represents the prey and the variables X_i represent the predators. They are, of course, non-negative. The function φ_i is assumed non-decreasing.

We consider the case where

$$H(S) = rS\left(1 - \frac{S}{K}\right), \quad \varphi_i(S) = \frac{S}{S + A_i}, \tag{2}$$

and where the parameters r, K and A_i are positive.

The dynamics in the coordinate planes representing one of the predators and the prey is well known and there is no more than one cycle. The system has no equilibrium, where predators coexist (in non-degenerate cases). But the predators can coexist in a cyclic and complicated way.

We here give conditions on parameters for extinction of one predator and for the possibility of coexistence.

Below we consider more detailed the case with only two predators. Very little is known about the behaviour when more than two predators coexist. We show numerical results for different kinds of coexistence, periodic or more complicated and discuss possible bifurcations.

In some cases it is possible to use a one dimensional model map for the Poincaré map on a subset of $s = \text{const}$ as a good approximation. It has the form

$$f(v) = b + v - \frac{k}{1 + e^v},$$

where $v = \ln(x_2/x_1)$ is a quantity for the ratio of the predators in transformed coordinates x_1 and x_2. This map can have two attractors for small parameter regions, but no more. We formulate interesting open questions for the behaviour of this map. Two attractors in the case the model is working can also be found for small parameters region in the original system.

If this model map is not working there might be more attractors. We give an example of four coexisting attractors and discuss their bifurcations. In these cases there is often observed spiral-like chaos, not well understood yet.

References

1. *Söderbacka G. J.* Model map and multistability for a two predator–one prey system // Differential Equations and Control Processes.—2023.—№ 1.—P. 12–23.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О СУЩЕСТВОВАНИИ RR-МНОГОГРАННИКА, СВЯЗАННОГО С ИКОСОДОДЕКАЭДРОМ

В. И. Субботин
(Россия, Новочеркасск; ЮРГПУ (НПИ))

RR-многогранники — это такие замкнутые выпуклые многогранники в E^3, множество граней которых является объединением двух непустых непересекающихся подмножеств — множества правильных граней и множества равных ромбов с общей вершиной («ромбической вершиной»).

Ранее в [1] доказано существование и единственность многогранника, связанного с икосаэдром. Доказательство опиралось на вывод «характеристического» уравнения, которое позволяло также найти значение угла ромба построенного многогранника с ромбической вершиной.

В настоящем докладе найден многогранник, который «очень близок» к многограннику с тупоугольной ромбической вершиной, то есть материальная модель такого многогранника успешно строится, однако такой многогранник не существует.

Такие многогранники, конечно, должны быть исключены при доказательстве полноты списка RR-многогранников с правильными гранями различного типа так же, как это сделано при доказательстве полноты списка RR-многогранников с правильными гранями одного типа [2].

Рассмотрим часть икосододекаэдра, состоящую из следующих семи граней: 1) треугольник (T), 2) соседние с по сторонам три 5-угольника, 3) три треугольника (S), имеющих общие вершины с T. Присоединим к каждому 5-угольнику по два квадрата так, чтобы каждая пара квадратов имела общую сторону. В образовавшееся пространство между каждой парой квадратов поместим еще по одному треугольнику Δ. Поместим три равных ромба так, чтобы они, заполняя оставшееся пространство, тупыми углами сходились в одной вершине V. Получим модель 19-гранника с тупоугольной симметричной ромбической вершиной V, развертка которого (без трех ромбов) показана на рис. 1.

Теорема 1. *Не существует RR-многогранника, связанного с икосододекаэдром.*

Хотя легко доказать, что ромбическая вершина рассматриваемого многогранника существует и тупые углы ромбов равны по 108°, но многогранник не существует. Доказательство несуществования основано на том, что треугольники Δ незначительно, но отличаются от правильных: косинусы двух углов треугольников Δ равны $\approx 0,52573$.

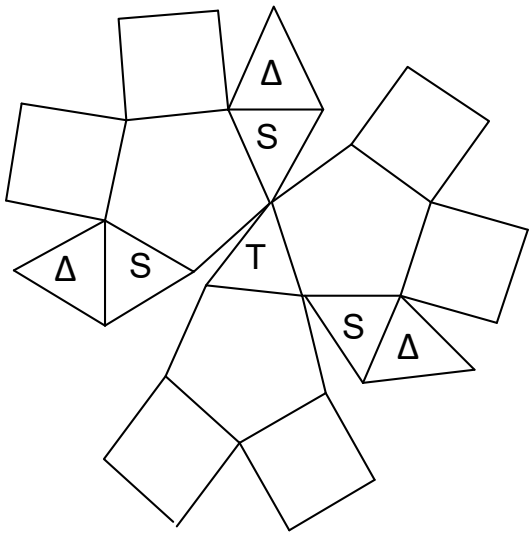


Рис. 1. К теореме 1.

Литература

1. *Субботин В. И.* О существовании RR-многогранников, связанных с икосаэдром // Чебышевский сб.—2021.—Т. 22, № 4.—С. 253–264.
2. *Субботин В. И.* О существовании и полноте перечисления трехмерных RR-многогранников // Итоги науки и техники. Соврем. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры.—2022.—Т. 216.—С. 106–115.

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЯДРА ПАМЯТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ[1]

М. Р. Томаев (Россия, Владикавказ; СОГУ),
Ж. Д. Тотиева (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Рассмотрим при $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $y > 0$, интегро-дифференциальное уравнение, описывающее распространение упругих волн в средах с памятью:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \int\limits_0^t k(t-\tau)\left[a(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] d\tau, \quad (1)$$

$$u\,|_{t<0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$a(+0)\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) + \int\limits_0^t k(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, \tau)\right]\Bigg|_{y=+0} = -\delta(x)\delta'(t), \quad (3)$$

где $u(x, y, t)$ — смещение, $a(y)$ — скорость распространения упругих волн, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Источник возмущений в правой части граничного условия (3) представляет собой так называемый «шнуровой» источник возмущений.

Задачу определения вектора смещения $u(x, y, t)$, удовлетворяющих (в обобщенном смысле) равенствам (1)–(3), при заданной функции $a(y)$ будем называть *прямой задачей.*

Обратная задача: определить ядро $k(t)$, $t > 0$, входящих в (1), если относительно решения задачи (1)–(3) известна дополнительная информация

$$F_x[u](y, t, \nu)|_{y=+0} = f(t, \nu), \quad t > 0, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$f(t, \nu)$ — заданная функция, $F_x[u](x, t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t)e^{-i\nu x}\, dx$ — образ Фурье функции u по переменной x.

В работах [1, 2] проведено теоретическое исследование обратной задачи (1)–(4). Показано [2], что для однозначной разрешимости обратной задачи достаточно задать функцию $f(t, \nu)$ для одного ненулевого фиксированного значения ν. Доказаны теоремы однозначной глобальной разрешимости и устойчивости обратной задачи в области $D_T = ((z, t)|\ 0 \leqslant z \leqslant t \leqslant T - z)$, $T > 0$, — фиксировано, $z = \int_0^y \frac{d\xi}{a(\xi)}$.

Обратная задача (1)–(4) может быть сведена к эквивалентной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которую можно записать в операторном виде:

$$\varphi = A\varphi, \quad (5)$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-27-00264.

где A — нелинейный оператор, а вектор-функция $\varphi = [\varphi_i]_{i=\overline{1,6}}$ зависит от неизвестных u, k и их производных.

Для численной реализации в расчетной области интегралы заменялись квадратурными формулами прямоугольников и по рекуррентным формулам производились вычисления аналогично алгоритмам, представленным в монографии [3]. Для анализа точности вычислений были проведены тестовые расчеты (рис. 1). Для сравнения представлены функция $k(t)$ (красная линия), рассчитанная из системы при таких входных параметрах ($a(y) \equiv 1$, $f(t,\nu) \equiv t^2$), что возможно получение аналитического решения системы интегральных уравнений [4] (голубая линия), а именно,

$$k(t) = -\frac{4}{5}e^{3^{1/3}t} + e^{-\frac{3^{1/3}}{2}t}\left(-\frac{16}{5}\cos\left(\frac{3^{1/6}t}{2}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{5}\sin\left(\frac{3^{1/6}t}{2}\right)\right).$$

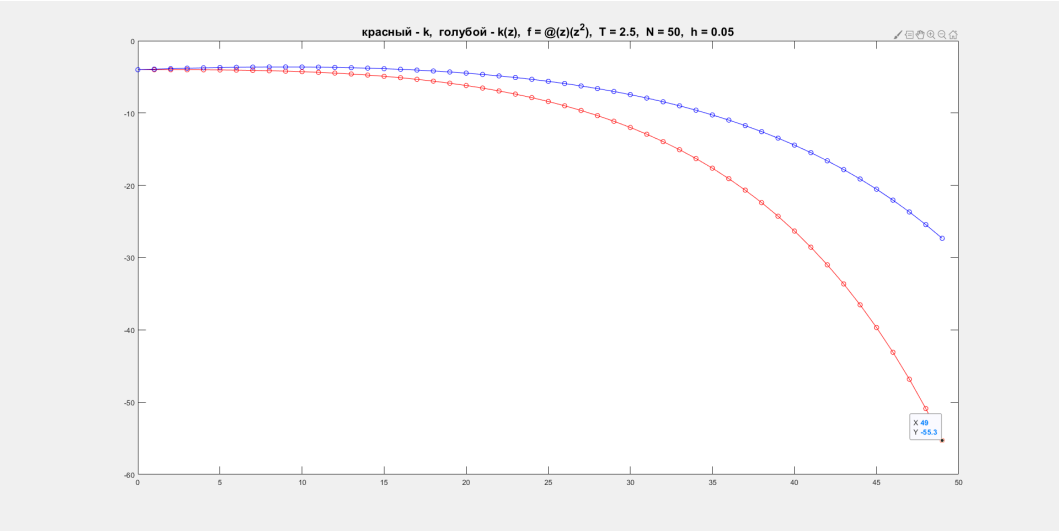


Рис. 1. Функция памяти

Литература

1. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб.й журн. индустр. мат-ки.—2013.—Т. 16, № 2.—С. 72–82.
2. *Тотиева Ж. Д.* Двумерная коэффициентная обратная задача для уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде // Теор. и матем. физика.—2022.—Т. 213, № 2.—С. 193–213.
3. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости.—Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1990.—304 с.
4. *Durdiev D. K., Totieva Z. D.* Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations.—Singapore: Springer Nature Singapore, Infosys Science Foundation Series, 2023.—403 p.

Секция III

Проблемы математического образования

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О РОЛИ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ В РАЗВИТИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ МЕТОДИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

В. С. Абатурова (Россия, Владикавказ, СКЦМИ ВНЦ РАН; ЮМИ ВНЦ РАН),
И. Е. Малова (Россия, Брянск; БГУ им. И. Г. Петровского)

Введение. Начиная с 2013 года на Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» наряду с секциями по математике, работает секция по проблемам математического образования. Проведен анализ работы секции с позиций выявленных проблем математического образования и предложенных способов их решения.

Материалы и методы. Анализ осуществлен на основе программ и отчетов о работе секции в 2013–2016, 2017, 2019, 2021 гг.

Результаты исследования. Проблемы были связаны с тремя вопросами: «Как помочь обучающемуся?», «Как помочь обучающему?», «Каким должно быть содержание обучения?».

Выявлены три способа решения методических проблем:

Первый способ — следование закономерности, открытой П. Я. Гальпериным. Участниками секции предложены ориентировочные основы деятельности по различным темам школьного курса математики.

Второй способ — эффективное использование компьютерных программ и информационных технологий в обучении. Предлагались готовые решения в виде интерактивных роликов, диалоговых компьютерных презентаций, примеров реализации компьютерных программ.

Третий способ — необходимость учиться и учить формулировать вопросы, связанные с поиском решения проблем, которые быть включены в содержание школьного курса математики.

Заключение. Выделены три этапа организации работы секции, которые раскрывают ее роль для учителя: предварительный (до начала работы конференции); основной (во время конференции); последующий (после завершения конференции).

На подготовительном этапе обеспечивалось подключение учителей математики к выступлению с докладом за счет реализации следующих условий: 1) приглашение учителя выступить с докладом; 2) консультация учителя по выбору темы доклада; 3) предварительное знакомство с текстом выступления организаторами секции.

На основном этапе ставились цели: 1) представить в рамках выступления некоторые проблемы математического образования и пути их решения; 2) расширить возможности решения выделенной проблемы в рамках организации дискуссии по теме выступления; 3) обогатить опыт научного доклада через коммен-

тирование доклада руководителями секции, тем самым осуществляя научно-методическую поддержку инновационной и исследовательской деятельности учителей и преподавателей математики.

На последующем этапе считаем важным решение задач: 1) систематизировать результаты работы секции в рамках отчета ее руководителей; 2) осуществить помощь учителям в подготовке ими статей по теме выступления; 3) разработать способы использования результатов в практической работе учителей. К сожалению, третья задача до сих пор не решена.

Включение в программу работы секции по проблемам математического образования способствовало также созданию уникальной научно-образовательной среды для поиска и выстраивания диалога между исследователями-математиками и исследователями-методистами для создания единого подхода к выявлению и решению проблем развития математического образования.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ИЗМЕРЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЯ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

А. У. Арзикулов (Узбекистан, Самарканд; УзФинПИ)

Измерение определено как присвоение числовых значений объектам, событиям, атрибутам и особенностям в соответствии с правилами. Согласно этому определению, характеристики объектов, событий, атрибутов и особенностей обозначаются числами. Присваивая результатам студентов числовые значения, мы измеряем их успеваемость. Действительно, оценки означают различия в измеряемых характеристиках (например, в успеваемости студентов). Следовательно, измерение будет значимым, если студенты будут оцениваться по одним и тем же правилам, в противном случае измерение не имеет смысла. Инструмент измерения (например, оценочные вопросы для измерения знаний студентов) должен быть объективным. В противном случае субъективные интерпретации не позволят измерить компетентность студента по исследуемым знаниям или навыкам. В то же время следует отметить, что оценка, основанная на объективной интерпретации, может быть бессмысленной, если она построена на неэффективных вопросах.

Оценка описывает, «насколько хорошо человек успевает?». Мы стараемся улучшить все оценочные вопросы, чтобы убедиться в точности и стабильности результатов оценки. После обучения студенты должны быть готовы успешно применить результаты обучения на практике (изменение поведения). Когда преподаватели математического анализа преподают определенный курсы, а затем студенты меняют свое поведение (т. е. происходит обучение), тогда «оценка становится неотъемлемой частью процесса преподавания и обучения». Для разработки и совершенствования процесса оценки и преподавания-обучения были предложены следующие задачи.

Следует отметить, что в наибольшей степени профессиональная математическая деятельность студентов вуза проявляется при изучении дисциплины «Математический анализ». Это следует из того, что все дисциплины указанного профиля прямо или косвенно затрагивают учебный материал по математическому анализу и требуют от студента использовать учебные действия, присущие именно математической деятельности по математическому анализу.

Обучение математическому анализу обладает заметными особенностями по сравнению с другими математическими дисциплинами. Именно математическому анализу отдаётся приоритет в формировании творческого математического мышления у студентов. Кроме таких качеств мыслительной деятельности, как абстрактность, алгоритмичность, логичность, в ходе изучения математического анализа формируются также гибкость, оригинальность, широта и глубина мыслительной деятельности. По этому поводу В. А. Тихомиров писал: «Всеми нами должна быть осознана особая роль тренировки и гармонического развития

наших мыслительных способностей, нашего мозга. Но за всю историю человечества не найдено лучшего способа развития интеллектуальных и творческих способностей человека, чем при помощи математики».

Математический анализ, как ни одна другая математическая дисциплина, требует всесторонней мыслительной, познавательной, творческой и учебной деятельности. В силу специфики дисциплины «Математический анализ» она является самым трудным математическим предметом для студентов первого курса практически на всех специальностях. Опыт работы с первокурсниками показывает, что существует определённый разрыв между знаниями, полученными в школе, и требованиями, предъявляемыми к знаниям студентов при изучении первых разделов курса математического анализа, причём не столько к знанию фактов, сколько к их анализу для установления смысла того или иного факта.

Проблемы измерения и оценивание успеваемости студентов на уровне навыков мало изучено. В качества измерительных материалов для оценивания навыков студентов нами разработаны система задачи по математическому анализу для первокурсников:

1. Счетные и ограниченные.
2. Счетные и неограниченные.
3. Несчетные и ограниченные.
4. Нечетные и неограниченные.
5. $\left(\frac{n}{(n+1)}, \frac{(n+1)}{(n+2)}\right)$. Найдите конечные, счетные и несчетные подмножеств данного интервала. Здесь n — фиксированное натуральное число.
6. Построить пример функции, которая неограниченная на сегменте.
7. Построить примеры на функции, которые различает только на конечное множество точки области определения.
8. Привести примеры таких функции:

	1	2	3	4	5	6
D(f)	конечны	счётны	счётны	несчётны	несчётны	несчётны
E(f)	конечны	конечны	счётны	конечны	счётны	несчётны

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ НАЧАЛ АНАЛИЗА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Т. Б. Бегиева (Россия, Владикавказ; МБОУ СОШ № 27)

Введение. В данной статье рассматриваются методические аспекты формирования у учащихся умений решать задачи математического анализа без производной.

Необходимость усиления методической составляющей освоения учащимися начал анализа обусловлена следующими обстоятельствами:

– во-первых, в демонстрационных вариантах ЕГЭ по профильной математике представлены задачи анализа, в частности на экстремумы;

– во-вторых, вторая часть КИМов по профильной математике содержит задачи повышенного и высокого уровней сложности, выполнение которых предполагает уверенное владение учащимися формально-оперативным алгебраическим аппаратом.

Материалы и методы. В статье представлены методические приемы по конструированию учащимися математической модели на примере решения задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции с применением стандартных неравенств (без производной).

Метод решения задач на исследование функции без производной основан на использовании теоремы: для любых двух неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство Коши:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \tag{1}$$

(среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического).

Знак равенства в соотношении (1) достигается тогда и только тогда, когда $a = b$. Действительно, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то:

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0; \quad a - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b \geqslant 0; \quad \frac{a+b}{2} \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Выделим серию неравенств, следствий из неравенства (1) (таблица 1).

Таблица 1

	Неравенство	Случай равенства
1.	$\left\lvert at + \frac{b}{t}\right\rvert \geqslant 2\sqrt{ab}$	$t^2 = \frac{b}{a}$
2.	$x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2y,\ x > 0$	$x = y$
3.	$x + \frac{y^2}{x} \leqslant 2y,\ x < 0$	$x = y$

Результаты исследования. В данной работе раскрыты этапы методики освоения данного способа решения задач на экстремум. На первом этапе освоения данного метода осуществляется изучение его теоретических основ и составление систематизирующей таблицы (таблица 1).

На втором этапе освоения данного метода формулируется алгоритм (ООД) и демонстрируются образцы его применения.

Пример 1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 7^{5x-2} + 9 \cdot 7^{4-5x} - 41.$$

Решение. 1) Так как множество значений показательной функции R_+, то $7^{5x-2} > 0$, $9 \cdot 7^{4-5x} > 0$ при любом действительном значении x.

2) В силу неравенства (1) имеем:

$7^{5x-2} + 9 \cdot 7^{4-5x} \geqslant 2\sqrt{7^{5x-2} \cdot 9 \cdot 7^{4-5x}}$;

$7^{5x-2} + 9 \cdot 7^{4-5x} \geqslant 2\sqrt{9 \cdot 7^2}$;

$7^{5x-2} + 9 \cdot 7^{4-5x} \geqslant 42$.

3) $7^{5x-2} + 9 \cdot 7^{4-5x} - 41 \geqslant 42 - 41$.

$f(x) \geqslant 1$ при любом действительном значении x, причем, знак равенства достигается, если:

$7^{5x-2} = 9 \cdot 7^{4-5x}$;

$7^{10x-6} = 9$;

$x = \frac{6+\log_7 9}{10}$.

Ответ: $\min_{IR} f(x) = f\left(\frac{6+\log_7 9}{10}\right) = 1$.

Пример 2. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2 \frac{4}{x}} \quad \text{на отрезке} \quad \left[\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$$

Решение. 1) Так как $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$, то $\log_2 x \geqslant 0$, $\log_2 \frac{4}{x} \geqslant 0$ при $x > 0$.

2) В силу неравенства (1) имеем:

$$\sqrt{\log_2 x \cdot \log_2 \frac{4}{x}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\log_2 x \cdot \log_2 \frac{4}{x}\right) = \frac{1}{2}\log_2 4 = 1.$$

3) Таким образом, $f(x) \leqslant 1$, причем равенство достигается, если:

$$\begin{cases} \log_2 x = \log_2 \frac{4}{x}, \\ \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4, \\ \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}. \end{cases} \iff x = 2.$$

Ответ: $\max_{\left[\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]} f(x) = f(2) = 1$.

Заключение. В данной работе:

– выделены теоретические основы метода решения задач анализа с помощью стандартных неравенств и проведена их схематизация;

– раскрыты этапы методики освоения данного способа решения задач на экстремум;

– представлены примеры для организации тренинга учащихся по данной теме.

ДИСТАНЦИОННОЕ ПРЕПОДАВАНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ: ЧЕМУ ПОЛЕЗНОМУ НАС НАУЧИЛ ПЕРИОД КОВИДА

М. Г. Голицына (Россия, Москва; РГУНиГ)

Пандемия ковида 2020–2022 гг. запустила много новых общественных процессов. Одним из них стал переход образования на дистанционное обучение [1, 2]. Решая неожиданно возникшие проблемы, коснувшиеся многих людей, российское преподавательское сообщество накопило интересный положительный опыт. Обсудим этот опыт и возможность его применения в классической схеме образования на примере курса высшей математики в инженерном вузе.

Практически с первых шагов перехода на дистанционное обучение весной 2020 г. выяснилось, что само понятие дистанта является неопределенным [2]. Оказалось, что все понимают (или не понимают) его по-своему. Некоторые преподаватели решили, что достаточно выложить на учебном портале вуза методичку, дать по ней задание и получить студенческие работы по электронной почте. Продвинутые сотрудники дают ссылки на сделанные ранее видеозаписи своих лекций.

Однако выяснилось, что большинство студентов предпочитает лекции и семинары, проведенные «в прямом эфире» при помощи программ типа Zoom, Discord или Teams и специальных планшетов, заменяющих доску и дающих возможность писать математические формулы с традиционной скоростью. Мы не будем сейчас обсуждать технические и финансовые (очень важные!) проблемы приобретения оборудования и программного обеспечения, а также качественного интернета.

Важную роль в современной высшей школе играют образовательные порталы, чаще всего созданные на базе платформы Moodle еще до эпохи ковида. Они достаточно сложны, но новая реальность быстро заставила преподавателей и студентов их освоить. Безусловно, в работе этих образовательных порталов имеются недостатки и недоработки. Но современная практика показала, что без такого портала организация образовательного процесса в вузе уже невозможна. На уровне отдельного преподавателя можно спорить, все ли возможности таких систем нужно использовать, но как минимум информационные возможности таких порталов заслуживают положительной оценки: теперь не нужно писать старосте группы письмо с общей информацией, достаточно разместить объявление на страничке группы. Там же очень удобно разместить календарный план, список контрольных работ, программу экзамена.

Однако выяснилось, что основной проблемой дистанционного обучения является проведение контрольных работ и экзаменов [1]. На кафедре высшей математики РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина были выработаны «Правила проведения дистанционных контрольных и экзаменационных работ». Эти правила сработали лишь частично. Оказалось, что невозможно быть уверенным,

что присланная на образовательный портал письменная работа действительно честно и самостоятельно написана студентом. Видео-контроль очень ограниченно эффективен. Экзамены без видеоконтроля выдают статистические выбросы отличных и хороших оценок, а почти нет неудовлетворительных. В следующем за дистантом семестре мы с сожалением убедились, что доля хороших оценок была неадекватно большой. Можно сделать уверенный вывод, что дистанционный экзамен по математике не может объективно оценивать знания, навыки и компетенции студентов.

Перейдем к положительному опыту, полученному в период 2020–2022 гг. Онлайн консультации показали свою эффективность. Многим педагогам, да и самим студентам удобнее их проводить в более позднее время дня. Дистанционный формат допускает эффективное применение пакетов типа Maple, Wolfram Mathematica или Matlab, позволяет активно использовать графические и видеоматериалы. В чем же дело? Почему семинары и контрольные лучше проводить вживую, а консультировать — онлайн? Ответ, на мой взгляд, заключается в психологии и мотивации студентов: на консультации обычно приходят самые мотивированные студенты, часто у них есть список конкретных вопросов, к доске не вызывают и онлайн-формат всем подходит. Кроме того, такую консультацию можно записать и это видео вместе с конспектом разместить на портале. Такие материалы доступны всем студентам потока в любое удобное время.

Другим положительным примером является практика защиты курсовых и дипломных проектов. Слайды, подготовленные соискателями удобно просматривать с экрана рабочего или домашнего компьютера. На такую защиту в формате видеоконференции можно пригласить членов комиссии и экспертов из любого города, у всех есть прекрасная возможность задавать вопросы докладчикам. Выпускники к моменту защиты уже обычно известны сотрудникам кафедры, вопросы честности, самостоятельности и безопасности уже не являются существенными.

В заключение повторим еще раз тезис о том, что опыт ковидного периода полностью дистанционного преподавания высшей математики в инженерных вузах показал свою неэффективность с точки зрения качества подготовки выпускников технических специальностей. При этом оказалось, что некоторые онлайн технологии и возможности порталов дистанционного обучения удачно встраиваются в классическую схему преподавания высшей математики.

Кроме этого отметим положительный психологический и педагогический эффекты: использование современных компьютерных технологий в преподавании математики положительно воспринимается современными студентами.

Литература

1. *Bruce A., Grabowska K., Millionshchikov D., Tuzhilin A.* Working from Home. 2 Months, 8 Months and Still Counting ... // EMS Newsletter.—2021.—№ 12.—P. 65–67.
2. *Миллионщиков Д. В.* Как карантин выявил основные проблемы высшего образования в России // Ректор вуза.—2020.—№ 8.—С. 32—35.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О РАЗРАБОТКЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИИ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ ЦИФРОВОГО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

М. Н. Гончарова (Беларусь, Гродно; ГрГУ им. Янки Купалы),
Е. А. Сетько (Беларусь, Гродно; ГрГУ им. Янки Купалы)

В настоящее время в сфере высшего образования важной проблемой является формирование комплексного мышления будущих специалистов. Поэтому существует необходимость в создании и внедрении инновационных систем в области преподавания и обучения, которые поддерживают обучение и развитие комплексного мышления молодого человека. Современные условия требуют формирования новой образовательной среды, необходимой для подготовки специалистов, адаптированных к работе в условиях цифровой экономики. В этой связи совершенно логичным видится использование в процессе обучения цифровых учебно-методических комплексов (ЦУМК).

ЦУМК органично соединяет в себе цифровые процессы организации учебного процесса; цифровые процессы проверки знаний; цифровые технологии организации обучения; цифровые технологии взаимодействия, обеспечивающие реализацию персонализированного образовательного процесса.

В основу разработки ЦУМК по разделу «Дифференциальные уравнения» учебной дисциплины «Математика» для технических специальностей авторами был положен принцип микрообучения. Учебный материал, представленный в разработанном ЦУМК, максимально сжат, изложен конспективно, доступен для понимания и представляет собой компактные блоки по изучаемой теме. После освоения каждого блока рекомендуется ответить на несколько коротких вопросов для самопроверки. В конце каждого раздела размещены контрольные тесты. В зависимости от ситуации они могут использоваться для самоконтроля студентов или для контрольных мероприятий.

Представляемый ЦУМК был успешно апробирован. Каждый микроурок, являющийся онлайн-платформой для самостоятельного обучения, теоретически можно проходить бесконечное количество раз. И студенты в любой момент могли обращаться к любой теме изучаемого материала, используя при этом возможность регулярно самостоятельно оценивать свой уровень знаний.

Отметим преимущества выбранной методологии. Микрообучение позволяет максимально концентрировать внимание обучающихся. Использование компьютерных систем делает обучение более доступным, а также мобильным. Теперь у студента нет необходимости садиться за письменный стол, чтобы изучать курс. Модульность и гибкость подразумевает получение знаний в виде небольших блоков, каждый из которых можно легко изменить или переставить.

Итак, микрообучение неразрывно связано с современными информационными технологиями. Опыт преподавания авторов свидетельствует, что использование динамических визуализаций повышает эмоциональность восприятия достаточно сложных математических построений, способствует лучшему усвоению и запоминанию материала.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕДВУЗОВ

Е. И. Деза (Россия, Москва; МПГУ),
О. И. Стесева (Россия, Москва; МПГУ)

Введение. Современные тенденции развития Российского образования включают в себя постепенный возврат к отечественным образовательным ценностям, формировавшимся на протяжении двадцатого века. Однако век сегодня — двадцать первый, и отечественные образовательные традиции должны быть адаптированы к реалиям современного общества. Рассмотрим возможность совмещения этих двух тенденций при изучении дифференциальных уравнений в курсе «Численные методы» Института математики и информатики Московского педагогического государственного университета (ИМИ МПГУ).

Материалы и методы. Курс «Численные методы» читается студентам ИМИ МПГУ более пятидесяти лет. С 2010 года в учебном процессе активно используется пособие Деза Е. И. и Шахова Ю. Н. «Численные методы», с 2014 года — разработанный авторами электронный курс. Дисциплина «Численные методы», наряду с другими разделами, включает в себя темы «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений», «Численное решение уравнений в частных производных», «Понятие о численном решении интегральных уравнений».

Изучение данного раздела численного анализа опирается на метод конечных разностей (численный метод, основанный на разностной аппроксимации производных) и ориентировано на соблюдение следующих методических требований:

• фундаментальность изложения материала; тесная связь с аналитическими методами; строгое обоснование легитимности используемых в ходе рассуждений разностных схем, развернутое доказательство их устойчивости и сходимости;

• практическая направленность решаемых задач; демонстрация сути рассматриваемого решения, формирование понимания цели, структуры и основных этапов алгоритма численного решения конкретной практической проблемы.

• профессиональная направленность обучения.

Результаты исследования. Опыт авторов позволяет судить о положительной динамике уровня предметной подготовки студентов в рамках предложенного подхода. Осознание новых возможностей, понимание практического потенциала полученных знаний повышает профессиональную мотивацию обучающихся. А поиск задач, позволяющих продемонстрировать связи рассматриваемого раздела со школьной математикой (для дифференциальных уравнений это не так легко) стимулирует и деятельность педагога.

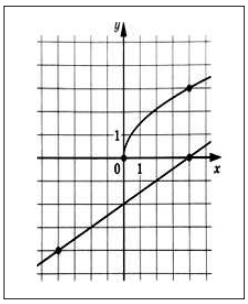
АНАЛИЗ ГРАФИКОВ: РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 10 ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Д. А. Караева (Россия, Владикавказ; МБОУ СОШ № 30)

Введение. Умение интерпретировать графики функциональных зависимостей и извлекать из графика его числовые характеристики является важным для выпускников и разработки методики его формирования. В заданиях ЕГЭ на анализ графика дан график функции или графики функций и ставится вопрос определения какой-нибудь характеристики функции: значение функции в некоторой, неуказанной на рисунке, точке; значение параметра в формуле функции и др. Традиционно такие задания решаются следующим способом: выбирается некоторое число точек на графике функции и их координаты подставляются в формулу функции. Решение соответствующего уравнения или систем уравнений дает возможность найти недостающие параметры в формуле функции. Рассмотрим иные способы решения.

Материалы и методы.

Задача 1. Дано: $f(x) = a\sqrt{x}$, $g(x) = kx + b$, $A(x_0, y_0)$ — общая точка графиков. Найти: y_0.



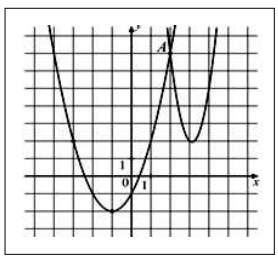
План решения.

1. Найти a, используя точку $(4; 3)$.

2. Найти k, используя $\operatorname{tg}\alpha$; найти b, используя пересечение прямой с осью Oy.

3. Найти абсциссу точки пересечения графиков и соответствующее значение ординаты.

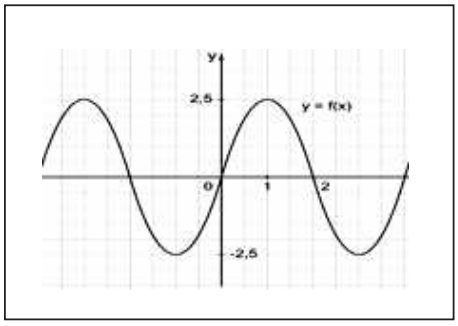
Задача 2. Дано: $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, A, B — общие точки графиков. Найти: абсциссу точки B.



План решения.

1. Определить какой график соответствует функции $f(x)$, а какой $g(x)$:
   вариант 1: через точку пересечения с осью Oy (для нашего графика это будет $(0; 41)$);
   вариант 2: через значение коэффициента при x^2 для функции $f(x)$ старший коэффициент равен 4, на рисунке это соответствует правому графику.
2. Определить параметры a, b, c:
   а) параметр a через значение функции при $x = 1$ в системе координат, начало которой находится в вершине;
   б) параметр b через использование формулы $x_{\text{вер}} = \frac{-b}{2a}$, где $x_{\text{вер}}$ определяется по графику;
   в) параметр c через точку пересечения графика с осью Oy.
3. Найти абсциссы точек пересечения графиков и определить, какая из них соответствует точке B.

Задача 3. Дано: $y = f(x)$ — периодическая функция. Найти: $f(21) - f(9)$.



План решения.

1. По графику определить период функции (в данном случае $T = 4$).
2. Определить по графику «удобные» значения функции (в данном случае $f(1) = 2.5$).
3. Определить способ вычисления $f(21)$ с использованием «удобной» точки и периода и найти его значение (в данном случае $21 = 1 + 4 \cdot 5$, значит, $f(21) = f(1) = 2.5$).
4. Определить способ вычисления $f(-9)$ (в данном случае $f(-9) = -f(9) = -f(1 + 4 \cdot 2) = -f(1) = -2.5$).
5. Ответить на вопрос задачи (в данном случае $f(21) – f(-9) = 2.5 – (-2.5) = 5$).

Таким образом, в данной работе:

– представлена методика формирования умений нахождения параметров функции, заданной с помощью графиков;

– приведены пример использования авторских методических приемов при решении задач на анализ графиков.

Результаты исследования: рассмотрены различные способы анализа графиков функции.

APPLIED APPROACH TO PROVIDING HIGHER MATHEMATICS TO STUDENTS OF ENGINEERING AND TECHNICAL SPECIALTIES

V. L. Litvinov (Russia, Moscow; MSU)

To prepare highly qualified specialists for production and science, an appropriate level of mathematical training of the young generation is required.

Higher mathematics has a direct connection with many subjects studied at the university, with junior courses, ending with senior courses, as well as diploma design. With this decision, the place of mathematics in the system of higher education. Related sciences use a different amount of mathematical knowledge and set themselves new tasks in the most complex mathematics.

Assigning higher mathematics in higher education to educational institutions, it was mathematics that became the main purpose of dropping out students. It is only by changing the method of teaching that one can change the attitude towards the subject. Therefore, teachers of mathematics face one of the main tasks: increasing the interest of students in mathematics. Higher mathematics should come from a dry and difficult subject in a complex of clear and significant ideas, opening a direct path to the history of physics, chemistry, engineering and economic disciplines under the motto “accessible presentation”.

In technical universities, mathematics occupies a dual position: on the one hand, it is a special general educational discipline, on the other hand, for most specialties of technical universities, mathematics is not a major consequence. Students, especially in the undergraduate years, perceive it as a kind of abstract discipline that is not found at the professional level of a future engineer. It is obvious that mathematics is widespread with a cycle of professional disciplines, especially when mathematical methods are widely used in engineering and technical activities.

The principle of applied orientation presupposes the first study of the student’s immersion in the context of future professional activity, the inclusion of professional significant knowledge in the content of reading, showing the connection of mathematical concepts, obtaining, discovering with his next engineering work. The main task of the mathematical education of an engineer is to reveal the identified knowledge, skills and abilities of specialists, as well as the ability to apply them in their future professional activities.

References

1. *Zeldovich Ya. B., Myshkis A. D.* Elements of Applied Mathematics.—M.: Nauka, 1967.—592 p.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О РАБОТЕ С ИНФОРМАЦИЕЙ В ИНТЕРНЕТЕ И КОРРЕКТНЫХ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛКАХ

Ю. С. Налбандян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Введение. В условиях, когда все большее внимание уделяется творческой составляющей учебного процесса, существенную роль играют необходимость правильного отбора, обработки и представления информации, а также корректность ссылок, которые связывают между собой «традиционные и электронные библиотеки, различные информационные массивы, сетевые документы» (см. [1]).

Материалы и методы. Проведен анализ проектов, выполненных школьниками при изучении математики, рефератов студентов и аспирантов ЮФУ, а также творческих работ, подготовленных студентами творческих специальностей различных учебных заведений.

Результаты исследования. Выявлены общие для всех образовательных программ проблемы, проанализированы их последствия и намечены пути выхода из сложившейся ситуации.

1. Использование непроверенной информации. К сожалению, это одна из главных проблем, обостряющаяся в связи с ростом «псевдонаучных публикаций», в том числе размещаемых в РИНЦ. Приводит к возникновению ряда этических проблем, снижает ценность работ, выполняемых учащимися. Преодолевается вниманием к выбираемым источникам, повышением квалификации преподавателей, «перекрестными» проверками используемых материалов.

2. Неумение работать с текстом, языковые проблемы, «доверие» к формулировкам, найденным в Интернете. Преодолевается методами, отмеченными выше.

3. Отсутствие единообразия требований к докладам и публикациям. Речь идет о том, что работы (презентации, статьи, доклады), подготовленные на одном и том же уровне, преподаватели различных дисциплин оценивают поразному. Преодолевается активной работой методических объединений учебного заведения, при этом необходимо учитывать, что все «разноплановые учебные задачи и задания» являются частью единого целого (см. примеры в [2] и [3]).

4. Некорректные и неполные библиографические ссылки, отсутствие единого стиля оформления списков использованной литературы, проблемы со ссылками на информацию, найденную в Интернете. Преодолевается вниманием руководителей проектов к оформления представляемых работ и тщательным следованием существующим стандартам.

Выводы. Отмеченные выше проблемы подтверждаются многочисленными разнообразными примерами, но преодолимы.

Литература

1. *Смирнова М. Н.* Библиографическая ссылка как фактор формирования единого информационного пространства // Теория и практика общественно-научной информации.—2014.—№ 22.—С. 133–140.
2. *Медер Э. А.* Современное художественно-проектное образование и проблемы междисциплинарных связей // Искусствознание и педагогика: диалектика взаимосвязи и взаимодействия: Сб. тр. XIV Междунар. межвуз. науч.-практ. конф., Санкт-Петербург, 23 декабря 2021 года.—Санкт-Петербург: ЦНИТ «Астерион», 2021.—С. 114–126.
3. *Налбандян Ю. С., Медер Э. А.* Достоинства и недостатки цифровых технологий: опыт внедрения // Задачи в обучении математике, физике и информатике в условиях цифровой трансформации: Матер. III Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 130-летию П. А. Ларичева, Вологда, 16–18 марта 2022 года.—Вологда: ВГУ, 2022.—С. 226–229.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СОЗДАНИЮ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. Ф. Оськин (Беларусь, Полоцк; ПГУ),
Д. А. Оськин (Беларусь, Минск; БГЭУ)

Введение. Электронные учебно-методические комплексы (ЭУМК) уверенно вошли в повседневную жизнь высших учебных заведений. С их помощью решается ряд дидактических задач, важнейшими из которых являются

– предоставление студентам теоретических материалов, необходимых для освоения базовых знаний по изучаемой предметной области;

– развитие различного рода компетенций, позволяющих профессионально решать проблемы, типичные для изучаемой предметной области;

– формирование навыков самостоятельной постановки и решения задач, требующих для своего решения нестандартного, творческого подхода.

Создание ЭУМК является сложной и трудоемкой задачей. При решении этой задачи перед разработчиком встает ряд трудностей, связанных с обеспечением качества, доступности и эффективности разрабатываемого контента. Одним из путей преодоления этих трудностей является стандартизация подходов к разработке учебного контента. Основой стандартизации может стать онтологический подход к проектированию и разработке ЭУМК. Онтологический подход предполагает создание модели знаний, которая описывает предметную область и ее связи, что позволяет организовать информацию в систематическом порядке и обеспечить ее унификацию.

Онтологический подход к созданию ЭУМК. В основе онтологического подхода лежит предметная онтология. В нашем случае онтология это формальное описание понятий и отношений между ними в предметной области. Онтология служит для структурирования знаний и данных, что позволяет их более эффективно использовать и обрабатывать. В информационных системах онтологии используются для реализации механизмов поиска и фильтрации данных, а также для автоматической обработки естественного языка. Онтологический подход при разработке образовательного контента имеет следующие преимущества:

1. Онтологии могут использоваться в качестве модели представления знаний, что позволяет учитывать особенности каждого обучаемого и создавать индивидуальные траектории обучения.

2. Онтологический подход позволяет создавать более структурированный и связанный образовательный контент. Это способствует улучшению понимания материала и повышает его эффективность.

3. С помощью онтологии становится возможным создание общей модели представления знаний, которая может быть использована для совместной работы и обмена образовательным контентом между различными организациями и учебными заведениями.

Заключение. Таким образом, использование онтологического подхода при разработке ЭУМК может привести к созданию более персонализированного, структурированного, доступного и эффективного образовательного контента.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ИГРА КАК СПОСОБ СИСТЕМАТИЗАЦИИ И ОБОБЩЕНИЯ ЗНАНИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Л. П. Охват (Россия, Владикавказ; СКСВУ)

В настоящее время перед педагогическим сообществом стоит задача не только повышения качества образования, но и формирования личности, способной учиться. Поэтому поиск средств для решения обозначенных задач, развития познавательных и творческих способностей личности в процессе обучения математике является актуальным.

Одним из таких средств может быть урок обобщения и систематизации знаний, который преследует содержательную цель: выявление уровня знаний учеников по теме, обобщения знаний по предмету; и деятельностную цель: воспитание общей культуры, эстетического восприятия окружающей действительности, создание условий для самооценки обучающихся, развитие мышления, творческих способностей, навыков самостоятельной работы, умения работать в группе, развитие познавательного интереса, воспитание лидерских качеств, обучение приемам самоанализа. Процесс систематизации и обобщения знаний на уроке математики можно организовать в виде дидактической игры. Она позволяет обучающимся применять математические знания, развивать навыки решения задач. Кроме того, игра может способствовать развитию коммуникативных навыков, поскольку для ее проведения часто требуется сотрудничество и общение между учениками. Более того, может быть использована для мотивации обучающихся и повышения их интереса к изучению математики.

В работе представлена игра «Внимание, розыск!», дидактической целью которой является обобщение знаний о четырехугольниках, развитие логического мышления и воображения, формирование общеучебных умений и навыков. Реализует следующие задачи:

предметные: формирование навыков применения полученных теоретических знаний при изучении темы «Четырехугольники»;

метапредметные: развитие навыков обрабатывать информацию и выбирать способы решения задач в зависимости от конкретных условий; развитие умений контролировать и оценивать процесс и результаты своей деятельности; развитие навыков работы в группе; развитие умений формулировать и высказывать свою точку зрения;

личностные: воспитание у учащихся любознательности через познавательную информацию; развитие математической грамотности и культуры, умений обобщать, анализировать, конкретизировать.

Игра является обобщающей, тихой, качественной и универсальной. Класс делится на 5 групп, каждая группа получает задание описать один из пяти четырехугольников: параллелограмм (не являющийся прямоугольником или ромбом), прямоугольник, ромб, квадрат и трапеция. В описании нужно указать определения, свойства, признаки, формулы для вычисления площадей и т. д.

Описанием объекта озвучивается группой, коллективно обсуждается, вносятся дополнения или изменения. Листок с итоговым описанием прикрепляется на доску рядом с названием четырехугольника. Далее обучающимся предлагаются «фотороботы» шести четырехугольников, каждая из пяти групп должна опознать предложенный ей разыскиваемый объект и прикрепить его на доску рядом с названием. При этом решения групп озвучиваются, обсуждаются. Остается один неопознанный четырехугольник (дельтоид). Его «фоторобот» тоже вывешивается на доску, рядом ставится знак вопроса. Следующий этап — это составление каждой группой задачи на определение вида четырехугольника и вычисление его площади, и решение задачи партнеров по игре. Задачи и решения к ним записываются на листках, озвучиваются, обсуждаются и прикрепляются на доску рядом с названием четырехугольника, описываемого в задаче. Заканчивается игра формулировкой вывода по теме и заданием выяснить название неопознанного четырехугольника, составить его описание, нарисовать «фоторобот» и придумать задачу. Можно упростить игру и провести ее фронтально с помощью презентации, при правильном выборе названия четырехугольника, будет открываться часть картинки. С помощью интернет — ресурсов можно сделать игру интерактивной и предложить обучающимся пройти квест или игру на соответствие четырехугольников и их названий. Упрощенный вариант представленной игры можно превратить в настольную игру. При правильном совмещении четырехугольников и их видов, можно узнать название незнакомого для обучающихся четырехугольника.

Таким образом, представленная в работе дидактическая игра может быть очень эффективным и интересным способом систематизации и обобщения знаний как по теме «Четырехугольники», так и по другим темам. Так как она формирует предметные УУД:

– знание понятий, определений, формул,

– умение применять полученные знания при решении задач; коммуникативные УУД:

– развитие коммуникативных качеств личности: взаимного уважения, доброжелательности, доверия, уступчивости и в то же время инициативности, навыков делового общения; познавательные УУД:

– умение ориентироваться в своей системе знаний, извлекать информацию, представленную в разной форме, формулировать конечный результат;

– развитие осознанных мотивов учения, побуждающих учащихся к активной познавательной деятельности.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

А. А. Сагитов (Россия, ст. Ассиновская, СОШ № 2;
с. Серноводское, СОШ № 3)

Введение. Современное общество испытывает острую потребность в качественном образовании, в частности, речь идет о качестве высшего образования. Подготовка специалистов во многих сферах сегодня требует также и высокого уровня математической подготовки. Таким образом, актуально исследование тех проблем, которые стоят перед математическим образованием, кроме того, следует также обратиться к тем решениям, которые могут быть эффективны для повышения качества математического образования сегодня. Цель исследования — выявление и анализ проблем математического образования, а также определение путей, стратегий решения данных проблем с учетом специфики образовательной ситуации современности.

Материалы и методы. Исследование существующих проблем математического образования осуществлялось на базе одного из высших учебных заведений. Были задействованы следующие методы исследования: анализ учебных пособий и методов обучения, педагогических подходов, проведение анкетирования студентов. В качестве факторов, определяющих удовлетворенность студента учебным процессом были выделены следующие факторы: перспективность применения математических знаний в профессии, доступность учебного материала для понимания, наличие и степень удовлетворенности заданиями, их разнообразием, применение наглядности учебного материала, использование ИКТ в образовательном процессе и т. д.

Таким образом, процесс исследования включает в себя следующие этапы:

1) анализ внутренней среды образовательного процесса через наблюдение;

2) анализ учебных пособий с позиции их соответствия современным процессам в образовании;

3) составление анкеты;

4) проведение опроса;

5) обработка результатов анкетирования;

6) разработка путей решения выявленных проблем в сфере математического образования.

Результаты исследования. На основе анализа учебных пособий и занятий, обработки ответов студентов были выявлены следующие проблемы: невысокий уровень наглядности учебного материала, отрывочное изложение материала во многих пособиях и на лекциях, отсутствие эффективных технологий для того, чтобы выравнивать базовой уровень математических знаний учащихся, недостаточно эффективное использований возможностей цифровых технологий, что не соответствует общей стратегии инновационности развития современного образования, слабая мотивированность учащихся, отсутствие в пособиях и на занятиях

интерактивных методов, недостаточное внимание к работе в группах, проектной работе практической направленности, которая требует того, чтобы учащиеся использовали комплексно получаемые ими математические знания, недостаточная поддержка индивидуальной траектории обучения.

Заключение. Таким образом, можно сделать вывод о том, что в современном математическом образовании проблемы существуют, более того, эти проблемы требуют выработки грамотной и системной стратегии решения. Предлагается сделать акцент на следующих направлениях совершенствования математического образования: введение тьюторской системы, разработка системы повышения степени мотивированности учащихся через включение в проектную деятельность, внедрение в образовательный процесс ИКТ и иных цифровых технологий, повышение уровня наглядности и системности в изложении учебного материала.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ GEOGEBRA В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

Л. Н. Удовенко (Россия, Москва, МПГУ; ПСТГУ),
М. В. Шабанова (Россия, Архангельск; САФУ)

Алгебраическая задача с параметром — традиционный элемент КИМ ЕГЭ. Как известно, подготовить учащихся к решению задач этого типа довольно трудно. Их решение требует не только развитых базовых умений решения алгебраических задач, но и владения богатым арсеналом методов и приемов, многие из которых связаны с созданием графического или геометрического представления задачной ситуации, включающего как стационарные, так и динамические компоненты. Освоить такие методы и приемы поможет привлечение динамических компьютерных моделей, создаваемых средствами системы динамической математики GeoGebra, и экспериментирование с ними.

Согласно спецификации ЕГЭ по математике профильного уровня в качестве средств проверки уровня сформированности умений решать уравнения и неравенства используются задачи с параметром. В этой связи остановим свое внимание на этих задачах. Уравнением (неравенством) с параметром, вообще говоря, называется уравнение (неравенство) с двумя переменными $f(a, x) \lesseqgtr 0$. Такое понимание допускает различные интерпретации уравнения (неравенства) с параметром: мы можем рассматривать неизвестное и параметр как равнозначные переменные и изображать геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (неравенству), при этом параметр a можем считать независимой переменной, либо — считать a зависимой переменной; рассматривать левую часть как зависимость двух переменных $z = f(a, x)$ и изображать ее график с использованием трехмерной системы декартовых координат (a, x, z) или (x, a, z); рассматривать параметр a как неопределенный коэффициент в уравнении, описывающем связь двух переменных $y = f(a, x)$, и представлять зависимость динамическим графиком в координатах xOy; представлять $f(a, x)$ в виде суммы $f_1(a, x) + f_2(a, x)$ и решать вопрос о взаимном расположении графиков двух зависимостей $y = f_1(a, x)$ и $y = f_2(a, x)$. Выбор подходящей для решения задачи с параметром интерпретации зависит от конкретной ситуации и определяется целым набором факторов: трудоемкостью выражения зависимости одной переменной через другую, возможностью подведения зависимости под уравнение фигуры известного вида и, разумеется, наличием базовых знаний у обучающихся для проведения рассуждений сообразно требованиям задачи.

Чаще всего, вопрос выбора интерпретации перед учащимися, пользующимися открытыми банками заданий, учебными пособиями при подготовке к ЕГЭ, не возникает. Он уже сделан за них авторами этих ресурсов, и получается, что отсутствие навыков самостоятельного выбора и варьирования интерпретаций не

дает стабильно положительных результатов на экзамене. Разрешить эту проблему позволяет опыт обучения решению задач с параметром с использованием GeoGebra. Привлечение данного средства открывает дорогу варьированию интерпретаций в ходе работы над задачей, позволяя сформировать у учащихся необходимые умения обоснованного выбора подходящей интерпретации.

Секция IV

Дифференциальные и интегральные уравнения

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О СРЕДНЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Х. Ф. Н. Алзамили (Россия, Белгород; НИУ БелГУ)

Большое количество физических, геометрических и вероятностных задач приводит к построению и изучению параболических уравнений в частных производных. Появление новых задач распространения информации и процессов с памятью приводит к необходимости рассмотрения уравнений параболического типа с различными операторами, действующими по пространственным переменным. В этом докладе рассмотрим теорему о среднем для сингулярного параболического уравнения, особенность которого обусловлена наличием оператора Лапласа — Бесселя вида

$$\Delta_\gamma = \sum_{k=1}^{n} (B_{\gamma_k})_{x_k},$$

где $(B_{\gamma_k})_{x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}$ — оператор Бесселя, $k = 1, \ldots, n$.

Обобщенная дивергентная теорема и вторая формула Грина для для эллиптических и гиперболических операторов с оператором Лапласа — Бесселя, опубликованные в [1], позволили получить теорему о среднем значении для параболического уравнения в оператором Лапласа — Бесселя.

Пусть $\mathbb{R}^n$ является n-мерным евклидовым пространством, $x \in \mathbb{R}^n$. В теории весового гармонического анализа используется весовая мера вида $x^\gamma dx$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_1 > 0, \ldots, \gamma_n > 0$, $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\gamma_n}$. Если хотя бы одна из переменных x_i в весе x^γ отрицательна, то возведение его в действительную степень дает многозначное отображение, что неудобно. С другой стороны, функции, возникающие при работе с оператором Бесселя, обычно четны. Поэтому будем рассматривать ортант

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}.$$

Область $G^+ \subset \overline{\mathbb{R}}^n_+$ называется *областью Грина* если G^+ представляет собой объединение областей $G_1^+, \ldots, G_m^+$ без общих внутренних точек, где каждая область $G_j^+ \subset \overline{\mathbb{R}}^n_+$ такова, что каждая линия, перпендикулярная плоскости $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, либо не пересекает G_j^+, либо имеет с G_j^+ только один общий сегмент (возможно, вырождающийся в точку) вида

$$\alpha_i^j(x') \leqslant x_i \leqslant \beta_i^j(x'), \quad x'=(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где α_i, β_i — гладкие функции, i=1, …, n.

Теорема 1. *Пусть $D^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ является областью Грина. Функция $u=u(x,t)$ такая, что $u \in C^2(D^+)$, $u_{x_i}|_{x_i=0} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, (x,t) является решением уравнения*

$$(\Delta_\gamma)_x u - u_t = 0$$

тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\int\limits_{\partial D^+} \left(-\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}'} + u\nu_{n+1} \right) x^\gamma \, dS = 0. \tag{1}$$

В равенстве (1) $\vec{\nu} = (\vec{\nu}', \nu_{n+1})$ *— внешний вектор нормали к поверхности* ∂D^+, $\vec{\nu}' = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *— вектор, состоящий из первых* n *компонент вектора* $\vec{\nu}$,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}'} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\nu_n.$$

И. А. Киприянов в [2] определил *B-гармоническую* функцию $u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ как функцию такую, что $\Delta_\gamma u = 0$. Отметим, что из теоремы 1 в случае B-гармонических функций получаем как тривиальное следствие теорему о среднем для решения уравнения $\Delta_\gamma u = 0$.

Литература

1. *Шишкина Э. Л.* Обобщенная дивергентная теорема и второе тождество Грина для B-эллиптических и B-гиперболических операторов // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика.—2019.—Т. 51, № 4.—С. 506–513.
2. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи.— М.: Наука–Физматлит, 1997.—204 с.

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[1]

С. Н. Асхабов (Россия, Долгопрудный, МФТИ; Грозный, ЧГПУ, ЧГУ)

Рассматривается начальная задача

$$u^{\alpha}(x) = \int\limits_0^x K(x-t)\, u^{(4)}(t)\, dt, \quad x > 0,\ \alpha > 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u'(+0) = u''(+0) = u'''(+0) = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что ядро $K(x)$ удовлетворяет условию

$$K \in C^7[0,\infty),\ K^{(7)}(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),$$

$$K(0) = K'(0) = K''(0) = \ldots = K^{(6)}(0) = 0, \quad K^{(7)}(0) > 0. \tag{3}$$

Решение задачи (1)–(2) разыскивается в классе

$$Q_0^4 = \big\{u(x) :\ u \in C[0,\infty) \cap C^4(0,\infty),\ u(0) = 0,\ u(x) > 0 \text{ при } x > 0\big\}.$$

Используя условие (3) доказывается, что если $u \in Q_0^4$ является решением задачи (1)–(2), то эта функция $u(x)$ является решением интегрального уравнения

$$u^{\alpha}(x) = \int\limits_0^x K^{(4)}(x-t)\, u(t)\, dt, \quad \alpha > 1,\ x > 0. \tag{4}$$

В этой связи сначала изучается уравнение (4) в конусе

$$Q_0 = \big\{u(x) :\ u(x) \in C[0,\infty),\ u(0) = 0,\ u(x) > 0 \text{ при } x > 0\big\}.$$

Лемма 1. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнено условие* (3). *Если $u \in Q_0$ является решением уравнения* (4), *то $u \in Q_0^4$, строго возрастает и удовлетворяет на $[0,\infty)$ неравенствам $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)$, где*

$$F(x) = \left[\frac{K^{(7)}(0)\cdot(\alpha-1)^4}{8\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)(3\alpha+1)}\, x^4\right]^{1/(\alpha-1)}, \quad G(x) = \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\, K'''(x)\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00177, и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект FEGS-2020-0001.

Пример 1. При $\alpha = 2$ и $K(x) = x^7$ задача (1)–(2) в классе Q_0^4 и уравнение (4) в классе Q_0 имеют единственное решение $u(x) = F(x) = 3x^4$.

Из леммы 1 вытекает, что решения уравнения (4) следует искать в конусном отрезке $P_b = \{u(x) : u \in C[0,b] \text{ и } F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\}$, где $b > 0$ — любое число.

Выберем число $\eta \in (0,b)$ такое, что $K^{(7)}(\eta) < \alpha K^{(7)}(0)$, и положим

$$\beta = \frac{1}{K^{(7)}(0)} \sup_{\eta \leqslant x \leqslant b} \frac{K^{(7)}(x) - K^{(7)}(0)}{x}.$$

Введем в классе P_b метрику

$$\varrho(u,v) = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{4/(\alpha-1)}\, e^{\beta x}}.$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнено условие* (3). *Тогда нелинейный оператор $(Tu)(x) = \big(\int_0^x K^{(7)}(x-t)\, u(t)\, dt \big)^{1/\alpha}$ переводит класс P_b в себя, причем*

$$\varrho(Tu, Tv) \leqslant \frac{K^{(7)}(\eta)}{\alpha\, K^{(7)}(0)}\, \varrho(u,v) \quad (\forall\, u, v \in P_b).$$

Используя теорему 1, методом весовых метрик доказывается основная

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнено условие* (3). *Если*

$$\lim_{x\to 0} x^{4(4/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(4)}(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^{4(5/3-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(5)}(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} x^{4(2-\alpha)/(\alpha-1)} K^{(6)}(x) = 0,$$

то задача (1)–(2) *имеет единственное решение $u^*(x)$ в Q_0^4 (и в P_b при любом $b > 0$). Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, причем справедлива оценка скорости их сходимости*

$$\rho(u_n, u^*) \leqslant \frac{q^\alpha}{1-q}\, \rho(Tu_0, u_0),$$

где $q = K^{(7)}(\eta)/(\alpha\, K^{(7)}(0))$, а $u_0 \in P_b$ есть начальное приближение.

Начальные задачи для уравнений вида (1) первого, второго и третьего порядков были изучены методом весовых метрик в [1–3], соответственно. Анализ полученных результатов показывает, что с ростом порядка n интегро-дифференциального уравнения (1) уменьшается верхняя граница степени α.

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Диф. уравнения.—2020.—Т. 56, № 6.—С. 786–795.
2. *Askhabov S. N.* On a second-order integro-differential equation with difference kernels and power nonlinearity // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.—2022.—№ 2 (28).—P. 38–48.
3. *Асхабов С. Н.* Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки третьего порядка // Современные методы теории краевых задач: Матер. Междунар. конф. «Понтрягинские чтения-XXXIV» (3–9 мая 2023 г.).—Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2023.—С. 32–33.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Р. Р. Ашуров (Узбекистан, Ташкент; ИМ АН РУз),
Н. И. Мержов (Узбекистан, Ташкент; ИМ АН РУз)

В этой работе показываем однозначную разрешимость начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии с дробной производной Капуто.

В области $G = \{(x, y, t) : \ 0 < x < 1, 0 < y < 1, -p < t < q\}$ рассмотрим следующее уравнение смешанного типа в двумерном случае:

$$\begin{cases} cD^{\alpha}_{0t}u(x,y,t) = \Delta u + f(x,y,t), & t \geqslant 0, \\ u_{tt} = \Delta u + f(x,y,t), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным x и y, $p > 0$, $q > 0$ — заданные вещественные постоянные, а $f(x, y, t)$ — заданная непрерывная функция,

$$cD^{\alpha}_{0t}f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t-\tau)^{\alpha} f'(\tau)\, d\tau, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{d}{dt} f(t), & \alpha = 1, \end{cases} \tag{2}$$

— дифференциальный оператор Капуто дробного порядка α [1]. Обратите внимание, что дифференциальный оператор Капуто

$$cD^{\alpha}_{0t}u(x,y,t) = I^{\alpha}_{0t}\frac{\partial u}{\partial t}$$

выражается с помощью интеграла Римана — Лиувилля дробного порядка [1]

$$I^{\alpha}_{0t}g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 (t-\tau)^{\alpha} g'(\tau)\, d\tau,$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha < \infty$.

Введем следующие обозначения:

$$J = \{(x, y, t) : \ 0 < x < 1, \, 0 < y < 1, \, t = 0\},$$

$$G_1 = \{x > 0, \, y > 0, \, t > 0\}, \quad G_2 = \{x > 0, \, y > 0, \, t < 0\}, \quad G = G_1 \cap G_2 \cap J.$$

В области G изучаем следующую задачу.

Задача. Найти функцию $u(x, y, t)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, y, t) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G_2 \cup J)$, $t^{1-\alpha}u_t(x, y, t)$, $t^{2-\alpha}u_{tt}(x, y, t) \in C^1(G_1 \cup J)$;

2) $u_{tt}(x, y, t) \in C(G_2 \cup J)$, $u_{xx}(x, y, t) \in C(G_1 \cup G_2 \cup \overline{J})$, $u_{yy}(x, y, t) \in C(G_1 \cup G_2 \cup \overline{J})cD^{\alpha}_{0t}u \in C(G_1 \cup J)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области G_j, $j = 1, 2$;

3) на плоскости J имеют место следующие условия склейки:

$$u(x,y,+0)=u(x,y,-0),\quad (x,y)\in\overline{J} \tag{3}$$

$$\lim_{t\to+0}t^{1-\alpha}u_t(x,y,t)=\lim_{t\to-0}u_t(x,y,t), \tag{4}$$

$$\lim_{t\to+0}t^{2-\alpha}u_{tt}(x,y,t)=\lim_{t\to-0}u_{tt}(x,y,t),\quad (x,y)\in J; \tag{5}$$

4) $u(x,y,t)$ также удовлетворяет граничным условиям:

$$u(0,y,t)=u(1,y,t)=u(x,0,t)=u(x,1,t)=0; \tag{6}$$

5) Пусть задано и следующее условие

$$u(x,y,-p)=\varphi(x,y),\quad 0<x<1,\ 0<y<1. \tag{7}$$

Построим решения поставленной задачи с помощью спектрального метода и далее доказываем однозначную разрешимость (см. [2, 3]).

Для единственности решения (1), (3)–(7) верна следующая теорема.

Теорема. *Если существует решение задачи* (1), (3)–(7), *то оно единственно.*

Литература

1. *Псху А. В.* Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН.—2002.—Т. 9, № 1 (8).—С. 76–78.
2. *Durdiyev D. K., Merajova Sh. B.* Inverse problem for an equation of mixed parabolic–hyperbolic type with a Bessel operator // Journal of Applied and Industrial Mathematics.—2022.—Т. 3, № 16.—С. 394–402.
3. *Islomov B. I., Ubaydullayev U. Sh.* On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain // Lobachevskii Journal of Mathematics.—2020.—Т. 9, № 41.—С. 1801–1810.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ПРОСТРАНСТВУ ЗИГМУНДА РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

А. Б. Бабаев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается уравнение Пуассона в области $\overline{\Omega}$

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial {x_n}^2} = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Производные понимаются в смысле теории распределений. Иссследуется задача Дирихле со следующим условием на границе $\partial\Omega$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega},$$

где функция φ определена на $\overline{\Omega}$.

Определим разбиение единицы Литлвуда — Пэли. Пусть $\varphi(t)$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция на полуоси $\mathbb{R}^1_+$ такая, что $\varphi(t) = 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant 2$. Введем семество функций ψ_k по следующему правилу: $\widehat{\psi_0}(\xi) = \varphi(|\xi|)$, $\widehat{\psi_k}(\xi) = \widehat{\psi_0}(2^{-k}\xi) - \widehat{\psi_0}(2^{1-k}\xi)$. Очевидно, что выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi_k}(\xi) = 1.$$

Пусть задана непрерывная ограниченная вещественнозначная функция $s(x)$, удовлетворяющая условию

$$|s(x+y) - s(x)| \leqslant \frac{C}{\left|\log_2 |y|\right|},$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $0 < |y| < 1$ при некоторой положительной константе C, не зависящей от x и y. Распределение $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству Гёльдера — Зигмунда $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ переменного порядка $s(\cdot)$, если конечна следующая норма

$$\|f\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left\| 2^{ks(\cdot)} \psi_k * f \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

В работе Конёнкова [2] рассматривалась задача Дирихле в области с n – мерным прямым углом для уравнения Пуассона $\Delta u = f$, когда $f \in L_\infty(\overline{\Omega})$. Было доказано, что решение $u \in \Lambda^2(\overline{\Omega})$ и получены оценки типа оценок Шаудера.

Теорема. *Пусть $f \in \Lambda^0(\overline{\Omega})$, $\varphi \in \Lambda^2(\overline{\Omega})$. Тогда задача Дирихле для уравнения Пуассона*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

имеет единственное решение $u \in \Lambda^2(\overline{\Omega})$.

Эта теорема является обобщением результата Конёнкова, так как $L_\infty(\overline{\Omega}) \subset \Lambda^0(\overline{\Omega})$ и $L_\infty(\overline{\Omega}) \neq \Lambda^0(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим уравнение Пуассона и для случая переменной гладкости.

Теорема. *Пусть* $-2 < s_- \leqslant s(x) \leqslant s_+ < -1$ *или* $-1 < s_- \leqslant s(x) \leqslant s_+ < 0$ *при любом* $x \in \overline{\Omega}$, $f \in \Lambda^{s(\cdot)}(\overline{\Omega})$, $\varphi \in \Lambda^{2+s(\cdot)}(\overline{\Omega})$. *Тогда задача Дирихле для уравнения Пуассона*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

имеет единственное решение $u \in \Lambda^{2+s(\cdot)}(\overline{\Omega})$.

Литература

1. *Конёнков А. Н.* Задачи Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и теплопроводности в областях с прямыми углами // Фундамент. и прикл. матем.—2006.—Т. 12, № 5.—С. 75–82.
2. *Кряквин В. Д.* Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера — Зигмунда переменного порядка // Сиб. мат. журн.—2014.—Т. 55, № 6.—С. 1315–1327.

О СХОДИМОСТИ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫХ СХЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. К. Баззаев (Россия, Владикавказ, СОГУ; Владикавказ, ВИУ)

1. Постановка задачи. В цилиндре $Q_T = G \times (0;\ T]$, основанием которого является p-мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_k < \ell_k,\ k = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ, рассмотрим задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

где

$$Lu = \sum_{k=1}^{p} L_k^{\beta_k} u, \quad L_k^{\beta_k} u = \partial_{0x_k}^{\beta_k} u + q_k(x,t)u,$$

$$\partial_{0x_k}^{\beta_k} u = \frac{1}{\Gamma(2-\beta_k)} \int\limits_0^{x_k} \frac{u_{\eta\eta}(x_1, \dots, x_{k-1}, \eta, x_{k+1}, \dots, x_p, t)}{(x_k - \eta)^{\beta_k - 1}}\, d\eta$$

— дробная производная Капуто порядка β_k, $1 < \beta_k \leqslant 2$, по пространственной координате x_k, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{t} \frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}}\, d\eta$$

— дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $q_k \geqslant q_* > 0$.

К уравнению (1) присоединим начальное и краевые условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda_{-k} u - \mu_{-k}(x,t), & x_k = 0, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda_{+k} u - \mu_{+k}(x,t), & x_k = \ell_k, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где $\lambda_{\pm k} \geqslant \lambda_* > 0$.

В дальнейшем будем полагать, что задача (1)–(3) имеет единственное достаточно гладкое решение, а также и входные данные задачи обладают необходимой гладкостью.

2. Разностная схема. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_k с шагом $h_k = \ell_k / N_k$, $k = 1, 2, \dots, p$:

$$\overline{\omega}_{h_k} = \left\{ x_k^{(i_k)} = (i_k h_k :\ i_k = 0, 1, \dots, N_k) \right\}, \quad \overline{\omega} = \prod_{k=1}^{p} \overline{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке $[0;T]$ введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{0,\, t_{j+k/p} = (j+k/p)\,\tau,\;\; j = 0,1,\ldots,j_0-1,\, k = 1,2,\ldots,p\right\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$ фиктивные узлы $t_{j+k/p}$, $k = 1,2,\ldots,p-1$. Будем обозначать через ω_τ — множество узлов сетки $\overline{\omega}_\tau$, для которых $t > 0$.

Для задачи (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему [1]:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+k/p}} y = \Lambda_k\left(\sigma_k y^{j+k/p} + (1-\sigma_k) y^{j+(k-1)/p}\right) + \varphi_k^{j+k/p}, \quad k = 1,2,\ldots,p, \tag{4}$$

где

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+k/p}} y = \frac{1}{p}\,\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+(k-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(k-s)/p}\right) y_{\overline{t}}^{\frac{s}{p}},$$

$$\Lambda_k y = \frac{1}{\Gamma(3-\beta_k)} \sum_{s=1}^{i_k} \left(x^{2-\beta_k}_{i_k-s+1} - x^{2-\beta_k}_{i_k-s}\right) y_{\overline{x}_k x_k, s} - d_k y,$$

$$y^{(\sigma_k)} = \sigma_k y^{j+k/p} + (1-\sigma_k) y^{j+(k-1)/p}, \quad 0 \leqslant \sigma_k \leqslant 1,$$

$$\begin{cases} \left(y^{j+k/p}_{x_k,0} - \lambda_{-k} y_0^{j+k/p}\right)^{\sigma_k} = -\mu_{-k}, & x_k = 0, \\ -\left(y^{j+k/p}_{\overline{x}_k, N_k} - \lambda_{+k} y_{N_k}^{j+k/p}\right)^{\sigma_k} = -\mu_{+k}, & x_k = \ell_k, \end{cases} \tag{5}$$

$$y(x,0) = u_0(x). \tag{6}$$

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы.

Теорема 1. *Локально-одномерная схема* (4)–(6) *устойчива по начальным данным и правой части, так что для задачи* (4)–(6) *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \left\|y^{j+1}\right\|_{C_h} \leqslant p\left\|u_0(x)\right\|_{C_h} + \frac{2}{\lambda_*} \sum_{k=1}^{p} \max_{t\in\omega_\tau} \left(\left\|\mu_{-k}(t)\right\|_{C_{\gamma_k^-}} + \left\|\mu_{+k}(t)\right\|_{C_{\gamma_k^+}}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{p} \frac{\ell_k^{\beta_k-1}\Gamma(2-\beta_k)}{\lambda_*} \max_{0\leqslant j'\leqslant j} \left\|\varphi^{j'+k/p}\right\|_{C_h}. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть задача* (1)–(3) *имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_T$ *решение* $u(x,t)$ *и существуют непрерывные в* $\overline{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\;\; \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_s^2},\;\; \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha},\;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \quad 1 \leqslant k,s \leqslant p,\; k \neq s.$$

Тогда локально-одномерная схема (4)–(6) *равномерно сходится со скоростью*

$$O\left(\frac{h}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right), \quad h = O(\tau^{1-\alpha}),\;\; 1/2 < \alpha \leqslant 1,$$

так что

$$\left\|y^j - u^j\right\|_{C_h} \leqslant M\left(\frac{h}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right),$$

где $h = \max_k h_k$, $M > 0$, M *— не зависит от* h *и* τ.

О РЕШЕНИЯХ МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ И РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1]

О. В. Басков (Россия, Санкт-Петербург; СПбГУ),
Д. К. Потапов (Россия, Санкт-Петербург; СПбГУ)

Проиллюстрируем полученные в [1] результаты модельным примером, в котором решения выписываются в явном виде.

Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$-u'' = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2}$$

с неотрицательным параметром λ и нелинейностью

$$g(x,u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \leqslant 1, \\ 2, & \text{если } u > 1, \end{cases}$$

имеющей разрыв первого рода вдоль линии $u = 1$.

Будем искать решения задачи (1)–(2) из соболевского пространства $W_p^2(0,1)$ $(p > 1)$ для $\lambda > 0$. Заметим, что для задачи (1)–(2) выполнены условия теорем 1 и 2 из [1].

Всякое решение задачи (1)–(2) непрерывно дифференцируемо и положительное на $(0,1)$, а его график выпуклый вверх при любом $\lambda > 0$.

Если $\lambda \in (0,8]$, то задача (1)–(2) имеет классическое решение $u_\lambda(x) = -\frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{\lambda}{2}x$, так как при таких λ справедливо неравенство $u_\lambda(x) \leqslant 1$.

В общем случае решение склеивается из трех парабол: $y = -\frac{\lambda}{2}x^2 + bx$, $y = -\lambda x^2 + b_1 x + c$ и $y = -\frac{\lambda}{2}x^2 + b_2 x - b_2 + \frac{\lambda}{2}$ (здесь учтены граничные условия (2)). Обозначим через x_1 и x_2 $(0 < x_1 < x_2 < 1)$ точки склейки первой–второй и второй–третьей парабол соответственно. В точках x_1, x_2 вторая производная решения не существует. Для определения неизвестных параметров b, b_1, c, b_2, x_1 и x_2 воспользуемся тем, что в точках склейки решение равно единице, и у него

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 23-21-00069.

совпадают левая и правая производные (непрерывная дифференцируемость решений). В результате получаем систему из 6 уравнений

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{2}x_1^2 + bx_1 = 1, \\ -\lambda x_1^2 + b_1 x_1 + c = 1, \\ -\lambda x_2^2 + b_1 x_2 + c = 1, \\ -\frac{\lambda}{2}x_2^2 + b_2 x_2 - b_2 + \frac{\lambda}{2} = 1, \\ -\lambda x_1 + b = -2\lambda x_1 + b_1, \\ -2\lambda x_2 + b_1 = -\lambda x_2 + b_2 \end{cases} \tag{3}$$

с ограничениями $0 < x_1 < x_2 < 1$ при $\lambda > 8$. Найдя решение системы (3) для соответствующего λ, получаем в явном виде решение $u(x)$ задачи (1)–(2): $u(x) = -\frac{\lambda}{2}x^2 + bx$ для $x \in [0, x_1]$, $u(x) = -\lambda x^2 + b_1 x + c$ для $x \in (x_1, x_2]$, и $u(x) = -\frac{\lambda}{2}x^2 + b_2 x - b_2 + \frac{\lambda}{2}$ для $x \in (x_2, 1]$.

Далее решим задачу (1)–(2) аналитически в зависимости от параметра λ. Имеем нижеследующую теорему о числе решений искомой краевой задачи.

Теорема. *Задача* (1)–(2) *имеет одно решение при* $\lambda \in (0, 6) \cup (8, +\infty)$, *три решения при* $\lambda \in (6, 8)$ *и два решения при* $\lambda = 6$ *или* $\lambda = 8$.

Проиллюстрируем полученный результат. На рис. 1 изображены графики трех решений задачи (1)–(2) при $\lambda = 6{,}4$. Нижний график соответствует решению, не проходящему через точки разрыва правой части, а два верхних графика проходят через область $u > 1$.

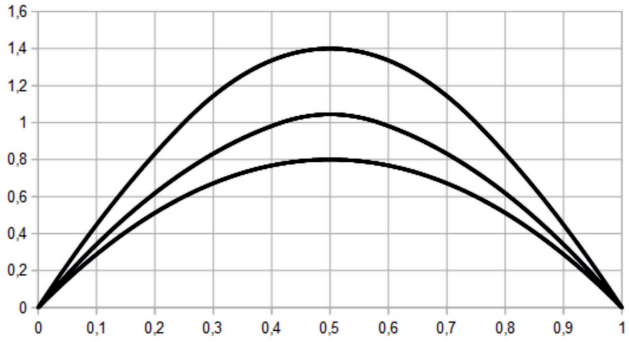


Рис. 1. Графики решений $u(x)$ задачи (1)–(2) при $\lambda = 6{,}4$.

Каждое решение задачи (1)–(2) достигает своего максимума при $x = 0{,}5$. Получена зависимость максимального значения $u(0{,}5)$ от параметра λ, позволяющая отследить изменение числа решений.

Более того, методом пристрелки найдено приближенное решение изучаемой краевой задачи.

Литература

1. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* Об одном классе квазилинейных уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. РАН. Сер. мат.—2022.—Т. 86, № 6.—С. 143–160.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КАНТОРОВОМ МНОЖЕСТВЕ

А. Н. Ветохин (Россия, Москва, МГУ; МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Известно, что топологическая энтропия динамической системы на компактном метрическом пространстве измеряет скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с произвольно хорошей, но конечной точностью [1]. Следуя [2], приведем используемое в дальнейшем определение топологической энтропии. Пусть d метрика на X, для непрерывного отображения $f : X \to X$ определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d\big(f^i(x), f^i(y)\big), \quad (f^i \equiv \underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{i},\ f^0 \equiv \mathrm{id}_X), \quad x,y\in X,\ n\in\mathbb{N}.$$

Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(f,\varepsilon,n)$ — максимальное количество точек в X, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше, чем ε. Тогда *топологическая энтропия* динамической системы $(X,\, f)$ определяется формулой

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(f,\varepsilon,n). \tag{1}$$

Отметим, что величина (1) не изменится, если в ее определении метрику d заменить на любую другую, задающую на X ту же, что и d, топологию.

Обозначим через $C(X,X)$ множество непрерывных отображений из X в X с метрикой $\rho(f,g) = \max_{x\in X} d(f(x),g(x))$. Рассмотрим функцию

$$f \longmapsto h_{\mathrm{top}}(f). \tag{2}$$

В статье [3] установлено, что функция (2) может быть всюду разрывной даже на пространстве гомеоморфизмов. В работе [4] доказано, что множество точек пространства $C(X,X)$, в которых функция (3) полунепрерывна снизу, содержит плотное в пространстве $C(X,X)$ множество типа G_δ, а в работе [5] установлено, что само множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным в $C(X,X)$ множеством типа G_δ.

Обозначим через $E_h(f)\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{h_{\mathrm{top}}(g) : \rho(f,g) < \frac{1}{n}\}$ множество тех значений топологической энтропии, которые получаются при сколь угодно малых равномерных возмущениях отображения f, $\mathscr{K}$ множество Кантора на отрезке $[0,1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. В работе [6] установлена следующая

Теорема 1. *Если $X = \mathscr{K}$, то для каждого непрерывного отображения $f : X \to X$ выполнено равенство $E_h(f) = [0;+\infty]$.*

Из теоремы 1 получаем, что функция (1) всюду разрывна на пространстве $C(\mathscr{K},\mathscr{K})$.

Следствие 1. *Если $X = \mathscr{K}$, то множество точек полунепрерывности сверху функции* (2) *совпадает с множеством точек $f \in C(X, X)$, в которых выполнено равенство $h_{\mathrm{top}}(f) = +\infty$.*

Из теоремы 1 и работ [4–5] вытекает

Следствие 2. *Если $X = \mathscr{K}$, то множество точек полунепрерывности снизу функции* (2) *является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве $C(X, X)$ и совпадает с множеством ее нулей.*

По метрическому пространству $\mathscr{M}$, непрерывному отображению

$$f : \mathscr{M} \times X \to X \tag{3}$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), x). \tag{4}$$

Из работ [4–5] следует, что в случае, когда $\mathscr{M}$ полно, множество точек полунепрерывности снизу функции (4) является всюду плотным в $\mathscr{M}$ множеством типа G_δ, а множество точек полунепрерывности сверху функции (4) является множеством типа $F_{\sigma\delta}$. Кроме того, в случае $\mathscr{M} = X = \mathscr{K}$ в работе [5] построен пример отображения (3) такого, что множество точек полунепрерывности снизу функции (4) не является множеством типа F_σ.

В статьях [6] и [7] установлены следующие результаты.

Теорема 2. *Если $\mathscr{M} = X = \mathscr{K}$, то для каждого всюду плотного подмножества A типа G_δ пространства $\mathscr{M}$ найдется отображение* (3) *такое, что множество точек полунепрерывности снизу функции* (4) *совпадает с множеством A.*

Теорема 3. *Если $\mathscr{M} = X = \mathscr{K}$, то найдется отображение* (3) *такое, что множество точек полунепрерывности сверху функции* (4) *пусто.*

Литература

1. *Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H.* Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 114, № 2.—P. 309–319.
2. *Динабург Е. И.* Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1971.—Т. 35, № 2.—С. 324–366.
3. *Ветохин А. Н.* Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика.—2018.—№ 5.—С. 64–67.
4. *Ветохин А. Н.* Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения.—2017.—Т. 53, № 4.—С. 448–453.
5. *Ветохин А. Н.* Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика.—2019.—№ 3.—С. 69–72.
6. *Ветохин А. Н.* Множество предельно реализуемых значений топологической энтропии непрерывных отображений отрезка // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2023.—№ 3.—С. 35–40.
7. *Ветохин А. Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения.—2019.—Т. 55, № 10.—С. 1319–1327.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

КРУГОВАЯ СХЕМА ФЛЕЙТАС ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ ПОВЕРХНОСТИ[1]

В. Д. Галкин (Россия, Нижний Новгород; НИУ ВШЭ),
О. В. Починка (Россия, Нижний Новгород; НИУ ВШЭ),
Е. В. Ноздринова (Россия, Нижний Новгород; НИУ ВШЭ)

В данной работе получена классификация градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях посредством обобщения круговой схемы Флейтас. В 1975 году она доказала, что такая схема является полным инвариантом топологической эквивалентности для полярных потоков на 2- и 3-многообразиях. В настоящей работе мы обобщаем понятие круговой схемы на произвольные градиентно-подобные потоки на поверхностях. Доказываем, что класс изоморфности таких схем является полным инвариантом топологической эквивалентности. Также в работе исчерпывающим образом решен вопрос реализуемости абстрактной круговой схемы градиентно-подобным потоком на поверхности. Кроме того, построен эффективный алгоритм различения изоморфности круговых схем.

Мы рассматриваем *градиентно-подобные потоки* на поверхностях M^2, т. е. потоки с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, инвариантные многообразия седловых точек которого не пересекаются. Обозначим класс таких потоков через G. Потоки рассматриваемого класса имеют наиболее простую динамику, что вдохновляло многих математиков на поиски инвариантов их топологической эквивалентности.

В работе [1] доказано, что если $f^t \in G$, тогда множество A_δ является аттрактором потока f^t и обладает захватывающей окрестностью U_δ, границу которой Σ_δ каждая траектория потока $f^t|_{W^s_{\Omega_\delta}\setminus\Omega_\delta}$ пересекает в точности в одной точке. Кроме того, для любого потока $f^t \in G$ существует множество $\delta_* \subset \Omega^1_{f^t}$ такое, что $U_{\delta_*} \cong \mathbb{D}^2$ и $\Sigma_{\delta_*} \cong \mathbb{S}^1$ (см. Теорема 1 [5]). Положим

$$L^s_{\delta_*} = \left\{W^s_\sigma \cap \Sigma_{\delta_*},\, \sigma \in \delta_*\right\}, \quad L^u_{\delta_*} = \left\{W^u_\sigma \cap \Sigma_{\delta_*},\, \sigma \in (\Omega^1_{f^t} \setminus \delta_*)\right\}.$$

Каждый элемент множества $L^s_{\delta_*}$ ($L^u_{\delta_*}$) представляет собой пару точек пересечения окружности Σ_{δ_*} с устойчивым (неустойчивым) многообразием седла W^s_σ (W^u_σ), которые помечены спином $+$, если объединение диска U_{δ_*} с трубчатой окрестностью неустойчивого (устойчивого) многообразия W^u_σ (W^s_σ) гомеоморфно кольцу, и спином $-$, если это объединение гомеоморфно пленке Мёбиуса. Набор

$$S_{\delta_*} = (\Sigma_{\delta_*},\, L^s_{\delta_*},\, L^u_{\delta_*})$$

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1101.

назовем *круговой схемой* потока $f^t \in G$. Две круговые схемы S_{δ_*} и $S_{\delta'_*}$ назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : \Sigma_{\delta_*} \to \Sigma_{\delta'_*}$, переводящий пары точек множеств $L^s_{\delta_*}$, $L^u_{\delta_*}$ в пары точек множеств $L^s_{\delta'_*}$, $L^u_{\delta'_*}$, соответственно, с сохранением спинов.

Так как выбрать A_{δ_*} можно не единственным способом, то обозначим через S_{f^t} набор всех возможных круговых схем потока $f^t \in G$. Наборы S_{f^t} и $S_{f'^t}$ потоков f^t и f'^t из класса G назовем *эквивалентными*, если круговые схемы в наборах попарно эквивалентны.

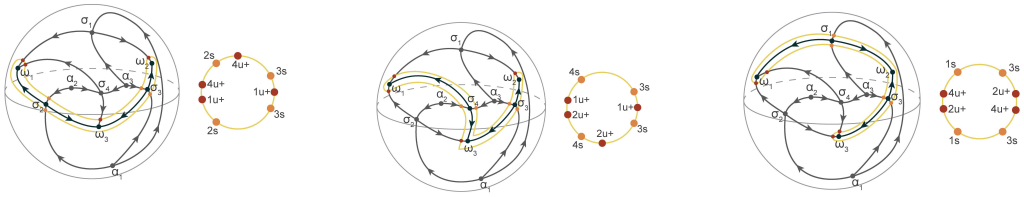


Рис. 1. Градиентно-подобный поток на сфере с набором возможных круговых схем.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Потоки $f^t, f'^t \in G$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда множества их круговых схем S_{f^t}, $S_{f'^t}$ эквивалентны.*

Доказательство теоремы будет следовать из двух нижеследующих лемм.

Лемма 1. *Множества круговых схем топологически эквивалентных потоков f^t, $f'^t \in G$ эквивалентны.*

Лемма 2. *Если для потоков f^t, $f'^t \in G$ множества круговых схем S_{f^t}, $S_{f'^t}$ эквивалентны, то потоки f^t, f'^t топологически эквивалентны.*

Литература

1. *Галкин В. Д., Починка О. В.* Сферическая схема потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством // Журн. Средневолж. мат. о-ва.—2022.—Т. 24, № 2.—С. 132–140.

ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ СТЕПЕНЬЮ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

А. В. Дзарахохов (Россия, Владикавказ; ГГАУ),
Э. Л. Шишкина (Россия, Воронеж, ВГУ; Белгород, НИУ БелГУ)

В этой работе речь идет о существовании и единственности решений краевой задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с дробной степенью оператора Бесселя.

Рассмотрим оператор Бесселя

$$(B_\gamma)_y = \frac{d^2}{dy^2} + \frac{\gamma}{y}\frac{d}{dy}.$$

Пусть $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$ для $f \in L[0,\infty)$ определяется формулой

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}f)(x) = (IB^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)\,dy. \tag{1}$$

В (1) ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, которую можно представить в виде ряда

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!}, \quad (p)_n = p(p+1)\dots(p+n-1).$$

Свойства (1) приведены в [1].

Пусть $f \in L[0,\infty)$, $IB^{1-\alpha}_{\gamma,0+}f \in C^2(0,\infty)$ и $f'(0) = 0$. При $0 < \alpha < 1$ определим левостороннюю дробную производную Бесселя на полуоси равенством

$$\left(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+}f\right)(x) = \left(IB^{1-\alpha}_{\gamma,0+}B_\gamma f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(2(1-\alpha))}\times$$
$$\times\int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{1-2\alpha} {}_2F_1\left(1-\alpha+\frac{\gamma-1}{2},1-\alpha;2(1-\alpha);1-\frac{y^2}{x^2}\right) B_\gamma f(y)\,dy.$$

Пусть $0 < \alpha < 1/2$. Рассмотрим смешанное параболо-гиперболическое уравнение с дробной степенью оператора Бесселя

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - (\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0 \end{cases} \tag{2}$$

в односвязной области D плоскости переменных x, y, ограниченной отрезками AA_0 прямой $x = 0$, A_0B_0 прямой $x = 1$, $y = 1$ и действительными характеристиками при $y < 0$ $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ уравнения (2), выходящими из точек $A(0, 0)$, $B(1, 0)$. Пусть $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 — параболическая часть области D, $y > 0$, а D_2 — гиперболическая часть области D, $y < 0$. Пусть $0 < \alpha < 1/2$, $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, \ y = 0\}$.

Решение уравнения (2) $u = u(x, y)$ будем называть *регулярным* в области D, если $u \in C(\overline{D_1})$, $u_y \in C(D_1 \cup I)$, $u_{xx} \in C(D_1)$, $u \in C(\overline{D_2}) \cup C^2(D_2)$.

Для уравнения (2) поставим задачу.

Найти регулярное в D решение $u(x, y)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(1, y) = \varphi_1(y), \qquad y > 0, \tag{3}$$

$$au\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + bu\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4}$$

Кроме того, на линии $y = 0$ выполняются условия сопряжения

$$\lim_{y \to +0} u(x, y) = \lim_{y \to -0} u(x, y), \tag{5}$$

$$\lim_{y \to +0} (\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma, 0+})_y u(x, y) = \lim_{y \to -0} u_y(x, y) = 0, \tag{6}$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_1(x)$ — заданные функции, a, b — заданные вещественные постоянные, $a^2 + b^2 > 0$.

Условие (6) является необходимым, чтобы найденное решение было непрерывным. Оно возникает из того, что оператор Бесселя является сингулярным оператором: $(B_\gamma)_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{y}\frac{\partial}{\partial y}$.

Теорема 1. Если $\tau(x) \in C^4([0, 1])$ и финитная на $[0, 1]$, $\varphi_0(y), \varphi_1(y) \in C^4([0, T])$ и финитные на $[0, 1]$ и выполнено условие

$$a^2 \lim_{y \to +0} \varphi_0(y) - b^2 \lim_{y \to +0} \varphi_1(y) = a\psi_1(0) - b\psi_1(1), \tag{7}$$

то задача (3)–(6) имеет единственное решение.

Литература

1. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov–Caputo type // Mathematics.—2019.—Vol. 7, № 12.—P. 1–21.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ ПРОСТЕЙШИХ НЕОСОБЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ПОТОКОВ[1]

А. Л. Добролюбова (Россия, Нижний Новгород; НИУ ВШЭ)

Потоки $f^t, f'^t\colon M \to M$ на многообразии M называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M \to M$, отображающий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением направления движения по траекториям. Два потока называются *топологически сопряженными*, если выполняется условие $h \circ f^t = f'^t \circ h$, это означает, что h отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям.

В настоящей работе рассматриваются так называемые *НМС-потоки* f^t, то есть *неособые* (без неподвижных точек) потоки Морса — Смейла, заданные на замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3. Неблуждающее множество такого потока состоит из конечного числа периодических гиперболических орбит. В окрестности гиперболической периодической орбиты поток топологически сопряжен надстройке над некоторым линейным диффеоморфизмом плоскости, заданным матрицей с положительным определителем и действительными собственными значениями, по модулю отличными от единицы (см. например, [1, теорема 4.2, 4.3]). Если оба собственных значения по модулю больше (меньше) единицы, то соотвествующая периодическая орбита является *отталкивающей* (*притягивающей*), в противном случае — *седловой*.

Поскольку (см., например, [2, теорема 2.2]) несущее многообразие M^3 является объединением устойчивых (неустойчивых) многообразий всех своих периодических орбит, то НМС-поток f^t необходимо имеет хотя бы одну притягивающую и хотя бы одну отталкивающую периодические орбиты. НМС-поток $f^t\colon M^3 \to M^3$ назовем *простейшим*, если его неблуждающее множество состоит в точности из двух периодических орбит; притягивающей c_+ и отталкивающей c_-, обозначим через $\mathscr{S}$ класс таких потоков. В работе [3] установлено, что все мнгообразия, допускающие потоки из класса $\mathscr{S}$, являются линзовыми пространствами, а в работе [4] доказано, что на каждом линзовом пространстве[2] имеется ровно два класса топологической эквивалентности простейших потоков, за исключением 3-сферы $\mathbb{S}^3$ и проективного пространства $\mathbb{R}P^3$, на которых класс эквивалентности один.

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-1101.

[2]Линзовым пространством называется трехмерное многообразие $L_{p,q} = V_+ \cup_j V_-$, являющееся результатом склейки двух копий заполненного тора $V_+ = \mathbb{V}$, $V_- = \mathbb{V}$ по некоторому гомеоморфизму $j\colon \partial V_+ \to \partial V_-$ такому, что $j_*(\langle 0, 1\rangle) = \langle p, q\rangle$.

В настоящей работе устанавливается, что каждый класс эквивалентности простейшего неособого потока на линзе состоит из бесконечного множества классов топологической сопряженности. Более того, установлены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности рассматриваемых потоков. Более детально.

Пусть $f^t \in \mathscr{S}$ — неособый поток с двумя предельными циклами: устойчивым c_+ и неустойчивым c_- периодов T_+ и T_-, соответственно. Мы покажем, что каждому потоку f^t соответствует некоторая непрерывная функция $\hat{\delta} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$ такая, что $\hat{\delta}(0,0) = 0$, а индуцированный гомоморфизм $\hat{\delta}_* : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ является сюръективным, его ядро — нетривиальным. Тогда на торе $\mathbb{T}^2$ существуют образующие α, β с индексом пересечения 1 и такие, что $\hat{\delta}_*(\langle\alpha\rangle) = 1$, $\hat{\delta}_*(\langle\beta\rangle) = 0$. При этом гомотопический тип $\langle\beta\rangle = \langle q, p\rangle$ кривой β определяется из описанных условий однозначно. Обозначим через $\mathscr{A}$ множество функций с указанными свойствами.

Две функции $\hat{\delta}, \hat{\delta}' \in \mathscr{A}$ назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\vartheta}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что индуцированный изоморфизм задается матрицей $\hat{\vartheta}_* = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$, сохраняющей гомотопический класс меридиана тора, и $\hat{\delta}'(\hat{\vartheta}(s,\ell)) - \hat{\delta}'(\hat{\vartheta}(0,0)) = \hat{\delta}(s,\ell)$ для $(s,l) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Обозначим через $[\hat{\delta}]$ класс эквивалентности функции $\hat{\delta}$.

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующего факта.

Теорема 1. *Потоки $f^t, f'^t \in \mathscr{S}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $T_\pm = T'_\pm$, $[\hat{\delta}] = [\hat{\delta}']$ и $p = p'$, $q \equiv \pm q' \pmod{p}$.*

Ключом к доказательству теоремы является существование единственного f^t-инвариантного двумерного слоения в окрестности периодической орбиты потока. Доказательство существования бесконечного множества топологически не сопряженных потоков в одном классе эквивалентности потока $f^t \in \mathscr{S}$ следует из следующей теоремы реализации.

Теорема 2. *Для любых положительных чисел T_+, T_- и любой функции $\hat{\delta} \in \mathscr{A}$ существует поток $f^t \in \mathscr{S}$ с соответствующими параметрами на линзовом пространстве $L_{p,q}$.*

Литература

1. *Ирвин М. С.* A classification of elementary cycles // Topology.—1970.—Vol. 9.—P. 35–47.
2. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // Bul. Amer. Math. Soc.—1967.—Vol. 73, № 3.—P. 747–817.
3. *Campos B., Cordero A., Martinez Alfaro J., Vindel P.* NMS flows on three-dimensionalmanifolds with one saddle periodic orbit // Acta Math. Sinica-english Ser.—2004.—Vol. 20.—P. 47–56.
4. *Pochinka O. V., Shubin D. D.* Non-singular Morse–Smale flows on n-manifolds with attractor–repeller dynamics // Nonlinearity.—2022.—Vol. 35, № 3.—P. 1485–1499.
5. *Добролюбова А. Л., Круглов В. Е.* Топологическая сопряженность неособых потоков с двумя замкнутыми траекториями на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ // Журн. СВМО.—2022.—Т. 24, № 1.—С. 40–53.

CONVOLUTION KERNEL DETERMINATION PROBLEM IN THE MOORE–GIBSON–THOMPSON EQUATION[1]

D. K. Durdiev (Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz),
A. A. Rahmonov (Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz),
A. A. Boltaev (Uzbekistan, Tashkent, IM AS RUz;
Russia, vil. Mikhailovskoye, NCCMR VSC RAS)

This work is devoted to obtaining a unique solution to an inverse problem for the Moore–Gibson–Thompson (MGT) equation. In the case of additional data, we consider an inverse problem. The kernel are determined uniquely by the additional data. The existence and uniqueness result is based on the Fourier method and Banach fixed point theorem.

Let $Q_T := \Omega \times (0,T)$ for a given time $T > 0$, where Ω be a bounded domain in $\mathbf{R}^n$ with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. We consider MGT equation (e. g. [1]):

$$u_{ttt} + u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u + \int\limits_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)\,d\tau = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \tag{1}$$

We supplement the above MGT equation with the following initial conditions:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x,0) = u_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

and the zero boundary condition:

$$u\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

If $g(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ and $u_2(x)$ are known, then the problem (1)–(3) is a direct problem. The inverse problem in this paper is to reconstruct $g(t)$ according to the additional data

$$\int\limits_\Omega \eta(x)u(x,t)\,dx = h(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

where $h(t)$ $\eta(x)$ are given functions.

Inverse problem. Find $u \in C\left([0,T]; H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right)$ and $g \in C[0,T]$ to satisfy (1)–(3) and the additional measurement (4).

References

1. *Arancibia R., Lecaros R., Mercado A., Zamorano S.* An inverse problem for Moore–Gibson–Thompson equation arising in high intensity ultrasound // J. Inverse Ill-Posed Probl.—2022.—Vol. 30, issue 5.—P. 659–675.

[1]The research of the third author was executed with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 075-02-2023-914.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

БРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ВРЕМЕНИ С НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

Д. К. Дурдиев (Узбекистан, Бухара,
Бухарский филиал ИМ АН РУз; БухГУ),
Х. Х. Турдиев (Узбекистан, Бухара,
Бухарский филиал ИМ АН РУз; БухГУ)

В области $\Omega_T := \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$ рассмотрим дробное время волнового уравнения

$$\left(\mathscr{D}^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t) - u_{xx} + q(t)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$\left(\mathscr{D}^{\alpha-1}_{0+,t}u(x,t)\right)_{t=0+} = \varphi(x), \quad \left(\mathscr{D}^{\alpha-2}_{0+,t}u(x,t)\right)_{t=0+} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где $\mathscr{D}^{\alpha}_{0+,t}$ — дробная производная Римана — Лиувилля порядка $1 < \alpha < 2$ по временной переменной [1–8] и $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ — заданные гладкие функции.

Поставим обратную задачу следующим образом: найти функцию $q(t)$, $t > 0$, в (1), если решение начально-краевой задачи (1)–(3) удовлетворяет условию:

$$\int_0^l w(x)u(x,t)dx = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$g(t)$ — заданная функция.

Функции $\varphi(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ и $g(t)$ удовлетворяют следующим предположениям:

A1) $\{\varphi,\psi\} \in C^3[0,l]$, $\{\varphi^{(4)},\psi^{(4)}\} \in L_2[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(l) = 0$;

A2) $f(x,\cdot) \in C[0,T]$ для $t \in [0,T]$, $f(\cdot,t) \in C^3[0,l]$, $f^{(4)}(\cdot,t) \in L_2[0,l]$, $f(0,t) = f(l,t) = 0$, $f_{xx}(0,t) = f_{xx}(l,t) = 0$;

A3) $w(x) \in C^2[0,T]$ и $w(0) = w(l) = 0$, $w''(0) = w''(l) = 0$;

A4) $\mathscr{D}^{\alpha}_{0+,t}g(t) \in C[0,T]$ и $|g(t)| \geqslant g_0 > 0$, g_0 — заданное число, $\int_0^l w(x)\varphi(x)dx = \left(\mathscr{D}^{\alpha-1}_{0+}g(t)\right)_{t=0+}$, $\int_0^l w(x)\psi(x)dx = \left(\mathscr{D}^{\alpha-2}_{0+}g(t)\right)_{t=0+}$.

Обратные задачи для классических интегро-дифференциальных уравнений распространения волн широко изучались. Нелинейные обратные коэффициентные задачи с различными типами достаточных условий детерминации часто встречаются в литературе [5–10] и ссылках в них]. В [11–14] доказаны как существование, так и единственность решения обратной задачи.

Для обратной задачи имеет место следующий результат

Теорема 1. *Пусть выполнены* $A1$)–$A4$). *Тогда существует число* $T^* \in (0;T)$, *такое, что существует единственное решение* $q(t) \in C[0,T^*]$ *обратной задачи* (1)–(4).

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
2. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics.—Singapore: Elsevier, World Scientific, 2000.
3. *Mainardi F.* Fractional relaxation and fractional diffusion equations, mathematical aspects // Proceed. of the 12-th IMACS World Congress / Ed. W. F. Ames.—Georgia Tech Atlanta, 1994.—Vol. 1.—P. 329–332.
4. *Kilbas A. A., Bonilla B., and Trujillo J. J.* Existence and uniqueness theorems for nonlinear fractional differential equations // Demonstr. Math.—2000.—Vol. 33, № 2–3.—P. 583–602.
5. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.—N. Y.–London: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
6. *Pitcher E., Sewel W. E.* Existence theorems for solutions of differential equations of noninteger order // Bull. Amer. Math. Soc.—1938.—Vol. 44, № 2.—P. 100–107.
7. *Kilbas A. A., Trujillo J. J.* Difierential equations of fractional order: methods, results and problems-I // Appl. Anal.—2001.—Vol. 78, № 3–4.—P. 153–192.
8. *Wei T., Xian J.* Determining a time-dependent coefficient in a time-fractional diffusion-wave equation with the Caputo derivative by an additional integral condition // J. Comp. Appl. Math.—2022.–Vol. 404, issue C.
9. *Durdiev D. K., Totieva Z. D.* The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of visco-elasticity equation // Math. Met. App.l Scie.—2018.—Vol. 41, № 17.—P. 8019–8032.
10. *Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh.* Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation. // Methods of Functional Analysis and Topology.—2019.—Vol. 25, № 3.—P. 219–226.
11. *Durdiev D. K.* On the uniqueness of kernel determination in the integro-differential equation of parabolic type // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.—2015.—Vol. 19, № 4.—P. 658–666.
12. *Дурдиев Д. К., Турдиев Х. Х.* Задача определения ядер в системе интегродифференциальных уравнений Максвелла // Сиб. журн. индустр. матем.—2021.— Т. 24, № 2.—С. 38–61
13. *Дурдиев Д. К., Турдиев Х. Х.* Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью. // Дифференц. уравнения.—2020.—Т. 56, № 12.—С. 1666–1675
14. *Durdiev D. K., Jumaev J. J.* Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor // Math. Meth. Appl. Sci.—2022.—Vol. 45.—P. 8374–8388.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ[1]

У. Д. Дурдиев (Узбекистан, Бухара, БухГУ;
Ташкент, Бухарский филиал ИМ АН РУз)

В данной работе рассмотрены прямая задача для уравнения колебания бесконечной балки, т. е. задача Коши и обратная задача по определению коэффициента, зависящего от времени при младшем члене этого уравнения.

Рассмотрим бесконечную балку, под действием внешней силы $G(x,t)$. Вынужденные изгибные поперечные колебания балки описывается уравнением четвертого порядка

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} + Q(t)u = G(x,t),$$

где ρ — плотность балки, S — площадь поперечного сечения балки, E — модуль упругости материала балки, J — момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси и по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жесткости $Q(t)$.

Разделив на ρS запишем это уравнение в следующим в виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $a^2 = EJ/\rho S$, $q(t) = Q(t)/\rho S$ и $f(x,t) = G(x,t)/\rho S$. Уравнение (1) рассмотрим в полуплоскости

$$D = \{(x,t) :\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0\},$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

В **прямой задаче** ищется функция $u(x,t)$, удовлетворящая уравнениям (1), (2) и условию

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^1_t(D \cup \{t=0\}) \cap C(\overline{D}). \tag{3}$$

При этом функции $q(t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ считаются заданными и достаточно гладкими.

Обратная задача: найти коэффициент $q(t)$, если решение задачи Коши (1)–(3) удовлетворяет условию

$$u(0,t) = g(t), \tag{4}$$

где $g(t)$ — заданная достаточно гладкая функция, кроме того $|g(t)| \geqslant g_0 > 0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-939.

Пусть $u(x,t)$ есть решение задачи Коши (1)–(3). Переобразуем обратную задачу (1)–(4). Для этого обозначим четвертую производную $u(x,t)$ по переменной x через $v(x,t)$, т. е. $v(x,t) := u_{xxxx}(x,t)$. Дифференцируя (1) и (2) четырежды по x, имеем

$$v_{tt} + a^2 v_{xxxx} + q(t)v = f_{xxxx}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$v\big|_{t=0} = \varphi^{(4)}(x), \quad v_t\big|_{t=0} = \psi^{(4)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Чтобы получить дополнительное условие для функции $v(x,t)$, положим $x = 0$ в (1), используя равентсва (3) и (4), получим

$$v\big|_{x=0} = \frac{1}{a^2}\left[f(0,t) - q(t)g(t) - g''(t)\right], \quad t > 0. \tag{7}$$

Через $D_T := \{(x,t) : \ x \in \mathbb{R}, \ 0 < t < T\}$ обозначим полосу толщиной T, где $T > 0$ — произвольное фиксированное число.

Замечание. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C_b^{(4)}(\mathbb{R})$, $f(x,t) \in C_b^{(4)}(D_T)$, где $C_b^{(4)}$ — класс ограниченных функций с точностью до производных четвертого порядка в $\mathbb{R}$ и верны следующие условия

$$\frac{\partial^{(i)} u}{\partial x}(0,0) = \varphi^{(i)}(0), \quad \frac{\partial^{(i)} u_t}{\partial x}(0,0) = \psi^{(i)}(0),$$

то из (5)–(7) можно вывести задачу (1)–(4).

В настоящей работе устанавливается достаточное условие, при котором решение обратной задачи (1)–(4) существует и единственно.

Литература

1. *Tikhonov A. N. and Samarskii A. A.* Equations of Mathematical Physics.—Moscow: Science, 2004.—798 p.
2. *Sabitov K. B.* Cauchy Problem for the beam vibration equation // Dif. Equ.—2017.—Vol. 7, № 5.—P. 658–664.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л. Ю. Кабанцова (Россия, Воронеж; ВГУ)

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon_1(t) A \frac{\partial y}{\partial z} + \varepsilon_2(t) y + b(t,z), \tag{1}$$

$$y(t_0, z) = y_0(z), \tag{2}$$

где $t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, t_0 задано, $y : T \times \mathbb{R} \to Y$ — искомое отображение, $b : T \times \mathbb{R} \to Y$ — случайный векторный процесс, A — постоянный оператор, действующий в пространстве Y, Y — конечномерное пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ε_1, ε_2 — случайные процессы, $y_0(z)$ — случайный векторный процесс.

Решение задачи Коши (1), (2) является случайным процессом. Для приложений важны статистические характеристики решения. В данной работе рассматривается нахождение математического ожидания решения задачи (1), (2).

Будем считать, что процессы ε_1, ε_2 и b заданы характеристическим функционалом, т. е. считаем известным

$$\psi(v_1, v_2, v_3) = E\left[\exp\left(i \int\limits_T \varepsilon_1(s) v_1(s)\, ds + i \int\limits_T \varepsilon_2(s) v_2(s)\, ds + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \; i \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}} \langle b(s_1, s_2), v_3(s_1, s_2) \rangle \; ds_2\, ds_1 \right)\right],$$

здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в Y.

С помощью характеристического функционала можно находить моментные функции случайного процесса [1], например,

$$\left.\frac{\delta_p \psi(v_1, v_2, v_3)}{\delta v_1(t)}\right|_{v_1 = v_2 = v_3 = 0} = iE[\varepsilon_1(t)],$$

$$\left.\frac{\delta_p^2 \psi(v_1, v_2, v_3)}{\delta v_1(t) \delta v_2(\tau)}\right|_{v_1 = v_2 = v_3 = 0} = -E[\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(\tau)],$$

где, например, $\frac{\delta_p \psi}{\delta v_1(t)}$ обозначает частную вариационную производную по переменной v_1.

Будем считать, что случайный процесс y_0 не зависит от случайных процессов ε_1, ε_2 и b, тогда исследуемая задача сводится к детерминированной системе дифференциальных уравнений с частными и вариационными производными

$$\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial z} - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}\widetilde{y} - i\frac{\delta_p \psi}{\delta v_3(t,z)}, \tag{3}$$

$$\widetilde{y}(t_0, z, v_1, v_2, v_3) = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2, v_3), \tag{4}$$

для которой удается получить явную формулу решения.

Определение. Математическим ожиданием $E[y(t,z)]$ решения задачи (1), (2) называется $\widetilde{y}(t,z,0,0,0)$, где $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)$ — решение задачи (3), (4) в некоторой окрестности точки $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$.

Теорема 1. *Если функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ разлагается в ряд*

$$\psi(v_1, v_2, v_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_T \dots \int\limits_T \psi_{1k}(s_1, \dots, s_k, v_3) v_1(s_1) \dots v_1(s_k)\, ds_1 \dots ds_k \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_T \dots \int\limits_T \psi_{2k}(s_1, \dots, s_k, v_3) v_2(s_1) \dots v_2(s_k)\, ds_1 \dots ds_k, \quad \psi_{10} = 1,\ \psi_{20} = 1,$$

где ψ_{ik} — симметрические по любой паре переменных функции, и имеющие вариационные производные по переменной v_3, тогда

$$\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3) = F_\xi^{-1}\psi\big(v_1 I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3\big) * E[y_0(z)] -$$

$$- i\int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi\chi(s,t)A, v_2 - i\chi(s,t), v_3)}{\delta v_3(s,z)}\right)\right) ds$$

является решением задачи (3), (4).

Здесь F_ξ^{-1} — обратное преобразование Фурье, а $*$ — свертка по переменной z.

Замечание. Характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ будет удовлетворять условию теоремы, если мы будем предполагать независимость случайных процессов ε_1, ε_2.

Теорема 2. *Если случайные процессы ε_1, ε_2 и b независимы, тогда*

$$E[y(t,z)] = \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0,t))F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A)) * E[y_0(z)] +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)) * E[b(s,z)]\, ds$$

является математическим ожиданием решения задачи (1)–(2).

Для применения полученной формулы достаточно знать характеристические функционалы процессов ε_1, ε_2 и только математическое ожидание процесса b. Были рассмотрены наиболее распространенные варианты, когда ψ_{ε_1} и ψ_{ε_2} определяют гауссовы и равномерно распределенные случайные процессы ε_1 и ε_2 соответственно.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

БИФУРКАЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ КОСИММЕТРИЧНОГО РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ С ОБРАТИМОЙ КОСИММЕТРИЕЙ

Л. Г. Куракин (Россия, Москва, ИВП РАН; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; Ростов-на-Дону, ЮФУ),
Курдоглян А. В. (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Термин «косимметрия» был введен Юдовичем В. И. [1] в связи с объяснением необычного эффекта, обнаруженного Любимовым Д. В. [2] в одной из задач фильтрационной конвекции. Согласно определению, косимметрией векторного поля в гильбертовом пространстве называется векторное поле, ортогональное данному в каждой точке. Равновесие динамической системы называется косимметричным, если оно является нулем косимметрии.

Рассматривается косимметричная динамическая система в n-мерном евклидовом пространстве. Предполагается, что она обладает косимметричным равновесием, m-мерным параметром и обратимой косимметрией. В работе [3] применен метод Ляпунова — Шмидта для предварительного анализа бифуркаций таких систем в частном случае, когда параметр является одномерным. Наименее вырожденной и требующей изучения системой оказался случай четномерного уравнения, линейная часть которого в окрестности косимметричного равновесия обладает двумерным ядром, а ее спектр устойчивости состоит из устойчивой части и двукратного нулевого собственного значения.

Бифуркации такой системы исследованы методом центрального многообразия в предположении, что коразмерность ее вырождения не превышает двух. Наличие обратимой косимметрии приводит к тому, что в правой части уравнения на нейтральной поверхности образуется общий множитель, корнями которого определяется семейство равновесий. В случае общего положения или когда коразмерность вырождения в этой системе равна одному, семейство равновесий заменой переменных можно распрямить. Если же коразмерность вырождения равна двум, то семейству можно придать вид прямой, гиперболы или окружности. Локальный фазовый портрет в окрестности косимметричного равновесия строится следующим образом: на фазовый портрет узла, фокуса или седла накладывается найденное семейство равновесий и корректируются направления движения на фазовых траекториях.

Литература

1. *Yudovich V. I.* Cosymmetry, degeneration of solutions of operator equations, and onset of a filtration convection // Math. Notes.—1991.—Vol. 49, № 5.—P. 540–545.
2. *Любимов Д. В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикл. механика и технич. физика.—1975.—Т. 16, № 2.—С. 131–137.
3. *Kurakin L. G., Kurdoglyan A. V.* On the isolation/nonisolation of a cosymmetric equilibrium and bifurcations in its neighborhood // Regular and Chaotic Dynamics.—2021.—Vol. 26.—P. 258–270.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

РЕЗОНАНСЫ В ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СТАЦИОНАРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Л. Г. Куракин (Россия, Москва, ИВП РАН;
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; Ростов-на-Дону, ЮФУ),
И. В. Островская (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Дается обзор исследований резонансных случаев в задачах устойчивости точечных вихрей. Линейный анализ классических вихревых конфигураций проводился, начиная со второй половины XIX века. Первое математически строгое исследование резонанса в этих задачах, по-видимому, было выполнено Н. Е. Кочиным 1], доказавшем неустойчивость вихревой цепочки Кармана при резонансе $1:1$.

В работе [2] исследован резонанс двукратного нуля в задаче правильного вихревого семиугольника на плоскости. Доказательство устойчивости вихревого семиугольника потребовало привлечения слагаемых до четвертой степени включительно разложения гамильтониана задачи в ряд Тейлора.

В работе [3] рассмотрена система четырех точечных вихрей на плоскости. Исследована задача об устойчивости стационарного вращения точечного вихревого квадруполя, состоящего из трех одинаковых вихрей единичной интенсивности, расположенных равномерно на окружности вокруг четвертого вихря с произвольной интенсивностью $\varkappa$. Известно, что при $\varkappa > 1$ исследуемый режим неустойчив [4] (линеаризованная система имеет экспоненциально растущие решения). В случае $\varkappa < -3$ и $0 < \varkappa < 1$ имеет место орбитальная устойчивость. Новые результаты получены в случае $-3 < \varkappa < 0$. При исследовании были использованы известные результаты теории устойчивости равновесий гамильтоновых систем в резонансных случаях [5]. Оказалось, что при всех значениях $\varkappa$ в задаче устойчивости имеет место резонанс $1:1$ (диагонализуемый случай). Обнаружены и исследованы некоторые другие резонансы до четвертого порядка включительно: двойной нулевой резонанс (диагонализуемый случай), резонансы 1:2 и 1:3, возникающие при изолированных значениях $\varkappa$. Доказана устойчивость равновесия системы, редуцированной на одну степень свободы, с участием членов гамильтониана до четвертой степени включительно для всех $\varkappa \in (-3, 0)$.

В работе [6] дан обзор исследований резонансных случаев в задаче устойчивости Томсоновского вихревого N-угольника внутри круговой области. Замечено, что к неустойчивости приводят только два из всех обнаруженных резонансов. Это резонанс двукратного нуля (диагонализируемый случай) при $N = 3$ и резонанс $1:2$ в случае $N = 5$.

Литература

1. *Кочин Н. Е.* О неустойчивости вихревых цепочек Кармана // Докл. АН СССР.—1939.—Т. 24, № 1.—С. 18–22.
2. *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // Chaos.—2002.—Vol. 12.—P. 574–595.
3. *Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V.* Resonances in the stability problem of a point vortex quadrupole on a plane // Regul. Chaot. Dyn.—2021.—Vol. 26, № 5.—P. 526–542.
4. *Morikawa G. K., Swenson E. V.* Interacting motion of rectilinear geostrophic vortices // Phys. Fluids.—1971.—Vol. 14, № 6.—P. 1058–1073.
5. *Куницын А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техн. Сер. Общая механика.—М.: ВИНИТИ, 1979.—Т. 4.—С. 58–139.
6. *Куракин Л. Г.* Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // Докл. АН.—2004.—Т. 399, № 1.—С. 52–55.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

Г. А. Курина (Россия, Воронеж, ВГУ;
Москва, ФИЦ ИУ РАН),
Н. Т. Хоай (Вьетнам, Ханой; ВНУ)

Наиболее сложным в теории сингулярных возмущений является так называемый критический случай, когда из вырожденного уравнения (с нулевым значением малого параметра) решение не определяется однозначно. Начальные задачи такого типа для слабо нелинейных дифференциальных и дискретных уравнений впервые были исследованы А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузовым в [1]. В [1, 2] рассматривались следующие задачи:

1. $\varepsilon\dfrac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x,t), \quad x(0) = x^0, \ \ t \in [0,T].$
2. $x(t+\varepsilon) = B(t)x(t) + \varepsilon f(x(t),t), \quad x(0) = x^0, \ \ t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots.$
3. $\varepsilon^2\dfrac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon), \quad x(0) = x^0, \ \ t \in [0,T].$
4. $x(t+\varepsilon^2) = B(t)x(t) + \varepsilon f(x(t),t,\varepsilon), \quad x(0) = x^0, \ \ t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \ldots \ \ (t \leqslant T).$

Предполагается, что матрицы $A(t)$ и $B(t) - I$, где I — единичная матрица, являются вырожденными при всех t. Предлагается искать асимптотическое решение для задач 1–2 в виде

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \overline{x}_j(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_j x(\tau), \quad \tau = t/\varepsilon, \tag{1}$$

а для задач 3–4 в виде

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \overline{x}_j(t) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{ij} x(\tau_i), \quad \tau_i = t/\varepsilon^i, \ \ i = 1,2. \tag{2}$$

При некоторых условиях в [1] получены в явном виде соотношения для отыскания первых членов асимптотики решения.

Мы используем ортогональный проектор на $\operatorname{Ker} A(t)$ для задач 1–2 и на $\operatorname{Ker}(B(t)-I)$ для задач 3–4, чтобы найти асимптотическое решение рссматриваемых задач в критическом случае (см. [3–6]). Такой подход значительно упрощает

[1]Работа Г. А. Куриной поддержана Российским научным фондом, проект № 21-11-00202, работа Н. Т. Хоай поддержана Вьетнамским национальным фондом развития науки и технологий (NAFOSTED), проект № 101.02-2021.43.

понимание алгоритма построения асимптотики. Он позволяет представить задачи для нахождения членов асимптотики любого порядка в явном виде, что очень удобно для исследователей, применяющих асимптотические методы для решения практических задач.

В статьях [7–9] рассматривались три типа задач оптимального управления с уравнением состояния в критическом случае. Применялся так называемый метод прямой схемы, заключающийся в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условия задачи и получении серии задач для нахождения членов асимптотического разложения. Используя ортогональный проектор на ядро невозмущенного оператора при переменной состояния в уравнении состояния, при некоторых условиях было построено асимптотическое решение нулевого порядка. Асимптотические решения задач, рассмотренных в [7] и [8, 9], отличаются соответственно от (1) и (2) наличием пограничных функций в окрестности конечной точки.

Благодарность. Статья написана во время работы авторов во Вьетнамском институте перспективных исследований в области математики (VIASM). Авторы благодарят VIASM за создание плодотворной исследовательской среды во время визита.

Литература

1. *Бутузов В. Ф., Васильева А. Б.* Дифференциальные и разностные системы уравнений с малым параметром в случае, когда невозмущенная (вырожденная) система находится на спектре // Диф. уравнения.—1970.— Т. 6, № 4.—С. 650–664.
2. *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Диф. уравнения.—1976.— Т. 12, № 10.—С. 1736–1747.
3. *Kurina G.* Projector approach to constructing asymptotic solution of initial value problems for singularly perturbed systems in critical case // Axioms.—2019.—Vol. 8, № 2.—P. 56–60.
4. *Курина Г. А., Хоай Н. Т.* Проекторный подход к алгоритму Бутузова — Нефедова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущенных задач в критическом случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2020.—Т. 60, № 12.—С. 2073–2084.
5. *Курина Г. А., Хоай Н. Т.* Проекторный подход к построению асимптотики решения начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае // Диф. уравнения.— 2023.— Т. 59, № 1.—С. 73–84.
6. *Курина Г. А., Хоай Н. Т.* О проекторном подходе к построению асимптотики решения одного класса дискретных начальных задач с малым шагом в критическом случае // Современные методы теории краевых задач. Матер. междунар. Воронеж. весенней мат. школы, посвящ. 115-летию со дня рождения академика Л. С. Понтрягина (3–9 мая 2023 г.).—Воронеж: Издат. дом ВГУ, 2023.—С. 252–253.
7. *Kurina G. A., Hoai N. T.* Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case // Inter. Conf. Anal. Appl. Math. (ICAAM 2018) AIP Conf. Proc.—Vol. 1997, № 1.—020073-1–020073-7.
8. *Kurina G., Nguyen T. H.* Zero-order asymptotic solution of a class of singularly perturbed linear-quadratic problems with weak controls in a critical case // Optim. Control Appl. Meth.—2019.—Vol. 40, № 5.—P. 859–879.
9. *Курина Г. А., Хоай Н. Т.* Асимптотика решения нулевого порядка для одного типа сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач управления в критическом случае // Тр. Ин-та матем. мех. УрО РАН.—2023.—Т. 29, № 1.—С. 127–142.

SOLVABILITY OF THE PHENOMENOLOGICAL SPIN COMBUSTION EQUATION

V. A. Lukianenko (Russia, Simferopol; Vernadsky CFU),
A. A. Grebeneva (Russia, Simferopol; Vernadsky CFU)

The global solvability of the phenomenological equation of spin combustion [1], when the zone of combustion reaction spread is the ring, is considered. The equation contains the Laplace operator, fractional Laplace operator and the cubic nonlinearity. The spectrum depends on two parameters. Solutions such as rotating waves are investigated.

Explore the initial boundary value problem in the ring

$$\Omega = \{(r,\varphi):\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\},$$

$t > 0$,

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + u = 2\varepsilon\left[\dot{u}\left(1 - \frac{4}{3}\dot{u}^2\right) - \frac{\lambda^2}{4\pi^2}(-\Delta)\dot{u} + \frac{\beta\lambda}{2\pi}(-\Delta)^{\alpha}\dot{u}\right], \quad 0 < \alpha < 1, \\ &u(r,\varphi + 2\pi, t) = u(r,\varphi,t), \qquad \left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial r}\right|_{r=r_1,r_2} = 0, \\ &u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \end{aligned} \tag{1}$$

where the function $u(r,\varphi,t)$ characterizes the points of the combustion front and their coordinates, the increment of instability of small oscillations is the parameter $0 < \varepsilon << 1$, as the correlation length of heat conductivity connections between adjacent fronts is the parameter $\lambda > 0$, the non-localized coefficient between front sections is the parameter $\beta > 0$, Δ — is Laplace operator, dot shorthand notation is used to signify time derivative. The operator $(-\Delta)^{\alpha}$ is determined by the Laplace operator's eigenfunctions.

In matrix form, the equation (1) is an evolution equation

$$u_t = -\mathscr{A}u + N(u), \tag{2}$$

where $u = (u_1, u_2)^T$, $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & B \end{pmatrix}$,

$$N(u) = \left(0, -\frac{4}{3}u_2^3\right)^T, \quad B = 2\varepsilon\left[\frac{\lambda^2}{4\pi^2}A - \frac{\beta\lambda}{2\pi}A^{\alpha} + I\right], \quad D(B) = D(A).$$

The operator B is closed, $D(B) = D(A)$, the operator $-\mathscr{A}$ is sectorial, max operator, which generates the holomorphic semigroup S_t.

Statement. The problem (1) in the phase space $E = \{(u,\dot{u}) | u, \dot{u} \in L_2(\Omega)\}$ generates a continuous semigroup S_t [2].

Theorem. *Let* $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. *Then the solution of the initial boundary value problem* (1) *exists and is unique.*

Applicable method for proof is the Faedo–Galerkin's method, by which «approximate solutions» for the eigenfunctions of the Sturm–Liouville's problem for the Laplace operator are constructed. As well as the method of compactness under the condition of the limitation and continuity of the semigroup S_t of the matrix equation (2) is used.

Depending on the boundary conditions in the given range Ω, appropriate priori estimates for the solution $u(r, \varphi, t)$ were found. The paper is a continuation of the study [3–6], where the analysis of stability and forms of approximate periodic solutions of the equation of spin combustion were carried out, integral representations of the solution, when the zone of combustion reaction spread is the whole plane and thin-walled cylinder, were obtained.

References

1. *Zeldovich Ya. B., Malomed B. A.* Complex Wave Regimes in Distributed Dynamical Systems // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz.—1981.—Vol. 15, № 6.—P. 591–618.
2. *Babin A. V., Vishik M. I.* Attractors of Evolution Equations // Stud. Math. Appl.—1992.—326 p.
3. *Khazova Yu. A., Grebeneva A. A.* Periodic solution of the spin combustion equation // Inter. Conf. dedicated to I. G. Petrovskii, XXIV Joint Session.—2022.—P. 193–194.
4. *Khazova Yu. A., Grebeneva A. A.* Analysis of stability and form of approximate periodic solutions of the equation of spin combustion // TVIM.—2022.—Vol. 1.
5. *Grebeneva A. A., Khazova Yu. A.* Spin combustion regimes // Applied Mathematics and Informatics in the Modern World. Materials of the All-Russian Scientific and Practical Conference.—Krasnodar, 2022.—P. 29–37.
6. *Grebeneva A. A., Lukianenko V. A., Khazova Yu. A.* Some problems of spin combustion // Actual Problems of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics.— Voronezh, 2022.—P. 37–42.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА И ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ[1]

Е. Ю. Машков (Россия, Курск; ЮЗГУ)

Рассматриваются вырожденные системы стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, в которых в левой и правой частях стоят прямоугольные матрицы, в общем случае зависящие только от времени. Кроме этого, в правой части имеется вектор-функция, зависящая от времени. Предполагается, что матрица в левой части, в случае с квадратными матрицами, не имеет обратной, а для систем с переменными матрицами обе матрицы системы имеют постоянный ранг. В литературе рассматриваемые системы называются алгебро-дифференциальными, дескрипторными, системами леонтьевского типа. На языке этих уравнений в работах А. Л. Шестакова, Г. А. Свиридюка и А. В. Келлер [1] изучается динамическое искаженные сигналов в радиоустройствах. В работах Л. А. Власенко, А. Г. Руткаса, М. С. Филипковской [2], а также O. Schein, G. Denk, T. Sickenberger, R. Winkler [3] рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей. Стохастические уравнения леонтьевского типа возникают в работах Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткаса при математическом моделировании динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования. Отметим также работы Ю. Е. Бояринцева и В. Ф. Чистякова [4], Г. В. Демиденко, А. В. Келлер и М. А. Сагадеевой, С. М. Чуйко, А. А. Белов, А. П. Курдюков, A. Alabert, S. L. Campbell, в которых очень обстоятельно изучены дифференциальные уравнения леонтьевского типа.

Для исследования данных стохастических систем с матрицами коэффициентов, зависящими от времени, в работе [5] построены различные модификации подходов, описанных в работах Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова [4] при изучении соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате получены утверждения, в которых для рассматриваемой системы с данными начальными условиями приведены необходимые и достаточные условия существования решений, достаточные условия существования решений, а так же приведены формулы для нахождения этих решений.

Для стохастических систем с постоянными матрицами коэффициентов, образующих регулярный или сингулярный пучки, получены утверждения о их приведении к каноническому виду [6]. Известно, что для исследования канонических систем требуется рассмотрение производных достаточно высоких порядков от правой части, а значит и винеровского процесса. Так как производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для применения в исследовании конкретных уравнений,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00048.

предложен новый метод исследования уравнения, основанный на применении аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов [7], для описания которых не используются обобщенные функции. Отметим, что понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века для нужд построенной им стохастической механики (вариант квантовой механики). А именно, применяются симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией теории производных в среднем по Нельсону, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов [7]. В результате получены формулы для вычисления симметрических производных в среднем высших порядков от винеровского процесса [6]. Получены аналитические формулы для решений уравнений в терминах симметрических производных в среднем винеровского процесса [6]. Также с применением производных в среднем исследованы стохастические системы с постоянными матрицами и импульсными воздействиями в правой части [8].

Рассмотрен новый класс уравнений — стохастические дифференциальные уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях [9]. Для этих уравнений как с постоянными числовыми матрицами коэффициентов, так и с переменными матрицами, получены утверждения о существовании решений.

Литература

1. *Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А.* Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестник ЮУрГУ.—2010.—№ 16 (192).—С. 116–120.
2. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями.—Днепропетровск: Системные технологии, 2006.—273 с.
3. *Sickenberger T., Winkler R.* Stochastic oscillations in circuit simulation // Proc. Appl. Math. Mech.—2007.—Vol. 7, № 1.—P. 4050023–4050023.
4. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования.—Новосибирск: Наука, 1998.—224 с.
5. *Mashkov E. Yu.* On the stochastic systems of differential-algebraic type // J. Comp. Eng. Math.—2014.—Vol. 1, № 1.—P. 34–45.
6. *Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu.* Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes // Bull. South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software.—2013.—Vol. 6, № 2.—P. 25–39.
7. *Gliklikh Yu. E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.—London: Springer-Verlag, 2011.—460 p.
8. *Mashkov E. Yu.* Stochastic Leontief type equations with impulse actions // Bull.South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software.—2018.—Vol. 11, № 2.—P. 44–61.
9. *Mashkov E. Yu., Tyutyunov D. N.* Singular Stochastic Leontieff type equations in current velocities of solutions // Bull. South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software.—2019.—Vol. 12, № 1.—P. 55–65.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ БИФУРКАЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С СИММЕТРИЕЙ

И. В. Моршнева (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается задача о пересечении бифуркаций в динамических системах с $O(2)$ симметрией. Ранее была изучена бифуркация рождения цикла в динамических системах с такой симметрией [1]. Для исследования используется метод сведения на центральное многообразие. Проведена классификация возможных типов пересечения, и построены амплитудные системы в окрестности параметров, при которых нейтральный спектр линейного оператора состоит из двух пар чисто мнимых собственных значений. Впервые системы амплитудных уравнений для задачи Куэтта — Тейлора, обладающей цилиндрической симметрией, были построены в работах В. И. Юдовича [2], Chossat P., Demay Y., Iooss G. [3].

Проведено исследование амплитудных систем на инвариантных подпространствах. Результаты теории применяются к задаче о возникновении конвективных режимов в горизонтальном бесконечном слое двухкомпонентной смеси, состоящей из нереагирующих компонент. Уравнения движения имеют стационарное решение, соответствующее покоящейся смеси. Рассматриваются плоские возмущения, периодические по горизонтальной переменной. Уравнения для возмущений инвариантны относительно круговой симметрии $O(2)$, и к исследованию конвективных режимов, которые возникают в окрестности точки пересечения бифуркаций рождения цикла, применяются результаты теории динамических систем с такой симметрией. Показано, что в условиях общего положения возможно возникновение периодических решений типа бегущих волн и их нелинейных суперпозиций, а также возникновение квазипериодических решений. Получены явные выражения для асимптотик возникающих решений и для величин, определяющих характер их ветвления и устойчивость.

Литература

1. *Моршнева И. В.* Бифуркация рождения цикла в динамических системах с симметрией и ее приложения в гидродинамике.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2010.—140 с.
2. *Юдович В. И.* Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннот. докладов 6-го Всесоюз.съезда по теор. и прикл. механике.—Ташкент: ФАН, 1986.—С. 661.
3. *Chossat P., Demay Y., Iooss G.* Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette–Taylor // Arch. Rational. Mech. Anal.—1987.—Vol. 99.—P. 213–248.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ РЕКОНСТРУКЦИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ[1]

Р. Д. Недин (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ;
Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Введение. Ввиду активного применения в промышленности конструкций из новых функционально-градиентных материалов (ФГМ) со сложными неоднородными физико-механическими свойствами, которые часто являются предварительно напряженными, одной из актуальных задач является разработка и развитие уточненных моделей деформирования. Современные технологии изготовления ФГМ позволяют создавать объекты сложной геометрии, не используя классические технологии, в том числе литье, требующее дополнительного производства пресс-форм. Для изготовления элементов конструкций из ФГМ обычно используются высокотемпературные технологии (наплавка, спекание, нагартовка и др.), ввиду чего после остывания в образцах часто имеются поля начальных напряжений (НН), оказывающие значительное влияние на их динамические характеристики [1–2].

Основные результаты исследования. В настоящей работе предложены подходы к развитию теоретических основ идентификации законов неоднородности материальных характеристик и полей НН упругих тел в зависимости от способа зондирующего нагружения при наличии информации об измеренных граничных полях смещений в некотором частотном диапазоне. С целью улучшения процедуры реконструкции искомых характеристик предложен способ проведения анализа чувствительности, основанный на использовании производных по Фреше [3]. Рассмотрен пример установившихся колебаний НН стержня, проведен анализ чувствительности деформационных характеристик по отношению к НН, позволяющий реализовать оптимальный способ зондирующего нагружения при решении соответствующих обратных коэффициентных задач о восстановлении произвольных законов изменения неоднородного распределения НН.

Рассмотрены постановки обратных коэффициентных задач об идентификации полей НН при наличии дополнительной информации двух типов: при заданном поле перемещений всюду в области для одной частоты колебаний; при заданном поле перемещений на части границы области в некотором частотном диапазоне. Произведена оценка влияния искомых характеристик НН на динамический отклик на основе введенных производных по Фреше. Предложена методика определения характеристик чувствительности задаваемых граничных функций по отношению к НН, позволивший выявить наиболее эффективные способы приложения динамической нагрузки и частотные диапазоны

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00265.

зондирования. Изучены некоторые обратные задачи о реконструкции начального напряженно-деформированного состояния различных типов в пластинах и цилиндрах, проведена серия вычислительных экспериментов.

Заключение. На основе введенного понятия чувствительности для неоднородных тел построены формулы для анализа искомых материальных характеристик и компонент НН для произвольного изотропного упругого тела, проведены вычислительные эксперименты по расчету характеристик чувствительности для НН стержней. Представлены рекомендации о выборе частотных диапазонов зондирования для неоднородных по осевой координате цилиндрических стержней при решении обратных коэффициентных задач на основе анализа продольных и изгибных колебаний.

Литература

1. *Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д.* Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Монография.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015.—206 с.
2. *Nedin R. D., Dudarev V. V., Vatulyan A. O.* Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // Engineering Structures.—2017.—Vol. 151.—P. 391–405. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.08.007.
3. *Ватульян А. О., Юров В. О.* Об оценке чувствительности коэффициентов моделей для неоднородных тел // Изв. РАН МТТ.—2023.—№ 3.—С. 135–145. DOI: 10.31857/S0572329922600839.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

РЕШЕНИЕ 33-Й ПРОБЛЕМЫ ПАЛИСА-ПЬЮ ДЛЯ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ[1]

Е. В. Ноздринова (Россия, Нижний Новгород; НИУ ВШЭ)

Проблема существования дуги с не более, чем счетным (конечным) числом бифуркаций, соединяющей структурно устойчивые системы (системы Морса — Смейла) на многообразиях вошла в список пятидесяти проблем Палиса-Пью [1] под номером 33.

В 1976 году Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом, Ф. Такенсом [2] было введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Такая дуга не меняет своих качественных свойств при малом шевелении. В том же году Ш. Ньюхаус и М. Пейшото [3] доказали существование простой дуги (содержащей лишь элементарные бифуркации) между любыми двумя потоками Морса — Смейла. Из результата работы Ж. Флейтас [4] вытекает, что простую дугу, построенную Ньюхаусом и Пейшото всегда можно заменить на устойчивую [5].

Для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на многообразиях любой размерности известны примеры систем, которые не могут быть соединены устойчивой дугой. Препятствия появляются уже для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности S^1, которые соединяются устойчивой дугой только в случае совпадения чисел вращения [6].

В размерности два появляются дополнительные препятствия к существованию устойчивых дуг между изотопными диффеоморфизмами. Они связаны с наличием периодических точек [7, 8] и гетероклинических пересечений [9].

В рамках доклада рассматривается класс $G(M^2)$ градиентно-подобных диффеоморфизмов f, заданных на замкнутой ориентируемой поверхности M^2, в предположении, что все неблуждающие точки f неподвижны и имеют положительный тип ориентации.

Теорема. *Любые диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^2)$ соединяются устойчивой дугой с конечным числом типично проходящих некритических седло-узловых бифуркаций.*

Доказательство данного результата основано на построении дуги без бифуркаций соединяющей диффеоморфизм $f \in G(M^2)$ с диффеоморфизмом $\phi_f \in G(M^2)$, который является сдвигом на единицу времени типичного градиентного потока ϕ_f^τ некоторой функции Морса. В силу работ [3, 4, 5] любые два таких потока соединяются дугой с конечным числом седло-узловых бифуркаций.

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-1101.

Литература

1. *Palis J., Pugh C.* Fifty problems in dynamical systems // Lecture Notes in Math.—1975.—Vol. 468, № 1.—P. 345–353.
2. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* Stable arcs of diffeomorphisms // Bull. Amer. Math. Soc.—1976.—Vol 82, № 3.—P. 499–502.
3. *Newhouse S., Peixoto M.* There is a simple arc joining any two Morse–Smale fows // Asterisque.—1976.—Vol. 31, № 1.—P. 15–41.
4. *Fleitas G.* Replacing tangencies by saddle-nodes // Bol. Soc. Brasil. Mat.—1977.—Vol. 8, № 1.—P. 47–51.
5. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications Mathematiques de l' I.H.E.S.—1983.—Vol. 57, № 1.—P. 5–71.
6. *Nozdrinova E.* Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle // Russian Journal of Nonlinear Dynamics.—2018.—Vol. 14, № 4.—P. 543–551.
7. *Blanchard P.* Invariants of the NPT isotopy classes of Morse–Smale diffeomorphisms of surfaces // Duke Math. J.—1980.—Vol. 47.—P. 33–46.
8. *Nozdrinova E., Pochinka O.* Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere // Discrete and Continuous Dynamical Systems.—2021.—Vol. 41, № 3.—P. 1101–1131.
9. *Matsumoto S.* There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs // Inventiones Math.—1979.—Vol. 51.—P. 1–7.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О ВЛИЯНИИ ЦИРКУЛЯЦИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА ИЗ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ И ЦИЛИНДРА, ПОДВИЖНОГО И НЕПОДВИЖНОГО

И. В. Островская (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),
Л. Г. Куракин (Россия, Ростов-на-Дону, ЮФУ;
Москва, ИВП РАН; Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассматривается движение системы N одинаковых параллельных вихревых нитей интенсивности γ_0 и подвижного цилиндра радиуса R. Параметр a характеризует присоединенную массу цилиндра, $a > 0$. Параметр γ — циркуляция вокруг цилиндра в отсутствии вихрей.

Гамильтонова форма уравнений плоско-параллельного движения рассматриваемой системы получена относительно недавно (см. обзор в работе [1]). В случае $N \geqslant 2$ существует решение, соответствующее вращению системы N одинаковых точечных вихрей, расположенных равномерно на окружности радиуса R_0 (Томсоновский N-угольник), вокруг подвижного цилиндра с постоянной угловой скоростью. Задача устойчивости этого решения имеет 4 параметра: дискретный параметр $N \geqslant 2$ и 3 непрерывных параметра — $q = R^2/R_0^2$ $(0 < q < 1)$, $a > 0$, $\gamma/\gamma_0 \in \mathbb{R}$.

Различают случай неподвижного $(a \to \infty)$ и подвижного цилиндра $(a > 0)$, а также случаи нулевой циркуляции вокруг цилиндра в присутствии точечных вихрей $\gamma = N\gamma_0$ и произвольной циркуляции γ.

Задача линейной устойчивости стационарного вращения Томсоновского N-угольника вокруг неподвижного цилиндра в случае нулевой циркуляции была решена Хавелоком [2]. В случае $N \geqslant 7$ им была установлена неустойчивость исследуемого режима при $0 < q < 1$. Для $2 \leqslant N \leqslant 6$ были найдены условия экспоненциальной неустойчивости в линейной задаче, а значит, неустойчивости в нелинейной постановке, при $q_{N*} \leqslant q < 1$. Полный нелинейный анализ устойчивости с привлечением методов КАМ-теории и теории устойчивости равновесий гамильтоновых систем в резонансных случаях [3] был проведен в цикле работ, обзор которых представлен в [4]. В частности, при $2 \leqslant N \leqslant 6$ определены условия орбитальной и формальной устойчивости для $0 < q < q_{N*}$. Найдены и исследованы все резонансы до четвертого порядка включительно встречающиеся в этой задаче. В случае $N = 3$ обнаружен резонанс двукратного нуля (диагонализируемый случай), а при $N = 5$ резонанс $1 : 2$, при которых Томсоновский N-угольник устойчив в линейной постановке и неустойчив в полной нелинейной постановке.

В работе [5] изучено влияние циркуляции вокруг неподвижного цилиндра на устойчивость. На плоскости параметров (q, γ) указаны области орбитальной устойчивости, неустойчивости, а также линейной устойчивости, при которых требуется дополнительный нелинейный анализ. Границы этих областей заданы

аналитическими уравнениями. Исследовано влияние циркуляции на резонанс двукратного нуля при $N = 3$ и резонанс $1 : 2$ при $N = 5$, для которых в полной нелинейной постановке имеет место неустойчивость.

Случай нулевой циркуляции вокруг подвижного цилиндра в присутствии вихрей рассмотрен в работе [6] для любых $N \geqslant 2$. При $2 \leqslant N \leqslant 6$ получены условия неустойчивости и линейной устойчивости. Для $N \geqslant 7$ доказано, что неустойчивость имеет место для всех параметров задачи (q, a).

Влияние циркуляции γ на устойчивость исследовано для конфигурации двух вихрей $(N = 2)$ и подвижного цилиндра. В зависимости от значений γ число несвязных областей линейной устойчивости в плоскости (q, a) изменяется от нуля до четырех. В случае нулевой циркуляции таких областей всего две.

Литература

1. *Mamaev I. S., Bizyaev I. A.* Dynamics of an unbalanced circular foil and point vortices in an ideal fluid // Phys. Fluids.—2021.—Vol. 33.—P. 087119.
2. *Havelock T. H.* The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Phil. Mag.—1931.—Vol. 11, № 70.—P. 617–633.
3. *Куницын А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техн. Сер. Общая механика.—Т. 4.—М.: ВИНИТИ, 1979.—С. 58–139.
4. *Kurakin L. G., Melekhov A. P., Ostrovskaya, I. V.* A Survey of the Stability Criteria of Thomson's Vortex Polygons outside a Circular Domain // Bol. Soc. Mat. Mexicana.—2016.—Vol. 22.—P. 733.
5. *Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V.* Nonlinear stability analysis of a regular vortex pentagon outside a circle // Mathematics.—2020.—Vol. 8, №. 6.—P. 1033.
6. *Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V.* On the Stability of the System of Thomson's Vortex n-Gon and a Moving Circular Cylinder // Rus. J. Nonlin. Dyn.—2022.—Vol. 18, № 5.—P. 915–926.

О ЗАДАЧЕ РИМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Е. Ю. Панов (Россия, Великий Новгород; НовГУ)

В полупространстве $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ рассмотрим параболическое уравнение

$$u_t + v(u)u_x - t\big(a^2(u)u_x\big)_x = 0, \tag{1}$$

где $v(u), a(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $a(u) \geqslant 0$. Снабдим (1) данными Римана

$$u(0,x) = u_0(x) = \begin{cases} \alpha, & x < 0, \\ \beta & x > 0, \end{cases} \qquad \alpha < \beta. \tag{2}$$

Энтропийное решение (э. р.) задачи (1), (2) в смысле Карильо [1] автомодельно: $u = u(x/t)$. Пусть коэффициенты уравнения (1) кусочно постоянны: $v(u) = v_k$, $a(u) = a_k$ при $u_k < u < u_{k+1}$, $k = 0, \ldots, n-1$, где $\alpha = u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_n = \beta$. Тогда э. р. имеет структуру: при $\xi_k < \xi = x/t < \xi_{k+1}$, $k = 0, \ldots, d$

$$u(\xi) = \begin{cases} u_k + \dfrac{(u_{k+1} - u_k)(F((\xi - v_k)/a_k) - F((\xi_k - v_k)/a_k))}{F((\xi_{k+1} - v_k)/a_k) - F((\xi_k - v_k)/a_k)}, & a_k > 0, \\ u_k, & a_k = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-s^2/2}\, ds, \quad -\infty = \xi_0 < \xi_1 \leqslant \cdots \leqslant \xi_d < \xi_{d+1} = +\infty \ \text{ и } \ d = n - 1,$$

если $a_{n-1} > 0$, $d = n$ при $a_{n-1} = 0$. Считаем $a_n = 0$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ и $\xi_{k+1} > \xi_k$, если $a_k > 0$. Формула (3) задает э. р. в том и только в том случае, когда $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ является точкой минимума функции

$$E(\bar{\xi}) = -\sum_{k=0,\ldots,n-1, a_k>0} (a_k)^2 (u_{k+1} - u_k) \ln\big(F((\xi_{k+1} - v_k)/a_k) - F((\xi_k - v_k)/a_k)\big) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0,\ldots,n-1, a_k=0} (u_{k+1} - u_k)(\xi_{k+1} - v_k)^2,$$

заданной в выпуклом конусе $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, состоящим из точек с координатами $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_d$, такими что $\xi_{k+1} > \xi_k$ при $a_k > 0$. Установлено, что эта функция строго выпукла, коэрцитивна и значит имеет единственную точку глобального минимума. Ее координаты определяют по формуле (3) единственное э. р. задачи (1), (2).

Литература

1. *Carrillo J.* Entropy solutions for nonlinear degenerate problems // Arch. Ration. Mech. Anal.—1999.—Vol. 147.—P. 269–361.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00344.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О РАЗРЕШИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

В. П. Плаксина (Россия, Пермь; ПНИПУ)

Рассмотрим систему из n струн A_iB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, одинаковой длины Δ. Концы A_i всех струн жестко закреплены, концы B_i связаны между собой. Пусть характеристики упругости каждой струны таковы, что ее деформация определяется как решение дифференциального уравнения $\ddot{x}+Tx = f$, где свойства оператора T будут приведены ниже. Требуется найти деформацию системы струн.

Рассмотрим несвязное множество $\Theta = \bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, соответствующее системе связанных струн. Пусть параметр $t \in [a_i, b_i]$ определяет положение точки на струне A_iB_i, причем значение $t = a_i$ соответствует концу A_i струны, $t = b_i$ — концу B_i.

Тогда закрепленным концам будут соответствовать условия

$$x(a_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{1}$$

условия непрерывного соединения струн примут вид

$$x(b_i) - x(b_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \ i \neq j. \tag{2}$$

Кроме того, имеется условие связи

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}(b_i) = 0. \tag{3}$$

На каждом отрезке $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задано уравнение

$$\ddot{x}(t) + (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [a_i, b_i], \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Уравнения (4) будем рассматривать как уравнения в пространствах $W^2[a_i, b_i]$ абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x\colon [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$. Операторы $T : W^2[a_i, b_i] \to L[a_i, b_i]$ вполне непрерывны, $L[a_i, b_i]$ — пространства суммируемых на $[a_i, b_i]$ функций. Аналогично определим пространства $W^2(\Theta)$ и $L(\Theta)$.

В пространстве $W^2(\Theta)$ получим условия однозначной разрешимости задачи (1)–(4).

Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\ddot{x}(t) = z(t), \quad t \in \Theta, \tag{5}$$

с краевыми условиями (1)–(3). Нетрудно видеть, что задача (5), (1)–(3) однозначно разрешима и ее решение при $t \in [a_i, b_i]$ имеет вид

$$x(t) = (\Lambda z)(t) \equiv -\frac{t-a_i}{n\cdot\Delta}\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n}\int\limits_{a_j}^{b_j}(s-a_j)z(s)\,ds - \left(\frac{1}{n}+\frac{(n-1)(b_i-t)}{n\cdot\Delta}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{a_i}^{t}(s-a_i)z(s)\,ds - \left(\frac{t-a_i}{n}\int\limits_{t}^{b_i}z(s)\,ds + \frac{(n-1)(t-a_i)}{n\cdot\Delta}\int\limits_{t}^{b_i}(b_i-s)z(s)\,ds\right).$$

Применим оператор Λ к обеим частям равенства (4). Получим эквивалентное уравнение

$$x(t) - U(t)\ell x - (Ax)(t) = (\Lambda f)(t), \quad t \in [a_i, b_i],\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Здесь $A = -\Lambda T\colon W^2(\Theta) \to W^2(\Theta)$ — вполне непрерывный изотонный оператор; $\ell\colon W^2(\Theta) \to \mathbb{R}^{2n}$ — вектор-функционал, компоненты которого определяются условиями (1)–(3); компоненты фундаментального вектора U неотрицательны. Из равенства (6) следует, что при $(\Lambda f)(t) + U(t)\ell x > 0$ выполняется неравенство $(Ax)(t) < x(t)$. Существование непрерывной функции, положительной при $t \in \Theta\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и обеспечивающей выполнение неравенства $(Ax)(t) < x(t)$, означает, что спектральный радиус оператора A меньше 1 и задача (1)–(4) однозначно разрешима.

Теорема 1. *Пусть существует функция $u \in W^2(\Theta)$ такая, что $u(t) > 0$ при $t \in (a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $(Tu)(t) \not\equiv 0$; $\ddot{u}(t) + (Tu)(t) \leqslant 0$ при $t \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$;*

$$u(b_1) = u(b_2) = \ldots = u(b_n), \quad u(a_i) \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\dot{u}(b_i) \geqslant 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}u(a_i) + \sum_{i=1}^{n}\dot{u}(b_i) - \int\limits_{\Theta}\big(\ddot{u}(s) + (Tu)(s)\big)\,ds > 0.$$

Тогда задача (1)–(4) однозначно разрешима.

Литература

1. *Азбелев Н. В, Максимов В. П, Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения.—М.: Ин-т компьют. исслед., 2002.–384 с.
2. *Плаксина В. П., Провоторова Е. Н.* Об одном классе краевых задач для импульсных систем // Диф. уравнения.—1988.—Т. 24, № 8.—С. 1359–1364.
3. *Плаксина В. П.* О применении W-метода Н. В. Азбелева к системе функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе // Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер. Естеств. и технич. науки.—2018.—Т. 23, № 123.—С. 531–538.
4. *Плаксина И. М.* Теорема Валле-Пуссена для одного сингулярного функционально-дифференциального уравнения // Изв. Ин-та мат-ки и инф-ки Удмурт. гос. ун-та.—2012.—№ 1 (39).—С. 107–108.
5. *Плаксина И. М.* Условия разрешимости одной переопределенной сингулярной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения первого порядка // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика.—2012.—№ 1.—С. 71–77.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

И. М. Плаксина (Россия, Пермь; ПНИПУ)

В предлагаемой работе получены условия разрешимости уравнения

$$\big(\mathscr{L}x\big)(t) \equiv \big(\delta x\big)(t) + (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [0,b]. \tag{1}$$

Здесь оператор $\delta\colon W_0^{2,p} \to L^p$ определен равенством

$$\big(\delta x\big)(t) = \ddot{x}(t) + \frac{k}{t}\dot{x}(t), \quad t \in [0,b],\ k > \frac{p}{p-1},\ 1 < p < \infty,$$

оператор $T\colon W_0^{2,p} \to L^p$ изотонен и вполне непрерывен; L^p — пространство функций $z\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ таких, что $\|z\|_{L^p} = \big(\int_0^b |z(t)|^p\,dt\big)^{1/p} < \infty$; $W_0^{2,p}$ — пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, таких что $\ddot{x} \in L^p$ и $\dot{x}(0) = 0$.

Пространство $W_0^{2,p}$ изоморфно прямому произведению $L^p \times \mathbb{R}$. Изоморфизм установим равенствами

$$\begin{cases} \delta x = z, \\ \ell x \equiv x(b) + \frac{b}{k-1}\dot{x}(b) = \alpha. \end{cases}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$x(t) = \big(\Lambda z\big)(t) \equiv -\frac{1}{(k-1)t^{k-1}}\int\limits_0^t s^k z(s)\,ds - \frac{1}{k-1}\int\limits_t^b sz(s)\,ds.$$

Отметим, что в силу условий $k > \frac{p}{p-1}$ и $\dot{x}(0) = 0$ имеет место равенство $\big(\Lambda\delta x\big)(t) = x(t) - \ell x$.

Уравнения вида (1) сингулярны по независимой переменной в точке $t = 0$. Оператор Λ ограничен, но не вполне непрерывен.

Теорема 1. *Пусть существует положительная функция $v \in W_0^{2,p}$ такая, что $Tv \not\equiv 0$, $\mathscr{L}v \leqslant 0$. Пусть, далее, $\ell v - \int_0^b (\mathscr{L}v)(t)\,dt > 0$. Тогда уравнение* (1) *разрешимо.*

Для доказательства на пространстве $W_0^{2,p}$ запишем уравнение (1) в виде

$$x(t) - \big(Ax\big)(t) = \big(\Lambda f\big)(t) + \ell x, \quad t \in [0,b], \tag{2}$$

где оператор $A = -\Lambda T$ изотонен. Воспользуемся тем фактом, что $\Lambda f < 0$ при $f \geqslant 0$, $f \not\equiv 0$. Применим теорему об оценке спектрального радиуса по значению на одном элементе [1, с. 337].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание № FSNM-2023-0005.

Литература

1. *Азбелев Н. В, Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения.—М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.—С. 384.
2. *Абдуллаев А. Р., Плаксина И. М.* Об оценке спектрального радиуса одного сингулярного интегрального оператора // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 2.—С. 3–9.
3. *Абдуллаев А. Р., Плехова Э. В.* Об обратимости линейного оператора, связанного с сингулярными дифференциальными уравнениями // Прикладная математика и вопросы управления.—2016.—№ 4.—С. 27–35.
4. *Плаксина И. М.* О разрешимости сингулярной задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения с отклонением специального вида // Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер. Естественные и технические науки.—2018.—Т. 23, № 123.—С. 539–546.
5. *Плаксина И. М.* Теоремы о дифференциальных неравенствах для сингулярных функционально-дифференциальных уравнений // Седьмая междунар. конф. по дифференц. и функционально-дифференци. уравнениям. Междунар. сем. «Пространственно-временные динамические системы». Тез. докл.—М.: РУДН, 2014.—С. 155–156.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ СЕМЕЙСТВ УРАВНЕНИЙ КАНА — ХИЛЛАРДА

С. П. Плышевская (Россия, Симферополь; КрымФУ)

Рассматривается уравнение, которое является модификацией (расширением) широко известной модели Кана — Хилларда,

$$u_t = \big(-\alpha u_{xx} - u + bu^2 + u^3\big)_{xx}, \quad u(t, x+1) \equiv u(t,x). \tag{1}$$

Для изучения решений из малой окрестности состояния равновесия $u_0(t,x) \equiv c$ в (1) произведем замену $u = c + \upsilon$ и перейдем к краевой задаче

$$\begin{gathered} \upsilon_t = \big(-\alpha\upsilon_{xx} - \beta\upsilon + \gamma\upsilon^2 + \upsilon^3\big)_{xx}, \quad \upsilon(t, x+1) \equiv \upsilon(t,x), \\ \beta = 1 - 2bc - 3c^2, \quad \gamma = b + 3c, \quad M(\upsilon) = \int\limits_0^1 \upsilon(x)\,dx = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

При условии

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + 4\pi^2\alpha = 0, \tag{3}$$

для некоторого c_0 в задаче об устойчивости краевой задачи (2) возникает критический случай.

Рассматривается вопрос о локальной динамике краевой задачи (2) при условии $c = c_0 + \varepsilon c_1$, где c_0 является корнем уравнения (3), $c_1 \neq 0$ как-то фиксировано, а ε — малый положительный параметр, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Введем в рассмотрение стандартный для метода нормальных форм ряд

$$\begin{aligned} \upsilon(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi(\tau)\exp(2\pi i x) + \bar{\xi}(\tau)\exp(-2\pi i x)) + \\ + \varepsilon\upsilon_2(\tau,x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\upsilon_3(\tau,x) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t. \end{aligned} \tag{4}$$

Подставим (4) в (2) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим уравнение для $\upsilon_3(\tau,x)$. Из условия его разрешимости в указанном классе получаем

$$(2\pi)^{-2} \cdot \frac{d\xi}{d\tau} = \beta_1 \cdot \xi + d \cdot \xi|\xi|^2. \tag{5}$$

Теорема. *При условиях $\beta_1 \neq 0$, $d \neq 0$ и при всех достаточно малых ε динамика уравнения* (5) *определяет поведение решений краевой задачи* (2) *в малой окрестности нулевого состояния равновесия.*

Более подробно: при $\beta_1 d < 0$ краевая задача (2) имеет неоднородное состояние равновесия $\upsilon_0(x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi_0\cos(2\pi x) + O(\varepsilon)$. Оно устойчиво при $\beta_1 > 0$ и неустойчиво при $\beta_1 < 0$. При $\beta_1 < 0$, $d < 0$ все решения из малой окрестности нуля стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же $\beta_1 > 0$, $d > 0$, то задача о нелокальна.

Литература

1. *Кащенко С. А.* Бифуркации в уравнении Курамото — Сивашинского // Теоретическая и математическая физика.—2017.—Т. 192, № 1.—С. 23–40.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ

М. В. Половинкина (Россия, Воронеж; ВГУИТ),
И. П. Половинкин (Россия, Воронеж, ВГУ; Белгород, НИУ БелГУ)

Определим оператор $P_t : L_2^\gamma(\mathbb{R}) \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, формулой

$$P_t u_0(\cdot)(x,t) = \frac{1}{2tx^\nu} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \eta^{\nu+1}\, u_0(\eta)\, I_\nu\left(\frac{\eta x}{2t}\right) \exp\left(-\frac{\eta^2+x^2}{4t}\right) d\eta,$$

где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $t > 0$ — фиксированное значение, P_0 — тождественный оператор.

Рассмотрим начальную задачу для сингулярного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}_+,\ t > 0,$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,\ u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+),$$

и условием «четности»

$$\frac{\partial u}{\partial x}(+0,t) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Единственное решение этой задачи представляется формулой (см. [1, 2])

$$u(x,t) = P_t u_0(\cdot)(x,t).$$

Рассматривается проблема, которая является аналогом проблемы, рассмотренной в [3] для классического уравнения теплопроводности. Мы пользуемся методами, обозначениями и терминологией из работы [3].

Пусть известны функции $y_j(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R})$, заданные в моменты времени $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_p$, и $\|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta_j,\ j = 1,\ldots,p$, где $\delta_j > 0$, $j = 1,\ldots,p$. Требуется каждому такому набору функций поставить в соответствие функцию из $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, которая в каком-то смысле приближает точное решение задачи (распределение температуры) в $\mathbb{R}$ в фиксированный момент времени τ. Всякое отображение $m : L_2^\gamma(\mathbb{R}_+) \times \cdots \times L_2^\gamma(\mathbb{R}_+) \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$ мы называем методом восстановления (решения в $\mathbb{R}_+$ в момент времени τ по такой информации). Пусть $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\ldots,y_p(\cdot))$, $\overline{\delta} = (\delta_1(\cdot),\ldots,\delta_p(\cdot))$, $U = \{(u_0(\cdot),\overline{y}(\cdot)) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+) : \|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta_j,\ j = 1,\ldots,p\}$. Значение

$$E(\tau,\overline{\delta}) = \inf_{m:(L_2^\gamma(\mathbb{R}))^p \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)} \sup_U \left\| u(\cdot,\tau) - m(y_j(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)}$$

называется *ошибкой оптимального восстановления.* Метод $\widehat{m}$, при котором достигается точная нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления.*

На двумерной плоскости (t, y), построим множество

$$M = \operatorname{co}\left\{\left(t_j, \ln\left(\frac{1}{\delta_j}\right)\right) j = 1, \dots, p\right\} + \big\{(t, 0) : t \geqslant 0\big\},$$

где $\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A. Введем функцию $\theta(t)$ на луче $[0, +\infty)$: $\theta(t) = \max\{y : (t, y) \in M\}$,полагая при этом $\theta(t) = -\infty$, если $(t, y) \notin M$ для всех y. На луче $[t_1, +\infty)$, график функции $\theta(t)$ представляет собой выпуклую вверх (вогнутую) ломаную. Пусть $t_1 = t_{s_1} < t_{s_2} < \dots < t_{s_\varrho}$ суть точки ее излома (вершины).

Теорема. *Для каждого $\tau > 0$ имеет место равенство $E(\tau, \overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}$. При этом верны следующие утверждения:*

1. *Если $0 \leqslant \tau < t_1$, то $\theta(\tau) = -\infty$.*

2. *Если $\tau = t_{s_j}$, $j = 1, \dots, \varrho$, то метод $\widehat{m}$, определенный формулой $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$, является оптимальным.*

3. *Если $\varrho \geqslant 2$, $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, то метод $\widehat{m}$, определенный формулой*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = \big(\Psi_{s_j} * y_{s_j}\big)_\gamma(\cdot) + \big(\Psi_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}}\big)_\gamma(\cdot),$$

где $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Psi_{s_{j+1}}(\cdot)$ суть функции, чьи образы Фурье — Бесселя имеют соответственно формы

$$F_\gamma \Psi_{s_j}(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau)\delta_{s_{j+1}}^2 e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau)\delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j})\delta_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}},$$

$$F_\gamma \Psi_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{(\tau - t_{s_j})\delta_{s_j}^2 e^{-|\xi|^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau)\delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j})\delta_{s_j}^2 e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}},$$

является оптимальным.

4. *Если $\tau > t_{s_\varrho}$, то метод $\widehat{m}$, определенный формулой $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_\varrho}} y_{s_\varrho}(\cdot)$, является оптимальным.*

Литература

1. *Muravnik A. B.* Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the cauchy problem // J. Math. Sci.—2016.—Т. 216.—С. 345–496.
2. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Матем. сб.—1955.—Т. 36, № 2.—С. 299–310.
3. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate data // Sbornik: Mathematics.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 665–682.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА НЕЙМАНА[1]

Д. М. Поляков (Россия, Владикавказ; ЮМИ ВНЦ РАН)

Рассматривается самосопряженный оператор четвертого порядка $S = S(p, q)$, действующий в пространстве $L^2(0, 1)$, вида

$$Sy = y^{(4)} + (py')' + qy, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0, \tag{1}$$

где p, q — вещественные, периодические (периода 1) коэффициенты, $p, q \in L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Этот оператор задается на следующей области определения

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(S) = \big\{ y \in L^2(0,1) :\ & y'', y''', (y''' + py')' \in L^1(0,1), \\ & y^{(4)} + (py')' + qy \in L^2(0,1),\ \ y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0 \big\}.\end{aligned}$$

С физической точки зрения оператор S описывает прогиб (1-периодической) балки с жестким закреплением на концах, а его собственные значения указывают резонансные случаи, которые имеют важные приложения. Уравнения четвертого порядка появляются в качестве модельных для большого класса параболических уравнений высокого порядка, возникающих, например, в статистической механике, моделях фазового поля, гидродинамике, моделях висячих мостов.

Основная цель настоящей работы — получить асимптотику собственных значений при высоких энергиях, а также формулу следа для оператора S.

Через μ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначаются собственные значения оператора S. Кроме того, определим коэффициенты Фурье некоторой функции $f \in L^1(0, 1)$:

$$f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad \widehat{f}_{sn} = \int_0^1 f(x) \sin \pi(2n+1)x\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. *Пусть p, $q \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда собственные значения μ_n являются простыми, вещественными и допускают следующую асимптотику:*

$$\mu_n = \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^4 - \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^2 (p_0 + \widehat{p}_{sn} + \rho_{1,n}) + \mathscr{O}(n) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

где

$$\rho_{1,n} = \int_0^1 e^{-\pi(n+\frac{1}{2})s}(p(s) + p(1-s)) \times \\ \times \left(e^{-\pi(n+\frac{1}{2})s} - 2\sin\pi\Big(n + \frac{1}{2}\Big) - 2\cos\pi\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \right) ds.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (МК-160.2022.1.1).

Если дополнительно предположить, что $p''', q' \in L^1(\mathbb{T})$, *то асимптотика в этом случае примет вид:*

$$\mu_n = \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^4 - \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^2 \big(p_0 + \widehat{p}_{sn}\big) + 3\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)p(0) + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + \\ + q_0 - \widehat{q}_{sn} - \frac{p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{4\rho_{2,n}}{\pi(2n+1)} + \frac{2q(0)}{\pi(2n+1)} + \mathscr{O}(n^{-2}),$$

при $n \to +\infty$, *где*

$$\rho_{2,n} = \int\limits_0^1 e^{-\pi(n+\frac{1}{2})s} \Bigg(\frac{1}{2}\big(p'''(s) - p'''(1-s)\big)\Bigg(\sin\pi\Big(n + \frac{1}{2}\Big)s + \frac{e^{-\pi(n+\frac{1}{2})s}}{8}\Bigg) + \\ + \big(q'(1-s) - q'(s)\big)\Bigg(\sin\pi\Big(n + \frac{1}{2}\Big)s + \frac{e^{-\pi(n+\frac{1}{2})s}}{4}\Bigg)\Bigg)\, ds.$$

В [1, следствие 1] была выписана «грубая» асимптотика собственных значений для оператора S в случае $p \in C^3[0,1]$ и $q \in C^1[0,1]$. Подобный результат также был установлен в [2, теорема 3.1] также для гладких коэффициентов. В теореме 1 доказана более точная асимптотика оператора S в общем случае p, $q \in L^1(\mathbb{T})$.

Из теоремы 1 выводим S. Для этого рассмотрим оператор со сдвигом $S_t(p_t, q_t)$ вида (1), где $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{T}$. Через $\mu_n(t)$ мы обозначим собственные значения оператора S_t.

Теорема 2. *Пусть* $p'''', q'' \in L^1(\mathbb{T})$. *Тогда имеет место формула следа*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\mu_n(t) - \mu_n(0) - 3(p(t) - p(0))\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big) + \\ + \frac{p''(t) - p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{2(q(t) - q(0))}{\pi(2n+1)}\Bigg) = G(0) - G(t),$$

где

$$G = -\frac{p''}{2} + q - \frac{p^2}{4}.$$

При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$.

Литература

1. *McLaughlin J. R.* An inverse eigenvalue problem of order four —an infinite case // SIAM J. Math. Anal.—1978.—Vol. 9, № 3.—P. 395–413.
2. *Kerimov N. B., Aliev Z. S.* On the basis property of the system of eigenfunctions of a spectral problem with spectral parameter in the boundary conditions // Differ. Equat.—2007.—Vol. 43, № 7.—P. 905–915.

КОЛЕБАНИЯ УПРУГО ОПЁРТОЙ СТРУННОЙ СЕТКИ

В. Л. Прядиев (Россия, Воронеж; ВГУ)

Одной из моделей малых колебаний упруго опёртой струнной сетки является начально-краевая задача для волнового уравнения на связном и конечном геометрическом графе с условиями упругих опор (δ-взаимодействий) во внутренних вершинах. Краевые условия будем рассматривать 1-го, 2-го и 3-го рода — в любых сочетаниях. Если скорость волны на каждом из ребер единична, длины ребер равны 1, а начальная скорость — нулевая, то, трактуя поведение решения в вершинах графа как граничные режимы по отношению к примыкающим ребрам, получим уравнение

$$\big(2A - V\mathscr{M} - V\mathscr{M}^{-1}\big)\big(\mathscr{D}\mu'\big)(t) = K\mu(t) - \psi(t) \quad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

где $\mu : [0;+\infty) \to \mathbf{R}^m$ — вектор-функция из граничных режимов (m — количество вершин графа), A — матрица смежности вершин, а V — матрица их валентностей, $(\mathscr{M}f)(t) := f(t+1)$, $(\mathscr{M}^{-1}f)(t) := f(t-1)$, $(\mathscr{D}\mu')(t) := \sum_{k=0}^{[(t-1)/2]} \mu'(t-2k-1)$, K — диагональная матрица, образованная коэффициентами жесткости упругих опор в вершинах, $\psi \in C^1[0;+\infty)$ выражается через начальную деформацию.

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\mu(t) = e^{t\mathscr{E}V^{-1}K}\mu(0) - \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathscr{E}V^{-1}K}\mathscr{E}V^{-1}\psi(s)\,ds,$$

где $\mathscr{E} := ((2V^{-1}A - \mathscr{M} - \mathscr{M}^{-1})\mathscr{D})^{-1}$.

Лемма. *Если* $\big(V^{-1}A\big)^2 \neq E$, *где* E — *единичная матрица, то*

1) $(\mathscr{E}f)(t) = f(t) - \sum\limits_{k=0}^{[t]}(F_1^k + F_2^k)f(t-k)$, *где* $F_j = V^{-1}A + (-1)^j\sqrt{(V^{-1}A)^2 - E}$,

2)

$$(e^{\tau\mathscr{E}}f)(t) = e^{-\tau}\left\{f(t) + \sum_{k=1}^{[t]} P_k(\tau)[F_1^k + F_2^k]f(t-k) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{[t]}\left[\sum_{m=1}^{k-1} P_m(\tau)P_{k-m}(\tau)F_1^m F_2^{k-m}\right]f(t-k)\right\},$$

где $P_k(\tau) = \sum\limits_{j=1}^{k} C_{k-1}^{j-1}\dfrac{(-\tau)^j}{j!}$.

Эта лемма дает конечные описания операторов $\mathscr{E}$ и $e^{\tau\mathscr{E}}$, позволяя, например, в случае $V^{-1}K = E$ получить представление μ в конечной форме. Последнее обстоятельство важно в задачах управления колебаниями струнными сетками (задачи управления — в смысле статьи [1]). Для частных случаев геометрического графа конечные представления решений указанного вида начально-краевых задач (и даже при наличии δ'-взаимодействий в некоторых вершинах) были получены в работах [2–5].

Литература

1. *Ильин В. А., Тихомиров В. В.* Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // Диф. уравнения.—1999.—Т. 35, № 5.—С. 692–704.
2. *Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л.* Формула продолжения начальных данных в решении Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2004.—№ 1.—С. 115–122.
3. *Найдюк Ф. О.* О свойствах решений гиперболических уравнений с сингулярными коэффициентами: Дисс. к.ф.-м.н.—Воронеж, 2004.—134 с.
4. *Зверева М. Б., Найдюк Ф. О., Залукаева Ж. О.* Моделирование колебаний сингулярной струны // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2014.—№ 2.—С. 111–119.
5. *Найдюк Ф. О.* Исследование волнового уравнения с сингулярностью на несимметричном графе // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2021.—№ 1.—С. 110–116.

DETERMINATION OF A COEFFICIENT AND KERNEL IN A TWO-DIMENSIONAL FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

A. A. Rahmonov (Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz)

This work is devoted to obtaining a unique solution to an inverse problem for a time-fractional integro-differential equation. In the case of additional data, we consider an inverse problem. The unknown coefficient and kernel are determined uniquely by the additional data. The existence and uniqueness result is based on the Fourier method, fractional calculus, properties of the Mittag–Leffler function, and Banach fixed point theorem.

Let $Q_0^T := \Omega \times (0,T)$ for a given time $T > 0$, where Ω be a bounded domain in $\mathbf{R}^d$ with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. We consider a fractional integro-differential equation with a fractional derivative in time t:

$$\partial_t^\alpha u(\mathbf{x},t) + Au(\mathbf{x},t) = q(t)u_t(\mathbf{x},t) + (k * u)(t) + f(\mathbf{x},t), \quad (\mathbf{x},t) \in Q_0^T, \qquad (1)$$

where $1 < \alpha < 2$ and $\partial_t^\alpha u(\mathbf{x},t)$ is the left Gerasimov–Caputo fractional derivative wit respect to t and is defined by (see [1]):

$$\partial_t^\alpha v(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(d-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{d-\alpha-1} v^{(d)}(\tau)\, d\tau, & d-1 < \alpha < d,\ d \in \mathbf{N},\ v \in W^{d,1}(0,T); \\ v^{(d)}(t), & \alpha = d \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

$\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function and the operator A is a symmetric uniformly elliptic operator defined on $\mathscr{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ given by

$$Av(\mathbf{x},t) \equiv -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} v(\mathbf{x},t) \right) + c(\mathbf{x})v(\mathbf{x},t), \quad (\mathbf{x},t) \in Q_0^T,$$

in which the coefficient satisfy

$$a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\Omega), \quad c \in C(\bar{\Omega}),\ \ c(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ \ \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

and there exists a constant $\mu > 0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},\ \ \xi \in \mathbf{R}^n.$$

We supplement the above fractional wave equation with the following initial conditions:

$$u(\mathbf{x},0) = a(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x},0) = b(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \qquad (2)$$

and the zero boundary condition:

$$u(\mathbf{x},t)=0,\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega,\ \ 0<t<T. \tag{3}$$

If $q(t)$, $k(t)$, $f(\mathbf{x},t)$, $p(\mathbf{x})$, $a(\mathbf{x})$ and $b(\mathbf{x})$ are known, then the problem (1)–(3) is a direct problem. The inverse problem in this paper is to reconstruct $q(t)$ and $k(t)$ according to the additional data

$$u(x_i,t)=h_i(t),\quad x_i\in\Omega,\ \ i=1,2,\ \ t\in(0,T), \tag{4}$$

where $h_i(t)$, $i=1,2$, are given functions.

Inverse problem. Find $u\in C\left([0,T];\mathscr{D}(A^{\gamma})\right)\cap C^1\left([0,T];D(A^{\gamma_0})\right)$, $q\in C^1[0,T]$ and $k\in C[0,T]$ to satisfy (1)–(3) and the additional measurement (4), where $\mathscr{D}(A^{\gamma})$ is a Hilbert space with some positive constants $\gamma,\gamma_0>0$ (e. g. [2]).

References

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations.—Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.—N. Y.: Springer Science and Business Media, 2012.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В. С. Рыхлов (Россия, Саратов; СГУ им. Н. Г. Чернышевского)

1. Рассмотрим обобщенную начально-граничную задачу для гиперболического уравнения

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t)$ является функцией класса Q и обе эти функции являются комплекснозначными. Считаем, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$ есть функция класса Q, если $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

Для уравнения (1) выполняется условие $p_1^2 - 4p_2 > 0$, т. е. корни ω_1, ω_2 характеристического многочлена $\omega^2 + p_1\omega + p_2$ вещественны. Предположим

$$\omega_1 < 0 < \omega_2. \tag{4}$$

Обобщенное решение задачи (1)–(3) определяется аналогично тому, как это сделано в [1, 2]. В этих же работах дается история вопроса. С использованием метода, предложенного в [1, 2] к простейшей смешанной задаче для уравнения колебания струны, который основан на резольвентном и аксиоматическом (аксиомы расходящихся рядов) подходах, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t)$ есть функция класса Q и выполняется условие* (4)*, то для обобщенного решения $u(x,t)$ начально-граничной задачи* (1)–(3) *справедлива формула*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} f(\xi,\tau)\, d\xi, \tag{5}$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big),$$

$$\widetilde{\Psi}(\xi) = \Psi\left(\frac{\xi}{a}\right) \text{ при } \xi \in [0,a),\ \widetilde{\Psi}(\xi) = \Psi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right) \text{ при } \xi \in [a,1],\ \Psi(\xi) = \int\limits_0^x \psi(\xi)\, d\xi,$$

$$\eta(s) = \frac{\{s\}}{a}\chi\big(a - \{s\}\big) + \frac{1-\{s\}}{1-a}\chi\big(\{s\} - a\big),\ \alpha(x,t) := \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1},\ \beta(x,t) := \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1},$$

$a = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$, $\chi(x)$ — *функция Хевисайда*, $\{x\}$ — *дробная часть числа* $x \in \mathbb{R}$.

2. В качестве приложения рассмотрим следующую однородную обобщенную начально-граничную задачу с ненулевым потенциалом

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = q(x)u(x,t), \tag{6}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{8}$$

где $\psi(x), q(x) \in L_1[0,1]$ и $q(x)u(x,t)$ — функции класса Q.

Применим к решению этой задачи метод, предложенный в статьях [1, 2]. Так же, как и в [1, 2], в задаче (6)–(8) будем рассматривать правую часть $q(x)u(x,t)$ в уравнении (6) как неоднородность в задаче (1)–(3). Тогда на основании формулы (5) от задачи (6)–(8) приходим к интегральному уравнению

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)u(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{9}$$

Естественно назвать *обобщенным решением* задачи (6)–(8) решение интегрального уравнения (9).

Уравнение (9) решается методом последовательных подстановок. Введем оператор, действующий из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$,

$$Bf = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)f(\xi,\tau)\, d\xi.$$

Образуем ряд

$$A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (B^n u_1)(x,t).$$

Теорема 2. *Если* $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x) \in L_1[0,1]$ *и выполняется условие* (4), *то задача* (6)–(8) *имеет единственное обобщенное решение* $u(x,t)$ *и для него справедлива формула* $u(x,t) = A(x,t)$, *причем ряд* $A(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно в* Q_T *не медленнее экспоненциального ряда.*

Литература

1. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Современ. проблемы теор. функц. и их прил. Матер. 21-й Междунар. Саратов. зимней шк.—Саратов: Саратов. ун-т, 2022.—С. 319–324.
2. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2022.—Т. 22, № 3.—С. 322–331.

SOLUTION OF A LINEAR L-CATCH DIFFERENTIAL GAME WITH NON-INERTIAL OBJECTS UNDER GEOMETRIC CONSTRAINTS

B. T. Samatov (Uzbekistan, Tashkent; IM AS RUz),
M. A. Turgunboeva (Uzbekistan, Namangan; NamSU)

The present paper is devoted to the linear L-catch differential game with two objects, called pursuer and evader, whose controls adhere to geometric constraints (in short, the G-constraints). In this work, the pursuit problem is discussed and a pursuer strategy guaranteeing the L-catch is defined using the method of Chikrii's resolving functions.

Consider the game including the objects X (Pursuer) and Y (Evader) in the finite-dimensional space $\mathbb{R}^n$. If x, y are their state vectors and u, v are their velocity vectors, then let their movements be described by the following linear equations:

$$X: \quad \dot{x} = kx + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$Y: \quad \dot{y} = ky + Cv, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$; $k \neq 0$ and $k \in \mathbb{R}$; B and C are $n \times n$ real constant matrices; x_0 and y_0 are the initial positions of the objects for which it is presumed that $|x_0 - y_0| > L$, $L > 0$.

The controls u and v are regarded as measurable functions $u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ accordingly, and they are subject to the constraints

$$|u(t)| \leqslant \alpha \quad \text{for almost every } t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leqslant \beta \text{ for almost every } t \geqslant 0. \tag{4}$$

which are usually termed the geometrical constraints (or the G-constraints), where α and β are non-negative numbers which designate the maximal speeds of X and Y. It is worth noting that as the norms of $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ in (3) and (4) we refer to the Euclidean norms in the form

$$|u(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2(t)}, \quad |v(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2(t)}.$$

Denote by $\mathbb{U}$ and $\mathbb{V}$ the family of all the measurable functions satisfying (3) and (4) accordingly.

Definition 1. A measurable functions $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) \in \mathbb{U}$ $\big(v(\cdot) = (v_1(\cdot), \ldots, v_n(\cdot)) \in \mathbb{V}\big)$ is called an admissible control of the object X (of the object Y).

If $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ and $v(\cdot) \in \mathbb{V}$, then the solutions to Cauchy's problems (1)–(2) are

$$x(t) = e^{kt}x_0 + \int\limits_0^t e^{k(t-s)}Bu(s)\,ds, \quad y(t) = e^{kt}y_0 + \int\limits_0^t e^{k(t-s)}Cv(s)\,ds$$

which are called the *trajectories of the objects X and Y*, appropriately.

The main target of the object X is to approach the object Y at a distance $L > 0$ (L-catch problem), i. e., to attain the relation

$$|x(\theta) - y(\theta)| \leqslant L$$

at some finite time $\theta > 0$.

To be more comfortable subsequently, the following notations will be used:

$$z = x - y, \quad z_0 = x_0 - y_0.$$

Definition 2. For $\alpha \geqslant \beta$, we call the function

$$\mathbf{u}(\tau, v) = \Phi v + \lambda(\tau, v)\,(m(\tau, v) - \tau)$$

the approach strategy or Π_L-strategy for X in this differential game, where

$$\lambda(\tau, v) = \frac{1}{|\tau|^2 - l^2}\left[\langle v, \tau\rangle + \alpha l + \sqrt{(\langle v, \tau\rangle + \alpha l)^2 + (\tau^2 - l^2)(\alpha^2 - |v|^2)}\right],$$

$$m(\tau, v) = -l\Big(\Phi v - \lambda(\tau, v)\tau\Big)\Big/|\Phi v - \lambda(\tau, v)\tau|,\ \Phi = B^{-1}C,\ l = |LB^{-1}|,\ \tau = z_0B^{-1}.$$

Theorem. *Let $\alpha > \beta$ and $k < 0$. Then the Π_L-strategy guarantees to occur L-catch on the time interval $[0, T_L]$ in the differential game* (1)–(2)*, where*

$$\theta = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{k(|\tau| - l)}{\alpha - \beta\|\Phi\|}\right).$$

We say the number T_L a guaranteed time of L-catch and $\|\Phi\|$ is norm of the Φ matrix.

References

1. *Isaacs R.* Differential games.—N. Y.: John Wiley and Sons, 1965.—384 p.
2. *Chikrii A. A.* Conflict-Controlled Processes.—Dordrecht: Kluwer, 1997.—31 p. (in Russian).
3. *Petrosyan L. A., Dutkevich V. G.* Games with "a survival zone", occasion L-catch // Vestnic Leningrad State Univ.—1969.—Vol. 3, № 13.—P. 31–38.
4. *Satimov N. Yu.* Methods for Solving the Pursuit Problem in the Theory of Differential Games.—Tashkent: Izd-vo NUUz, 2003.—P. 45–51 (In Russian).
5. *Samatov B. T.* Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players II // Cybernetics and Systems Analysis.—2013.—Vol. 49, № 6.—P. 907–921. DOI: 10.1007/s10559-013-9581-5.
6. *Samatov B. T., Uralova S. I., Mirzamaxmudov U. A.* The problem of Ramchundra for a problem of l-capture // Scientific Bulletin of Namangan State University.—2019.—Vol. 1, № 2.—P. 10–14.
7. *Bannikov A. S., Petrov N. N.* Linear non-stationary differential pursuit games with several evaders // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki.—2014.—Vol. 78, № 3.—P. 3–12

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА В ЗАДАЧЕ КОШИ

В. И. Семенов (Россия, Калининград; БФУ)

Работы О. А. Ладыженской середины прошлого века явились фундаментом для изучения свойств решений уравнений Навье — Стокса. Ее идеи прямо или косвенно используются или развиваются многими математиками до настоящего времени.

Разделение размерностей $n = 2$ и $n = 3$ становится естественным с аналитической точки зрения, если сделать сравнение интегральных тождеств для соленоидальных полей в этих пространствах. Они существенным образом влияют на точность априорных оценок. В размерности $n = 2$ часть из них заменяется алгебраическими тождествами. Это один аспект (см. [1–2]).

В размерности $n = 3$ полезными являются инвариантные числовые характеристики λ, μ, ϵ (инвариантность рассматривается относительно скалинг–процедуры) (см. [3–4]).

Первый параметр λ связан со скоростью v изменения квадрата кинетической энергии потока в начальный момент времени. Важность этого параметра состоит в том, что, если скорость v невелика, то этого достаточно для существования глобального регулярного решения. Через второй параметр μ определяется момент нарушения регулярности решения: если $[0, T_0)$ — универсальный временной промежуток регулярности решения, то $[0, \mu T_0)$ означает максимальный временной промежуток, на котором решение регулярно. Наконец, третий параметр ϵ является коэффициентом диссипации кинетической энергии потока жидкости к моменту T_0. Если коэффициент ϵ не близок к единице, то это дает достаточное условие существования регулярного глобального решения. Все эти параметры взаимно оцениваются. Цель доклада — дать новую универсальную оценку снизу для третьего параметра, которая никоим образом не зависит от начальных данных задачи.

Литература

1. *Semenov V. I.* Some new integral identities for solenoidal fields and applications журнале // Mathematics.—2014.—Vol. 2.—P. 29–36.
2. *Semenov V. I.* Special properties of plane solenoidal fields // Mathematics.—2021.—Vol. 9 (16), № 1863.—P. 1–6.
3. *Semenov V. I.* The 3d Navier–Stokes equations: local and global solutions // Axioms.—2019.—Vol. 8, № 41.—P. 1–51.
4. *Semenov V. I.* Some properties of blow up solutions in the Cauchy problem for 3d Navier–Stokes equations журнале // Symmetry-.–2020.—Vol. 12, № 1523.—P. 1–7.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О СПЕКТРАХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Х. Сташ (Россия, Майкоп; АГУ)

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\mathscr{E}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

задаваемых наборами $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ непрерывных функций, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathscr{E}^n$ обозначим через $\mathscr{S}_*(a)$. Из множества $\mathscr{E}^2$ выделим подмножество уравнений вида $\ddot{y} + p(t)y = 0$ с периодической функцией p, т. е. уравнений Хилла. Далее звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathscr{S}_*^n = \bigcup_{a \in \mathscr{E}^n} \mathscr{S}_*(a).$$

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая смена знака* функции $y \in \mathscr{S}_*^n$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 2 [1, 2]. Для момента $t > 0$ и функции $y \in \mathscr{S}_*^n$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$.

Далее, для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $\psi y = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ введем обозначение $\nu^\gamma(y,m,t) \equiv \nu^\gamma(\langle \psi y, m\rangle, t)$, где $\gamma \in \{-,0,+\}$, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3 [1, 3]. *Верхние* (*нижние*) *частоты Сергеева знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathscr{S}_*^n$ зададим при $\gamma \in \{-,0,+\}$ соответственно равенствами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\,\nu^\gamma(y,t) \quad \Big(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\,\nu^\gamma(y,t)\Big).$$

Определение 4 [1, 2]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathscr{S}_*^n$ зададим при $\gamma \in \{-,0,+\}$ соответственно равенствами

$$\hat{\nu}_\bullet^\gamma(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\,\nu^\gamma(y,m,t) \quad \Big(\check{\nu}_\bullet^\gamma(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y,m,t)\Big),$$

$$\hat{\nu}^{\gamma}_{\circ}(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\,\nu^{\gamma}(y,m,t) \quad \Big(\check{\nu}^{\gamma}_{\circ}(y) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^{\gamma}(y,m,t)\Big).$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какой-либо из характеристик колеблемости будем называть ее *точной*.

Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей в силу теоремы существования и единственности, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) показатели равны между собой и их спектры (т. е. множества значений на ненулевых решениях уравнения) состоят из одного значения [2]. В связи с этим возникает естественный вопрос о возможности выделения классов уравнений второго порядка, на множестве решений которых все верхние характеристики колеблемости совпадают с нижними. На этот вопрос отвечает

Теорема 1. *Для любого нетривиального решения уравнения Хилла* $(0,p) \in \mathscr{E}^2$ *все частоты Сергеева и показатели колеблемости являются точными.*

Частоту $\omega(p)$ уравнения Хилла $(0,p) \in \mathscr{E}^2$ определим как частоту нулей Сергеева какого-либо одного решения. Если эта частота $\omega(p)$ целая, то о его мультипликаторах почти ничего сказать нельзя, кроме того, что они вещественные, а их знак совпадает со знаком $(-1)^{\omega(p)}$. В противном случае по частоте Сергеева однозначно можно восстановить мультипликаторы уравнения Хилла.

Теорема 2. *Если частота уравнения Хилла* $(0,p) \in \mathscr{E}^2$ *удовлетворяет условию* $\omega(p) \notin \mathbb{Z}$, *то его мультипликаторы равны* $\mu_{\pm} = e^{\pm i\omega(p)\pi}$.

В работе [3] для любого $n \geqslant 3$ построен пример дифференциального уравнения n-го порядка, спектры верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней которого совпадают с заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль. Возможность обобщения этого результата и на показатели колеблемости гарантирует следующая

Теорема 3. *Для любого* $n > 2$ *и произвольного содержащего нуль суслинского множества* $\mathscr{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *существует дифференциальное уравнение* $a \in \mathscr{E}^n$, *удовлетворяющее равенствам*

$$\hat{\nu}^{-}_{\bullet}(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\nu}^{0}_{\bullet}(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\nu}^{+}_{\bullet}(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\nu}^{-}(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\nu}^{0}(\mathscr{S}_*(a)) = \hat{\nu}^{+}(\mathscr{S}_*(a)) = \mathscr{A}.$$

Литература

1. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. Семинара им. И. Г. Петровского.—2006.—Вып. 25.—С. 249–294.
2. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат.—2012.—Т. 76, № 1.—С. 149–172.
3. *Войделевич А. С.* О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журн. Белорусского гос. ун-та. Матем. Инфор.—2019.—№ 1.—С. 28–32.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМ ПРОИЗВОДНЫМ ПО ВРЕМЕНИ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

Т. Р. Суяров (Узбекистан, Бухарский филиал ИМ АН РУз; БухГУ)

В области $\Omega := \mathrm{D} \times (0,\ \mathrm{T}]$, $\mathrm{D} := \{(x,y):\ 0 < x,\ y < 1\}$, рассмотрим волновое уравнение с дробным временем

$$\left(D^{\alpha}_{0+t}u\right)(x,y,t) - \Delta u + q(t)u(x,y,t) = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$I^{(2-\alpha)}_{0+t}u(x,y,t)\big|_{t=0} = \varphi_1(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(I^{(2-\alpha)}_{0+t}u\right)(x,y,t)\bigg|_{t=0} = \varphi_2(x,y), \quad (x,y) \in [0,1]\times[0,1], \tag{2}$$

$$u(0,y,t) = u(1,y,t), \quad u_x(1,y,t) = 0, \quad (y,t) \in [0,1]\times[0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, \quad (x,t) \in [0,1]\times[0,T]. \tag{4}$$

Здесь дробно-дифференциальный оператор Римана — Лиувилля $D^{\alpha}_{0+,t}$ порядка $1 < \alpha < 2$ понимается в смысле [1, с. 69–72], [2, с. 62–65].

Функции $f(x,y,t)$, $\varphi_1(xy)$, $\varphi_2(x,y)$ считаются известными функциями. Обратная задача: найти функцию $q(t) \in C[0,T]$ в (1), если решение уравнения начально-краевая задача (1)–(4) удовлетворяет условию:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 w(x,y)\,u(x,y,t)\,dx\,dy = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

где $w(x,y)$, $h(t)$ — известные функции.

Предположим, что заданные в этой статье функции φ_1, φ_2, f, w и h удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered}\{\varphi_1,\varphi_2\} \in C^3([0,1]\times[0,1]), \quad \left\{\varphi_1^{(4)},\varphi_2^{(4)}\right\} \in L_2([0,1]\times[0,1]);\\ \varphi(0,y) = \varphi(1,y) = 0, \quad \varphi_x(0,y) = \varphi_x(1,y) = 0, \quad \varphi_{xx}(0,y) = \varphi_{xx}(1,y) = 0,\\ \varphi(x,0) = \varphi(x,1) = 0, \quad \varphi_y(x,0) = \varphi_y(x,1) = 0, \quad \varphi_{yy}(x,0) = \varphi_{yy}(x,1) = 0.\end{gathered} \tag{A1}$$

$$\begin{gathered}f(x,y,\cdot) \in C[0,T], \quad t \in [0,T],\\ f(\cdot,\cdot,t) \in C^3([0,1]\times[0,1]), \quad f^{(4)}(\cdot,\cdot,t) \in L_2([0,1]\times[0,1]),\\ f(0,y,t) = f(1,y,t) = 0, \quad f_x(0,y,t) = f_x(1,y,t) = 0,\\ f_{xx}(0,y,t) = f_{xx}(1,y,t) = 0, \quad f(x,0,t) = f(x,1,t) = 0,\\ f_y(x,0,t) = f_y(x,1,t) = 0, \quad f_{yy}(x,0,t) = f_{yy}(x,1,t) = 0.\end{gathered} \tag{A2}$$

$$w(x,y) \in C^2([0,1]\times[0,1]); \quad w(0,y)=0, \quad w_x(0,y)=w_x(1,y)=0, \\ w_{xx}(0,y)=w_{xx}(1,y)=0, \quad w(x,1)=w(x,0)=0. \tag{A3}$$

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}h\right)(t) \in C[0,T], \quad |h(t)| \geqslant h_0 > 0, \quad h_0 \text{ — заданное число :} \\ \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 w(x,y)\varphi_1(x,y)\,dx\,dy = \left(I^{(2-\alpha)}_{0+,t}h\right)(t)_{t=0+}, \\ \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 w(x,y)\varphi_2(x,y)\,dx\,dy = \frac{\partial}{\partial t}\left(I^{(2-\alpha)}_{0+,t}h\right)(t)_{t=0+}. \tag{A4}$$

Обратные задачи для классических интегро-дифференциальных уравнений распространения волн широко исследованы. Нелинейные обратные коэффициентные задачи с различными типами условий переопределения часто встречаются в литературе (см. [3, 4]). Получена следующая теорема существования.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A4). *Тогда для некоторого числа* $T^* \in (0,T)$ *существует единственное решение* $q(t) \in C\,[0,T^*]$ *обратной задачи* (1)–(5).

Литература

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations.—Amsterdam–Tokyo: Elsevier, 2006.
2. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations.—N. Y.: Academic Press, 1999.—(Mathematics in Science and Engineering; Vol. 198).
3. *Дурдиев Д. К.* О единственности определения ядра интегро-дифференциального уравнения параболического типа // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физико-мат. науки.—2015.—Т. 19, № 4.—С. 658–666. DOI: 10.14498/vsgtu1444.
4. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А., Бозоров З. Р.* Задача определения двумерного коэффициента диффузии для уравнения дробного времени // Матем. Мет. заявл. наук.—2021.—Т. 44.—С. 10753–10761.

ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕСВЯЗНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ПАМЯТЬЮ[1]

Ж. Д. Тотиева (Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; СКЦМИ ВНЦ РАН)

Для (x, z), $x \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $t \in \mathbb{R}$, рассматривается система уравнений термоупругости с памятью [1, 2]:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L\left[h(x,t), \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial z} - (3\lambda+2\mu)\int\limits_0^{H(x,z,t)}\alpha(s)ds\right)\right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k\Delta H, \quad H\,|_{t<0} \equiv 0, \;\; u\,|_{t<0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$L\left[h(x,t), \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=+0} = -\frac{\delta(t)}{\lambda(0)+2\mu(0)} + \frac{3\lambda(0)+2\mu(0)}{\lambda(0)+2\mu(0)} L\big[h(x,t), R(H(0,t))\big], \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial z} - \gamma H\right)\Big|_{z=+0} = -\gamma(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)t\theta(t), \quad (4)$$

где $u(x,z,t)$ — смещение, $H(x,z,t)$ — приращение температуры, Δ — оператора Лапласа по переменным x, z; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$, $\gamma > 0$, — некоторые постоянные, $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $R(s) = \int_0^s \alpha(\tau)d\tau$, оператор L определен по формуле $L\left[h(x,t), u(x,z,t)\right] = u(x,z,t) + \int_0^t h(x,t-\tau)u(x,z,\tau)d\tau$.

В систему уравнений входят $k = \text{const} > 0$ — коэффициент температуропроводности, $\rho(z) > 0$ — плотность среды, $\lambda(z), \mu(z)$ — параметры Ламе, $\alpha(z)$ — коэффициент теплового расширения среды. Считаем, что $\mu(z) > 0$, $\lambda(z) + 2\mu(z) > 0$.

Задачу определения вектора смещения $u(x,z,t)$ и приращения температуры $H(x,z,t)$, удовлетворяющих (в обобщенном смысле) равенствам (1)–(4), при заданных функциях $\alpha(s)$, $h(t)$, $\rho(z)$, $\mu(z)$, $\lambda(z)$ и заданных постоянных k, γ, $\tilde{T}_0$, $\tilde{T}_1$ будем называть *прямой задачей*.

Предполагаем, что ядро $h(x,t)$ можно представить в виде (формально вводится малый параметр $\varepsilon > 0$):

$$h(x,t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(x,t), \quad (5)$$

где функция $h_0(t)$ является заданной, а $h_1(x,t)$ — неизвестная, малая по абсолютной величине, добавка. Требование малости добавочного ядра понимается как малость по норме, содержащей производные ядра до некоторого порядка.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования, соглашение № 075-02-2023-914.

Обратная задача: найти ядро $h_1(x,t) \in C_t^1([0,\infty); L_2(\mathbb{R}))$, $t > 0$, если известна дополниительная инйформация о решении прямой задачи (1)–(4):

$$u(x,z,t)|_{z=+0} = g(x,t), \quad t > 0, \tag{6}$$

$g(x,t)$ — заданная функция.

Будем считать, что для $T > 0$ $\tilde{h}_1(\nu,t) := F_x[h_1](\nu,t)$ (образ Фурье)$\in \tilde{\Lambda}(\omega,T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu,t) \in C_t^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ и для любого фиксированного $t \in [0,T]$ $\operatorname{supp}\tilde{h}_1(\nu,t) \subset [-\omega,\omega]$. Соответственно, $h_1(x,t) \in \Lambda(\omega,T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu,t) \in \tilde{\Lambda}(\omega,T)$.

Теорема 1. *Пусть $\omega > 0$, $T > 0$ фиксированы. Для существования и единственности решения обратной задачи (1)–(6) $h_1(x,t) \in \Lambda(\omega,T)$ необходимо и достаточно, чтобы $h_0(t) \in C^3[0,T]$, $\tilde{g}(\nu,t) := F_x[g](\nu,t) \in C_t^2(\mathbb{R}\times[0,T])$, $\tilde{g}(\nu,0) = 0$, и для любого фиксированного $t \in [0,T]$ $\operatorname{supp}\tilde{g}(\nu,t) \subset [-\omega,\omega]$.*

Теорема 2. *Пусть $h_1^{(1)}(x,t), h_1^{(2)}(x,t) \in \Lambda(\omega,T)$ — решения обратной задачи (1)–(6), отвечающие информациям $g^{(1)}(x,t)$, $g^{(2)}(x,t)$ соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 1 имеет оценка устойчивости*

$$\int\limits_R \|h_1^{(1)} - h_1^{(2)}\|^2_{C[0,T]}\,dx \leqslant C \int\limits_{-\omega}^{\omega} \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|^2_{C^2[0,T]}\,d\nu.$$

где C — некоторая константа, зависящая от величин ω, T и значений функций $\mu(z)$, $\lambda(z)$, $\rho(z)$, $h_0(t)$.

Пусть существует решение $h_1(x,t) \in C_t^1([0,\infty); L_2(\mathbb{R}))$, отвечающее информации $\tilde{g}(\nu,t)$.

Определим множество функций $\tilde{g}_\omega(\nu,t)$ по правилу:

$$\tilde{g}_\omega(\nu,t) := \theta(\omega - |\nu|)\tilde{g}(\nu,t).$$

Выделим семейство обратных задач: определить функцию $h_1^\omega(x,t) = F_\nu^{-1}[\tilde{h^\omega}(\nu,t)]$ по информации $\tilde{g}_\omega(\nu,t)$.

Теорема 3. *Данное семейство является регуляризованным, т. е.*

1) *для каждого $\omega > 0$ обратная задача корректна;*

2) *если данные таковы, что решение исходной (корректной) задачи существует, то при $\omega \to \infty$ последовательность решений семейства задач с этими данными стремится к решению исходной (некорректной) задачи.*

Литература

1. *Коваленко А. Д.* Термоупругость.—Киев: Вища школа, 1975.—С. 216.
2. *Тотиева Ж. Д., Дурдиев Д. К.* Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости // Матем. заметки.—2018.—Т. 103, № 1.—С. 118–132.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА СЕТИ[1]

А. А. Уртаева (Россия, Владикавказ; СОГУ)

В докладе обсуждается вопрос о кратности собственных значений задачи

$$L_\lambda u \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) = \lambda\rho(x)\,u, \quad u|_{\partial\Gamma} = u'|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Оператор L_λ порождается совокупностью дифференциальным уравнением на ребрах графа

$$\big(p_i(x)u_i''\big)'' - r_i(x)u = \lambda\rho(x)u, \quad x_i \in E(\Gamma),$$

и набором условий согласования в каждой внутренней вершине графа $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i \in I(a),$$

$$\sum_{i\in I(a)} (p_iu_i'')_\nu'(a) - r(a)u(a) = \lambda\rho(a)u(a), \quad a \in J(\Gamma).$$

Здесь используются обозначения работ [1, 3].

Ниже приводится точная оценка кратности собственных значений задачи (1). Известно (см., например, [1]), что такие оценки существенно зависят от топологии графа. Отметим, что изучение свойств решений дифференциальных уравнений четвертого порядка на сети является существенно более сложной, нежели аналогичная задача для уравнения Штурма — Лиувилля. Даже модели физического происхождения оказываются очень трудными для анализа (см., например, [2, 3]). В докладе устанавливается, что для оператора L_λ имеют место спектральные свойства, аналогичные свойствам оператора Штурма — Лиувилля на графе.

Прежде, чем сформулировать основной результат, введем обозначения и терминологию.

Пусть Γ — произвольный граф. Вершину $a \in J(\Gamma)$, лежащую на каком-либо цикле, назовем *разбивающей*, если $\Gamma \setminus a$ не связно. Пусть $\Gamma_i(a)$ — одна из компонент связности множества $\Gamma \setminus a$. Множество $\Gamma_i = \Gamma_i(a) \cup a$ является подграфом графа Γ, который также может иметь циклы. Он также может разбиваться на связные компоненты некоторыми вершинами, лежащими на его циклах. Во избежание недоразумений подчеркнем, что выбрасываются только вершины, лежащие на циклах. После такого разбиения снова образуем подграфы типа Γ_i, присоединяя к ним вершины, с помощью которых они разбивались. Продолжая

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования, соглашение № 075-02-2023-939.

этот процесс и далее, мы получим некоторое количество подграфов. Каждый из них является либо деревом, либо является связным объединением циклов, не допускающим дальнейшего разбиения описанного выше типа. Такое объединение циклов назовем *гнездом*.

Обозначим через $|\partial\Gamma|$ — число граничных вершин, $\zeta(\Gamma)$ — количество гнезд графа, содержащих ровно по одной разбивающей вершине, и $\eta(\Gamma)$ — цикломатическое число графа Γ.

Теорема 1. *Если граф* Γ*-гнездо, то* $\dim(\mathscr{S}(L)) \leqslant \eta(\Gamma) - 1$.

Теорема 2. *Кратность любого собственного значения краевой задачи* (1) *не превосходит*

$$|\partial\Gamma| + \zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) - 1.$$

Литература

1. *Покорный Ю. В., Мустафокулов Р.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе // Изв. вузов. Мат.—1999.—С. 75–82.
2. *Диаб А. Т. Калдыбекова Б. К., Пенкин О. М.* О кратности собственных значений в задаче Штурма — Лиувилля на графах // Мат. заметки.—2016.—Т. 99, № 4.—С. 489–501.
3. *Кулаев Р. Ч.* Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 3.—С. 302–316.

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

Ф. Г. Хуштова (Россия, Нальчик; ИПМА КБНЦ РАН)

В области $\Omega_T = \{(x, y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D^{\alpha}_{0y} u(x, y) = 0, \tag{1}$$

где D^{α}_{0y} — дробная производная в смысле Римана — Лиувилля порядка $0 < \alpha \leqslant 1$ [1, с. 9], [2, с. 14]. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω_T назовем функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω_T, и такую, что $y^{1-\alpha}u$, $y^{1-\alpha}u_x \in C(\bar{\Omega}_T)$, u_{xx}, $D^{\alpha}_{0y}u \in C(\Omega_T)$, $\bar{\Omega}_T$ — замыкание области Ω_T.

Задача. Найти регулярное в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y} u(x, y) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$u_x(0, y) = hu(0, y) - \nu(y), \quad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ и $\nu(y)$ — заданные функции, $h = \text{const}$.

Далее $f(y) * g(y)$ — свертка Лапласа, $\phi\,(-\rho, \mu; z)$ — функция Райта [3], $E_{\rho,\mu}(z)$ — функция типа Миттаг-Леффлера [4, с. 117], $\operatorname{erfc}(z)$ — дополнительный интеграл вероятности [5, с. 622].

Примем обозначения $\beta = \alpha/2$,

$$G(x, \xi, y) = \frac{y^{\beta-1}}{2}\left[\phi\left(-\beta, \beta; -(x+\xi)y^{-\beta}\right) + \phi\left(-\beta, \beta; -|x-\xi|y^{-\beta}\right)\right],$$

$$G_0(x, \xi, y) = y^{\beta-1}\phi\left(-\beta, \beta; -(x+\xi)y^{-\beta}\right), \quad E(y) = y^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-hy^{\beta}\right),$$

$$\widetilde{G}(x, \xi, y) = G(x, \xi, y) - h\, G_0(x, \xi, y) * E(y).$$

Теорема 1. *Пусть* $y^{1-\alpha}\nu(y) \in C[0, T]$, $\varphi(x) \in C[0, \infty)$ *и выполняются условия*

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha}\nu(y) = \Gamma(\alpha)\left[h\varphi(0) - \varphi'(0)\right],$$

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\, \exp\big(-\sigma x^{\frac{2}{2-\alpha}}\big) = 0, \quad \sigma < (2-\alpha)\, 2^{-\frac{2}{2-\alpha}} \big(\alpha\,/\,T\big)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Тогда функция

$$u(x, y) = \int_0^y \widetilde{G}(x, 0, y-\eta)\, \nu(\eta)\, d\eta + \int_0^{\infty} \widetilde{G}(x, \xi, y)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

является решением задачи (1)–(3).

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи* (1)–(3), *удовлетворяющего для некоторого* $k > 0$ *условию*

$$\lim_{x\to\infty} y^{1-\alpha}u(x,y)\exp\left(-kx^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0.$$

Частные случаи. Если в условии (3) $h = 0$, то для уравнения (1) получим решение второй краевой задачи в области Ω_T в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^y G(x,0,y-\eta)\,\nu(\eta)\,d\eta + \int\limits_0^\infty G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Отметим, что первая краевая задача для уравнения (1) в полубесконечной области была рассмотрена в работе [6].

В случае, когда уравнение (1) совпадает с уравнением Фурье, т. е. $\alpha = 1$ ($\beta = 1/2$), функции $G(x,\xi,y)$, $G_0(x,\xi,y)$ и $E(y)$ примут вид [7]

$$G(x,\xi,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\left[\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4y}\right) + \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right)\right],$$

$$G_0(x,\xi,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}}\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4y}\right), \quad E(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} - h\exp\left(h^2 y\right)\operatorname{erfc}(h\sqrt{y}).$$

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
2. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка.—М.: Наука, 2005.—199 с.
3. *Wright E. M.* The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math.—1940.—Vol. os-11, № 1.—P. 36–48. DOI: 10.1093/qmath/os-11.1.36.
4. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.—М.: Наука, 1966.—672 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции.—М.: Физматлит, 2002.—632 с.
6. *Геккиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2002.—Т. 8, № 1.—С. 6–8.
7. *Хуштова Ф. Г.* Третья краевая задача в полуполосе для уравнения диффузии дробного порядка // Диф. уравнения.—2021.—Т. 57, № 12.—С. 1635–1643.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

О ДЕЙСТВИИ ГРУПП ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ[1]

О. Б. Цехан (Беларусь, Гродно; ГрГУ им. Янки Купалы)

Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$ линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему наблюдения

$$\begin{gathered} \dot{z}(t) = A\,(t,\mu)\,z(t), \quad z \in \mathbb{R}^n,\ t \in T,\ z(t_0) = z_0, \\ v(t) = c(t)z(t), \quad v \in \mathbb{R},\ t \in T. \end{gathered} \tag{1}$$

$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \mu^{-1}A_3(t) & \mu^{-1}A_4(t) \end{pmatrix}, \quad c(t) = \big(c_1(t), c_2(t)\big). \tag{2}$$

Здесь μ — малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $z(t)' = \big(x'(t), y'(t)\big)$, $z_0' = (x_0', y_0')$, $'$ — символ транспонирования, $x(t)$ — вектор медленных переменных, $y(t)$ — вектор быстрых переменных, $v(t)$ — выходная функция системы, $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$ — непрерывные на T матричные функции соответствующих размеров, $c_j(t)$, $j = 1, 2$ — непрерывные на T функции, записанные как вектор-строки. $n = n_1 + n_2$,

Отождествим систему (1) с парой (A_μ, c), состоящей из матричных функций $A(t,\mu)$ и $c(t)$, а совокупность всех таких пар с непрерывными на T компонентами обозначим Σ_μ, $\mu \in (0, \mu^0]$.

Погрузим множество Σ_μ во множество $\widetilde{\Sigma}_\mu$ систем вида (1) с оператором вида (2), в котором матричные блоки A_i, $i = \overline{1,4}$, являются функциональными матрицами, элементы которых непрерывные по $t \in T$ степенные асимптотические по μ ряды: $\Sigma_\mu \in \widetilde{\Sigma}_\mu$.

Рассмотрим совокупность $\mathscr{G}_n(\mu)$ действительных непрерывно дифференцируемых на T невырожденных при каждом $t \in T$ $n \times n$-матриц $G(t,\mu)$ с элементами из кольца формальных степенных рядов по параметру μ, $\mu \in (0, \mu^0]$. Несложно убедиться, что $\mathscr{G}_n(\mu)$ является группой относительно операции умножения матричных функций.

Сопоставим каждой матричной функции $G(t,\mu) \in \mathscr{G}_n(\mu)$ оператор преобразования на множестве $\tilde{\Sigma}_\mu$. Действие группы $\mathscr{G}_n(\mu)$ на паре (A_μ, c) из множества систем $\tilde{\Sigma}_\mu$ определим следующим образом:

$$G * (A_\mu, c) = \big(G^{-1}A_\mu G - G^{-1}\dot{G}, \dot{c}\big), \quad G(t,\mu) \in \mathscr{G}_n(\mu).$$

Группа $\mathscr{G}_n(\mu)$ преобразований множества систем $\widetilde{\Sigma}_\mu$ порождает группу нестационарных преобразований переменных состояния: $z(t) = G(t,\mu)\zeta(t)$, $\zeta' = (\xi', \eta')'$, $\xi \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\eta \in \mathbb{R}^{n_2}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, проект № Ф22-050.

Пусть $P(t)$ $((m+1)\times(m+1))$ — нижнетреугольная матрица с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$ $(i,k=0,1,\ldots,m)$, $p_{kk}(t)\neq 0$ при $t\in T$, $k=0,1,\ldots,m$.

Определение. При фиксированном $\mu\in(0,\mu^0]$ *система* (A_μ,c) *имеет* P*-класс* m (записываем как $(A_\mu,c)\in\{P,m\}$), если всякая ее выходная функция $v(t,\mu,z_0)$, $t\in T$, имеет непрерывные квазипроизводные [1] относительно матрицы P до порядка m включительно.

Применяя к системе (1) результаты из [2], получаем

Утверждение 1. *Множество всех систем* $(A_\mu,c)\in\{P,m\}$, $\mu\in(0,\mu^0]$, *а также множество всех равномерно наблюдаемых систем* $(A_\mu,c)\in\{P,m\}$, $\mu\in(0,\mu^0]$, *инвариантно относительно действия группы* $\mathscr{G}_n(\mu)$.

В группе $\mathscr{G}_n(\mu)$ выделим подгруппу блочно-нижнетреугольных преобразований $\mathscr{G}^{n_2}(\mu)$ вида $G^{n_2}(t,\mu)=\begin{pmatrix}E_{n_1}&0\\-L(t,\mu)&E_{n_2}\end{pmatrix}$ и подгруппу блочно-верхнетреугольных преобразований $\mathscr{G}^{n_1}(\mu)$ вида $G^{n_1}(t,\mu)=\begin{pmatrix}E_{n_1}&\mu H(t,\mu)\\0&E_{n_2}\end{pmatrix}$.

Здесь $L(t,\mu)$ и $H(t,\mu)$ — матричные функции подходящих размеров, элементы которых непрерывно дифференцируемые на T функции аргумента t с коэффициентами из кольца формальных степенных рядов по параметру μ.

В силу групповых свойств для $G^{n_2}(\mu)\in\mathscr{G}^{n_2}(t,\mu)$ и $G^{n_1}(t,\mu)\in\mathscr{G}^{n_1}(\mu)$ справедливо $G^{n_2}(t,\mu)G^{n_1}(t,\mu)=K(t,\mu)\in\mathscr{G}_n(\mu)$, где

$$K(t,\mu)=\begin{pmatrix}E_{n_1}&\mu H(t,\mu)\\-L(t,\mu)&E_{n_2}-\mu L(t,\mu)H(t,\mu)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Используя результаты [3], можно доказать

Утверждение 2. *Если* $L(t,\mu)$ *и* $H(t,\mu)$ *непрерывно-дифференцируемы на* T, *то для всех достаточно малых* $\mu\in(0,\mu^0]$ *множество* $\mathscr{K}(t,\mu)$ *преобразований вида* (3) *принадлежит группе Ляпунова.*

Утверждение 3. *Для всех достаточно малых* $\mu\in(0,\mu^0]$ *в орбите относительно группы преобразований* $\mathscr{G}_n(\mu)$ *для любой системы* $(A_\mu,c)\in\Sigma_\mu$, *для которой верно* (i) $\Re\lambda(A_4(t))\leqslant-\alpha<0$ $(\forall\,t\in T)$; (ii) *матричные функции* $A_i(t)$, $i=\overline{1,4}$, *непрерывно дифференцируемы на* T, *есть блочно-диагональная система* $(A_{\xi\eta,\mu},c_{\xi\eta,\mu})\in\tilde{\Sigma}_\mu$ *с системной матрицей вида* $A_{\xi\eta,\mu}=\operatorname{diag}\left\{A_\xi(t,\mu),\mu^{-1}A_\eta(t,\mu)\right\}$, *где* $A_\xi(t,\mu)$, $A_\eta(t,\mu)$ *представимы в виде асимптотических рядов по параметру* μ. *При этом преобразование* $G(t,\mu)\in\mathscr{G}_n(\mu)$, *приводящее систему* (1) *к системе с блочно-диагональной матрицей, имеет вид* (3), *где* L, H *представимы в виде асимптотических рядов по параметру* μ.

Литература

1. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск.—1999.—Вып. 1 (16).—С. 3–105.
2. *Астровский А. И., Гайшун И. В.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений.—Минск: Беларус. наука, 2013.—213 с.
3. *Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design.—N. Y.: Acad. Press, 1999.—371 p.

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

И. Д. Цопанов (Россия, Владикавказ; СОГУ)

Рассматривается спектральная задача

$$-y''(x) + q(x)y(x) + \int_0^1 K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi = \mu\, y(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = y'(1), \tag{2}$$

где μ — спектральный параметр. Пусть T, Q, K — линейные операторы:

$$Ty = -y'', \quad Qy(x) = q(x)y(x), \quad Ky(x) = \int_0^1 K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi.$$

Оператор T с краевыми условиями (2) изучен в работе [2]. В частности, в [2] получено, что корневые векторы $\{\varphi_k\}$ оператора T образуют базис Рисса в $\mathfrak{H} = L_2(0,1)$, следовательно, спектральные проекторы $P_n = \sum_{k=1}^n (\bullet, \psi_k)\varphi_k$ сильно сходятся к единичному оператору E. Здесь $\{\psi_k\}$ — система корневых векторов T^* биортогональная $\{\varphi_k\}$.

Метод Галеркина — Петрова с системами координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ состоит в том, что приближение для собственных функций здесь ищется в виде $y_n = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)}\varphi_k$, где коэффициенты $c_k^{(n)}$ являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(n)}\big[\mu\delta_{kj} - ((T+Q+K)\varphi_k, \psi_j)\big] = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Обозначим определитель системы (2) через $\delta_n = \delta_n(\mu)$. Утверждается, что нули $\lambda_k^{(n)}$ этого определителя являются приближенными значениями собственных значений λ_k исходной задачи (1), т. е. выполнены соотношения

$$\lambda_k^{(n)} \to \lambda_k \ \text{ при } \ n \to \infty, \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Пусть $B = (Q - E + K)(T + E)^{-1}$, $A = (T + E)^{-1}$, $y = Au$, тогда (1) примет вид $(E + B - \mu\, A)u = 0$. Если $L(\mu) = -B + \mu\, A$, то $L(\mu)$ — ядерный оператор, и корректно определен характеристический определитель $\Delta(\mu)$:

$$\Delta(\mu) = \det(E - L(\mu)) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^\infty \big(1 - \lambda_k(L(\mu))\big),$$

где $\lambda_k(L)$ — собственные значения оператора L.

Если $L_n(\mu) = L(\mu)P_n$ и $\Delta_n(\mu) = \det(E - L_n(\mu))$, то $\Delta(\mu) = \lim_{n\to\infty}\Delta_n(\mu)$ равномерно по μ в любой ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$ (см.[1]).

Теорема 1. *$\mu_* \in \mathbb{C}$ является собственным значением задачи* (1)–(2) *тогда и только тогда, когда* $\Delta(\mu_*) = 0$.

Доказательство основано на предельном переходе при $\mu \to \mu_*$ в неравенстве

$$\left\|(E - L(\mu))^{-1}\Delta(\mu)\right\| \leqslant e^{1/2(1+\|L_(\mu)\|_2^2)-Tr(L_(\mu))},$$

являющегося следствием из неравенства Карлемана [4] для оператора $L(\mu)$.

Из изложенного и теоремы Гурвица (см. [3]) следует

Теорема 2. *В любой ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$ нули определителя $\Delta_n(\lambda)$ равномерно сходятся (их конечное число) к соответствующим нулям функции $\Delta(\lambda)$.*

Так как для определителя системы Галеркина — Петрова (3) выполняется равенство

$$\delta_n(\mu) = \det((E + T)P_n) \cdot \Delta_n(\mu),$$

то нули определителя системы (3) совпадают с нулями определителя $\Delta_n(\mu)$, для которых выполняются соотношения сходимости (4).

Литература

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1967.
2. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Диф. уравнения.— 1977.— Т. 13, № 2.—С. 294–304.
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1.—Изд. 2-е.—М.: Физматлит, 1967.
4. *Gil' M. I.* Operator Functions and Localization Spectra.—Springer, 2003.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

М. В. Шамолин (Россия, Москва; МГУ)

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений [1]. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [2–4]).

Примеры тензорных инвариантов — это, прежде всего, скалярные инварианты — первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (поиск которых, в основном, и проведен в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из m дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m-1$ независимых тензорных инвариантов.

Задача о движении $(n+1)$-мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее $(n+1)$-мерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к n-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [5]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n-мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n-мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.

В работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [2, 3, 5]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию раз-ного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, конечномерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение строится усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

Литература

1. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук.—2019.—Т. 74, № 1.—С. 117–148.
2. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле.—М.: ЛЕНАНД, 2019.—456 с.
3. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2. Закрепленные маятники разной размерности.—М.: ЛЕНАНД, 2021.—400 с.
4. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления.—2020.—Т. 495, № 1.—С. 84–90.
5. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления.—2021.—Т. 497, № 1.—С. 23–30.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Э. Л. Шишкина (Россия, Воронеж, ВГУ; Белгород, НИУ БелГУ)

Одной из самых популярных дробных производных является дробная производная Капуто вида

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_{0}^{x}\frac{f^{(n)}(y)\,dy}{(x-y)^{\alpha-n+1}}, \quad n=[\alpha]+1,\ x>0. \tag{1}$$

Особую популярность производная (1) получила в приложениях, где есть возможность поставить и решить задачу Коши вида

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+}f\right)(x) = \lambda f(x), \quad x>0,\ 0<\alpha\leqslant 1,\ \lambda\in\mathbb{R} \tag{2}$$

$$f(0+) = a. \tag{3}$$

Преобразование Лапласа дробной производной ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}$ при $0<\alpha\leqslant 1$ дает (см. [1, с. 98, формула 2.4.63])

$$\mathscr{L}\left[{}^{C}D^{\alpha}_{0+}f(x)\right](s) = s^{\alpha}\mathscr{L}[f](s) - s^{\alpha-1}f(0+). \tag{4}$$

Поэтому, применение преобразования Лапласа к равенству (2) приводит к

$$\mathscr{L}[f](s) = a\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-\lambda}.$$

В силу формулы (см. [1, с. 47, формула 1.9.13]) вида

$$\mathscr{L}\left[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{\alpha})\right](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}, \tag{5}$$

где $\mathrm{Re}>0$, $\beta>0$, $\lambda\in\mathbb{C}$, а двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}$ определяется рядом:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}, \quad z\in\mathbb{C},\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,\alpha>0,\ \mathrm{Re}\,\beta>0, \tag{6}$$

получим, что решение (2)–(3) имеет вид (см. [1])

$$f(x) = aE_{\alpha,1}(\lambda x^{\alpha}). \tag{7}$$

Решение (7) ограничено и, следовательно, задачу Коши (2)–(3) можно рассматривать как классическую. Поставим задачу вида

$$({}^{C}D^{\alpha}_{0+})_x u(x,y) = ({}^{C}D^{\alpha}_{0+})_y u(x,y), \tag{8}$$

$$u(x,0) = f(x). \tag{9}$$

Применяя преобразование Лапласа по y, получим

$$({}^{C}D^{\alpha}_{0+})_x \mathscr{L}_y[u(x,y)](t) = t^{\alpha}\mathscr{L}_x[u(x,y)](t) - t^{\alpha-1}f(x).$$

Пусть $\mathscr{L}_y[u(x,y)](t) = F(x,t)$, тогда

$$F(x,t) = \widehat{f}(t)\mathscr{L}_s^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-t^{\alpha}}\right](x) - t^{\alpha-1}\mathscr{L}_s^{-1}\left[\widehat{f}(s)\mathscr{L}[x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}x^{\alpha})](s)\right](x) =$$

$$= \widehat{f}(t)E_{\alpha,1}(t^{\alpha}x^{\alpha}) - t^{\alpha-1}(f(x) *_x x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}x^{\alpha})).$$

Обратное преобразование Лапласа от функции Миттаг-Леффлера имеет вид

$$\mathscr{L}_t^{-1}\left[t^{-\rho}E_{\alpha,\beta}\left(at^{\sigma}\right)\right](y) = y^{\rho-1}H^{1,1}_{2,2}\left[-ay^{-\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(0,1),(\rho,\sigma)\\(0,1),(1-\beta,\alpha)\end{matrix}\right],$$

где $H^{n,m}_{p,q}$ — H–функция Фокса. Следовательно,

$$u(x,y) = \left(f(y) *_y \frac{1}{y}H^{1,1}_{2,2}\left[-\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}\,\middle|\,\begin{matrix}(0,1),(0,\alpha)\\(0,1),(0,\alpha)\end{matrix}\right]\right) -$$

$$- \left(f(x) *_x \frac{x^{\alpha-1}}{y^{\alpha}}H^{1,1}_{2,2}\left[-\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}\,\middle|\,\begin{matrix}(0,1),(1-\alpha,\alpha)\\(0,1),(1-\alpha,\alpha)\end{matrix}\right]\right).$$

Пусть

$$\mathbb{H}_{1,\alpha}(x,y) = H^{1,1}_{2,2}\left[-\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}\,\middle|\,\begin{matrix}(0,1),(0,\alpha)\\(0,1),(0,\alpha)\end{matrix}\right], \tag{10}$$

$$\mathbb{H}_{2,\alpha}(x,y) = H^{1,1}_{2,2}\left[-\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}\,\middle|\,\begin{matrix}(0,1),(1-\alpha,\alpha)\\(0,1),(1-\alpha,\alpha)\end{matrix}\right], \tag{11}$$

тогда решение можно записать в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^y f(t)\mathbb{H}_{1,\alpha}(x,t)\frac{dt}{t} - \frac{1}{y^{\alpha}}\int\limits_0^x f(t)\mathbb{H}_{2,\alpha}(t,y)t^{\alpha-1}\,dt.$$

Литература

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equation.—Amsterdam, 2006.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

КЛАССИФИКАЦИЯ НМС-ПОТОКОВ С ЕДИНСТВЕННОЙ СКРУЧЕННОЙ СЕДЛОВОЙ ОРБИТОЙ НА ОРИЕНТИРУЕМЫХ 4-МНОГООБРАЗИЯХ[1]

Д. Д. Шубин (Россия, Нижний Новгород; НИУ ВШЭ)

В докладе речь пойдет про так называемые *НМС-потоки* f^t, т. е. *неособые* (без неподвижных точек) потоки Морса — Смейла, заданные на замкнутых ориентируемых 4-многообразиях M^4. Рассмотрим класс $G_3^-(M^4)$ НМС-потоков $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой, в предположении, что она является скрученной. Поскольку несущее многообразие M^4 является объединением устойчивых (неустойчивых) многообразий всех своих периодических орбит, то поток $f^t \in G_3^-(M^4)$ необходимо имеет хотя бы одну притягивающую и хотя бы одну отталкивающую орбиты.

Лемма 1. *Неблуждающее множество любого потока $f^t \in G_3^-(M^4)$ состоит в точности из трех периодических орбит S, A, R, седловой, притягивающей и отталкивающей, соответственно.*

Для седловой орбиты S потока $f^t \in G_3^-(M^4)$ возможны два варианта: 1) $\dim W_S^u = 3$; 2) $\dim W_S^u = 2$. Обозначим через $G_3^{-1}(M^4)$, $G_3^{-2}(M^4)$ классы потоков типа 1), 2), соответственно. Очевидно, что в силу различия в размерностях неустойчивых седловых многообразий, никакой поток множества $G_3^{-1}(M^4)$ не эквивалентен никакому потоку множества $G_3^{-2}(M^4)$. Кроме того, $G_3^{-2}(M^4) = \{f^{-t}\colon f^t \in G_3^{-1}(M^4)\}$ и потоки f^t, f'^t эквивалентны тогда и только тогда, когда f^{-t}, f'^{-t}. Непосредственно отсюда следует, что решение проблемы классификации в множестве $G_3^-(M^4)$ сводится к решению этой проблемы в классе $G_3^{-1}(M^4)$.

Далее не уменьшая общности будем полагать, что трубчатые окрестности V_S, V_A, V_R попарно не пересекаются. Пусть $\mathscr{O} \in \{S, A, R\}$. Выберем на границе $T_{\mathscr{O}} = \partial V_{\mathscr{O}} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ образующую $\mathscr{G}_{\mathscr{O}}$ фундаментальной группы многообразия $T_{\mathscr{O}}$, гомологичную в $V_{\mathscr{O}} \cong \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^1$ орбите $\mathscr{O}$. По построению многообразие T_S является секущей для всех траекторий потока, кроме периодических. Из эквивалентности потока надстройке в окрестностях периодических орбит следует, что множество $K_S = W_S^u \cap T_S$ гомеоморфно бутылке Клейна. Пусть λ_S, μ_S — узлы, являющиеся образующими фундаментальной группы $\pi_1(K_S)$ с соотношением $[\lambda_S * \mu_S] = [\mu_S^{-1} * \lambda_S]$. Кривая μ_S называется *меридианом*, а кривая λ_S называется *параллелью*. Параллель бутылки Клейна, вложенной в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ является образующей фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$. Ориентируем параллель λ_S так, что ее гомотопический тип $\langle\lambda_S\rangle$ на T_S совпадает с типом $\langle\mathscr{G}_S\rangle$. Тогда множество $K_A = W_S^u \cap T_A$ является бутылкой Клейна с параллелью λ_A, поточечно перенесенной по траекториям потока f^t из λ_S.

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-1101.

Из эквивалентности потока надстройке в окрестностях периодических орбит следует, что множество $\gamma_S = W_S^s \cap T_S$ является узлом на T_S, дважды оборачивающимся вокруг $\mathscr{G}_S$. Будем полагать узел γ_S ориентированным так, что его гомотопический тип $\langle\gamma_S\rangle$ на T_S совпадает с типом $2\langle\mathscr{G}_S\rangle$. Тогда множество $\gamma_R = W_S^s \cap T_R$ является узлом на многообразии T_R, ориентированным поточечным перенесением узла γ_S по траекториям потока f^t.

Лемма 2. *Для любого потока $f^t \in G_3^{-1}(M^4)$ имеют место следующие соотношения:*

1. $\langle\lambda_A\rangle = \delta_A\langle\mathscr{G}_A\rangle$, $\delta_A \in \{-1,+1\}$ *на* T_A;
2. $\langle\gamma_R\rangle = \delta_R\langle\mathscr{G}_R\rangle$, $\delta_R \in \{-1,+1\}$ *на* T_R.

Положим

$$C_{f^t} = (\delta_A, \delta_R).$$

Теорема 1. *Потоки f^t,$f'^t \in G_3^{-1}(M^4)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $C_{f^t} = C_{f'^t}$.*

Теорема 2. *Для любого элемента $C \in \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^0$ существует поток $f^t \in G_3^{-1}(M^4)$ такой, что $C = C_{f^t}$.*

Теорема 2. *Единственным 4-многообразием, допускающим потоки класса $G_3^-(M^4)$, является многообразие $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1$. При этом множество $G_3^-(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1)$ состоит в точности из восьми классов эквивалентности рассматриваемых потоков.*

Заметим, что ослабление условия скрученности седловой орбиты принципиально меняет картину.

Литература

1. *Asimov D.* Round handles and non-singular morse-smale flows // Annal. Math.—1975.—Vol. 102.—P. 41–54.
2. *Pochinka O. V., Shubin D. D.* Non-singular morse–smale flows on n-manifolds with attractor–repeller dynamics // Nonlinearity.—2022.—Vol. 35, № 3.—P. 1485.
3. *Campos B., Cordero A., Martinez Alfaro J., Vindel P.* NMS Flows on Three-DimensionalManifolds with One Saddle Periodic Orbit // Acta Math. Sinica–Engl. Ser.—2004.—Vol. 20.—P. 47–56.
4. *Шубин Д. Д.* Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами // Изв. высш. учебн. заведений. Прикл. нелинейная динамика.—2021.—Т. 29, № 6.—С. 863–868.
5. *Pochinka O., Shubin D.* Nonsingular morse–smale flows with three periodic orbits on orientable 3-manifolds // Matematicheskie Zametki.—2022.—Vol. 112, № 3.—P. 426–443.
6. *Olga Pochinka and Danila Shubin* Topology of Ambient 3-Manifolds of Non-Singular Flows with Twisted Saddle Orbit.—2022.—arXiv preprint arXiv:2212.13224.
7. *Umanskii Ya. L.* Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional morse–smale dynamical systems with a finite number of singular trajectories // Matematicheskii Sbornik.—1990.—Vol. 181, № 2.—P. 212–239.

Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII Международной научной конференции (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЛОСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДОВ[1]

О. В. Явруян (Россия, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН; Ростов-на-Дону, ЮФУ)

Слоистые структуры с неоднородными свойствами используются при моделировании многих процессов и явлений, а также являются важной составляющей многих конструкций. Математические модели неоднородных протяженных структур используются при решении актуальных задач биомеханики, горной механики, сейсморазведки, строительства, механики функционально-градиентных и новых композиционных материалов.

Одной из первостепенных задач механики при использовании неоднородных слоистых структур является точное определение механических свойств исследуемых объектов по данным акустического зондирования, что позволит моделировать поведение сложных механических сред с существенно неоднородными свойствами. Приоритетным направлением фундаментальных исследований является создание эффективных схем математической обработки данных, определение наиболее эффективных схем нагружения и съема данных, предоставление практических рекомендаций для проведения экспериментов неразрушающего контроля.

Основное внимание настоящего исследование уделено задаче восстановления неоднородных свойств плоских неоднородных анизотропных волноводов. Современное состояние исследуемой тематики можно условно разделить на два направления. К первому направлению относятся коэффициентные обратные задачи, связанные с восстановлением кусочно-однородных свойств, например, для слоистых композитов. В этом случае, механические свойства объекта исследования определяются конечным набором физических постоянных, процедура восстановления свойств сводится к решению оптимизационных задач для функционала невязки с использованием стохастических или эвристических алгоритмов. Ко второму направлению относятся задачи восстановления функций, с помощью которых моделируются неоднородные свойства плоских волноводов, например, для функционально-градиентных слоев. Второе направление представляет собой более сложные задачи и их исследование, как правило, сводится к итерационным схемам с привлечением численных методов решения краевых задач с переменными коэффициентами.

Также можно провести условное разделение обратных коэффициентных задач по типу входной информации. Возможны постановки, в которых в качестве

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00265.

дополнительной информации заданы внутренние механические поля, измеренные в дискретном наборе точек, либо постановки, в которых заданы поля на поверхности. Каждая из возможных постановок имеет свои особенности исследования, при этом выбор варианта нагружения и съема данных определяется поставленной задачей и практической возможностью проведения того или иного эксперимента. Отметим, что задачи идентификации, направленные на восстановление анизотропных свойств исследованы значительно меньше, нежели задачи восстановления изотропных свойств.

В рамках данного исследования решена обратная коэффициентная задача о восстановлении свойств анизотропного плоского волновода. Разработанная схема, которая применялась ранее для идентификации изотропных свойств [1], была развита и на случай анизотропной полосы, в частности, трансверсально-изотропной и ортотропной [2].

В основе предлагаемого подхода лежит возможность получения дополнительной информации (механических полей смещений) на всей верхней границе полосы в режиме установившихся колебаний. При наличии такой дополнительной информации становится возможным применение интегрального преобразования Фурье и переход от исходной двумерной задачи к ряду аналогичных одномерных задач, в которых неизвестные функции и соответствующие трансформанты полей смещений (или интегральные характеристики) разделены. Построены итерационные схемы для восстановления неизвестных функций [3]. На каждом шаге итерационного процесса решаются интегральные уравнения Фредгольма 1-го и 2-го родов относительно поправок к начальным приближениям восстанавливаемых функций.

В результате применения описанной схемы восстановлены три функции, характеризующие неоднородные свойства трансверсально-изотропной полосы в частном случае. Две из них восстанавливаются из соответствующих итерационных процессов, а третья функция, с учетом ранее найденных двух, из решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.

Погрешность реконструкции функций из итерационных процессов составляет не более 3–5 процентов, что свидетельствует об эффективности предлагаемого подхода.

Литература

1. *Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В.* Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акустический журнал.—2011.—Т. 57, № 6.—С. 723–730.
2. *Vatulyan A. O., Bogachev I. V., Yavruyan O. V.* Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // International Journal of Solids and Structures.—2014.—Vol. 51, № 11.—P. 2238–2243.
3. *Ватульян А. О.* Коэффициентные обратные задачи механики.—М: ФИЗМАТЛИТ, 2019.—271 с.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

DonNTU — Donetsk National Technical University
DonSU — Donetsk State University
IM AS RUz — V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
IM SB RAS — Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
INP AS RUz — Institute of Nuclear Physics of Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan
KarSU — Karakalpak State University Named after Berdakh
MSU — Lomonosov Moscow State University
NamSU — Namangan State University
NCCMR VSC RAS — North-Caucasus Center for Mathematical Research of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences
Samarkand Branch TUIT — Samarkand Branch of the Tashkent University of Information Technologies
SamSU — Samarkand State University
SFedU — Southern Federal University
SMI VSC RAS — Southern Mathematical Institute — the Affiliate of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences
Vernadsky CFU — V. I. Vernadsky Crimean Federal University
АН ЧР — Академия наук Чеченской Республики
АГУ — Адыгейский государственный университет
АлтГУ — Алтайский государственный университет
БГУ — Белорусский государственный университет
БГУ им. И. Г. Петровского — Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского
БГЭУ — Белорусский государственный экономический университет
Бухарский филиал ИМ АН РУз — Бухарский филиал Института математики имени В. И. Романовского академии наук Республики Узбекистан
БухГУ — Бухарский государственный университет
БФУ — Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта
ВГУ — Воронежский государственный университет
ВГУИТ — Воронежский государственный университет инженерных технологий
ВИУ — Владикавказский институт управления
ВНУ — Вьетнамский национальный университет
Владикавказский филиал ФУ — Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации

ВлГУ — Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

ВМК МГУ — Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

ВНЦ РАН — Владикавказский научный центр Российской академии наук

ГГАУ — Горский государственный аграрный университет

ГрГУ им. Янки Купалы — Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ГФИ ВНЦ РАН — Геофизический институт — филиал Владикавказского научного центра Российской академии наук

ДФИЦ РАН — Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук

ЕИ КФУ — Елабужский институт (филиал) Казанского федерального университета

ИВП РАН — Институт водных проблем Российской академии наук

ИМ АН РУз — Институт математики имени В. И. Романовского академии наук Республики Узбекистан

ИМ СО РАН — Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

ИМВЦ УФИЦ РАН — Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

ИММиКН ЮФУ — Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича Южного федерального университета

ИПМА КБНЦ РАН — Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук

ИПУ РАН — Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова Российской академии наук

КрымФУ — Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

КубГУ — Кубанский государственный университет

МБОУ СОШ № 27 — Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя образовательная школа № 27 имени Ю. С. Кучиева»

МБОУ СОШ № 30 — Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя образовательная школа № 30»

МГТУ им. Н. Э. Баумана — Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

МГУ — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

МГУ г. Душанбе — Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе

МФТИ —Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

МПГУ — Московский педагогический государственный университет

НИУ БелГУ — Белгородский государственный национальный исследовательский университет

НИУ ВШЭ — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
НИУ «МЭИ» — Национальный исследовательский университет «МЭИ»
НовГУ —Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
НОМЦ СОГУ — Научно-образовательный математический центр Северо-Осетинского государственного университета имени К. Л. Хетагурова
ОГУ им. И. С. Тургенева — Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева
ОмГУ им. Ф. М. Достоевского — Омский государственный университет имени Ф. М. Достоевского
ПГУ — Полоцкий государственный университет
ПНИПУ — Пермский национальный исследовательский политехнический университет
ПСТГУ — Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет
РГУНиГ — Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И. М. Губкина
САФУ — Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова
СГУ им. Н. Г. Чернышевского — Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
СКСВУ — Северо-Кавказское Суворовское военное училище
СКЦМИ ВНЦ РАН — Северо-Кавказский центр математических исследований Владикавказского научного центра Российской академии наук
СОГУ — Северо-Осетинский государственного университета имени К. Л. Хетагурова
СОШ № 2 ст. Ассиновская — Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя общеобразовательная школа № 2 ст. Ассиновская» Серноводского муниципального района
СОШ № 3 с. Серноводское —Муниципальное бюджетное образовательное учреждение «Средняя общеобразовательная школа № 3 с. Серноводское» Серноводского муниципального района
СПбГУ — Санкт-Петербургский государственный университет
СПб ФИЦ РАН — Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук
ТГПУ им. С. Айни — Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни
ТГТУ — Ташкентский государственный транспортный университет
ТашГТУ — Ташкентский государственный технический университет
УзФинПИ — Узбекско-Финский педагогический институт
ФИЦ ИУ РАН — Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
ФИЦ СНЦ РАН — Федеральный исследовательский центр «Субтропический научный центр Российской академии наук»
ЧГПУ — Чеченский государственный педагогический университет

ЧГУ — Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова
ЮЗГУ — Юго-Западный государственный университет
ЮМИ ВНЦ РАН — Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра Российской академии наук
ЮРГПУ (НПИ) — Южно-Российский государственный политехнический университет имени М. И. Платова (Новочеркасский политехнический институт)
ЮФУ — Южный федеральный университет

Научное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ. Т. 15

ПОРЯДКОВЫЙ АНАЛИЗ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

Тезисы докладов
XVII Международной научной конференции
(РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2023 г.)

Редакторы серии:
Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

Редакторы тома:
В. С. Абатурова, Р. Ч. Кулаев,
Ю. Г. Никоноров

Компьютерная верстка: *М. У. Вазагаева*
Зав. редакцией: *В. В. Кибизова*

ЮМИ ВНЦ РАН
362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53.

ISBN 978-5-904695-47-7