



КРЫМСКИЙ  
ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ФЕВЗИ ЯКУБОВА



# Математическое и компьютерное моделирование устройств сбора энергии с помощью пьезоактивных материалов

---

А.Н. Соловьев<sup>1,2</sup>, Чебаненко В.А.<sup>2,3</sup>, До Б.Т.<sup>4</sup>, Ле Ван З.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, Симферополь, Россия

<sup>2</sup> Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону.

<sup>3</sup> Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

<sup>4</sup> Технический университет им. Ле Куй Дона, Ханой, Вьетнам.

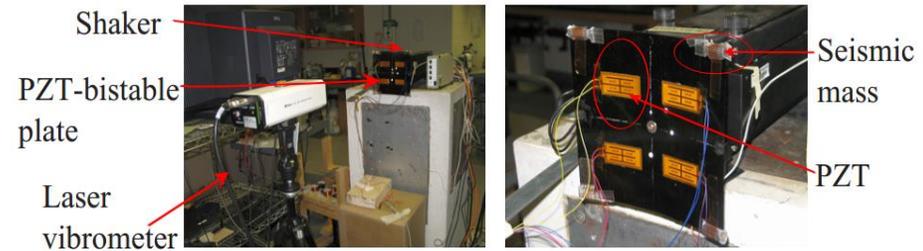
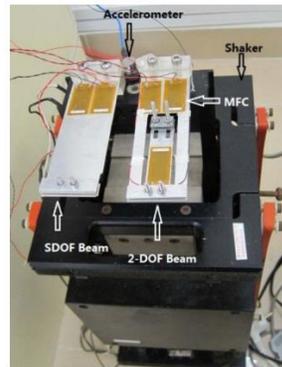
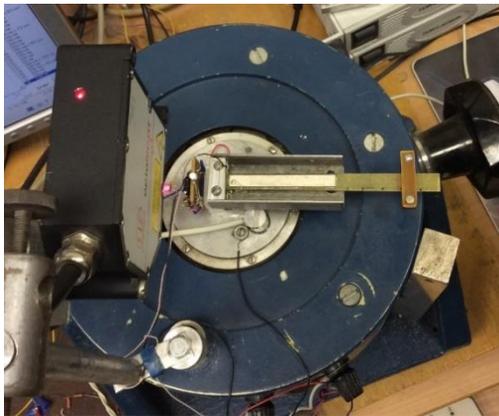
# Основные разделы доклада

- Пьезоэлектрические устройства накопления энергии
- Математическое моделирование и оптимизация консольного ПЭГ.
- КЭ оптимизация консольного ПЭГ.
- Математическое моделирование и оптимизация консольного осевого (стекового) ПЭГ
- Прикладная теория для ФГ биморфа из пористой керамики
- Идентификация свойств ФГ биморфа из пористой керамики
- КЭ моделирование биморфов с пьезоэлектрическим и пьезомагнитным слоем
- Прикладная теория и КЭ модель для электромагнитоупругого бимофра
- Прикладная теория и КЭ модель для электромагнитоупругого бимофра с учетом демпфирования

# Пьезоэлектрические устройства накопления энергии

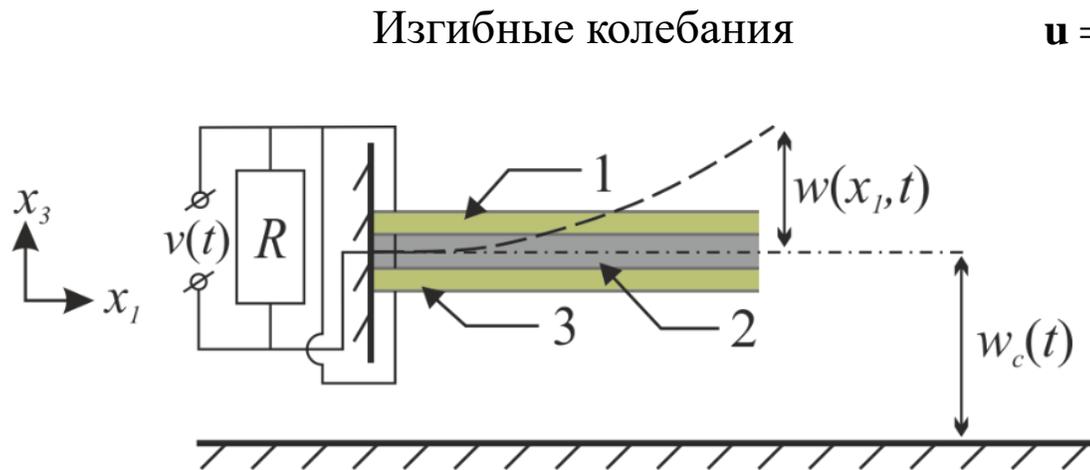


## Пьезоэлектрические генераторы



# Математическое моделирование консольного ПЭГ.

## Линейная теория электроупругости



$v(t)$  - эл. напряжение

$R$  - сопротивление нагрузки

Вектор перемещения

$$\mathbf{u} = \left\{ -x_3 \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial x_1}, 0, w(x_1, t) + w_c(t) \right\}^T$$

Деформация

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} = -x_3 \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial x_1^2}$$

Электрическое поле:

$$E_3 = -\varphi_{,3}$$

Электрический потенциал

$$\varphi_{,3} = \frac{v(t)}{h_p}$$

$h_p$  - высота одного слоя

# Вариационный принцип

Расширенный принцип Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) dt = 0$$

$$\Pi = \iiint_V (H - X_i u_i) dV - \iint_S (p_i u_i + \sigma \varphi) dS$$

$X_i$  - объемные силы     $p_i$  - внешние силы     $\sigma$  - плотность поверхностного заряда

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V (\delta K - \delta H) dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \iiint_V X_i \delta u_i dV + \iint_S (p_i \delta u_i + \sigma \delta \varphi) dS \right] = 0$$

Вариация электрической энтальпии

$$\delta H = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i$$

$\sigma_{ij}$  - мех. напряжение     $D_i$  - электрическое смещение

$\varepsilon_{ij}$  - деформация     $E_i$  - электрическое поле

# Математическое моделирование консольного ПЭГ.

Определяющие уравнения

$$\sigma_{11} = c_{11}^{E*} \varepsilon_{11} - e_{31}^* E_3$$

$$D_3 = e_{31}^* \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}^{S*} E_3$$

$$c_{11}^{E*} = \frac{1}{s_{11}^E}, \quad e_{31}^* = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}, \quad \varepsilon_{33}^{S*} = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}$$

$c_{11}^{E*}$  - модуль упругости  $e_{31}^*$  - пьезоэлектрический модуль  $\varepsilon_{33}^{S*}$  - отн. диэлектрическая проницаемость

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \iiint_V \left[ \left( -c_{11}^{E*} x_3^2 \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial x_1^2} + e_{31}^* x_3 \frac{v(t)}{h_p} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right) + \left( \frac{e_{31}^* x_3}{h_p} \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{33}^{S*} \frac{v(t)}{h_p^2} \right) \delta(v(t)) - \rho (\ddot{w}(x_1, t) - \ddot{w}_c(t)) \delta w(x_1, t) \right] dV + \iint_S \frac{\sigma x_3}{h_p} \delta v(t) dS \right\} = 0$$

# Система дифференциальных уравнений

Метод Канторовича

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^N \eta_i(t) \phi_i(x_1)$$

$\eta_i(t)$  - неизвестная обобщенная координата

$\phi_i(x_1)$  - пробная функция

Система уравнений

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{\Theta}v(t) = \mathbf{p}$$

$$C_p \dot{v}(t) + \boldsymbol{\Theta}^T \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \frac{v(t)}{R} = 0$$

**M** - матрица масс

**K** - матрица жесткости

**D** - матрица демпфирования

**Θ** - вектор связи

$C_p$  - эффективная емкость

Коэффициенты

$$C_p = \frac{b_p L_p}{h_p} \varepsilon_{33}^{S*}$$

$$M_{ij} = \int_0^L m \phi_i(x_1) \phi_j(x_1) dx_1$$

$$K_{ij} = \int_0^L EI \phi_i''(x_1) \phi_j''(x_1) dx_1$$

$$p_i = -\ddot{w}_c(t) \left[ \int_0^L m \phi_i(x_1) dx_1 \right]$$

$$\theta_i = \int_0^L J_p \phi_i''(x_1) dx_1$$

# Система дифференциальных уравнений

Гармоническое возбуждение

$$w_c(t) = \tilde{w}_c e^{i\omega t}$$

$$\eta(t) = \tilde{\eta} e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} e^{i\omega t}$$

$$v(t) = \tilde{v} e^{i\omega t}$$

Решение

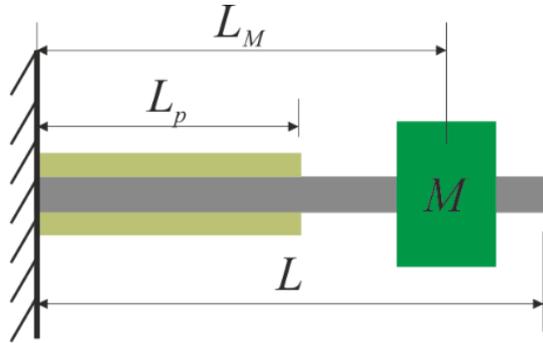
$$\tilde{\eta} = \left[ -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega(\mu \mathbf{M} + \gamma \mathbf{K}) + \mathbf{K} + \frac{i\omega \mathbf{\Theta} \mathbf{\Theta}^T}{i\omega C_p + \frac{1}{R}} \right]^{-1} \tilde{\mathbf{p}}$$

$$\tilde{v} = -\frac{i\omega \mathbf{\Theta}^T}{i\omega C_p + \frac{1}{R}} \left[ -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega(\mu \mathbf{M} + \gamma \mathbf{K}) + \mathbf{K} + \frac{i\omega \mathbf{\Theta} \mathbf{\Theta}^T}{i\omega C_p + \frac{1}{R}} \right]^{-1} \tilde{\mathbf{p}}$$

# Материальные константы и геометрические данные

	Подложка	Пьезоэлемент
Геометрические размеры ( $L_0 \times b \times h$ )	110×10×1mm <sup>3</sup>	56×6×0.5mm <sup>3</sup>
Плотность ( $\rho$ )	1650 kg/m <sup>3</sup>	8000 kg/m <sup>3</sup>
Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. ( $E, \nu$ )	15 GPa and 0.12	—
Упругая податливость ( $s_{11}^E$ )	—	17.5×10 <sup>-12</sup> Pa
Отн. диэлектрическая проницаемость ( $\epsilon_{33}^S / \epsilon_0$ )	—	5000
Пьезоэлектрический модуль ( $d_{31}$ )	—	-350 pC/N

# Численный эксперимент



$$\phi_i(x_1) = \begin{cases} \phi_i^{(1)}(x_1), & x_1 \leq L_p \\ \phi_i^{(2)}(x_1), & L_p < x_1 \leq L_M \\ \phi_i^{(3)}(x_1), & x_1 > L_M \end{cases}$$

$$m(x_1) = \rho_s A_s + 2\rho_p A_p G(x_1)$$

$$G(x_1) = 1 - H(x_1 - L_p)$$

$$EI(x_1) = c_p \left[ \iint_{S_{pl}} x_3^2 dS + \iint_{S_{pu}} x_3^2 dS \right] G(x_1) + c_{II} \iint_{S_s} x_3^2 dS$$

$$J_p(x_1) = \frac{e_{31}^*}{h_p} \left( \iint_{S_{pu}} x_3 dS + \iint_{S_{pl}} x_3 dS \right) G(x_1)$$

$$\phi_i^{(1)}(x_1) = a_{1,i} \sin(\beta_i x_1) + a_{2,i} \cos(\beta_i x_1) + a_{3,i} \sinh(\beta_i x_1) + a_{4,i} \cosh(\beta_i x_1)$$

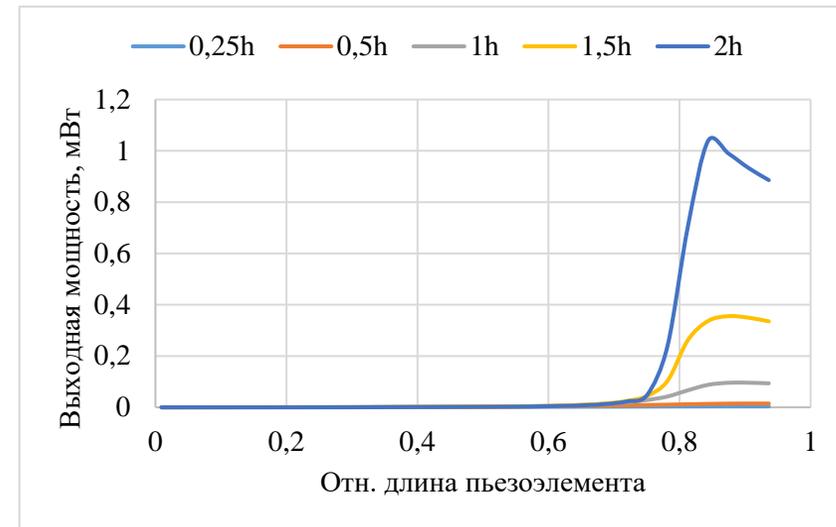
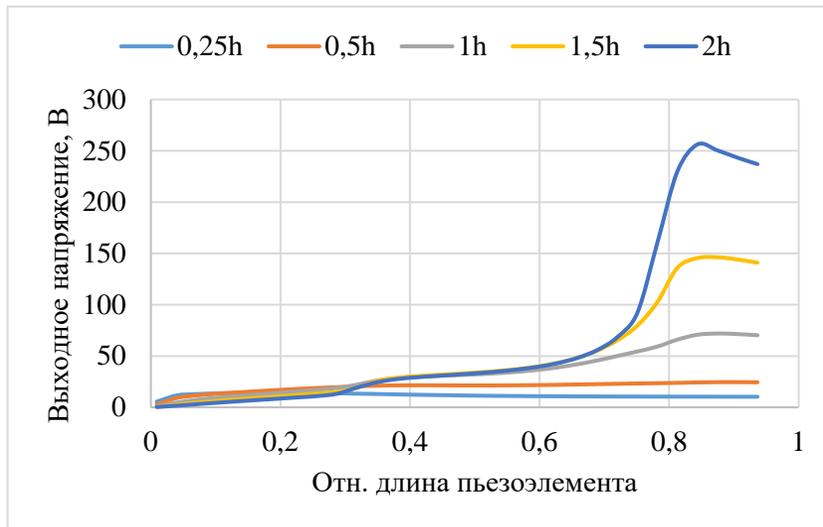
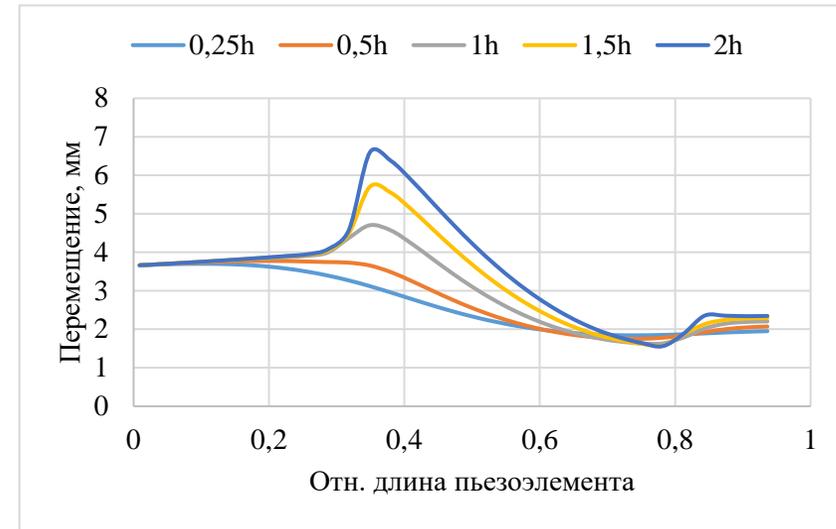
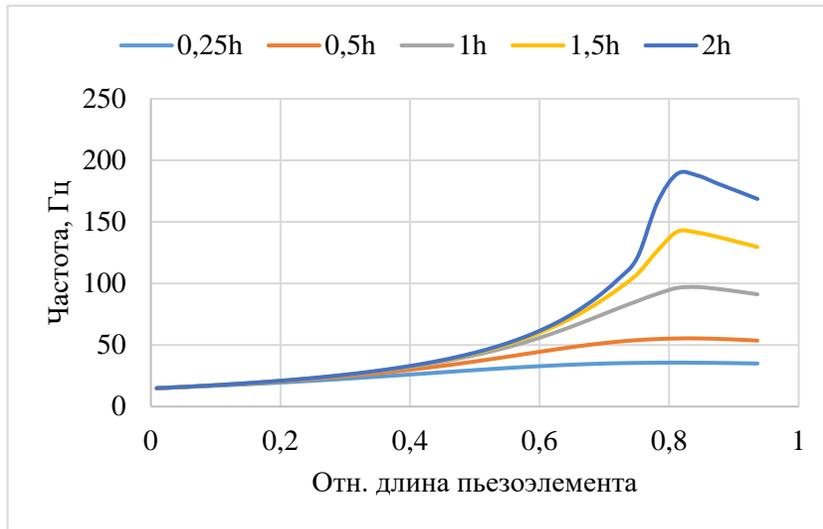
$$\phi_i^{(2)}(x_1) = a_{5,i} \sin(\beta_i x_1) + a_{6,i} \cos(\beta_i x_1) + a_{7,i} \sinh(\beta_i x_1) + a_{8,i} \cosh(\beta_i x_1)$$

$$\phi_i^{(3)}(x_1) = a_{9,i} \sin(\beta_i x_1) + a_{10,i} \cos(\beta_i x_1) + a_{11,i} \sinh(\beta_i x_1) + a_{12,i} \cosh(\beta_i x_1)$$

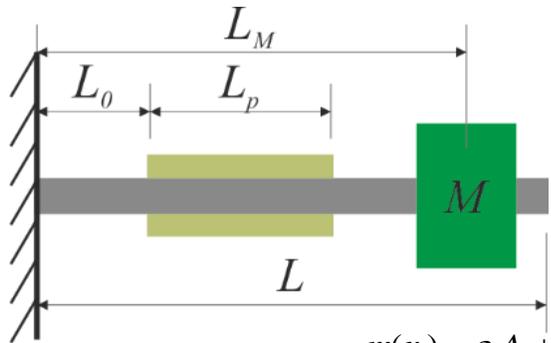
## Граничные условия и условия связи

$$\begin{aligned} \phi_i^{(1)}(0) &= 0 & \phi_i^{(1)'}(0) &= 0 & \phi_i^{(1)}(L_0) &= \phi_i^{(2)}(L_0) & \phi_i^{(1)'}(L_0) &= \phi_i^{(2)'}(L_0) & \phi_i^{(2)}(L_M) &= \phi_i^{(3)}(L_M) & \phi_i^{(2)'}(L_M) &= \phi_i^{(3)'}(L_M) & \phi_i^{(2)''}(L) &= 0 & \phi_i^{(2)'''}(L) &= 0 \\ \phi_i^{(1)''}(L_0) &= \frac{EI^{(2)}}{EI^{(1)}} \phi_i^{(2)''}(L_0) & \phi_i^{(1)'''}(L_0) &= \frac{EI^{(2)}}{EI^{(1)}} \phi_i^{(2)'''}(L_0) & \phi_i^{(2)''}(L_M) &= \phi_i^{(3)''}(L_M) & \phi_i^{(2)'''}(L_M) &= \phi_i^{(3)'''}(L_M) - \alpha \beta^4 \phi_i^{(2)}(L_M) & \alpha &= \frac{M}{mL} & \Lambda &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{12,1} & \dots & a_{12,12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Численный эксперимент



# Численный эксперимент



$$m(x_1) = \rho_s A_s + 2\rho_p A_p G(x_1)$$

$$G(x_1) = H(x_1 - L_0) - H(x_1 - L_0 - L_p)$$

$$\phi_i(x_1) = \begin{cases} \phi_i^{(1)}(x_1), & x_1 \leq L_0 \\ \phi_i^{(2)}(x_1), & L_0 < x_1 \leq L_p + L_0 \\ \phi_i^{(3)}(x_1), & L_p + L_0 < x_1 \leq L_M \\ \phi_i^{(4)}(x_1), & x_1 > L_M \end{cases}$$

$$EI(x_1) = c_p \left[ \iint_{S_{pl}} x_3^2 dS + \iint_{S_{pu}} x_3^2 dS \right] G(x_1) + c_{II} \iint_{S_s} x_3^2 dS$$

$$J_p(x_1) = \frac{e_{31}^*}{h_p} \left( \iint_{S_{pu}} x_3 dS + \iint_{S_{pl}} x_3 dS \right) G(x_1)$$

$$\phi_i^{(1)}(x_1) = a_{1,i} \sin(\beta_i x_1) + a_{2,i} \cos(\beta_i x_1) + a_{3,i} \sinh(\beta_i x_1) + a_{4,i} \cosh(\beta_i x_1)$$

$$\phi_i^{(2)}(x_1) = a_{5,i} \sin(\beta_i x_1) + a_{6,i} \cos(\beta_i x_1) + a_{7,i} \sinh(\beta_i x_1) + a_{8,i} \cosh(\beta_i x_1)$$

$$\phi_i^{(3)}(x_1) = a_{9,i} \sin(\beta_i x_1) + a_{10,i} \cos(\beta_i x_1) + a_{11,i} \sinh(\beta_i x_1) + a_{12,i} \cosh(\beta_i x_1)$$

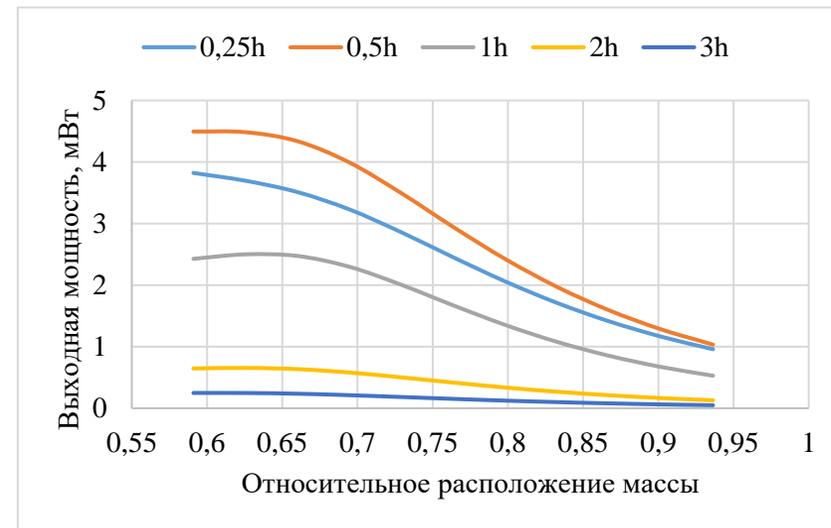
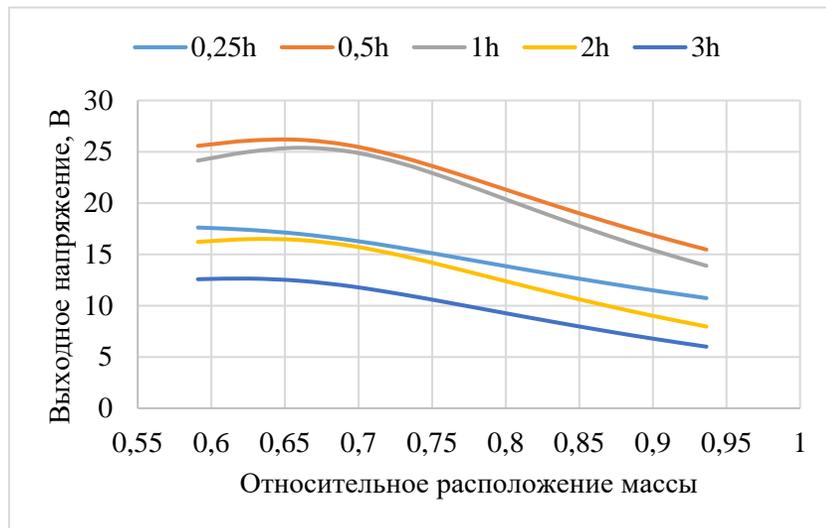
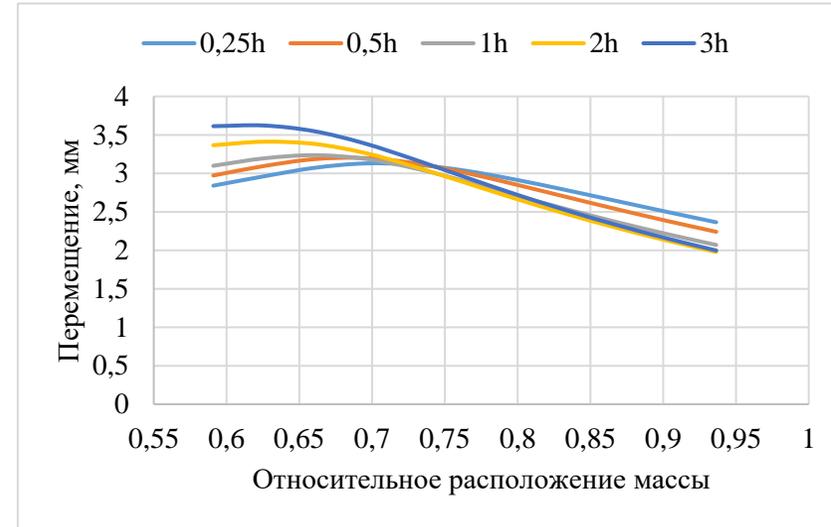
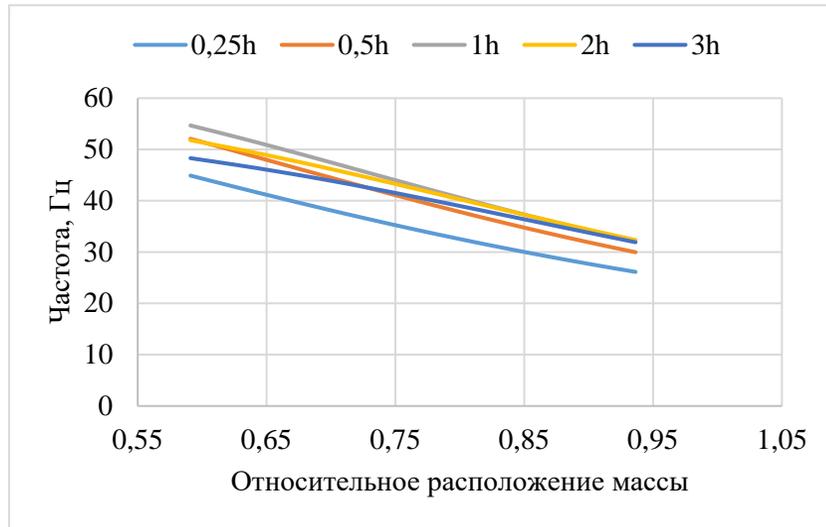
$$\phi_i^{(4)}(x_1) = a_{13,i} \sin(\beta_i x_1) + a_{14,i} \cos(\beta_i x_1) + a_{15,i} \sinh(\beta_i x_1) + a_{16,i} \cosh(\beta_i x_1)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{16,1} & \cdots & a_{16,16} \end{pmatrix}$$

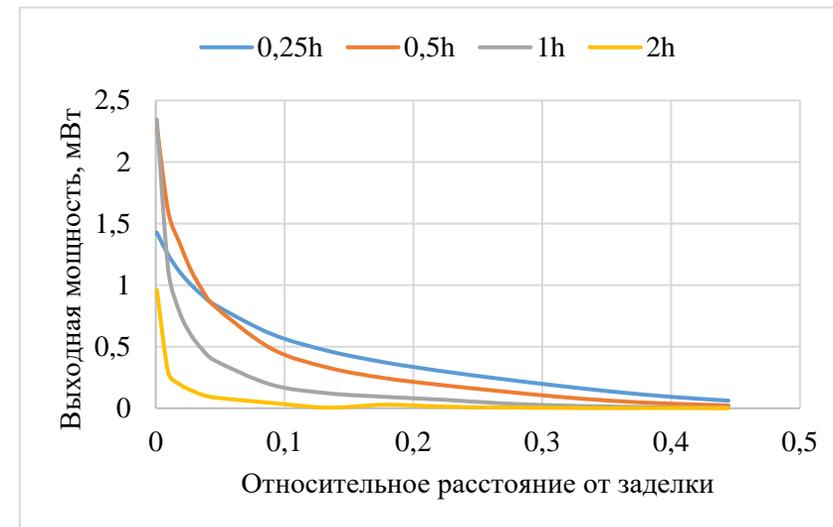
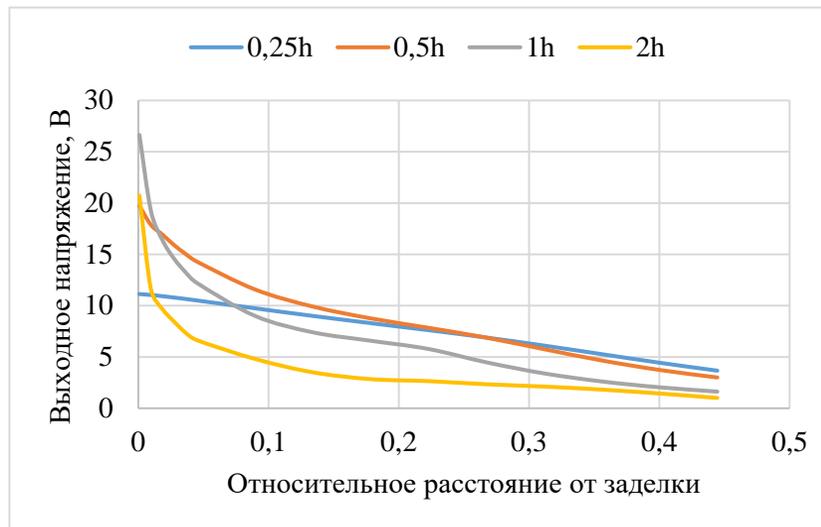
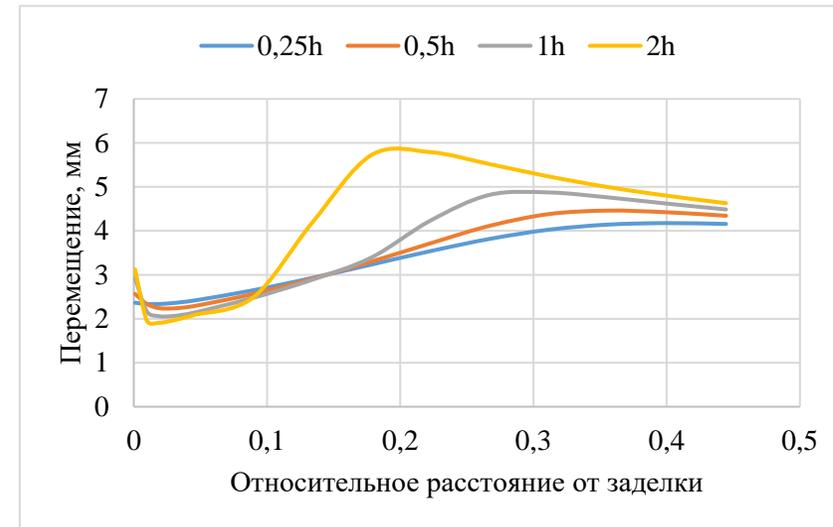
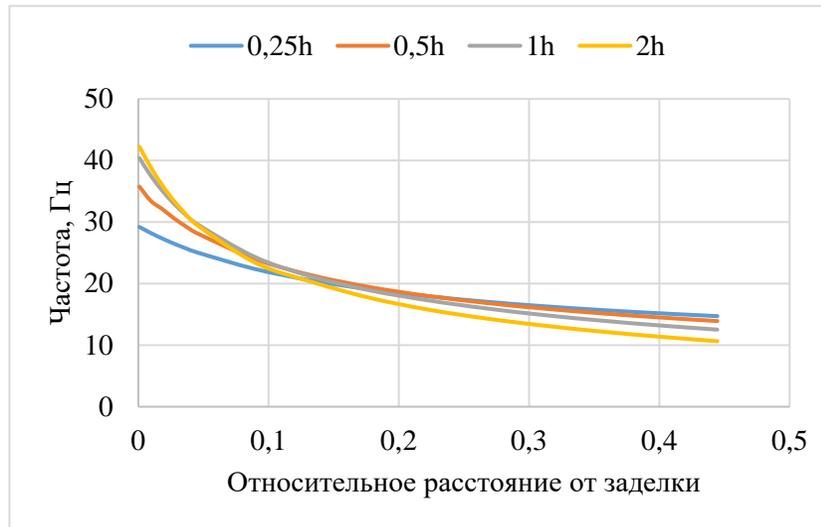
## Граничные условия и условия связи

$$\begin{array}{lll} \phi_i^{(1)}(L_0) = \phi_i^{(2)}(L_0) & \phi_i^{(2)}(L_0 + L_p) = \phi_i^{(3)}(L_0 + L_p) & \phi_i^{(3)}(L_M) = \phi_i^{(4)}(L_M) \\ \phi_i^{(1)'}(L_0) = \phi_i^{(2)'}(L_0) & \phi_i^{(2)'}(L_0 + L_p) = \phi_i^{(3)'}(L_0 + L_p) & \phi_i^{(3)'}(L_M) = \phi_i^{(4)'}(L_M) \\ \phi_i^{(1)}(0) = 0 & \phi_i^{(1)''}(L_0) = \frac{EI^{(2)}}{EI^{(1)}} \phi_i^{(2)''}(L_0) & \phi_i^{(3)''}(L_M) = \phi_i^{(4)''}(L_M) & \phi_i^{(2)''}(L) = 0 \\ \phi_i^{(1)'}(0) = 0 & \phi_i^{(2)''}(L_0 + L_p) = \frac{EI^{(1)}}{EI^{(2)}} \phi_i^{(3)''}(L_0 + L_p) & \phi_i^{(3)'''}(L_M) = \phi_i^{(4)'''}(L_M) - \alpha \beta^4 \phi_i^{(3)}(L_M) & \phi_i^{(2)'''}(L) = 0 \\ \phi_i^{(1)'''}(L_0) = \frac{EI^{(2)}}{EI^{(1)}} \phi_i^{(2)'''}(L_0) & \phi_i^{(2)'''}(L_0 + L_p) = \frac{EI^{(1)}}{EI^{(2)}} \phi_i^{(3)'''}(L_0 + L_p) & \alpha = \frac{M}{mL} \end{array}$$

# Численный эксперимент



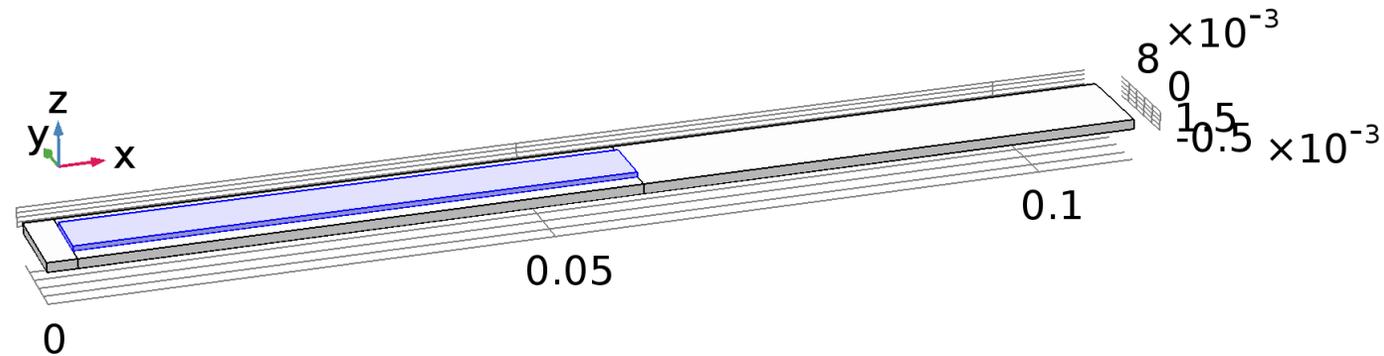
# Численный эксперимент



# Выводы по разделу

1. Увеличение длины пьезоэлемента приводит к увеличению резонансной частоты, выходного напряжения и выходной мощности до некоторых максимальных значений, после чего значения этих характеристик начинают уменьшаться;
2. увеличение толщины пьезоэлектрического элемента также увеличивает резонансную частоту, выходное напряжение и выходную мощность;
3. в диапазоне исследованных значений максимальная выходная мощность достигается, когда пьезоэлемент в два раза толще подложки и занимает около 80 процентов ее длины;
4. Зависимость смещения конца балки от длины пьезоэлемента для различных толщин пьезоэлементов имеет сложный вид.
5. чем дальше от торца пьезоэлемента расположена контрольная масса, тем ниже резонансная частота, выходное напряжение и выходная мощность;
6. изменение толщины пьезоэлемента нелинейно влияет на все характеристики ПЭГ;
7. наибольшее выходное напряжение и мощность достигаются, когда масса расположена вблизи пьезоэлемента, а толщина пьезоэлемента равна половине толщины подложки;
8. на зависимость смещения конца балки от положения массы сильно влияет толщина пьезоэлемента; чем толще пьезоэлемент, тем больше смещение, когда масса расположена вблизи пьезоэлемента, и тем меньше смещение, когда масса расположена вблизи конца балки.
9. чем ближе пьезоэлектрические элементы к заделке, тем выше резонансная частота, выходное напряжение и выходная мощность;
10. наибольшее выходное напряжение и мощность достигаются, когда пьезоэлементы расположены вблизи заделки, а толщина пьезоэлемента равна толщине подложки;

# Оптимизация в COMSOL



$$-\rho\omega^2\mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{FS} + \mathbf{F}_V, \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}, \quad -i\omega = \lambda$$

Здесь  $\rho$  - плотность материала,  $\omega$  - частота,  $\mathbf{u}$  - вектор поля смещения,  $\mathbf{F}_V$  - вектор объемной силы, а  $\mathbf{S}$  - тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа.

$$\mathbf{F}_V = -\rho_V(-\omega^2\mathbf{u} + \mathbf{a}_f),$$

$$\rho_V = h_m\rho_m H(x - x_m, \delta)(1 - H(x - (x_m + b_m), \delta))$$

Здесь  $h_m$  - высота присоединённой массы,  $\rho_m$  - плотность ее материала,  $x_m$  - координата начала присоединённой массы,  $b_m$  - размер присоединённой по длине балки.  $H(x, \delta)$  - сглаженная функция Хевисайда, где  $\delta = 10^{-4}$  - длина сглаживания.

# Определяющие соотношения

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_V \\ \mathbf{E} &= -\nabla V \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{D}$  - вектор электрической индукции,  $\rho_V$ - плотность заряда,  $\mathbf{E}$ - вектор электрического поля,  $V$  - электрический потенциал, генерируемый деформированным пьезоэлектриком

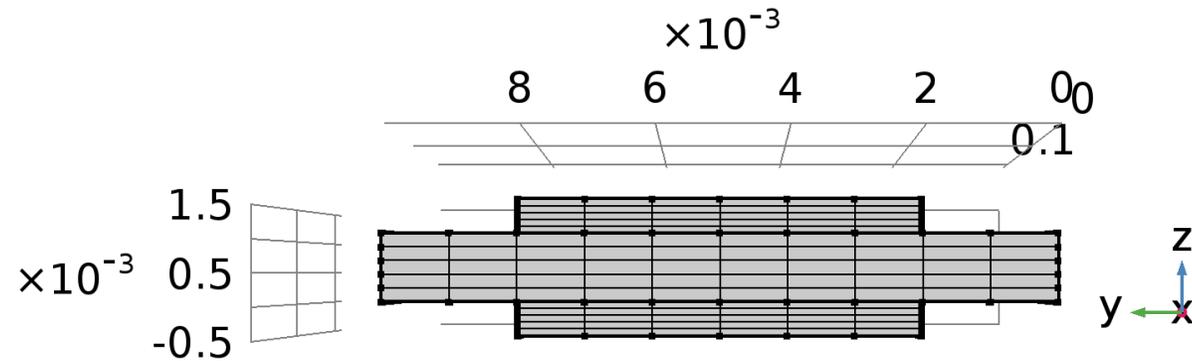
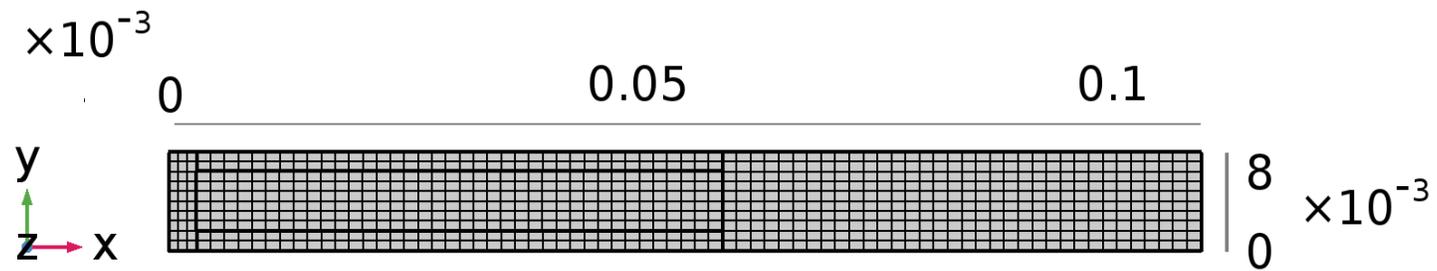
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c}^E \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

Где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - тензор деформации,  $\boldsymbol{\sigma}$ - тензор напряжений,  $\mathbf{c}^E$  - тензор упругих модулей,  $\mathbf{e}$  – тензор пьезоэлектрических констант, а  $\boldsymbol{\varepsilon}^S$  – тензор диэлектрических констант.

$$\begin{aligned} V_1 &= R \iint_{S_{up}} \sigma_0 dS \\ V_2 &= R \iint_{S_{low}} \sigma_0 dS \end{aligned}$$

Здесь  $V_1$  - электрический потенциал на верхней поверхности верхнего пьезоэлемента,  $V_2$ - на нижней поверхности нижнего пьезоэлемента.  $S_{up}, S_{low}$  - границы интегрирования, соответствующие верхней и нижней поверхностям.  $\sigma_0$  - плотность тока,  $R$  - сопротивление нагрузки.

# Конечно-элементная модель



# Процесс оптимизации

Весь процесс был разделён несколько этапов параметрического решения и оптимизации, что значительно сократило объем вычислений.

Первый этап оптимизации включал параметрическое решение задачи нахождения собственной частоты для определения набора параметров присоединённой массы (длина, толщина и точка начального расположения вдоль балки), которые обеспечивают первую собственную частоту, близкую к 26 Гц.

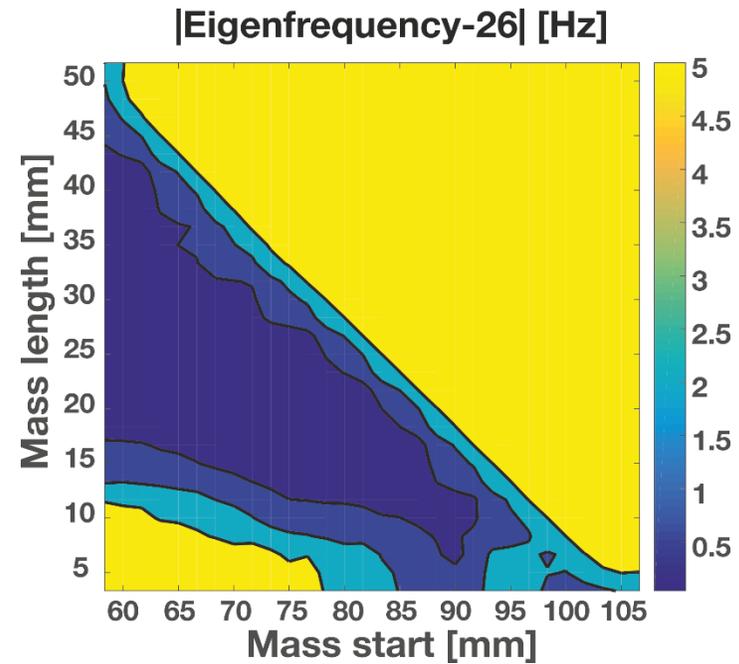
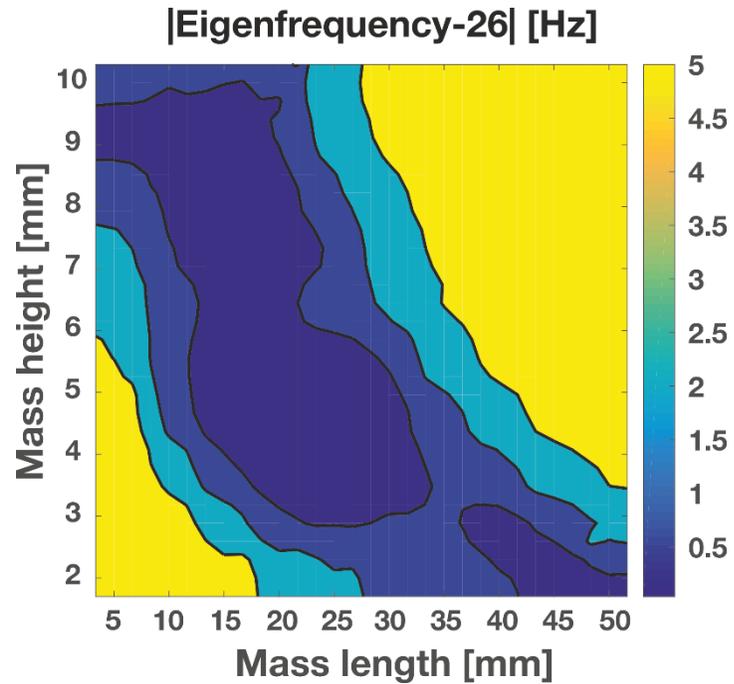
На втором этапе использовались методы градиентной оптимизации, чтобы улучшить конфигурации, полученные на первом этапе, с целью минимизации разницы между первой собственной частотой балки и 26 Гц.

На третьем этапе вычислялась электрическая мощность, которую можно получить на оптимизированных на втором этапе конфигурациях, с вариацией электрического сопротивления для всей системы.

После этого был определён набор расчетных параметров (линейные размеры присоединённой массы и значение электрического сопротивления), для которых электрическая мощность имеет максимальные значения.

# Параметрическая задача

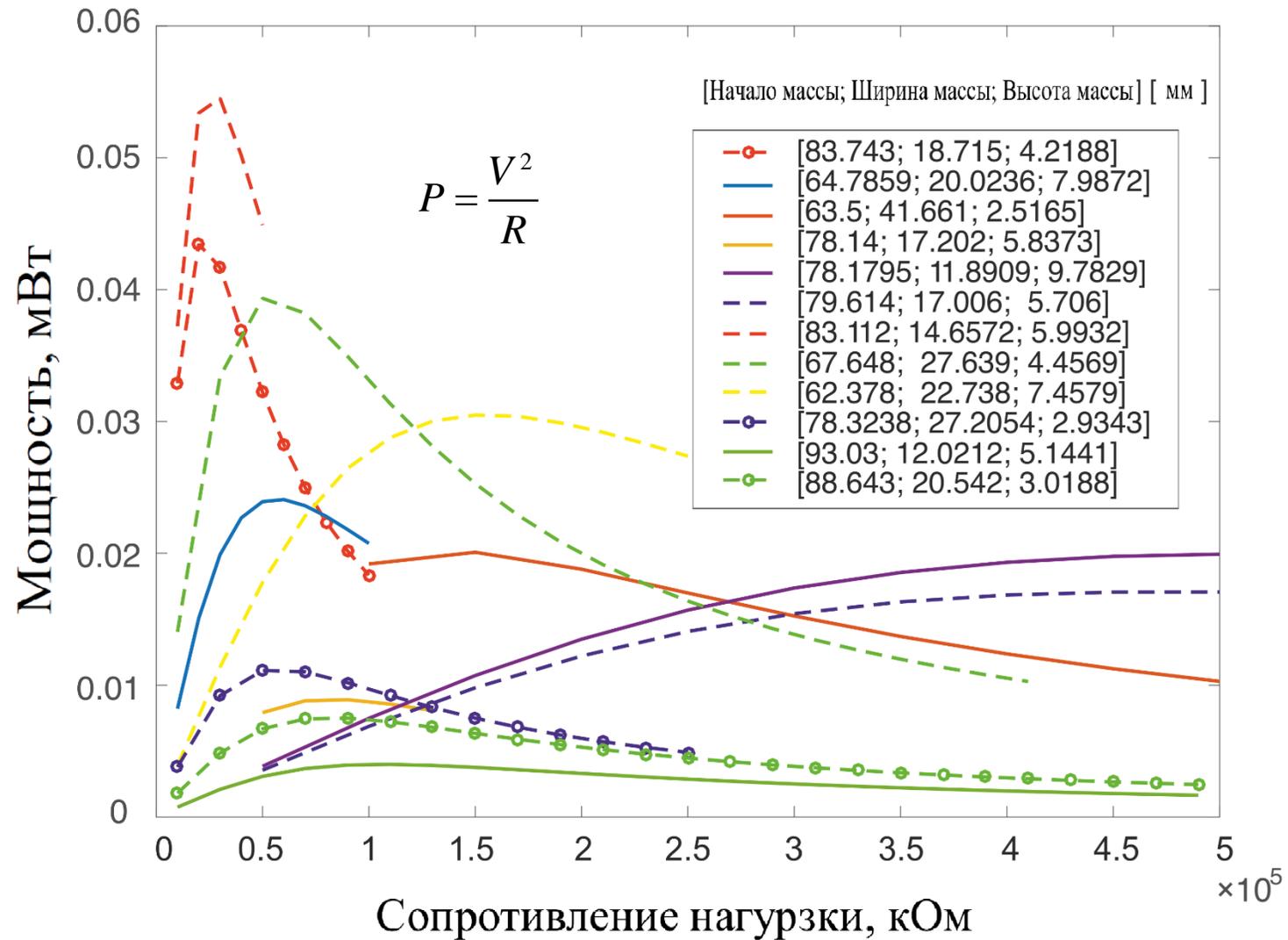
$$\Lambda = \nu - 26$$



# Метод Нелдера-Мида

#	Начальная точка [мм]		Длина [мм]		Толщина [мм]	
	Нач.	Опт.	Нач.	Опт.	Нач.	Опт.
1	83	83.7	19	18.7	4.2	4.22
2	65	64.8	20	20	8	7.99
3	62.5	63.5	42.5	41.7	2,5	2.52
4	77.5	78.2	12.5	11.9	9,5	9.78
5	79.0	79.6	17	17	5,8	5.71
6	62.5	64.4	27.5	26.5	5,5	5.34
7	77.5	78.3	27.5	27.2	3	2.93
8	90	88.6	20	20.5	3	3.02
9	85	85.7	15	14.7	5,5	5.43
10	60	60	50	50	2	1.96
11	100	100	10	10	5	4.93
12	67.5	66.9	17.5	17.7	9	8.82
13	92.5	93	12.5	12	5	5.14
14	62.5	62.4	22.5	22.7	7.5	7.45
15	66	67.6	29	27.6	4.4	4.45
16	85	83.1	15	14.7	6	5.99
17	77.5	78.1	17.5	17.2	6	5.83
18	70	70.6	20	19	7	6.80

# Электрическая мощность

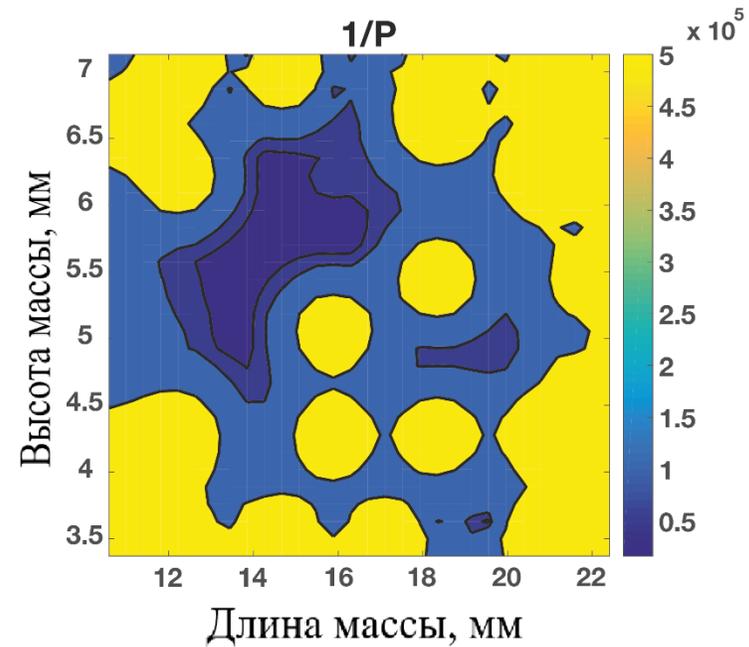
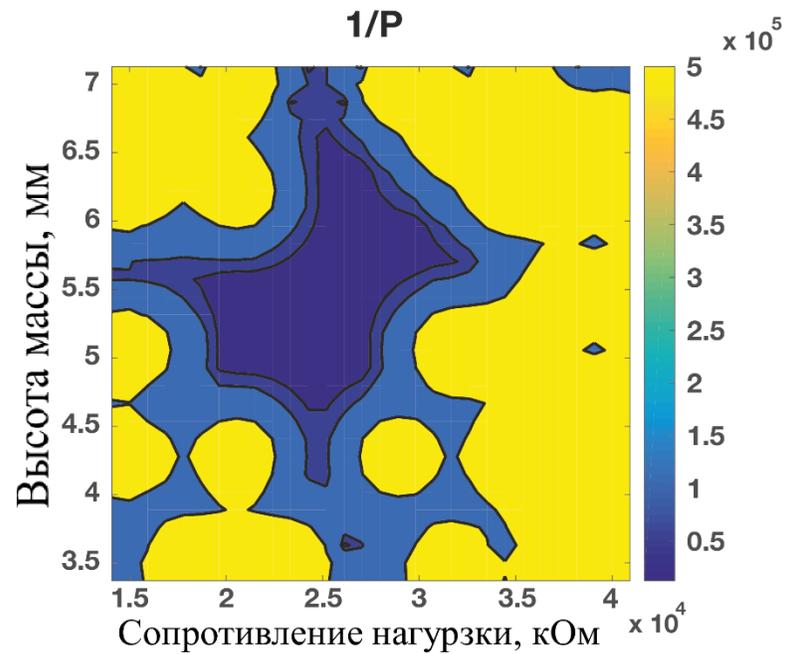


# Параметрический решатель

критические напряжения

$$\sigma_s^c < 7.5 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

$$\sigma_p^c < 3 \cdot 10^7 \text{ Па}$$



## Выводы по разделу

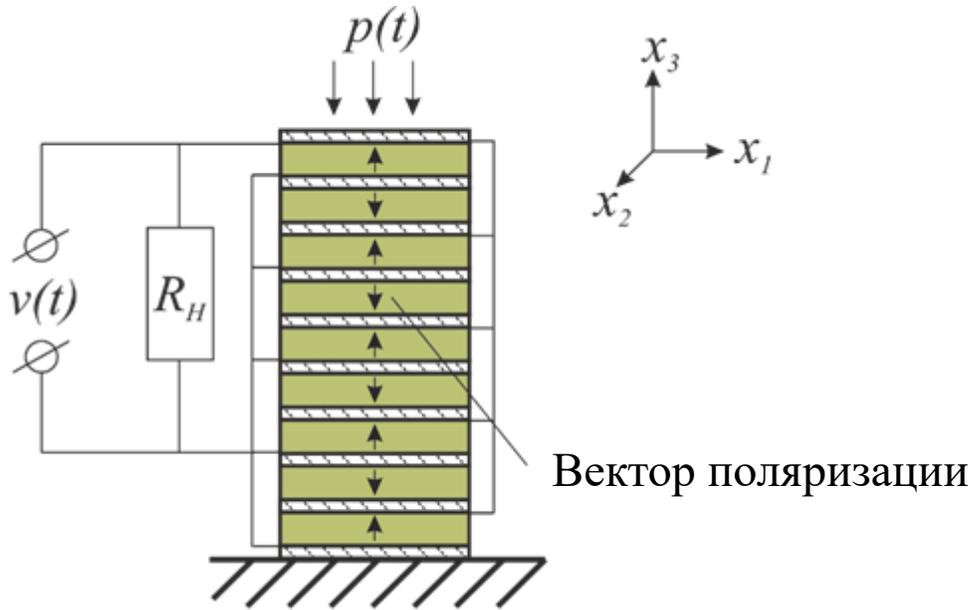
Разработан метод многокритериальной оптимизации кантилеверной балки с присоединённой массой. Основной целью оптимизации была настройка кантилевера на заданную рабочую (возбуждающую) частоту 26 Гц, поэтому входными параметрами оптимизации были геометрические размеры присоединённой массы.

В результате получен набор значений геометрических параметров присоединённой массы, на основе которых возможно изготовление ПЭГ с максимально возможной выходной мощностью. Процесс оптимизации был реализован в связке программных пакетов COMSOL Multiphysics и MATLAB.

# Математическое моделирование осевого ПЭГ

Линейная теория электроупругости

Продольные колебания



$v(t)$  - напряжение

$R_H$  - электрическое сопротивление

Вектор перемещений

$$\mathbf{u} = \{0, 0, w(x_3, t)\}^T$$

Деформация

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} = w_{,3}$$

Электрическое поле

$$E_3 = -\varphi_{,3}$$

Электрический потенциал

$$\varphi = \frac{v(t)x_3}{h_{ПЭ}}$$

$$\varphi_{,3} = \frac{v(t)}{h_{ПЭ}}$$

$h_{ПЭ}$  - высота одного слоя

# Математическое моделирование осевого ПЭГ

Определяющие уравнения

$$\sigma_{33} = c_{33}^{E*} \varepsilon_{33} - e_{33}^* E_3$$

$$D_3 = e_{33}^* \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}^{S*} E_3$$

$$c_{33}^{E*} = \frac{1}{s_{33}^E}, \quad e_{33}^* = \frac{d_{33}}{s_{33}^E}, \quad \varepsilon_{33}^{S*} = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E}$$

$c_{33}^{E*}$  - модуль упругости     $e_{33}^*$  - пьезоэлектрический модуль     $\varepsilon_{33}^{S*}$  - относительная  
проницаемость

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \iiint_V \left[ \left( -c_{33}^{E*} \frac{\partial w(x_3, t)}{\partial x_3} + e_{33}^* \frac{v(t)}{h_{ПЭ}} \right) \delta \left( \frac{\partial w(x_3, t)}{\partial x_3} \right) + \left( \frac{e_{33}^*}{h_{ПЭ}} \frac{\partial w(x_3, t)}{\partial x_3} + \varepsilon_{33}^{S*} \frac{v(t)}{h_{ПЭ}^2} \right) \delta v(t) - \rho \ddot{w}(x_3, t) \delta w(x_3, t) \right] dV + \iint_S \left( p_3 \delta w(x_3, t) + \frac{\sigma x_3}{h_{ПЭ}} \delta v(t) \right) dS \right\} = 0$$

# Система дифференциальных уравнений

Метод Канторовича

$$w(x_3, t) = \sum_{i=1}^N \eta_i(t) \phi_i(x_3)$$

$\eta_i(t)$  - неизвестные обобщенные координаты

$\phi_i(x_3)$  - пробные функции

Система уравнений

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{\Theta}v(t) = \mathbf{p}$$

$$C_{ПЭ} \dot{v}(t) + \boldsymbol{\Theta}^T \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \frac{v(t)}{R_n} = 0$$

$\mathbf{M}$  - матрица масс

$\mathbf{K}$  - матрица жесткости

$\mathbf{D}$  - матрица демпфирования

$\boldsymbol{\Theta}$  - вектор связи

$C_{ПЭ}$  - электрическая ёмкость

Коэффициенты

$$C_{ПЭ} = N \frac{b_{ПЭ} l}{h_{ПЭ}} \varepsilon_{33}^{S*}$$

$$M_{ij} = \int_0^H m \phi_i(x_3) \phi_j(x_3) dx_3$$

$$K_{ij} = \int_0^H Y \phi_i'(x_3) \phi_j'(x_3) dx_3$$

$$p_i = -p_0 \phi_i(x_3)$$

$$\theta_i = \int_0^H J_p \phi_i'(x_3) dx_3$$

$$Y = \iint_{S_{ПЭ}} c_{33}^{E*} dS$$

$$J_p = \iint_{S_{ПЭ}} \frac{e_{33}^*}{h_{ПЭ}} dS$$

# Система дифференциальных уравнений

Пробные функции

$$\phi_i(x_3) = a_1 \sin(\beta_i x_3) + a_2 \cos(\beta_i x_3)$$

Граничные условия

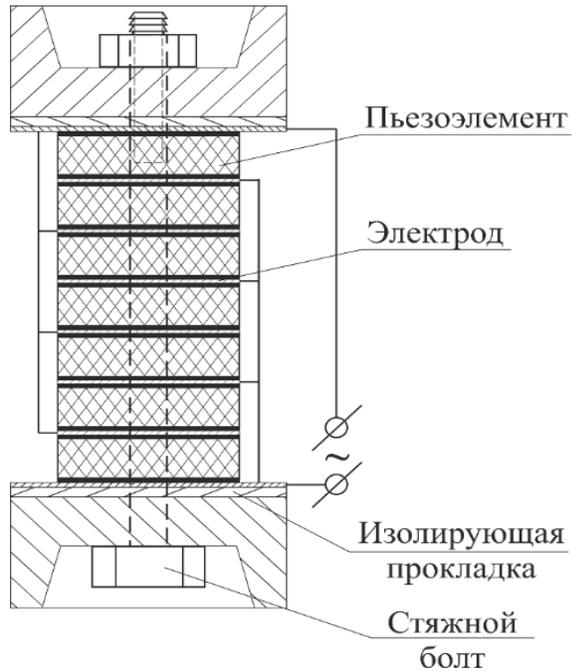
$$\phi_i(0) = 0 \quad \phi_i'(H) = 0$$

Аппроксимация Фурье

$$p(t) \cong m_0 + \sum_{k=1}^N \left[ m_k \cos\left(k \frac{2\pi t}{T}\right) + n_k \sin\left(k \frac{2\pi t}{T}\right) \right]$$

$$m_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt, \quad m_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos\left(k \frac{2\pi t}{T}\right) dt, \quad n_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin\left(k \frac{2\pi t}{T}\right) dt$$

# Модель осевого ПЭГ



Эффективная жесткость

$$Y = \iint_{S_{ПЭ}} c_{33}^{E*} dS + \iint_{S_{cm}} C_{cm} dS$$

Схема исследуемого ПЭГ

		Ядро	Пьезоэлемент
Геометрические размеры	$(D \times d \times h)$	6 мм	18×8×1 мм <sup>3</sup>
Плотность	$(\rho)$	7800 кг/м <sup>3</sup>	7500 кг/м <sup>3</sup>
Модуль Юнга и коэффициент Пуассона	$(E, \nu)$	210 ГПа и 0.3	—
Упругая податливость	$(s_{33}^E)$	—	17×10 <sup>-12</sup> Па <sup>-1</sup>
Диэлектрическая проницаемость	$(\epsilon_{33}^S / \epsilon_0)$	—	1500
Пьезоэлектрический модуль	$(d_{33})$	—	-307 пКл/Н

Таблица: исходные данные ПЭГ

# Экспериментальная установка

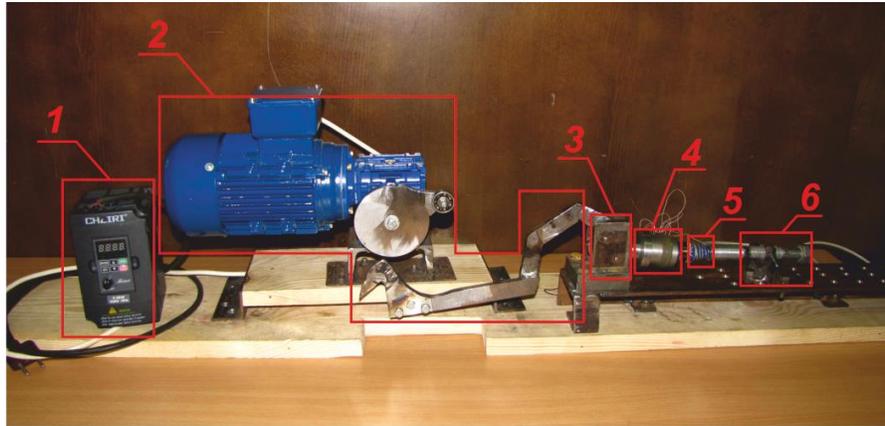
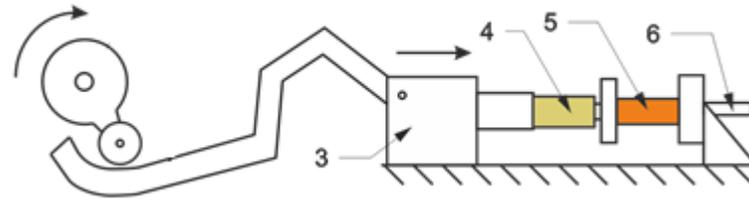


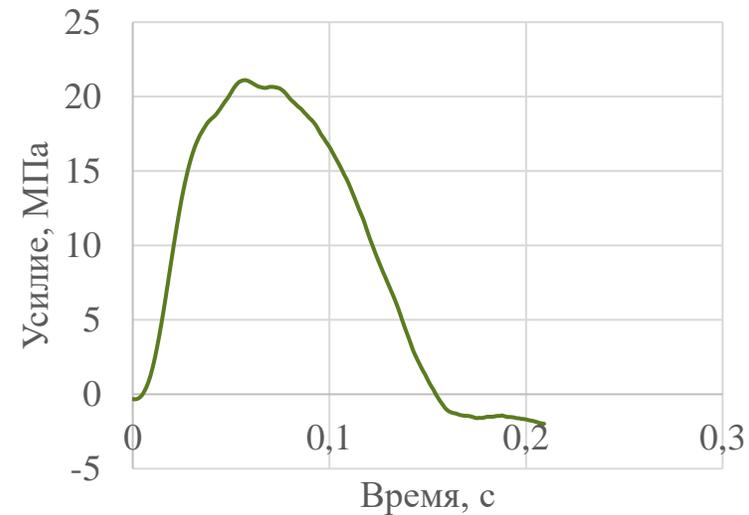
Фото экспериментальной установки для испытания стековых ПЭГ:  
1 – преобразователь частот, 2 – электродвигатель с редуктором и эксцентриком, 3 – рычаг, 4 – испытуемый образец, 5 – тензометрический динамометр  
6 – поджимной винт

Совместный испытательный стенд НИИМиПМ и НИИ Физики ЮФУ.

Авторы: Рожков Е.В., Акопьян В.А., Захаров Ю.Н.

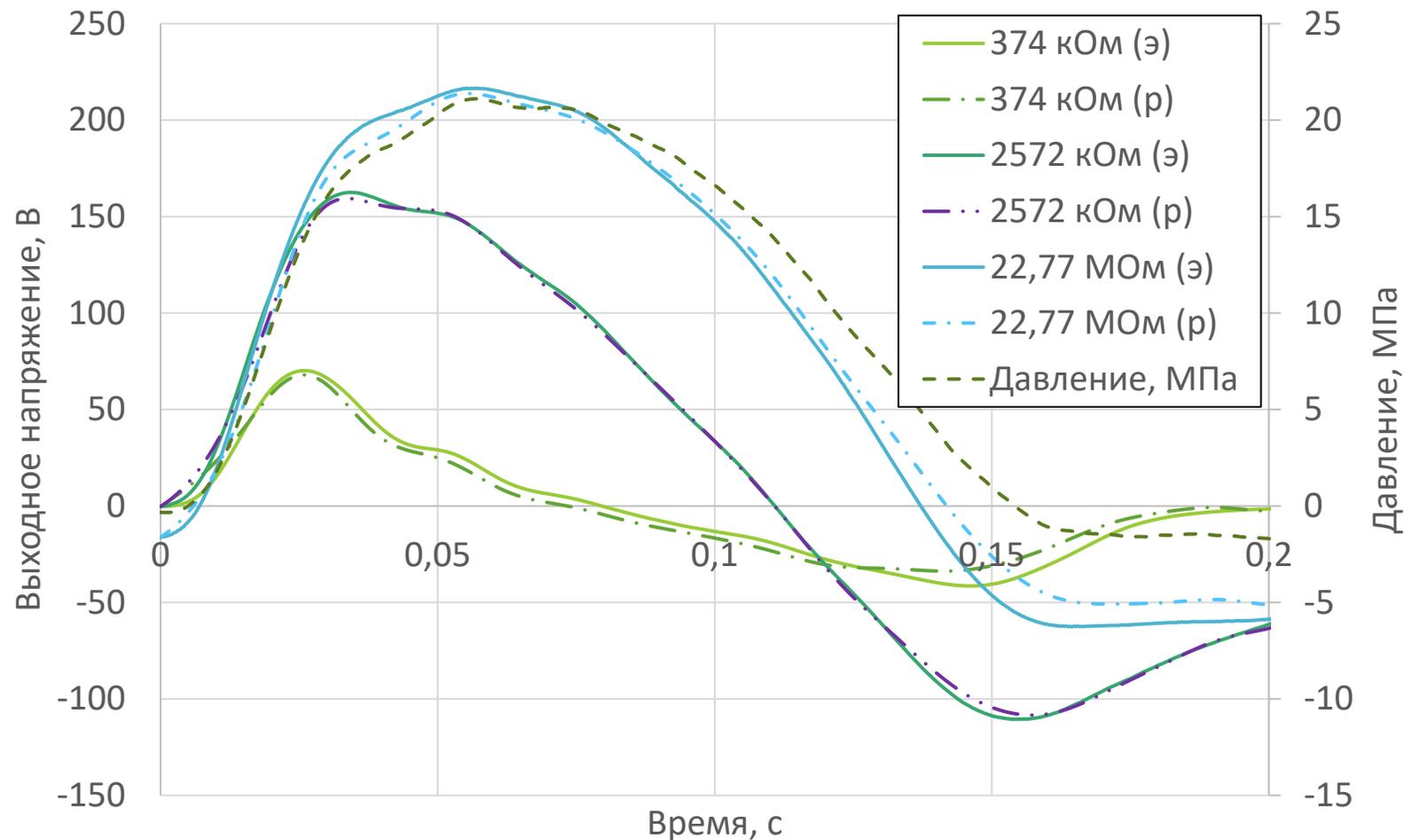


Кинематическая схема



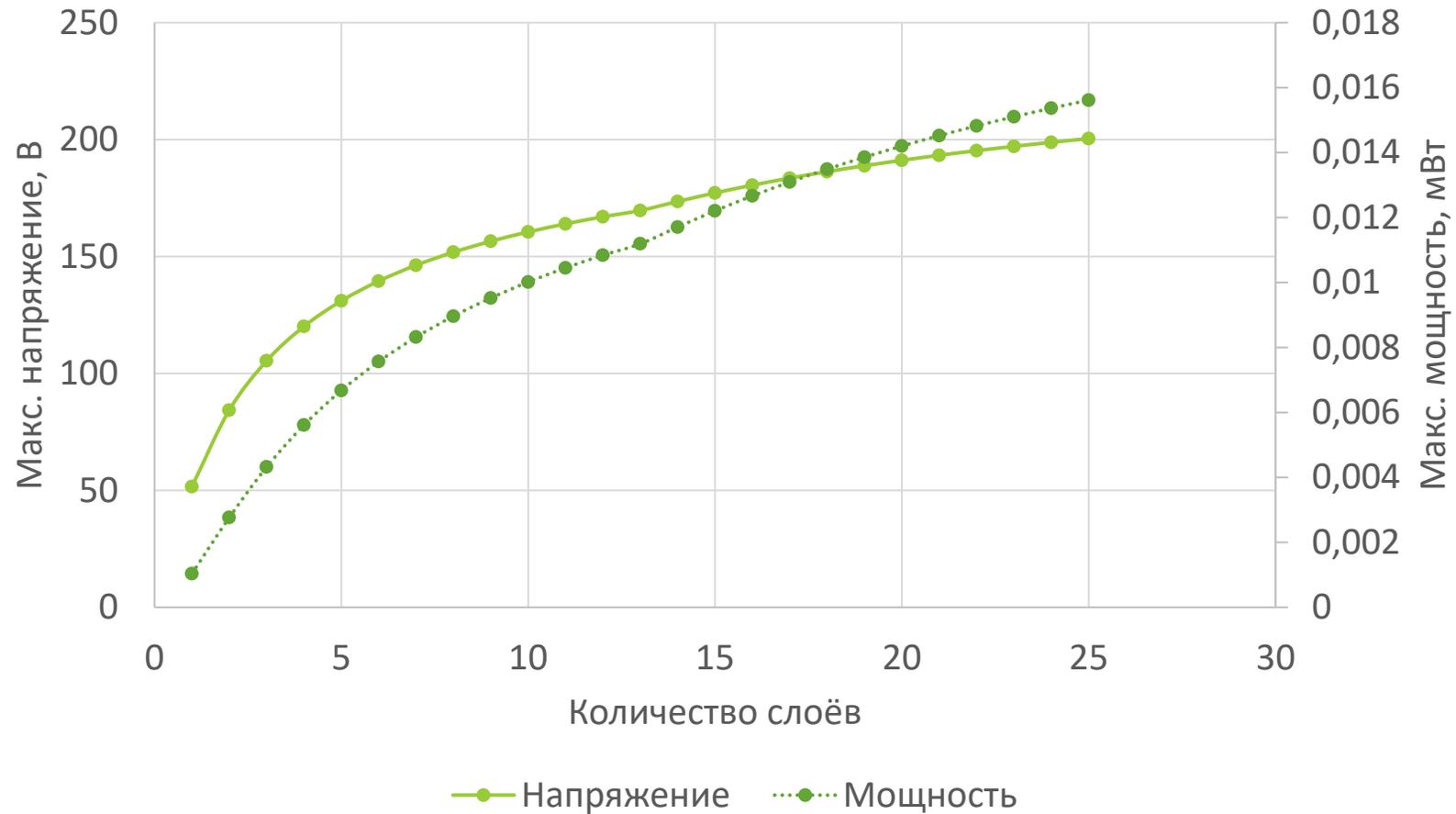
Форма выходного сигнала, записанная с динамометра (5)

# Сравнение экспериментальных и расчётных данных



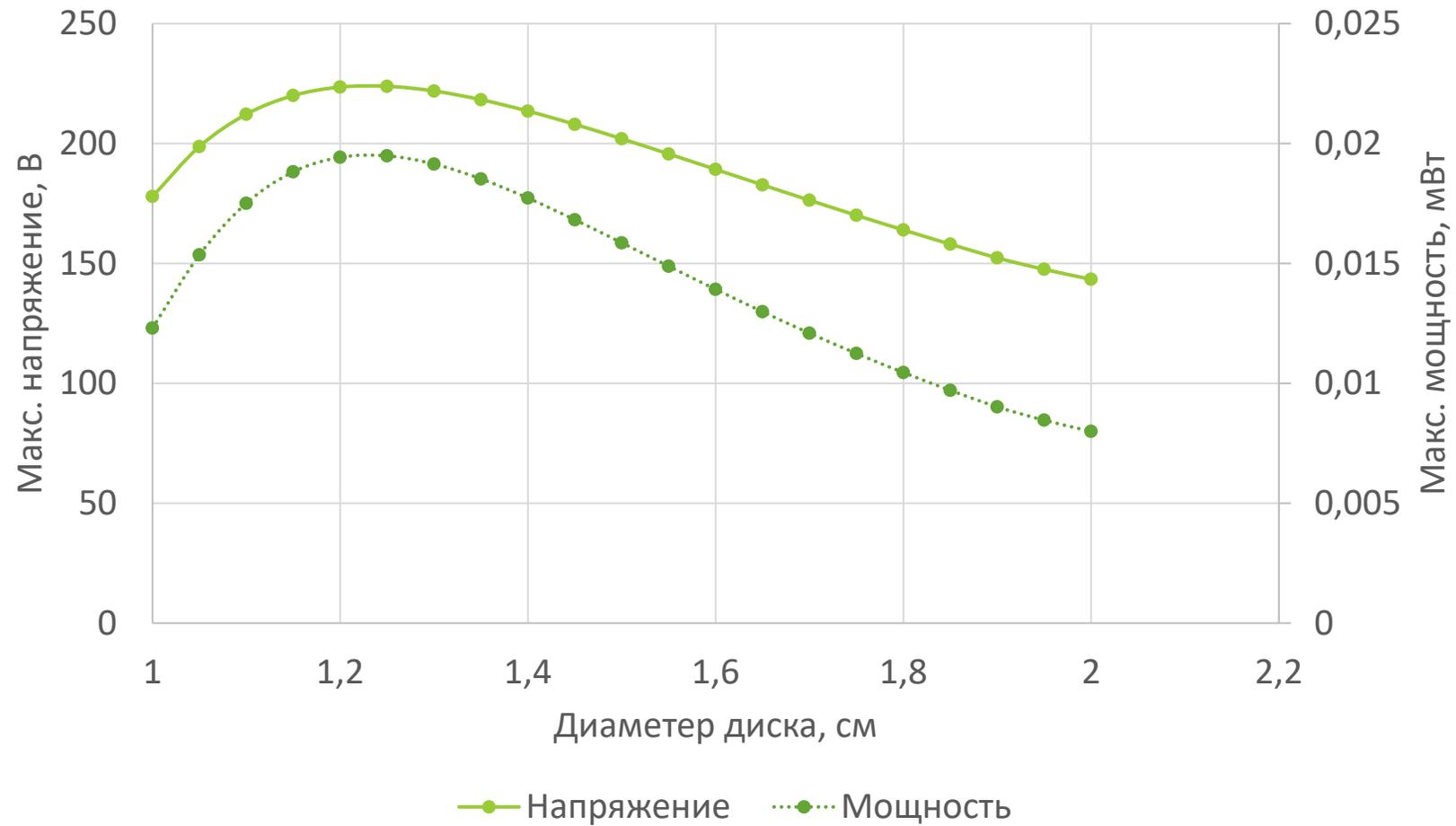
Зависимость выходного электрического напряжения от времени при различных значениях электрического сопротивления: э – эксперимент, р – расчёт.

# Численный эксперимент



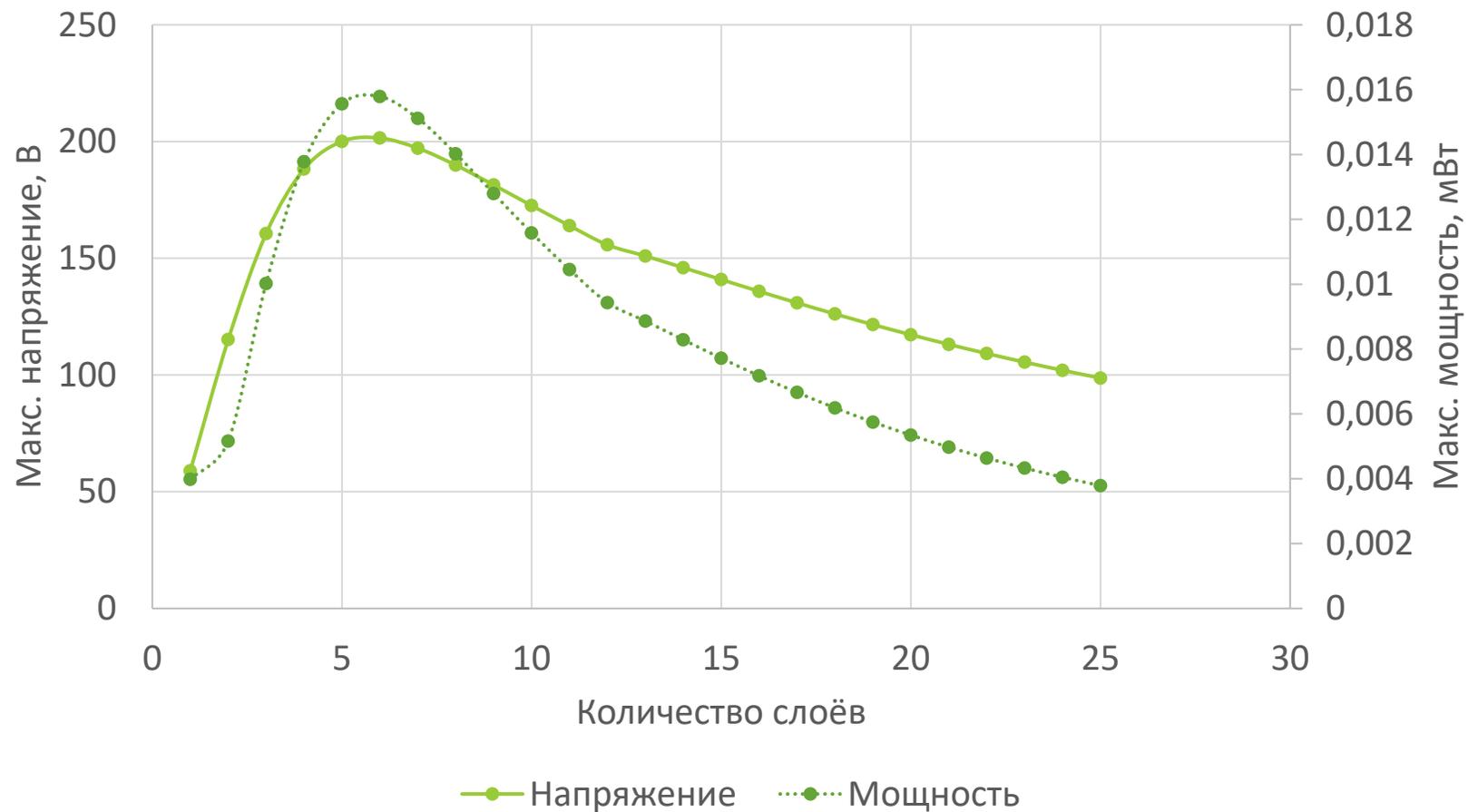
Зависимость максимальных выходных электрических напряжений и мощности от количества слоёв, при условии, что высота каждого слоя фиксирована.

# Численный эксперимент



Зависимость максимальных выходных электрических напряжений и мощности от диаметра пьезоэлемента.

# Численный эксперимент



Зависимость максимальных выходных электрических напряжений и мощности от количества слоёв, при условии, что высота стека фиксирована.

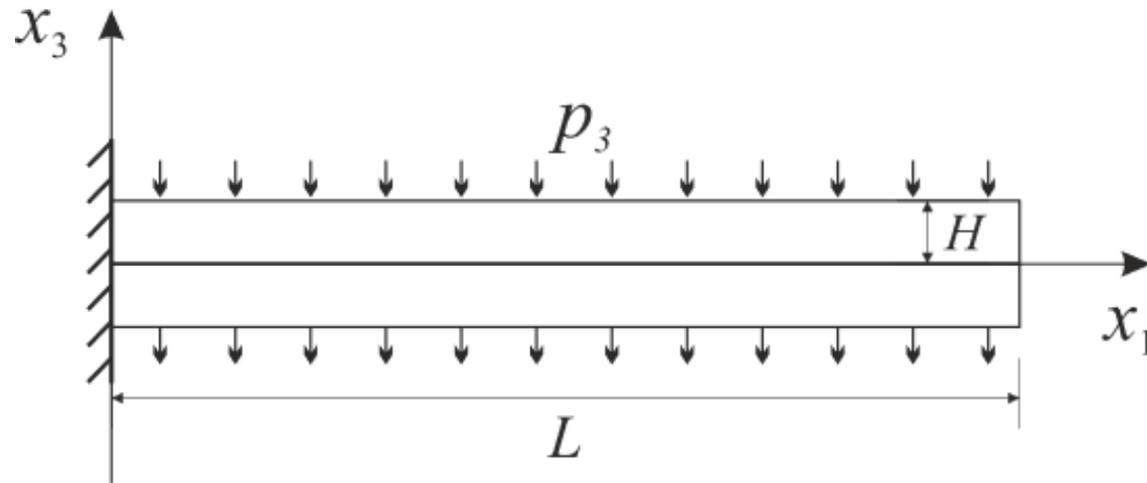
## Выводы по разделу

Разработана математическая модель, описывающая колебания осевого ПЭГ.

При фиксированной высоте стека, существует оптимальное количество слоев, при котором достигается максимальная выходная мощность

При фиксированной высоте стека и фиксированном количестве слоев существует оптимальный диаметр слоя, при котором достигается максимальная мощность.

# Прикладная теория для функционально-градиентного биморфа из пористой керамики



Биморф ( $L = 10$  мм,  $H = 0,6$  мм) жестко закреплен на левом конце.

\* Vatul'yan A.O., Rynkova A.A. 2001. Flexural vibrations of a piezoelectric bimorph with a cut internal electrode. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*;42(1): 164–8. doi: 10.1023/A:101883740

# Уравнения и определяющие соотношения

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma_{\Omega}.$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right), \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi.$$

$\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - тензоры механических напряжений и деформации,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  - векторы электрической индукции и напряженности электрического поля,  $\rho$  - плотность материала,  $\mathbf{c}$  - тензор упругих модулей,  $\mathbf{e}$  - тензор пьезоэлектрических модулей,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - тензор диэлектрических проницаемостей,  $\mathbf{f}$  - вектор плотности массовых сил,  $\sigma_{\Omega}$  - объемная плотность электрических зарядов,  $\mathbf{u}$  - вектор перемещений,  $\varphi$  - электрический потенциал.

# Уравнения и определяющие соотношения для плоского случая

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = f_i,$$

$$D_{i,i} = 0,$$

$$\sigma_{11} = c_{11}^E \varepsilon_{11} + c_{13}^E \varepsilon_{33} + e_{31} \varphi_{,3},$$

$$\sigma_{33} = c_{13}^E \varepsilon_{11} + c_{33}^E \varepsilon_{33} + e_{33} \varphi_{,3},$$

$$\sigma_{13} = 2c_{44}^E \varepsilon_{13} + e_{31} \varphi_{,1},$$

$$D_1 = 2e_{15} \varepsilon_{13} - \vartheta_{11}^S \varphi_{,1},$$

$$D_3 = e_{31} \varepsilon_{11} + e_{33} \varepsilon_{33} - \vartheta_{33}^S \varphi_{,3},$$

Гипотезы Кирхгофа:

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 w_1,$$

$$u_3(x_1, x_3) = w(x_1),$$

$$\sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{11} = c_{11}^* u_{1,1} + e_{31}^* \varphi_{,3},$$

$$D_3 = e_{31}^* u_{1,1} - \vartheta_{33}^* \varphi_{,3},$$

$$c_{11}^* = c_{11}^E - \frac{c_{13}^{E2}}{c_{33}^E}, \quad e_{31}^* = e_{31} - \frac{c_{13}^E e_{33}}{c_{33}^E},$$

$$\vartheta_{33}^* = \vartheta_{33}^S + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E}, \quad \tilde{c}_{11}^* = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}.$$

# Неоднородное распределение физико-механических свойств

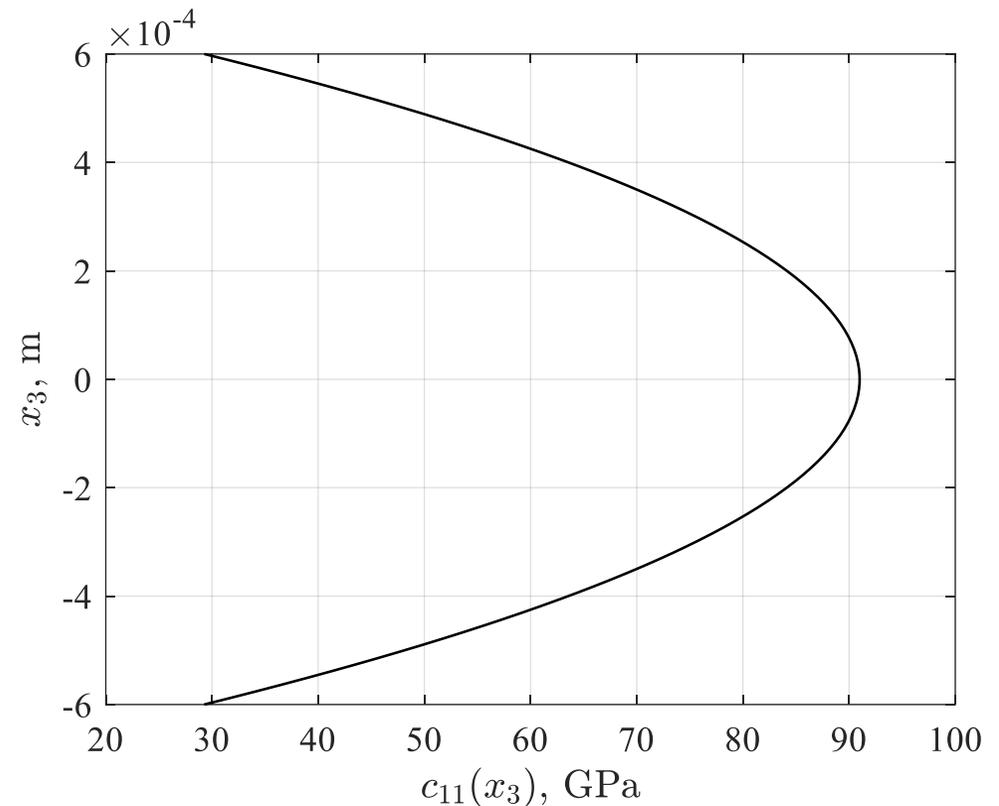
$$Y(a, \hat{a}, x_3) = \frac{(\hat{a} - a)}{H^2} x_3^2 + a$$

Здесь  $a$  значение константы на внешней границе  
 $\hat{a}$  -- на внутренней

$$\sigma_{11} = Y(c_{11}^*, \hat{c}_{11}^*, x_3) u_{1,1} + Y(e_{31}^*, \hat{e}_{31}^*, x_3) \varphi_{,3},$$

$$D_3 = Y(e_{31}^*, \hat{e}_{31}^*, x_3) u_{1,1} - Y(\epsilon_{33}^*, \hat{\epsilon}_{33}^*, x_3) \varphi_{,3},$$

$$\rho = Y(\rho, \hat{\rho}, x_3)$$



Распределение  $c_{11}$  по толщине пластины

# Прикладная теория

$$\iint_S \delta \check{H} dS - \rho \omega^2 \iint_S u_i \delta u_i dS + \int_{\partial S} p_i \delta u_i dl = 0,$$

$$\check{H} = U - E_i D_i \qquad \delta \check{H} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i$$

$$\delta \check{H} = \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} - D_1 \delta E_1 - D_3 \delta E_3.$$

$$p_i = \{0, p_3\}^T$$

Распределение электрического потенциала предполагается квадратичным и неоднородным по длине элемента.

$$\varphi(x_1, \tilde{x}_3) = V_1(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} - 1 \right) + V_2(x_1) \left( 1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{H^2} \right) + V_3(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} + 1 \right).$$

$$\varphi(x_1, 0) = V_1 = \text{const}, \qquad \tilde{x}_3 = x_3 - H / 2$$

$$\varphi \left( x_1, \frac{H}{2} \right) = V_2(x_1) = \Phi(x_1),$$

$$\varphi(x_1, H) = V_3 = \text{const}.$$

# Уравнения и граничные условия

$$\left(\frac{4}{5H}\epsilon_{33}^* + \frac{68}{15H}\hat{\epsilon}_{33}^*\right)V_1 + \left(\frac{52}{15H}\epsilon_{33}^* + \frac{28}{15H}\hat{\epsilon}_{33}^*\right)V_3 - \left(\frac{32}{5H}\hat{\epsilon}_{33}^* + \frac{64}{15H}\epsilon_{33}^*\right)\Phi(x) - \left(\frac{16}{21}\hat{\epsilon}_{11}H + \frac{32}{105}\epsilon_{11}H\right)\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) - \left(\frac{2}{15}\hat{e}_{31}^*H + \frac{6}{5}e_{31}^*H\right)\frac{d^2}{dx^2}w(x) = 0$$
$$\left(\frac{2}{15}\hat{e}_{31}^*H + \frac{6}{5}e_{31}^*H\right)\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) + \left(\frac{4}{15}\omega^2\hat{\rho}H^3 + \frac{2}{5}\omega^2\rho H^3\right)\frac{d^2}{dx^2}w(x) - \left(\frac{2}{3}\omega^2\rho H + \frac{4}{3}\omega^2\hat{\rho}H\right)w(x) + \left(\frac{4}{15}\hat{c}_{11}^*H^3 + \frac{2}{5}c_{11}^*H^3\right)\frac{d^4}{dx^4}w(x) + 2p_3 = 0$$

## Внутренние силовые и электрические факторы

$$\tilde{D}_1 = \left(\frac{16}{21}\hat{\epsilon}_{11}H + \frac{32}{105}\epsilon_{11}H\right)\frac{d}{dx}\Phi(x)$$

$$M_1 = \left(-\frac{1}{10}e_{31}^*H + \frac{13}{30}\hat{e}_{31}^*H\right)V_1 - \left(\frac{17}{30}\hat{e}_{31}^*H + \frac{11}{10}e_{31}^*H\right)V_3 + \left(\frac{2}{15}\hat{e}_{31}^*H + \frac{6}{5}e_{31}^*H\right)\Phi(x) + \left(\frac{4}{15}\hat{c}_{11}^*H^3 + \frac{2}{5}c_{11}^*H^3\right)\frac{d^2}{dx^2}w(x)$$

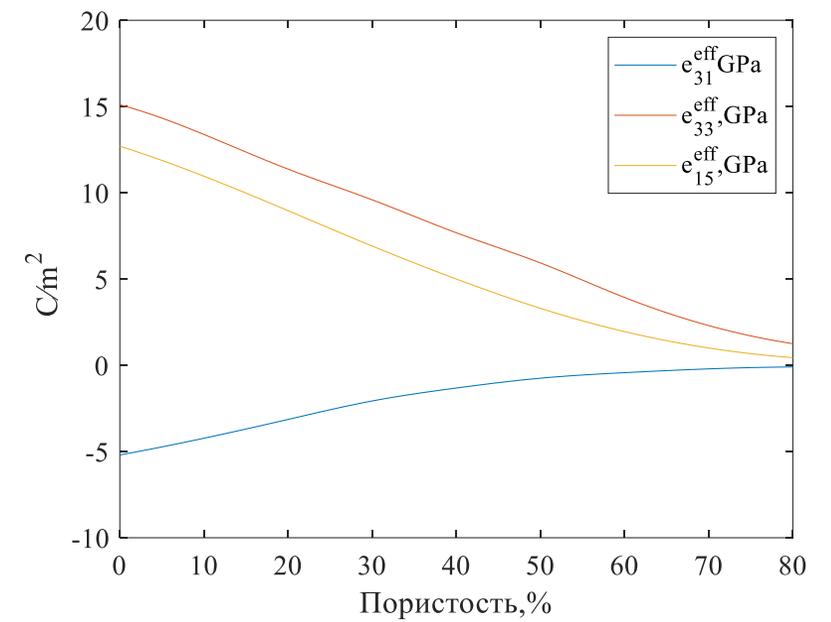
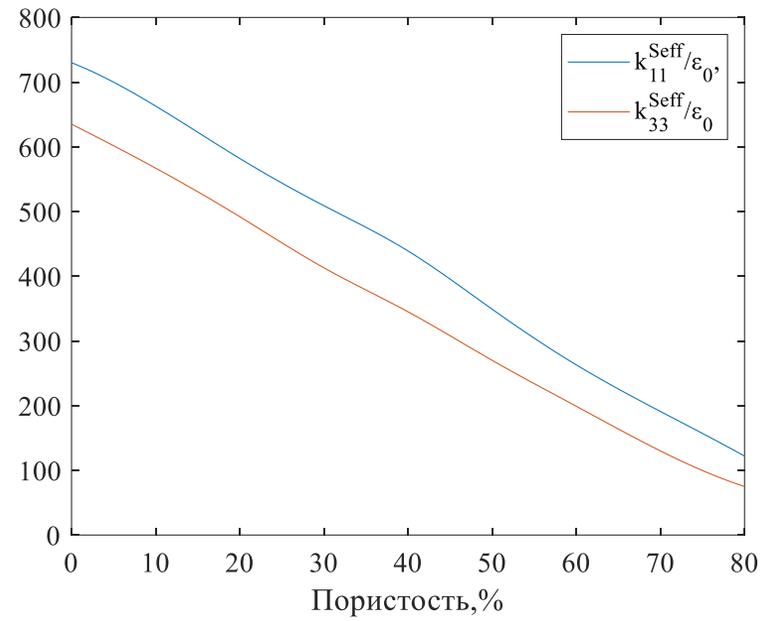
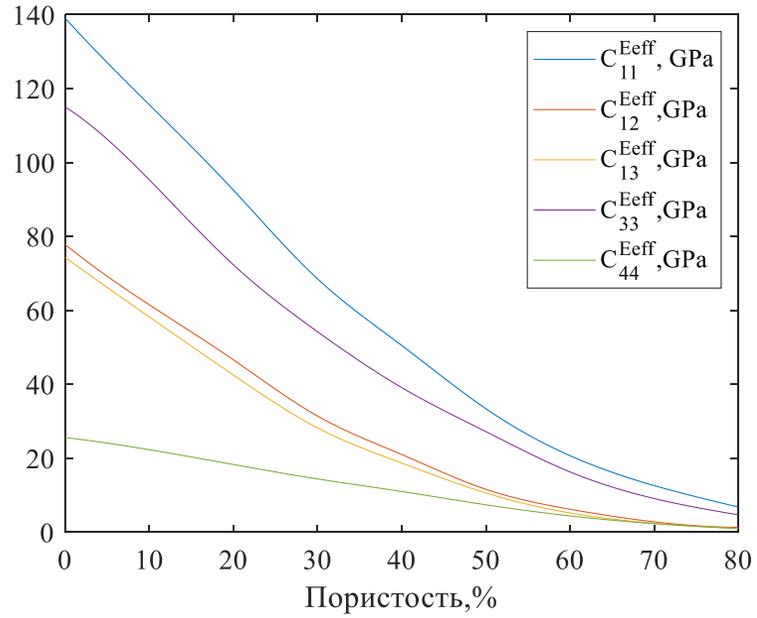
$$Q_1 = -\left(\frac{2}{15}\hat{e}_{31}^*H + \frac{6}{5}e_{31}^*H\right)\frac{d}{dx}\Phi(x) - \left(\frac{4}{15}\omega^2\hat{\rho}H^3 + \frac{2}{5}\omega^2\rho H^3\right)\frac{d}{dx}w(x) - \left(\frac{2}{5}c_{11}^*H^3 + \frac{4}{15}\hat{c}_{11}^*H^3\right)\frac{d^3}{dx^3}w(x)$$

# Пористая керамика PZT-4

Пористость, %	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	7500	6750	6000	5950	4500	3750	3000	2250	1500
$c_{11}^E$ , ГПа	139	115.6	92.5	68.5	50.5	33.4	20.7	12.6	6.8
$c_{12}^E$ , ГПа	77.8	61.5	46.6	31.4	21	11.6	6.2	2.8	1.3
$c_{13}^E$ , ГПа	74.3	58.2	42.5	28.2	18.7	10.6	5.2	2.4	1
$c_{33}^E$ , ГПа	115	95.3	72.3	54.2	39.1	27.2	16.3	9.1	4.7
$c_{44}^E$ , ГПа	25.6	22.3	18.3	14.4	11	7.4	4.4	2.3	1
$e_{31}$ , pC/N	-5.2	-4.23	-3.14	-2.07	-1.32	-0.75	-0.43	-0.21	-0.1
$e_{33}$ , pC/N	15.1	13.38	11.37	9.59	7.68	5.93	3.93	2.3	1.25
$e_{15}$ , pC/N	12.7	10.96	8.96	6.91	5	3.3	1.95	1	0.44
$\epsilon_{11}^S / \epsilon_0$	730	663	582	509	439	349	263	191	122
$\epsilon_{33}^S / \epsilon_0$	635	567	492	413	345	270	199	130	75

\*Nasedkin A. V., Oganessian P. A., Soloviev A. N. Analysis of Rosen type energy harvesting devices from porous piezoceramics with great longitudinal piezomodulus //ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2021. – Vol. 101, No 3. – P. e202000129 (1-15).

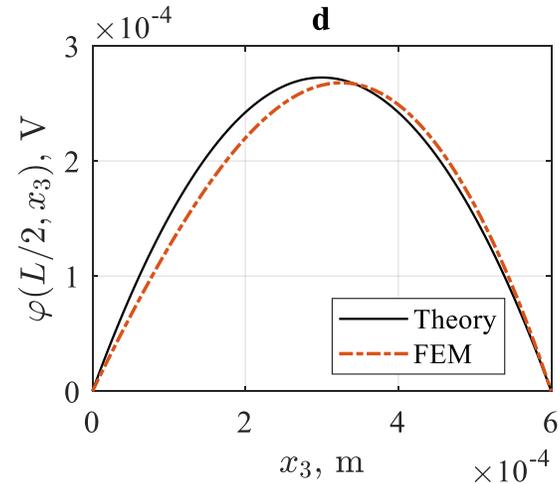
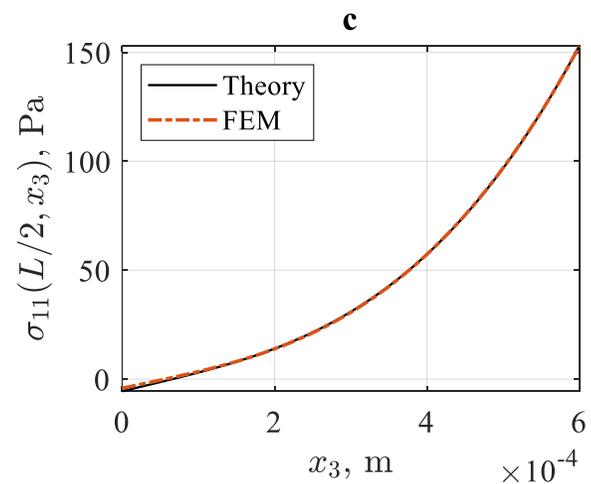
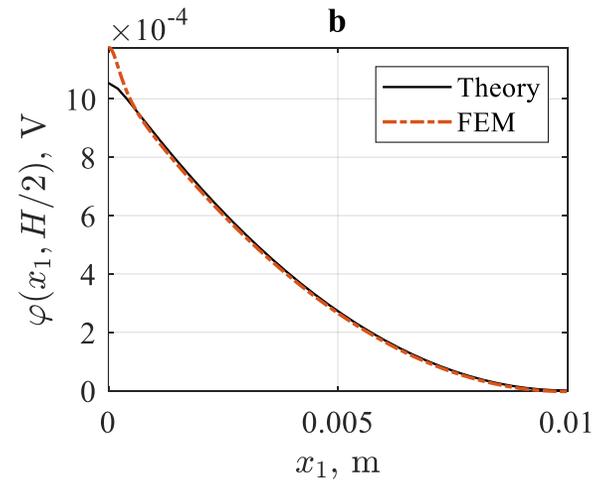
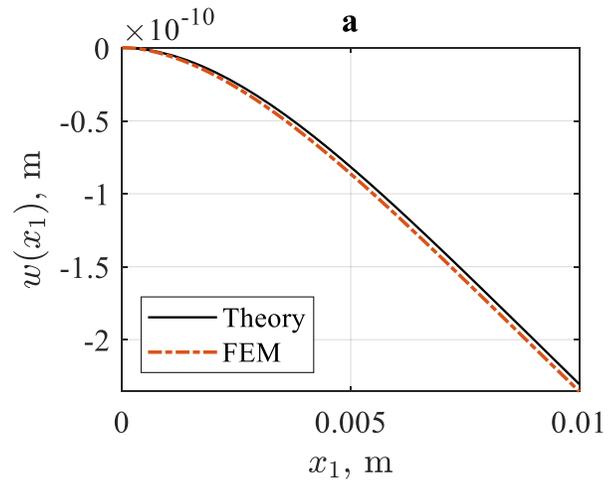
# Зависимость материальных констант от пористости



# Численные результаты

Рассмотрим колебания пластины на частоте 50 Гц, при условии  $V_1 = V_3 = 0$  и  $p = 1$  Н/м,

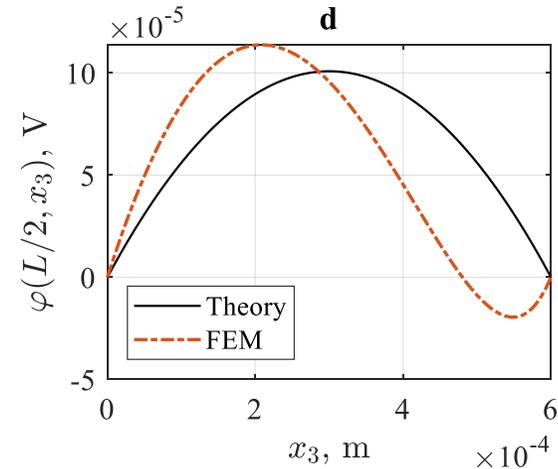
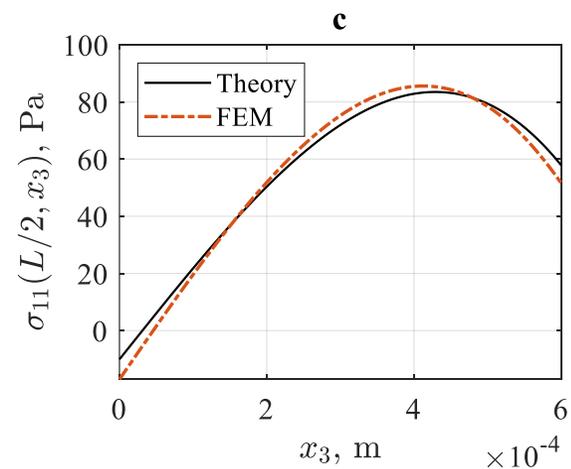
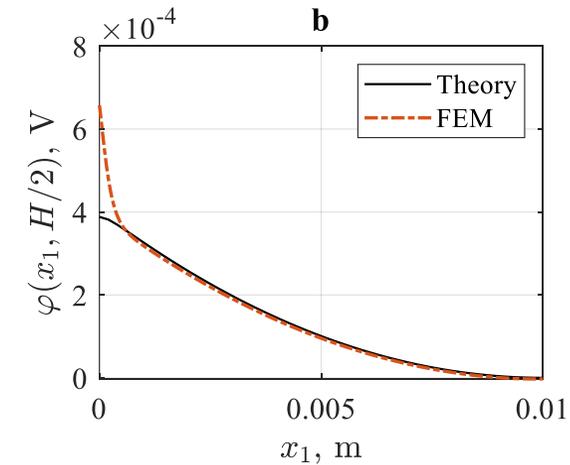
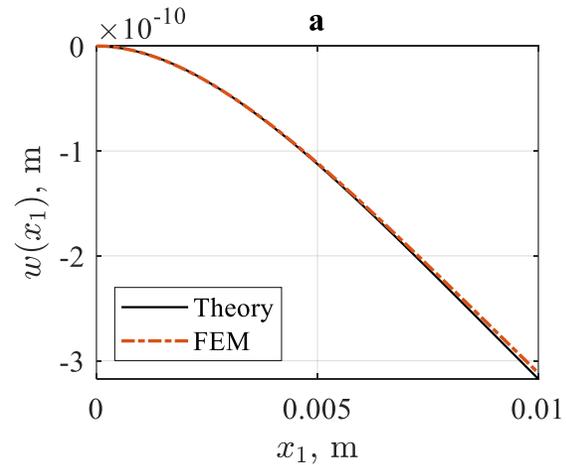
Пористость на внешней границе составляет 0 %, а на внутренней 50 %.



# Численные результаты

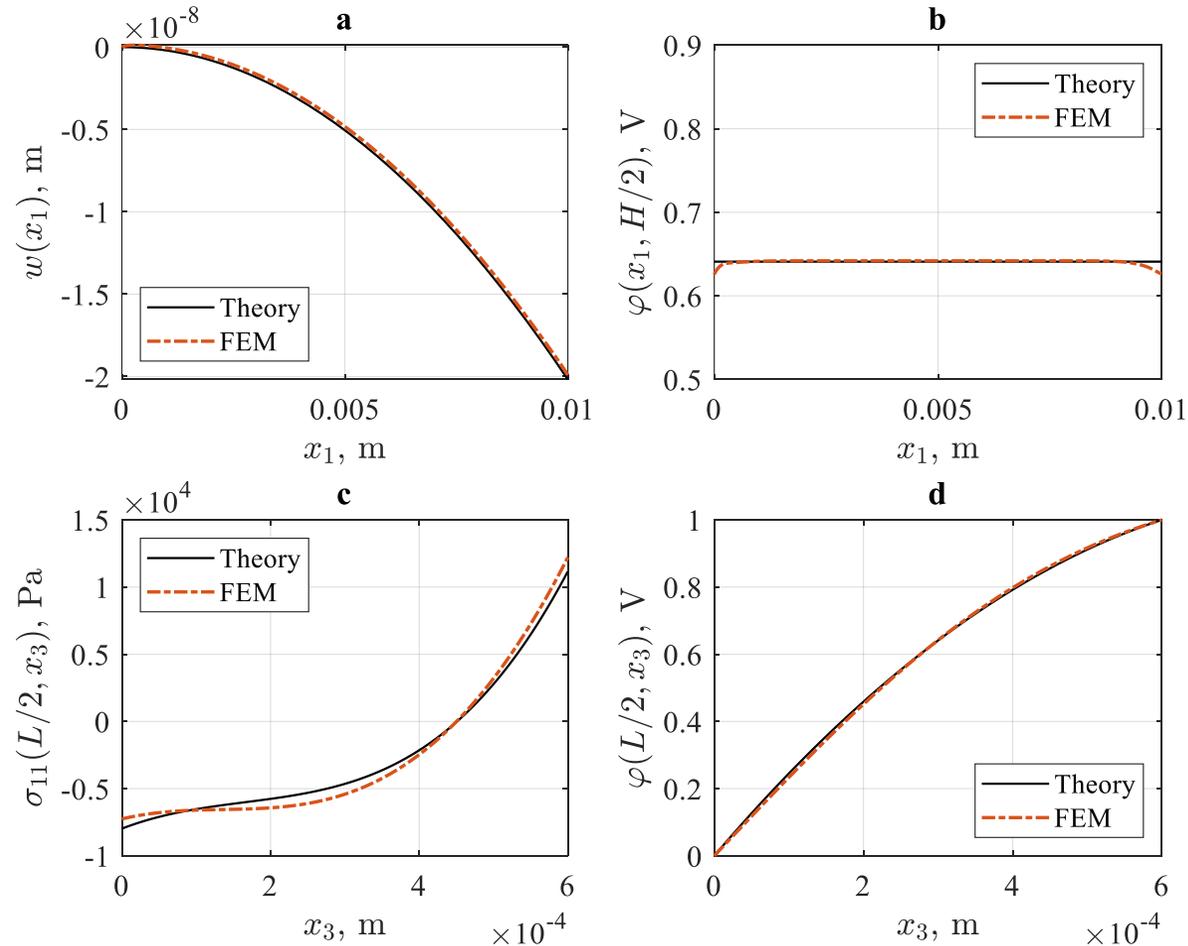
Рассмотрим колебания пластины на частоте 50 Гц, при условии  $V_1 = V_3 = 0$  и  $p = 1$  Н/м,

Пористость на внешней границе составляет 50 %, а на внутренней 0 %.



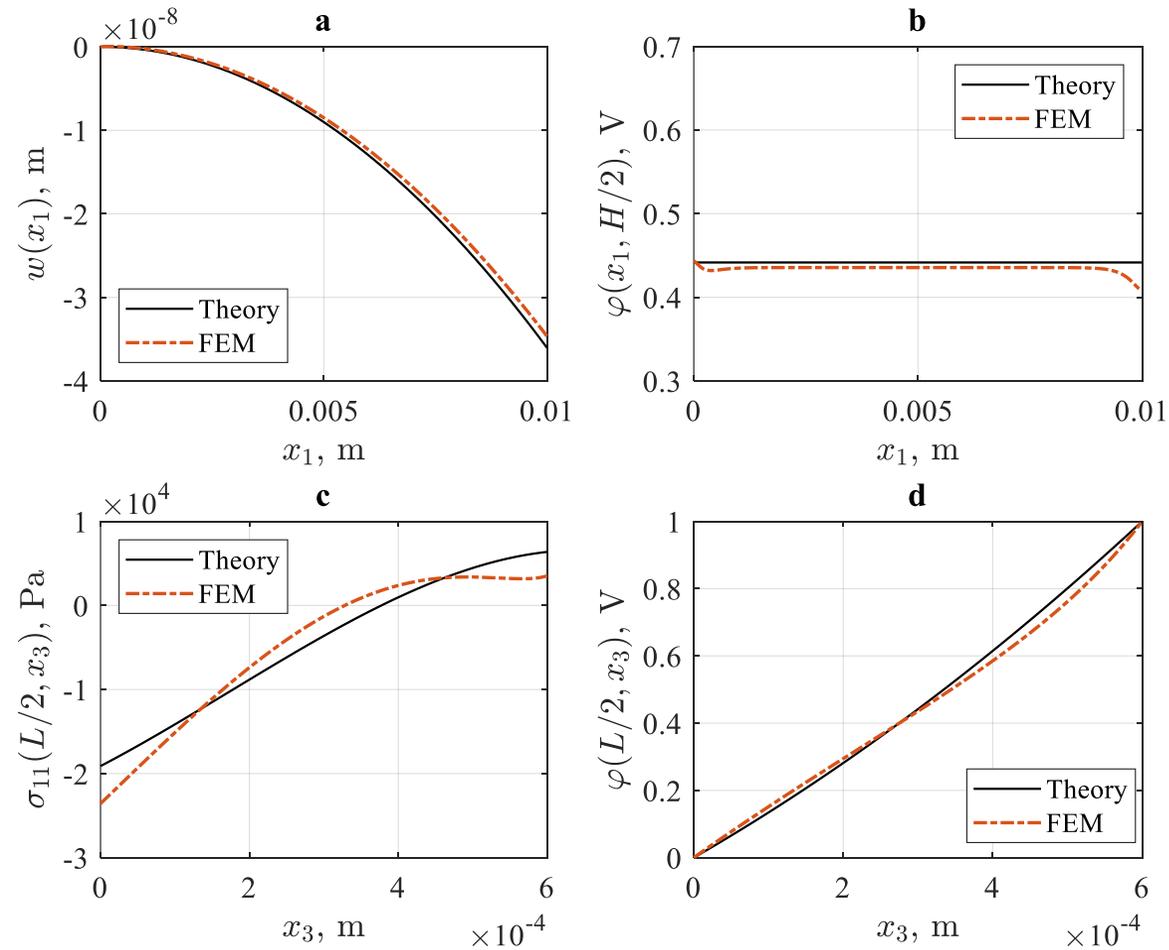
# Численные результаты

Рассмотрим колебания пластины на частоте 50 Гц, при условии  $V_1 = 0$ ,  $V_3 = 1$  и  $p = 0$  Н/м, Пористость на внешней границе составляет 0 %, а на внутренней 50 %.



# Численные результаты

Рассмотрим колебания пластины на частоте 50 Гц, при условии  $V_1 = 0$ ,  $V_3 = 1$  и  $p = 0$  Н/м, Пористость на внешней границе составляет 50 %, а на внутренней 0 %.

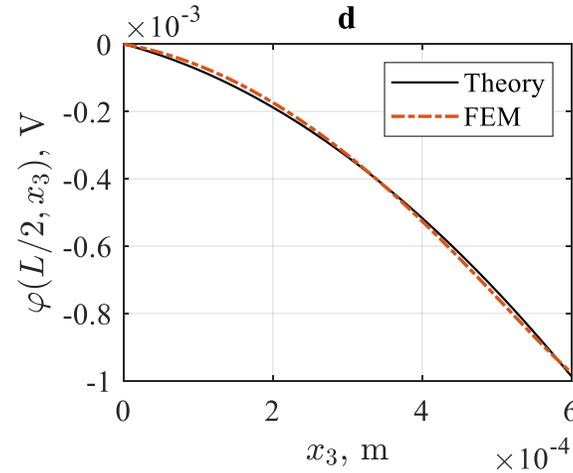
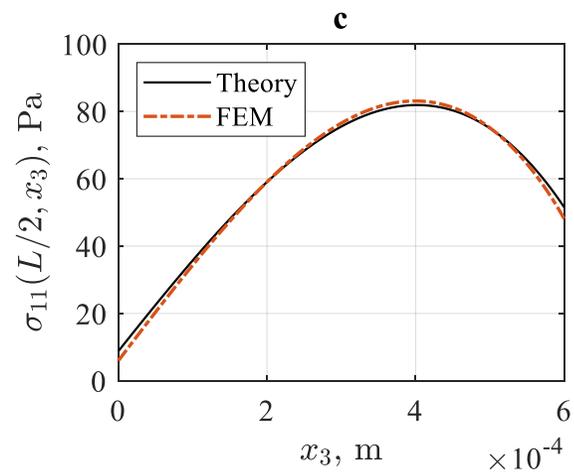
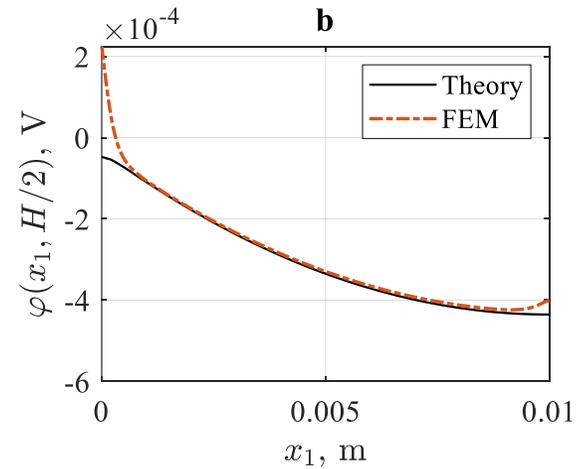
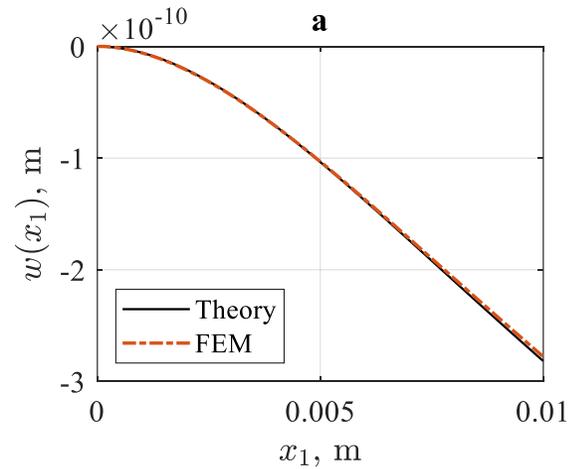


# Численные результаты

Рассмотрим колебания пластины на частоте 50 Гц, при условии  $V_1 = 0$  и  $p = 1$  Н/м,

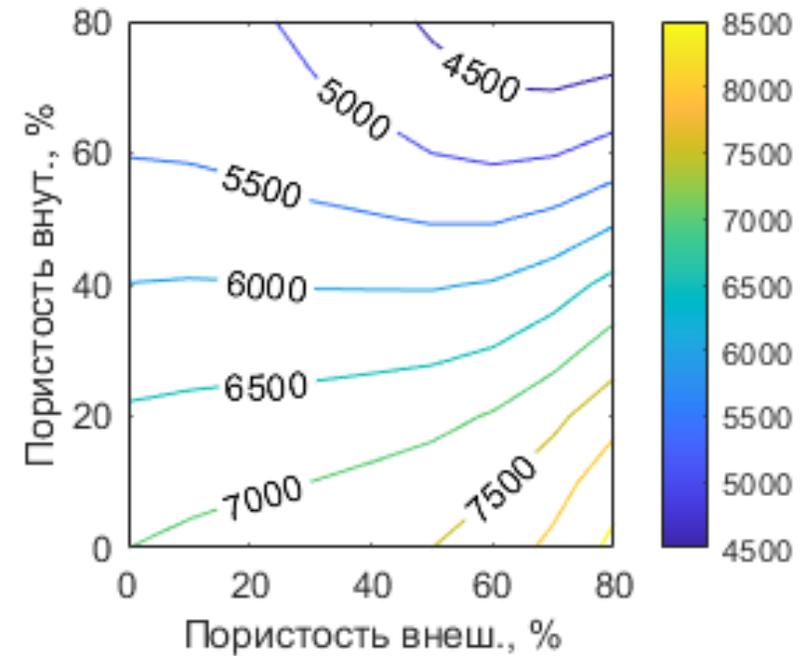
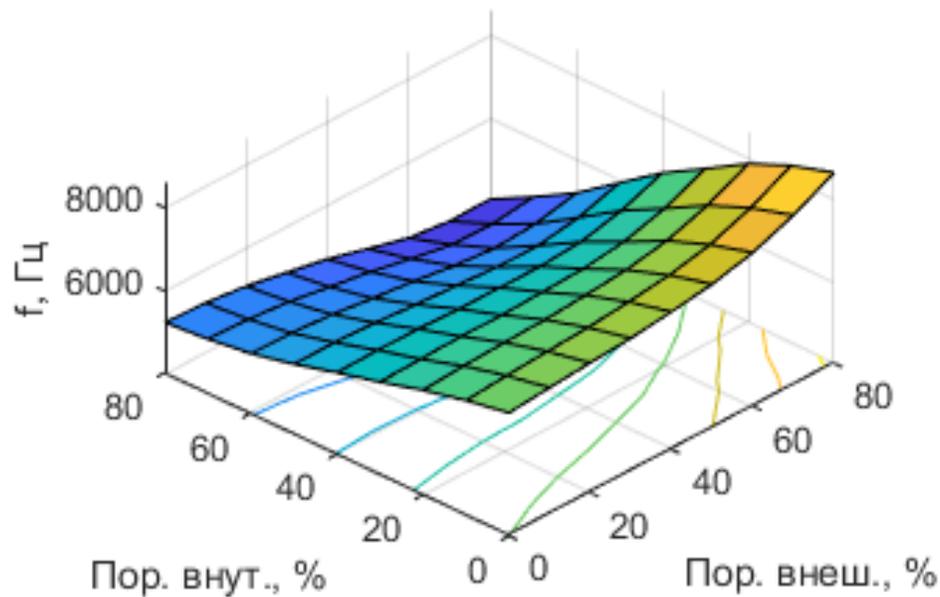
Пористость на внешней границе составляет 0 %, а на внутренней 50 %.

$$\int_{\partial S_E} D_3 ds = 0$$



# Собственные частоты биморфа

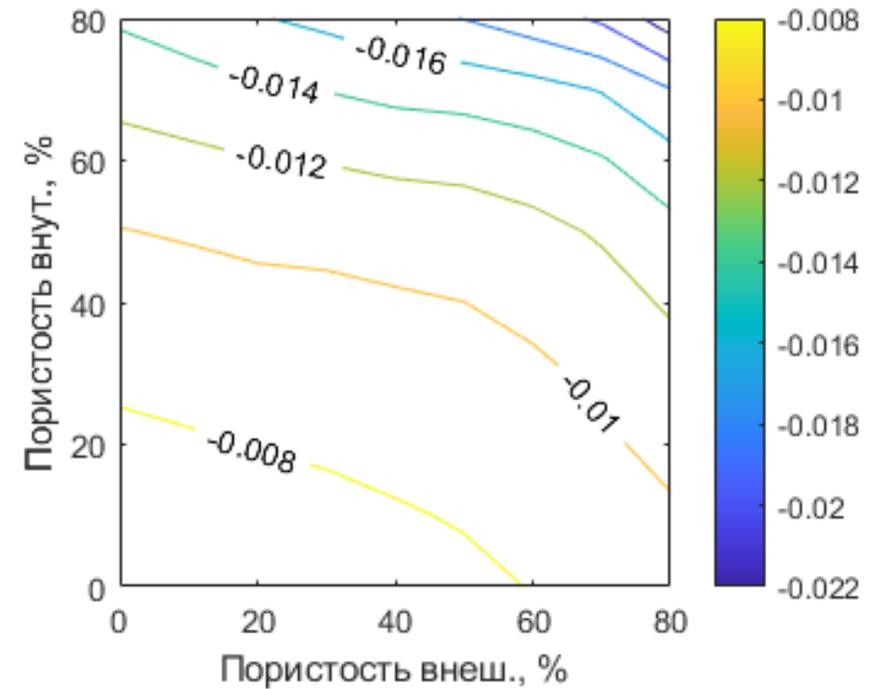
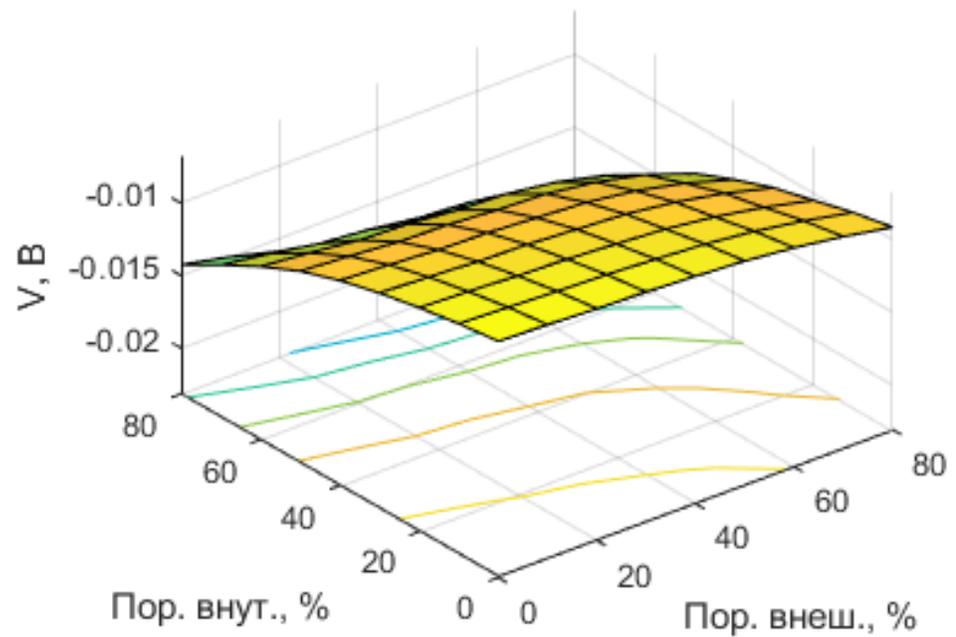
Пористость (внеш-внутр)	1 мода FEM	1 мода Theory	Погрешно сть	2 мода FEM	2 мода Theory	Погрешно сть	3 мода FEM	3 мода Theory	Погрешно сть
0 50	7406.7	7498.523	1.2	41046	46064	12.2	100038	125099	25
50 0	5776.0	5721	0.9	34253	35365	3.2	89127	96918	8.7
50 50	5400.9	5458	1	31231	33653	7.7	79026	91871	16.2



Зависимость первой резонансной частоты от пористости: поверхности и её проекция на плоскость

# Электрический потенциал

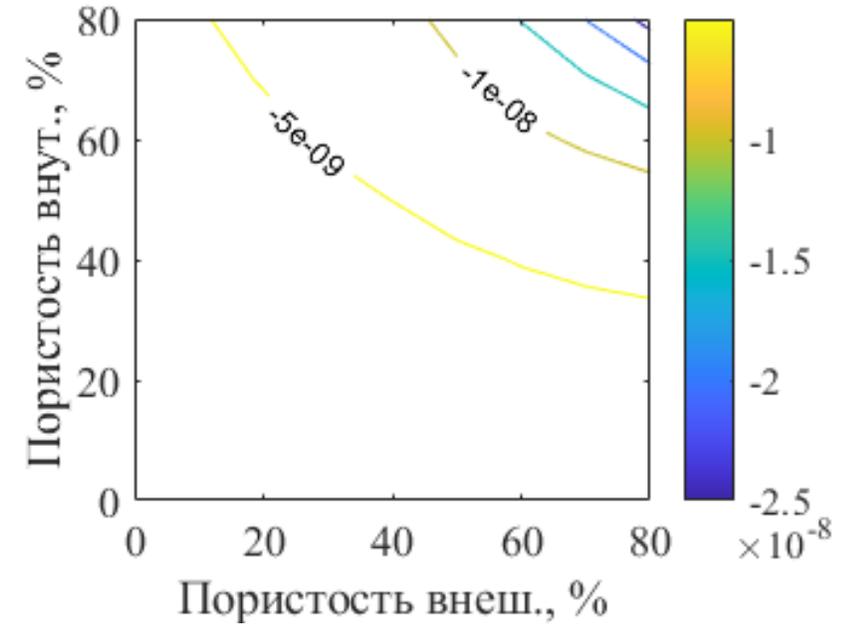
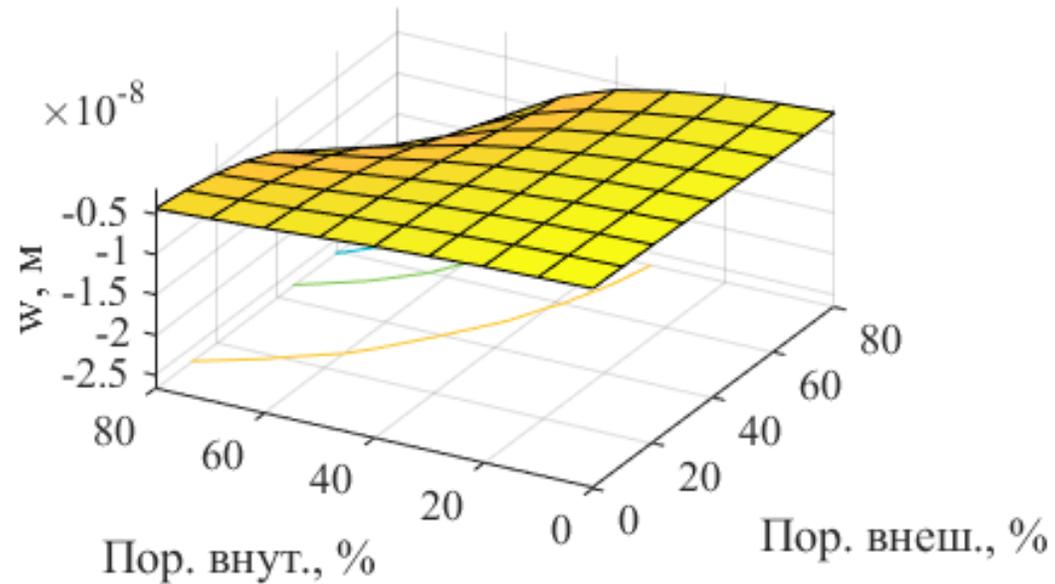
$$f = 500 \text{ Гц}, \rho = 10 \text{ Н/м}$$



Зависимость величины выходного электрического потенциала от пористости:  
поверхность и проекция изолиний на плоскость изменения параметров

# Смещение конца пластины при механическом возбуждении

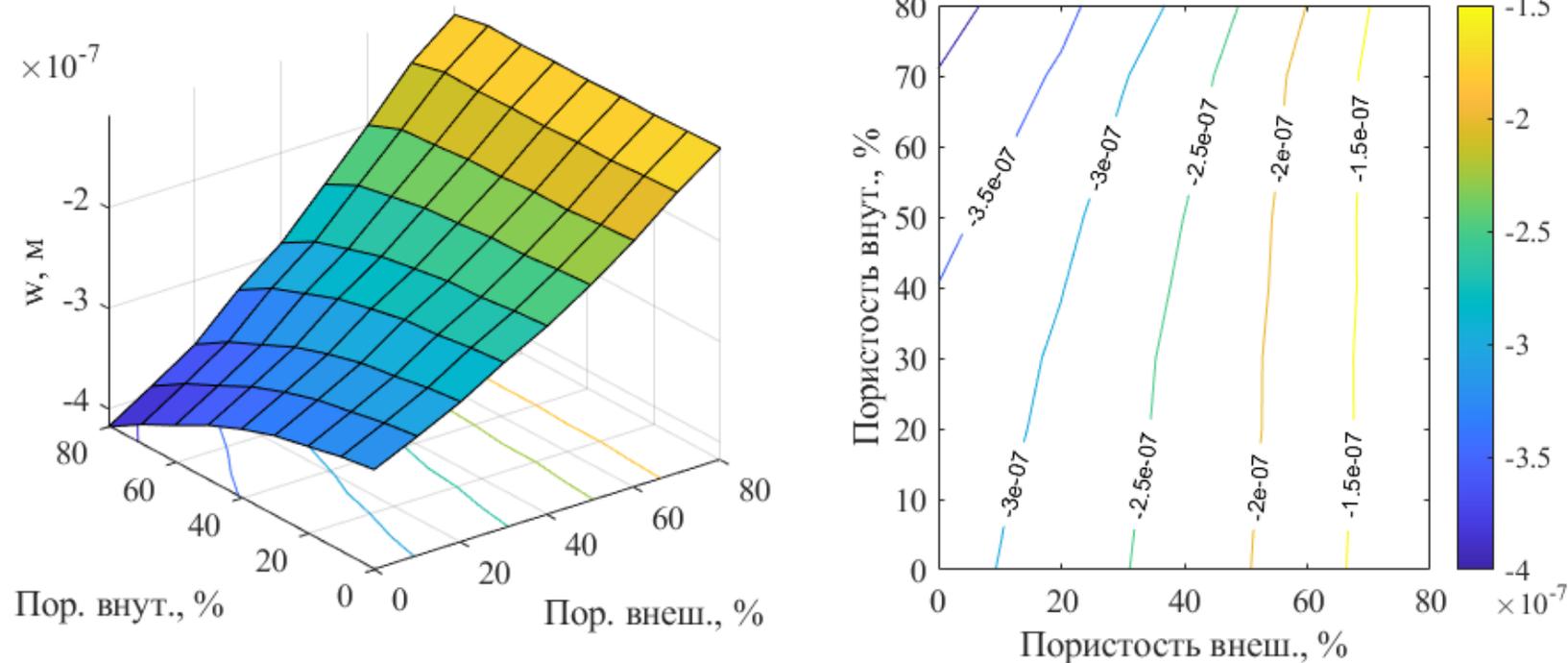
$$f = 500 \text{ Гц}, p = 10 \text{ Н/м}$$



Зависимость величины смещения конца пластины от пористости:  
поверхность и проекция изолиний на плоскость изменения  
параметров

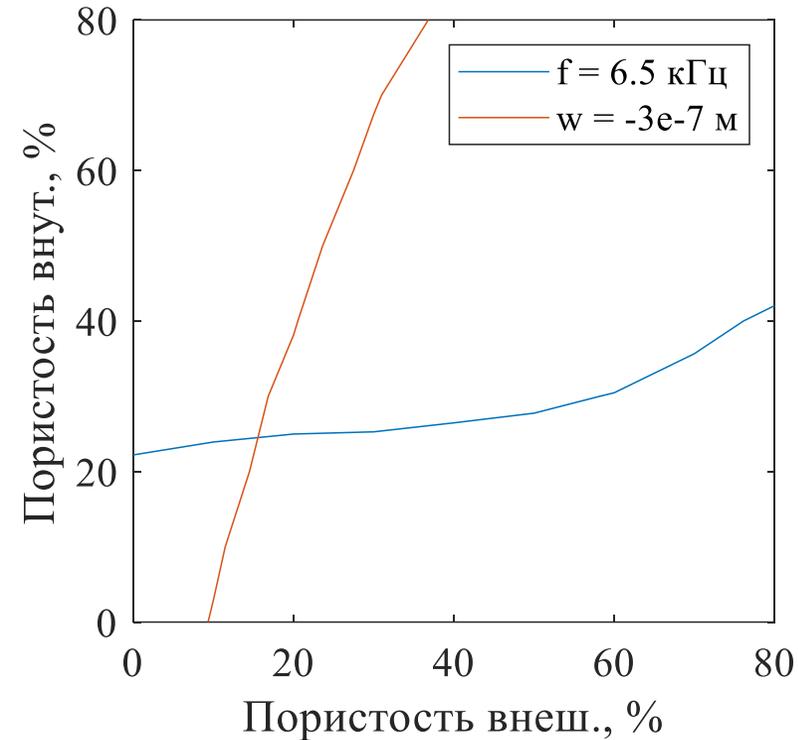
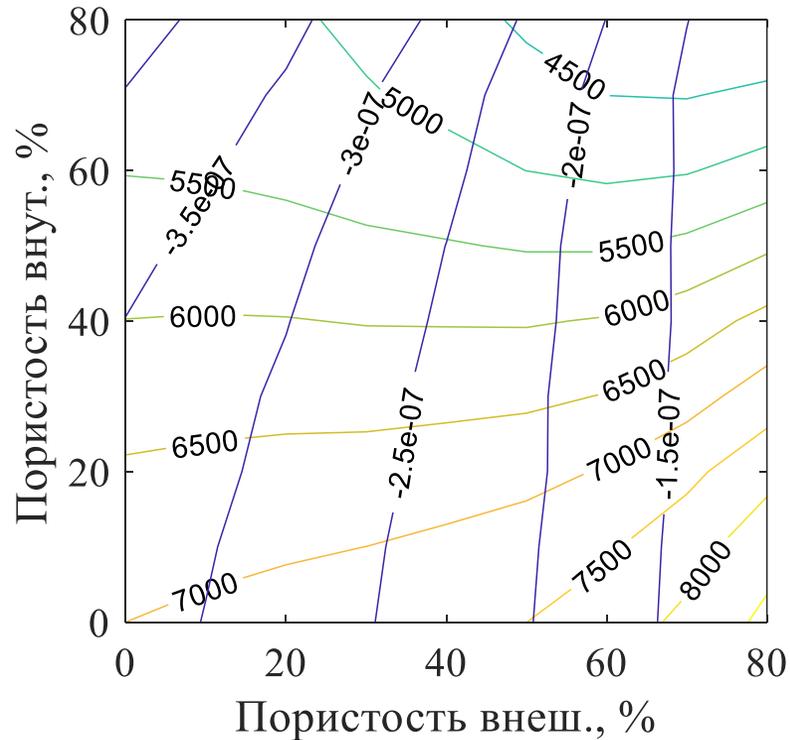
# Смещение конца пластины при электрическом возбуждении

$$f = 500 \text{ Гц}, V_2 = 10 \text{ В}$$



Зависимость величины смещения конца пластины от пористости:  
поверхность и проекция изолиний на плоскость изменения  
параметров

# Смещение конца (электр.) vs первая резонансная частота



Зависимости величины смещения свободного конца пластины при электрическом возбуждении и первой резонансной частоты от пористости: общий и частный случай

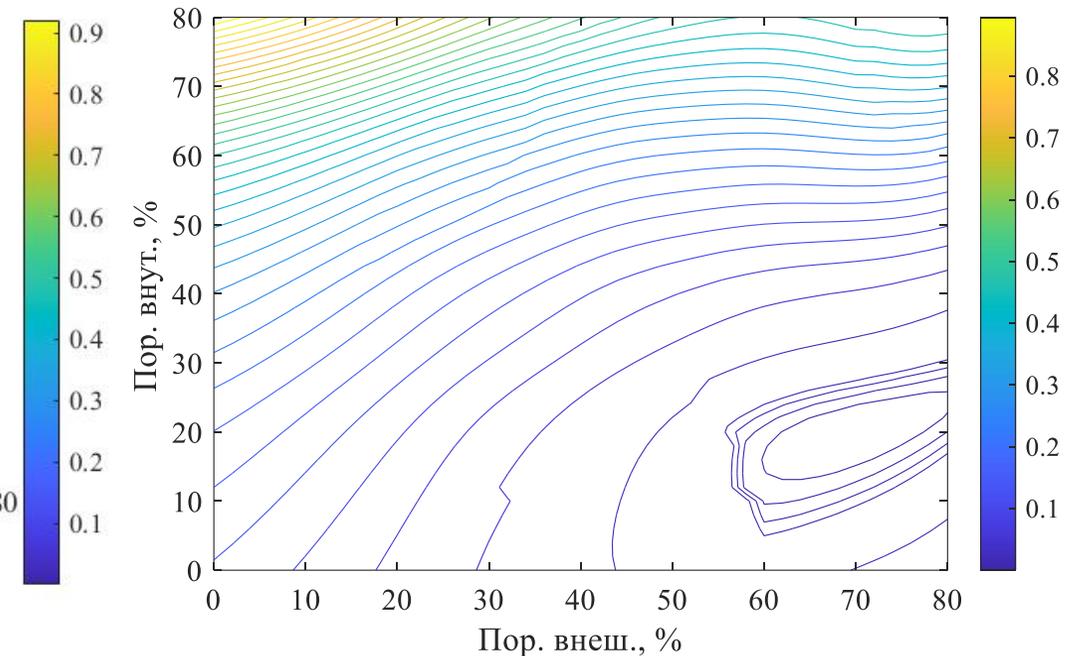
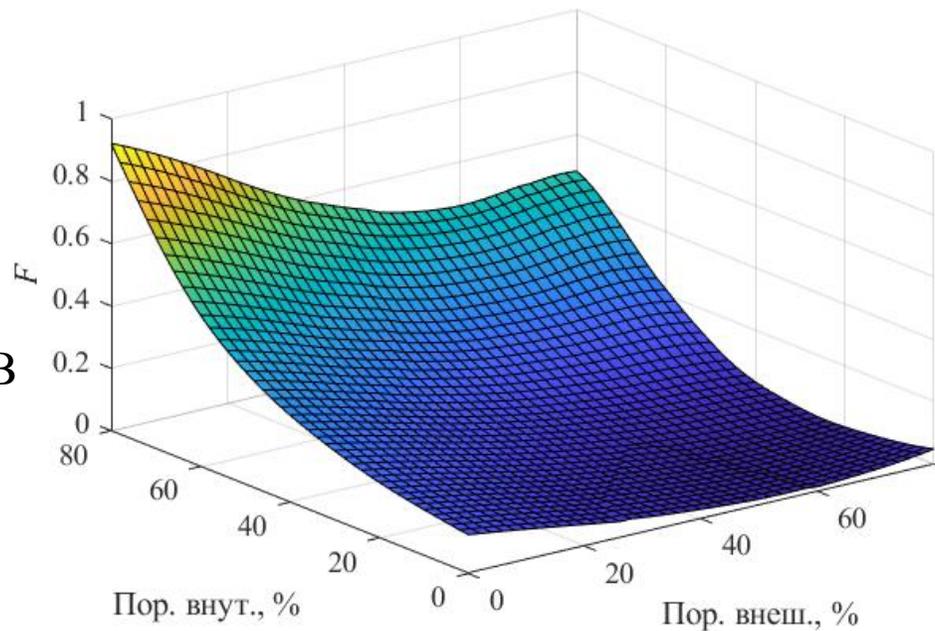
# Идентификация свойств с помощью генетического алгоритма

Фитнес-функция:

$$F = \left( \frac{f_1 - f_1^*}{f_1} \right)^2 + \left( \frac{w_e - w_e^*}{w_e} \right)^2$$

$f_1$  – первая резонансная частота  
 $w_e$  – прогиб при электрическом возбуждении

$P_{внеш} = 20\%$   
 $P_{внут} = 70\%$   
 $f_1^* = 5201$  Гц  
 $w_e^* = -3.43e-08$  В

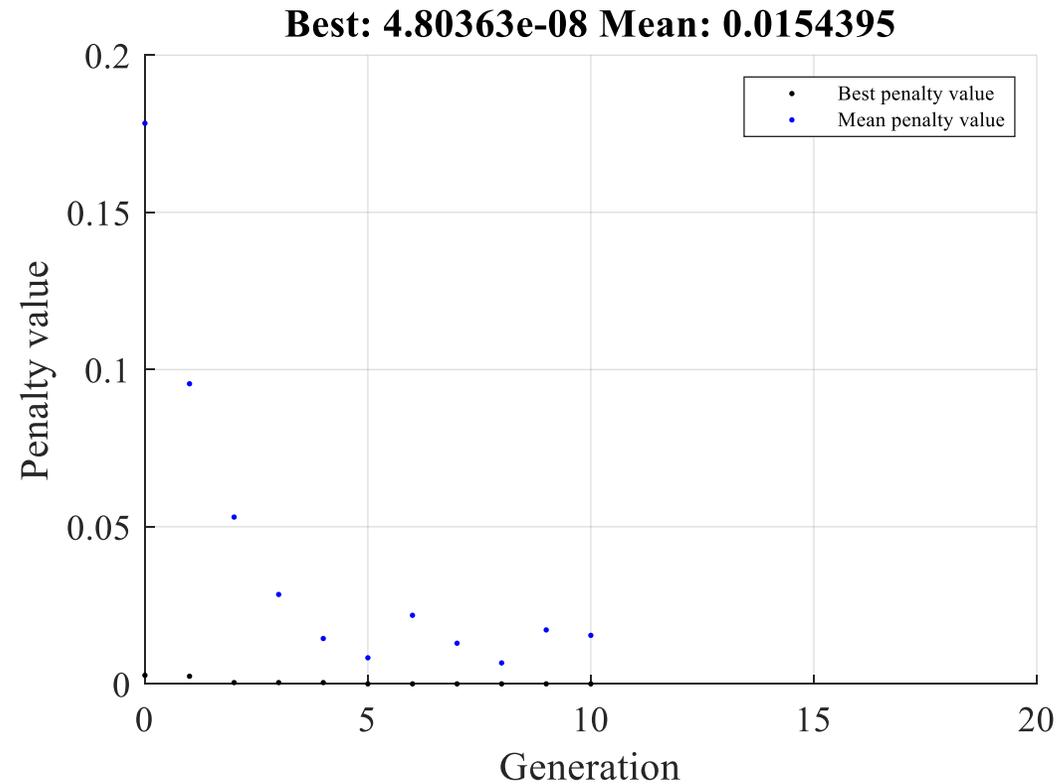


Зависимость фитнес-функции от параметров пористости: поверхность и проекция

# Генетический алгоритм

$P_{внеш}^* = 70 \%$   
 $P_{внут}^* = 20 \%$   
 $f_I^* = 5201 \text{ Гц}$   
 $w_e^* = -3.43e-08 \text{ м}$   
FitnessLimit =  $1e-6$

$P_{внеш} = 70 \%$   
 $P_{внут} = 19.978 \%$



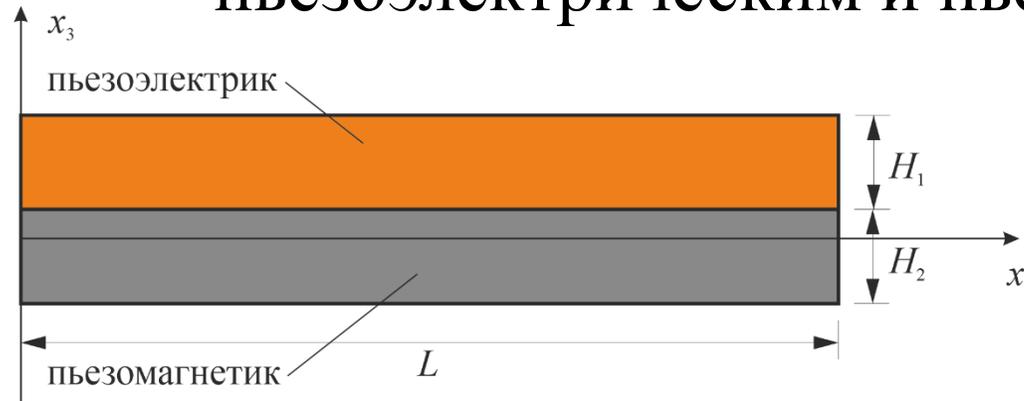
## Выводы по разделу

Для пьезоактивного биморфа из ФГПМ с неоднородными свойствами по толщине решена прямая и обратная задачи:

- на основе вариационного принципа, построена прикладная теория колебаний для квадратичного распределения свойств (пористости) по толщине;
- для принятого квадратичного закона изменения свойств по толщине, решена обратная коэффициентная задача идентификации параметров неоднородности

Обратная задача решена с помощью ГА: первой резонансной частоты изгибных колебаний и амплитуды смещения свободного конца биморфа при возбуждении колебаний. Эта используемая дополнительная информация может быть измерена в натурном эксперименте.

# Моделирование биморфов с пьезоэлектрическим и пьезомагнитным слоем



Биморф (длина - 10 мм) шарнирно закреплен на концах, верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы, для магнитного потенциала рассмотрено два типа главных граничных условий: в первом случае магнитный потенциал равен нулю на внутренней поверхности пьезомагнитного слоя; во втором равенство нулю предполагается в окрестности точек закрепления.

## Пьезоэлектрик:

$C_{11}^E$	$C_{12}^E$	$C_{13}^E$	$C_{33}^E$	$C_{44}^E$
139	77.8	74.3	115	25.6
$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$k_{11} / \epsilon_0$	$k_{33} / \epsilon_0$
-5.2	15.1	12.7	730	635

Здесь  $C_{ij}^E$  (ГПа) - коэффициенты упругости,  $e_{ij}$  (Кл/м<sup>2</sup>) - пьезоэлектрические коэффициенты,  $k_{ij}$  и  $\epsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость,  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м, плотность пьезокерамики PZT-4:  $\rho = 7500$  кг/м<sup>3</sup>.

## Пьезомагнетик:

$C_{11}^M$	$C_{12}^M$	$C_{13}^M$	$C_{33}^M$	$C_{44}^M$
286	173	170	269.5	45.3
$Q_{31}$	$Q_{33}$	$Q_{15}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{33}$
580.3	699.7	550	590	157

Здесь  $C_{ij}^M$  (ГПа) - коэффициенты упругости,  $Q_{ij}$  (Н/А·м) - пьезомагнитные коэффициенты,  $\lambda_{ij}$  (10<sup>-6</sup>·Н·с<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>) - магнитная проницаемость, плотность пьезомагнитного элемента CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>:  $\rho = 5290$  кг/м<sup>3</sup>.

# Определяющие соотношения

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma_{\Omega}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{h} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}.$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right), \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = -\nabla \phi.$$

$\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - тензоры механических напряжений и деформации,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  - векторы электрической индукции и напряженности электрического поля,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  - векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля,  $\rho$  - плотность материала,  $\mathbf{c}$  - тензор упругих модулей,  $\mathbf{e}$  - тензор пьезоэлектрических модулей,  $\mathbf{h}$  - тензор пьезомагнитных модулей,  $\boldsymbol{\kappa}$  - тензор диэлектрических проницаемостей,  $\boldsymbol{\alpha}$  - тензор магнитоэлектрических модулей,  $\boldsymbol{\mu}$  - тензор магнитных проницаемостей,  $\mathbf{f}$  - вектор плотности массовых сил,  $\sigma_{\Omega}$  - объемная плотность электрических зарядов,  $\mathbf{u}$  - вектор перемещений,  $\varphi$  и  $\phi$  - электрический и магнитный потенциалы.

# Граничные условия

Сформулируем механические граничные условия. Пусть поверхность  $S$  состоит из двух частей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , так что  $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , причём  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \text{ на } \Gamma_1, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p} \text{ на } \Gamma_2$$

Далее сформулируем электрически граничные условия. Пусть поверхность  $S$  состоит из двух частей  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$ , так что  $S = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ , причём  $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ .

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t) \text{ на } \Gamma_3, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -\sigma_0 \text{ на } \Gamma_4$$

где  $\sigma_0$  - плотность поверхностных зарядов. Кроме того, в случае если электроды подключены к внешней цепи, необходимо добавить два условия:

$$\varphi|_{S_E} = v, \quad \iint_{S_E} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} dS = I, \quad (*)$$

где  $S_E$  - площадь электрода,  $v$  - неизвестный потенциал, который находится из второго условия,  $I$  - электрический ток.

Наконец, сформулируем магнитные граничные условия. Пусть поверхность  $S$  состоит из двух частей  $\Gamma_5$  и  $\Gamma_6$ , так что  $S = \Gamma_5 \cup \Gamma_6$ , причём  $\Gamma_5 \cap \Gamma_6 = \emptyset$ .

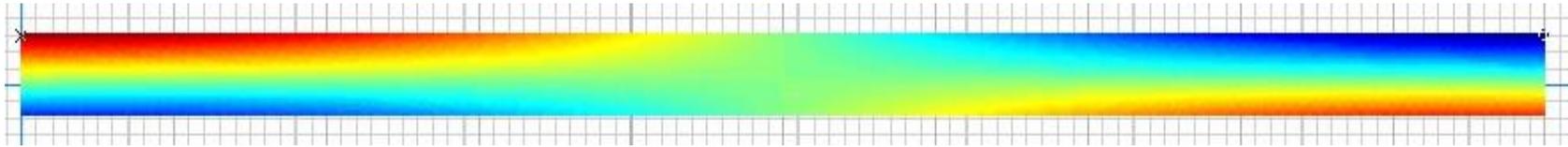
$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t) \text{ на } \Gamma_5, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \sigma_1 \text{ на } \Gamma_6$$

где  $\sigma_1$  - плотность поверхностных свободных токов вдоль границы.

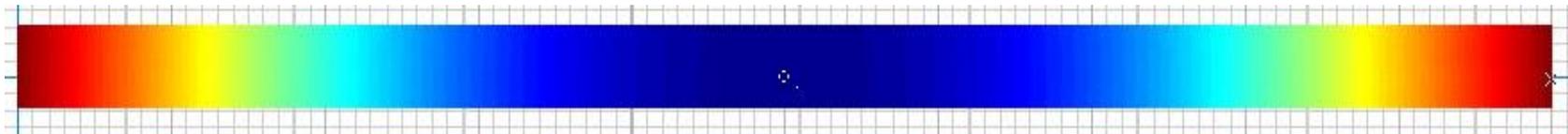
# Конечно-элементная модель

Граничные условия для пьезомагнитного слоя: нулевой магнитный потенциал в точках закрепления  
Толщина пьезоэлектрического слоя  $H_1=0.3$  мм, пьезомагнитного  $H_2=0.2$  мм. Первая изгибная мода.

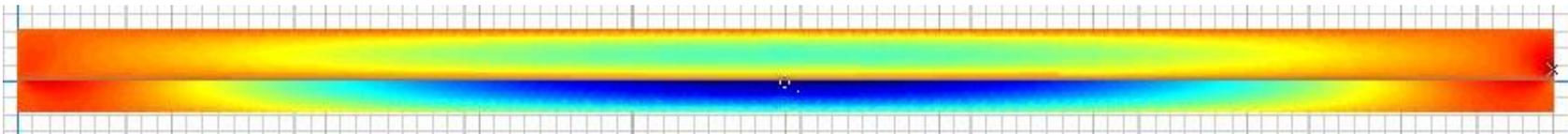
Распределение горизонтальных смещений:



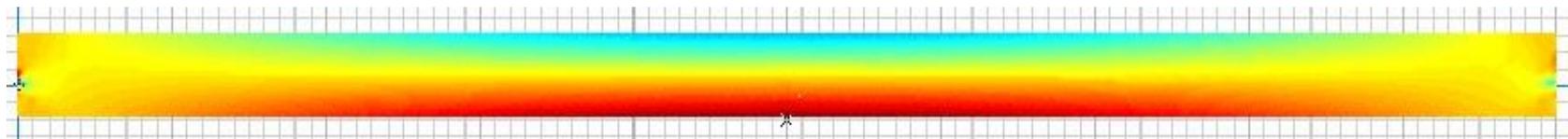
Распределение вертикальных смещений:



Распределение электрических и магнитных потенциалов :

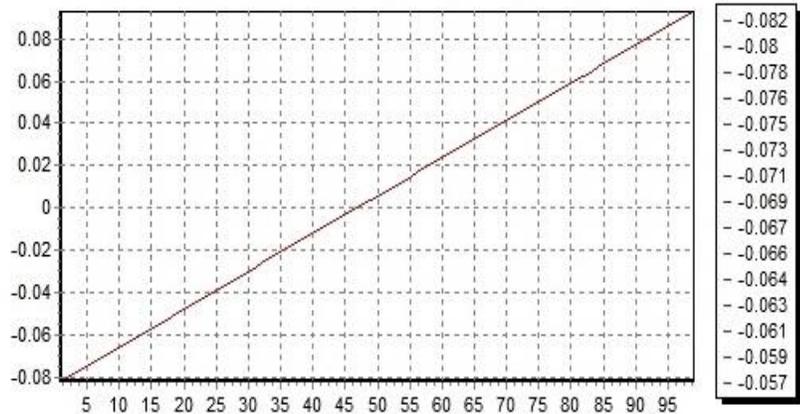


Распределение продольной деформации :

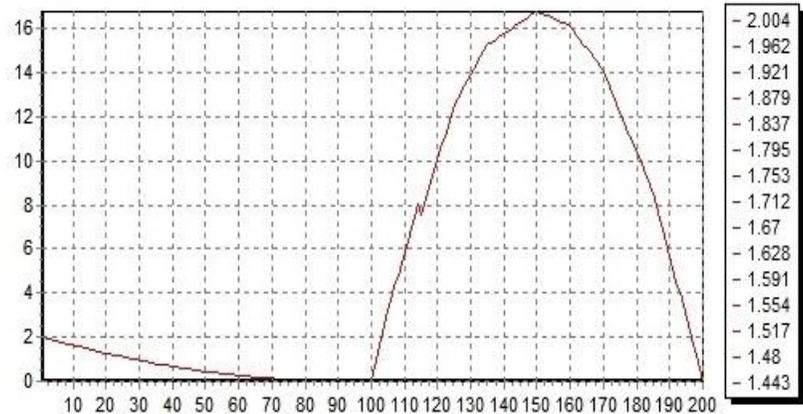


# Конечно-элементная модель

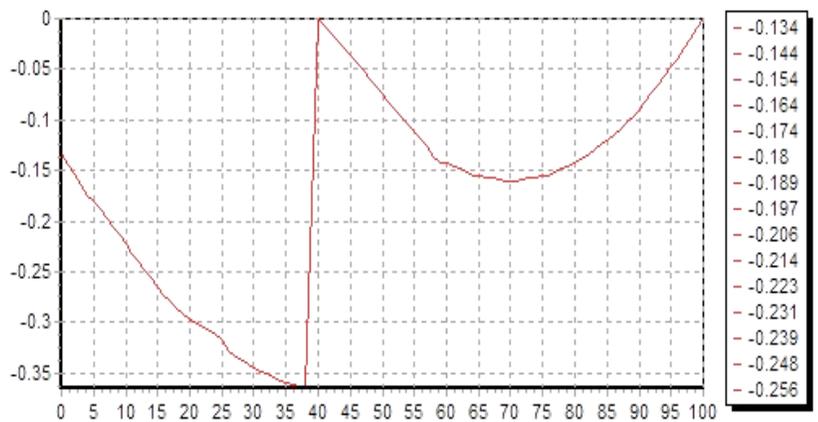
Граничные условия для пьезомагнитного слоя: нулевой магнитный потенциал на внутренней поверхности пьезомагнитного слоя. Первая изгибная мода.



а)



б)

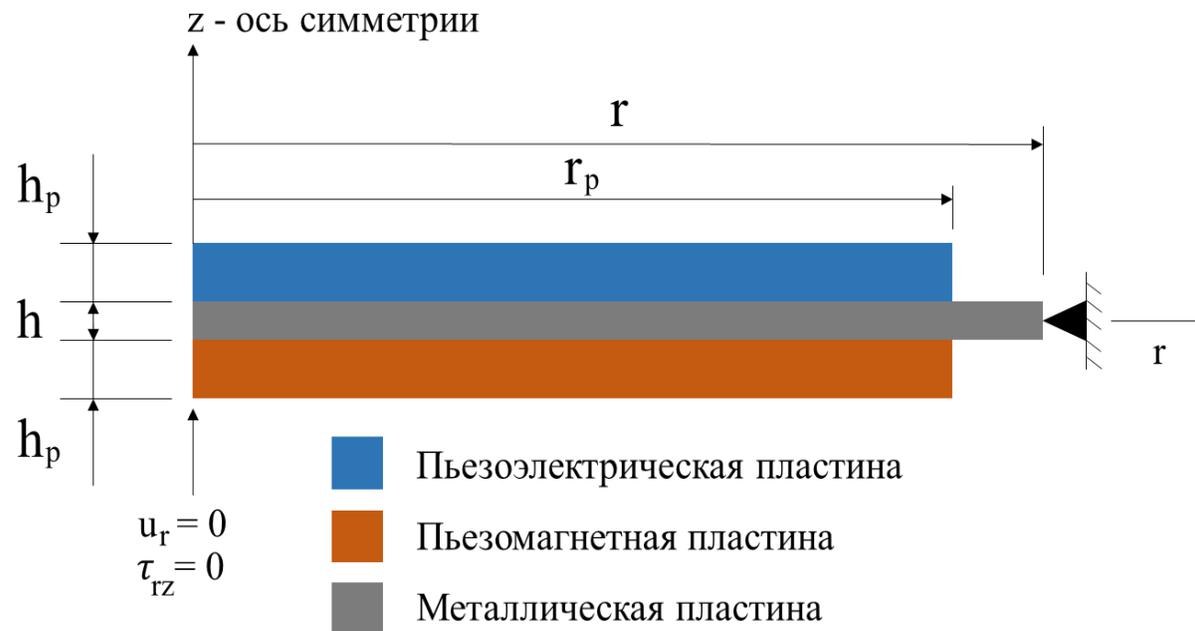


в)

Распределение: а) горизонтальных смещений, б) электрических и магнитных потенциалов при  $H_1=H_2=0.2$  мм, в) электрических и магнитных потенциалов при  $H_1=0.3$  мм  $H_2=0.2$  мм

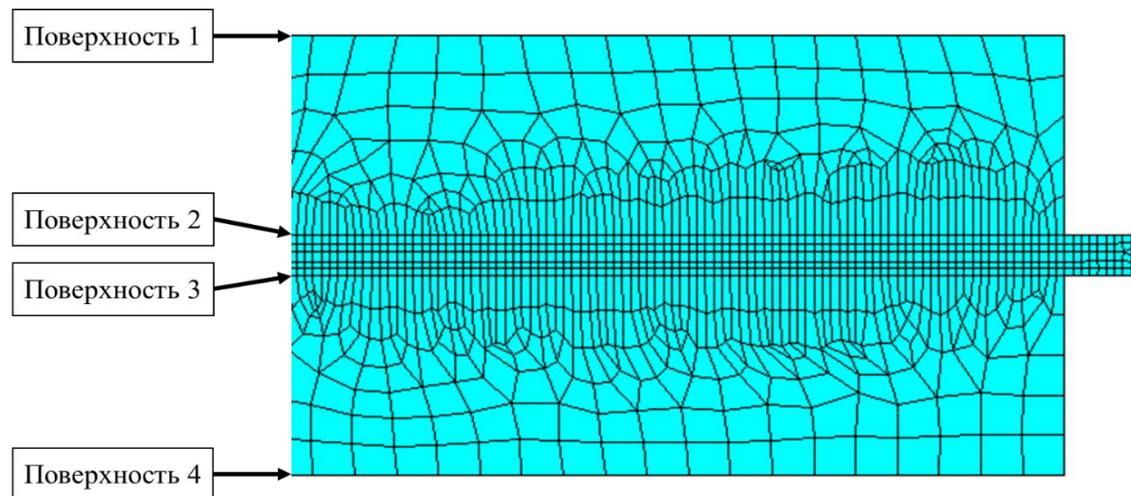
# Постановка задачи для диска

Рассматриваемое устройство накопления энергии представляет собой осесимметричную конструкцию, которая состоит из металлического диска (подложка) с наклеенными на него двумя пьезоактивными слоями



# Конечно-элементная модель

При анализе предполагается выполнение следующих механических и электромагнитных граничных условий. На левом конце заданы условия симметрии, правый конец шарнирно закреплен. Для вычисления частоты резонанса устройства электрические потенциалы заданы на поверхностях 1, 2; на поверхности 3 задан магнитный потенциал и плотность магнитного потока задана на поверхности 4. В случае вычисления частоты антирезонанса устройства на поверхностях 1-4 заданы такие же граничные условия как для вычисления частоты резонанса, однако электрический потенциал на поверхности 1 не известен, и находится из условия (\*)



# Конечно-элементная модель

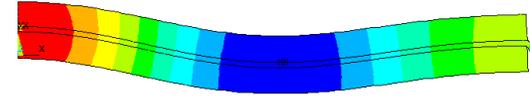
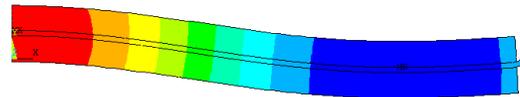
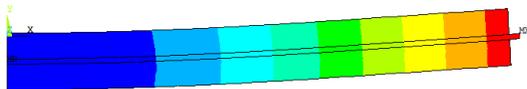
Рассматриваются собственные колебания пьезоэлемента, радиус которого составляет  $r=9,8$  мм, толщины пьезослоев  $h_p=0,5$  мм, радиус подложки  $r=10$  мм, толщина подложки  $h=0,1$  мм. Далее представлены первые три собственные частоты антирезонанса.

11.675 кГц

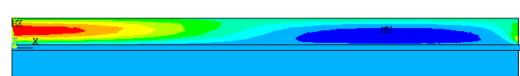
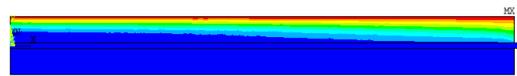
56.748 кГц

115.572 кГц

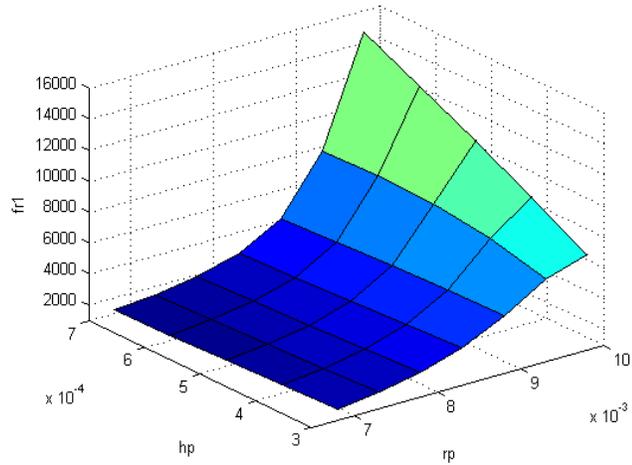
Распределение вертикального смещения на деформированном состоянии



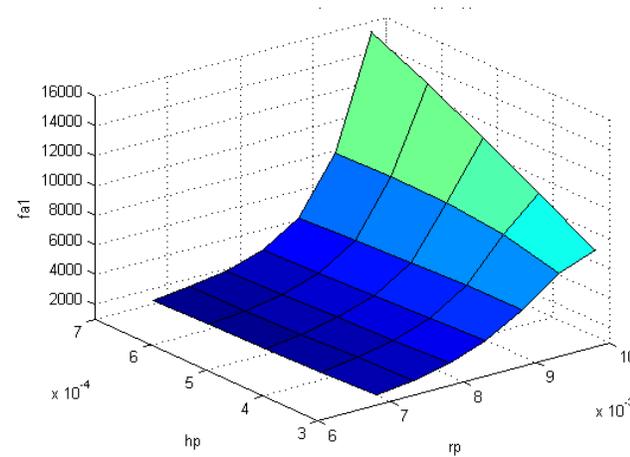
Распределение электрического и магнитного потенциала на недеформированном образце



# Конечно-элементная модель

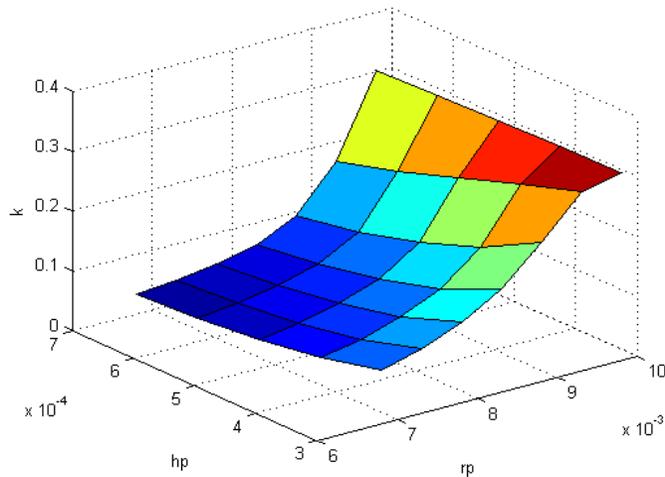


Частота резонанса



Частота антирезонанса

В представленных результатах численных расчетов исследуется зависимость собственных частот резонанса и антирезонанса, коэффициента электромеханической связи от геометрических параметров



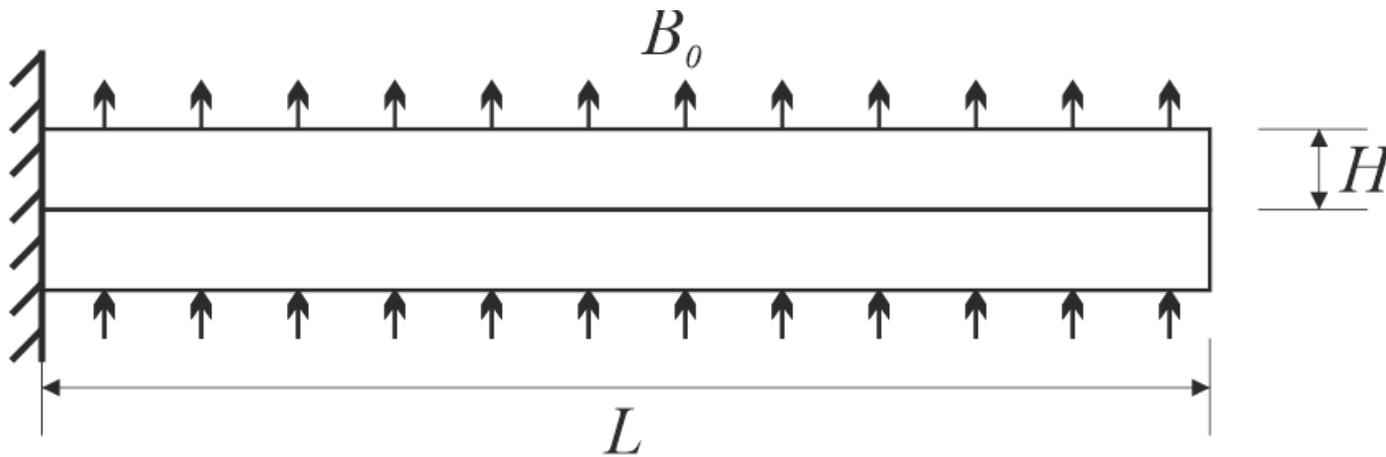
Коэффициент электромеханической связи

Значения толщины пьезослоев  $h_p$  изменяются в пределах  $0,3 \div 0,7$  мм, а также их значения радиуса  $r_p$  изменяются в пределах  $6,8 \div 9,8$  мм.

## Выводы по разделу

Разработаны конечно-элементные модели устройств накопления энергии на основе балки и круглых пластин в пакетах AСELAN и ANSYS. Решены задачи определения собственных частот резонанса и антирезонанса. Построены графические зависимости распределений механических, электрических и магнитных характеристик. Для диска построены зависимости коэффициента электромеханической связи от геометрических параметров устройства: толщины и радиуса пьезоактивных слоев.

# Постановка задачи для электромагнитоупругого биморфа



Биморф ( $L = 10$  мм,  $H = 0.6$  мм)  
жестко закреплен с левого конца.

Магнитный потенциал на  
внутренней границе равен 0.

Электрический потенциал на обоих  
электродах равен 0.

На больших внешних гранях задан  
магнитный поток  $B_0 = 5$  мкВб с  
частотой 1 кГц, а боковые –  
изолированы.

# BaTiO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>

BaTiO<sub>3</sub>: 80%

CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>: 20%

$$\rho = 5874$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 1.85 \times 10^{11} & 9.0 \times 10^{10} & 7.2 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 9.0 \times 10^{10} & 1.85 \times 10^{11} & 7.2 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 7.2 \times 10^{10} & 7.2 \times 10^{10} & 2.0 \times 10^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.9 \times 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.9 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.75 \times 10^{10} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} -2.3 \times 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & -2.3 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 2.35 \times 10^{-11} \end{pmatrix}$$

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 8.8 & 0 \\ 8.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 110 & 0 \\ 110 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 9.4 \times 10^{-9} & 0 & 0 \\ 0 & 9.4 \times 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 3.0 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} 0.000125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00002 \end{pmatrix}$$

Kim, Jin-Yeon. "Micromechanical analysis of effective properties of magneto-electro-thermo-elastic multilayer composites." *International Journal of Engineering Science* 49.9 (2011): 1001-1018.

# Уравнения и определяющие соотношения для COMSOL

$$\mathbf{u} = (u(x, z), 0, v(x, z)).$$

$$B_1 = \frac{h_{15}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad D_1 = \frac{e_{15}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$B_3 = h_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + h_{33} \frac{\partial v}{\partial z} - \alpha_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad D_3 = e_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial v}{\partial z} - \epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \alpha_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u,$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = -\rho \omega^2 v,$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0,$$

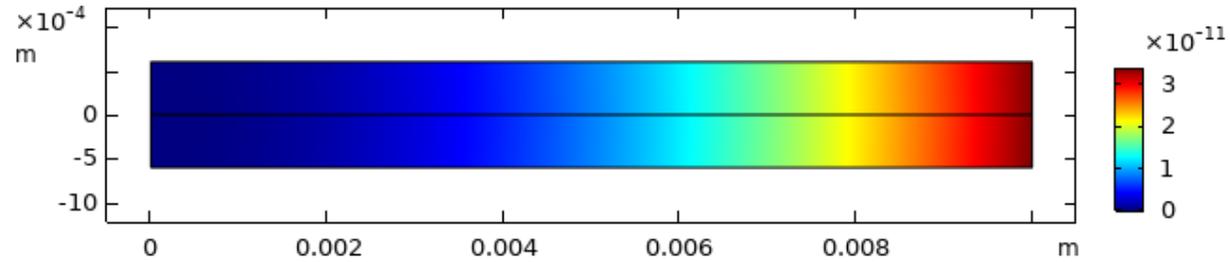
$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma_{11} = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{31} \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

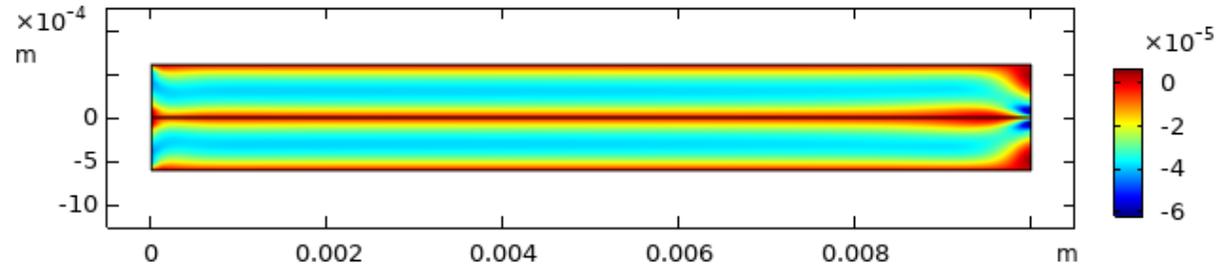
$$\sigma_{13} = \frac{C_{44}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_{15} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$\sigma_{33} = C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial v}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

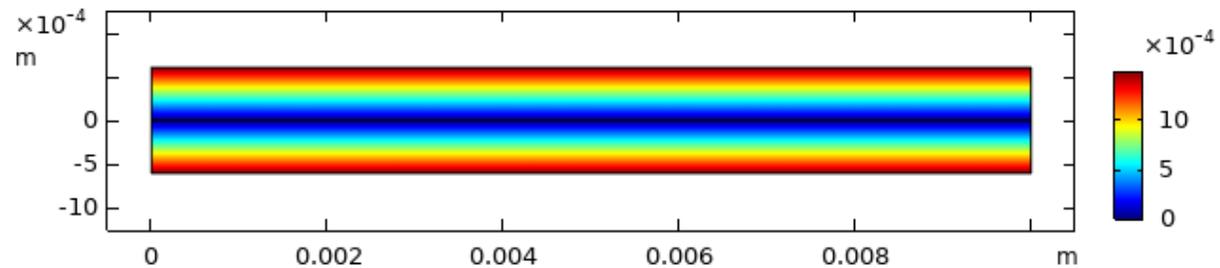
# КЭ результаты



Распределение прогиба



Распределение электрического потенциала



Распределение магнитного потенциала

# Прикладная теория

В работе на основе вариационного принципа и гипотез Кирхгофа-Лява для поперечного изгиба пластин о распределении механического, электрического и магнитного полей, получена система уравнений описывающая цилиндрический изгиб биморфа. Общий вид вариационного уравнения для случая установившихся колебаний с частотой  $\omega$  плоского тела имеет вид:

$$\iint_S \delta \tilde{H} dS - \rho \omega^2 \iint_S u_i \delta u_i dS + \oint_A (p_{0i} \delta u_i + \sigma_0 \delta \varphi + B_0 \delta \psi) dA = 0$$

$$\delta \tilde{H} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i - B_i \delta H_i$$

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 w_{,1},$$

$$u_3(x_1, x_3) = w(x_1),$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{33}$$

$$\tilde{c}_{11} = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \quad \tilde{e}_{31} = -\frac{c_{13} e_{33}}{c_{33}} + e_{31}, \quad \tilde{h}_{31} = -\frac{c_{13} h_{33}}{c_{33}} + h_{31}, \quad \tilde{\alpha}_{33} = -\frac{e_{33} h_{33}}{c_{33}} - \alpha_{33}, \quad \tilde{\epsilon}_{33} = -\frac{e_{33}^2}{c_{33}} - \epsilon_{33}$$

# Электрический и магнитный потенциалы

Электрический потенциал на внутреннем и внешнем электроде пьезомагнитного слоя принимается равным нулю, поэтому распределение электрического потенциала предполагается квадратичным и неоднородным по длине элемента.

$$\varphi(x_1, \tilde{x}_3) = V_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{h} - 1 \right) + V_1(x_1) \left( 1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{h^2} \right) + V_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{h} + 1 \right)$$

$$V_0(x_1) = V_0 = const,$$

$$V_1(x_1) = \Phi(x_1),$$

$$V_2(x_1) = V_2 = const.$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 - h/2$$

Магнитный потенциал на внутренней границе пьезомагнитного слоя принимается равным нулю, на внешней границе он имеет равномерное распределение, поэтому распределение магнитного потенциала предполагается квадратичным и неоднородным по длине элемента.

$$\psi(x_1, \tilde{x}_3) = M_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{h} - 1 \right) + M_1(x_1) \left( 1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{h^2} \right) + M_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{h} + 1 \right)$$

$$M_0(x_1) = V_0 = const,$$

$$M_1(x_1) = \bar{\Xi}_2(x_1),$$

$$M_2(x_1) = \bar{\Xi}_3(x_1).$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 - h/2$$

# Электрическое поле

Уравнение:

$$\frac{16\tilde{\epsilon}_{33}}{3H} + \frac{16\tilde{\epsilon}_{33}}{3H} V_2 - \frac{32\tilde{\epsilon}_{33}}{3H} \Phi(x) - \frac{32\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Xi_2(x) + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{16\epsilon_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) - \frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} M_0 = 0$$

Граничные условия:

$$\frac{16\epsilon_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0$$

# Магнитное поле

Уравнение для  $\Xi_2(x)$  :

$$\begin{aligned} & \frac{16}{3H} V_0 + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_2 - \frac{32\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Phi(x) - \frac{32\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_2(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \\ & - \frac{16\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} M_0 = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{16\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0$$

Уравнение для  $\Xi_3(x)$  :

$$\begin{aligned} & -\frac{2\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_0 - \frac{14\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_2 + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Phi(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_2(x) - \frac{14\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \\ & - \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{4\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) - 2B_0 - \frac{2\tilde{\mu}_{33}}{3H} M_0 = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{4\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0$$

# Поле перемещений

Уравнение:

$$\frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) + 2p_3H -$$
$$- \frac{2\rho\omega^2H^3}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + 2\omega^2\rho w(x)H + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} \frac{d^4}{dx^4} w(x) = 0$$

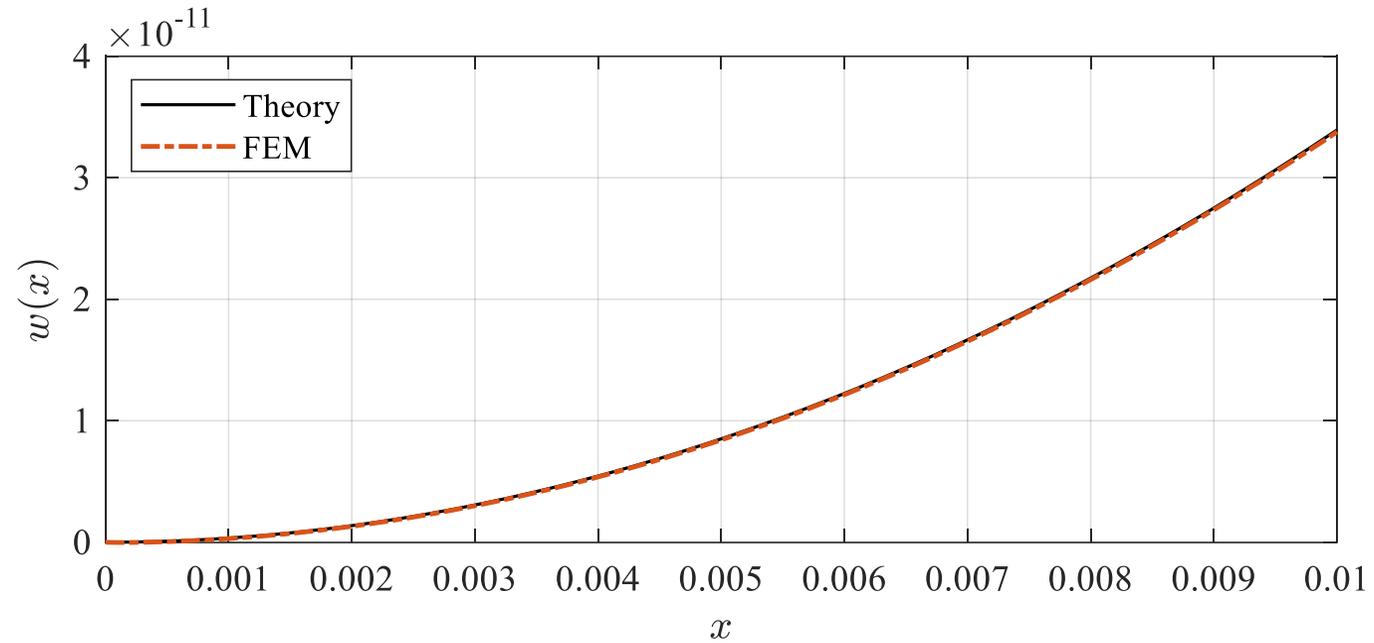
Граничные условия  $\delta w(x)$  :

$$\frac{\tilde{e}_{31}H}{3} V_0 - \frac{5\tilde{e}_{31}H}{3} V_2 + \frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \Phi(x) + \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \Xi_2(x) - \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \Xi_3(x) + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{\tilde{h}_{31}H}{3} M_0 = 0$$

Граничные условия  $\delta w'(x)$  :

$$- \frac{4\tilde{e}_{31}}{3} \frac{d}{dx} \Phi(x) - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) - \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} \frac{d^3}{dx^3} w(x) + \frac{2\rho\omega^2H^3}{3} \frac{d}{dx} w(x) = 0$$

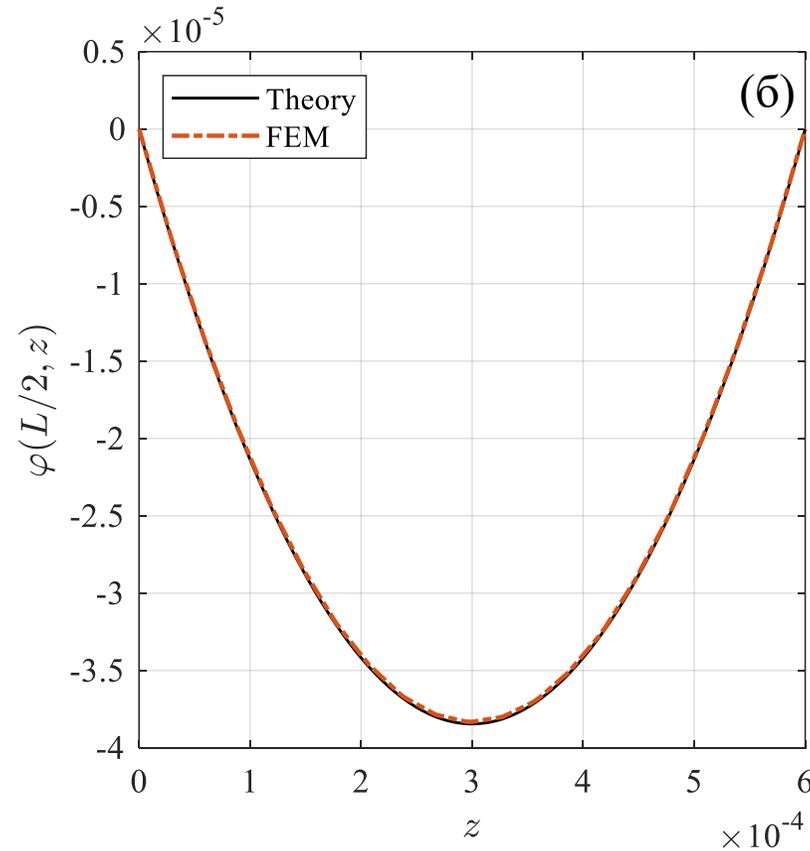
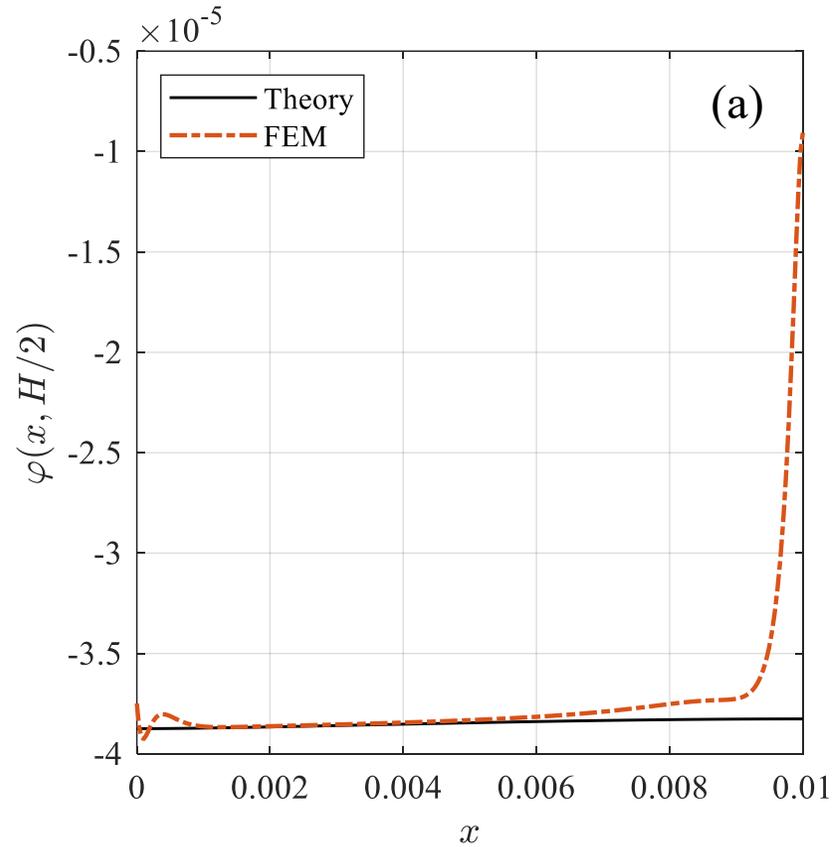
# Прогиб и собственные частоты



Сравнение распределения прогиба по длине биморфа на основе прикладной теории и МКЭ.

Мода	Прикл. теория, kHz	КЭ, kHz	Погр, %
1	10.06	9.96	1
2	62.04	57.63	7.6
3	169.39	146.2	15.8

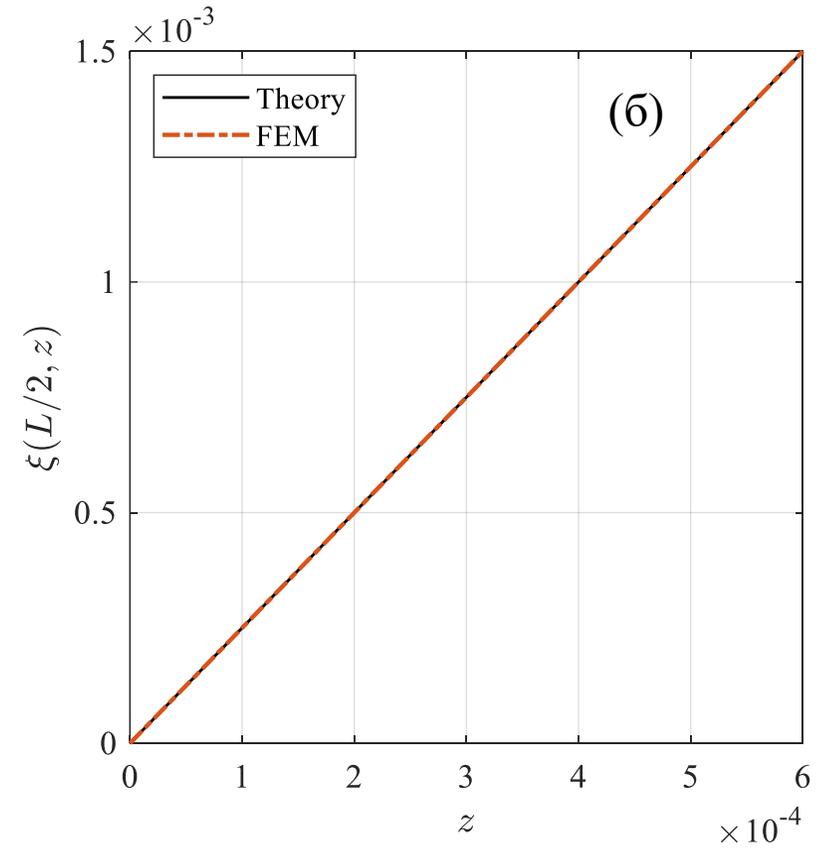
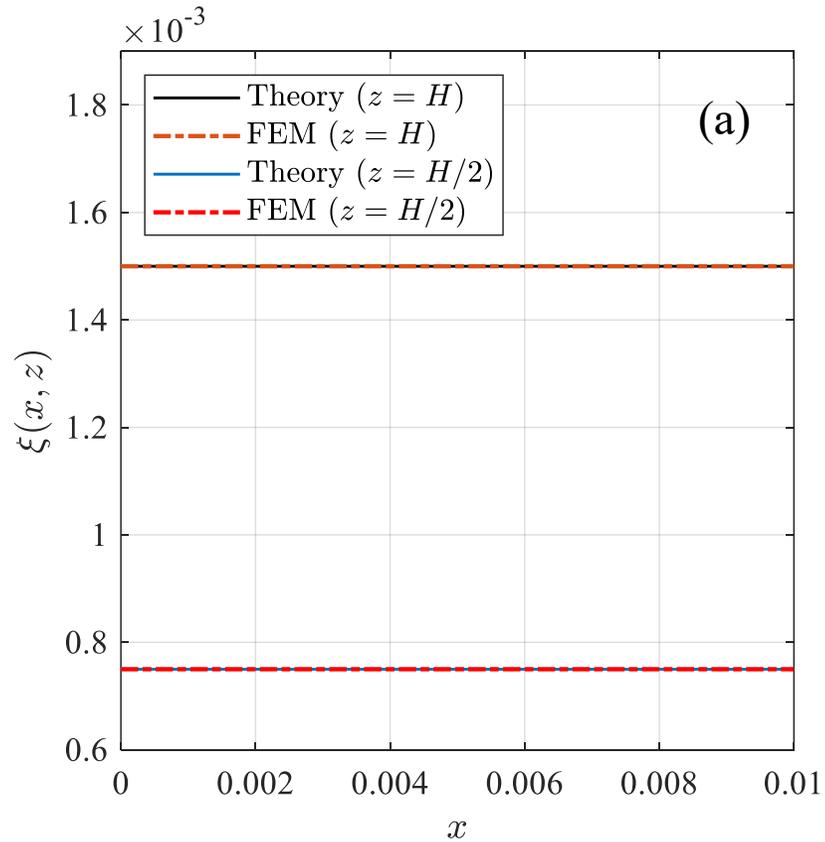
# Электрический потенциал



Сравнение распределений электрического потенциала по длине биморфа в центре верхнего слоя (а) и по толщине верхнего слоя в середине биморфа (б) на основе прикладной теории и МКЭ.

Изучение размера области несоответствия в зависимости от относительной толщины биморфа показало, что её размер порядка толщины биморфа.

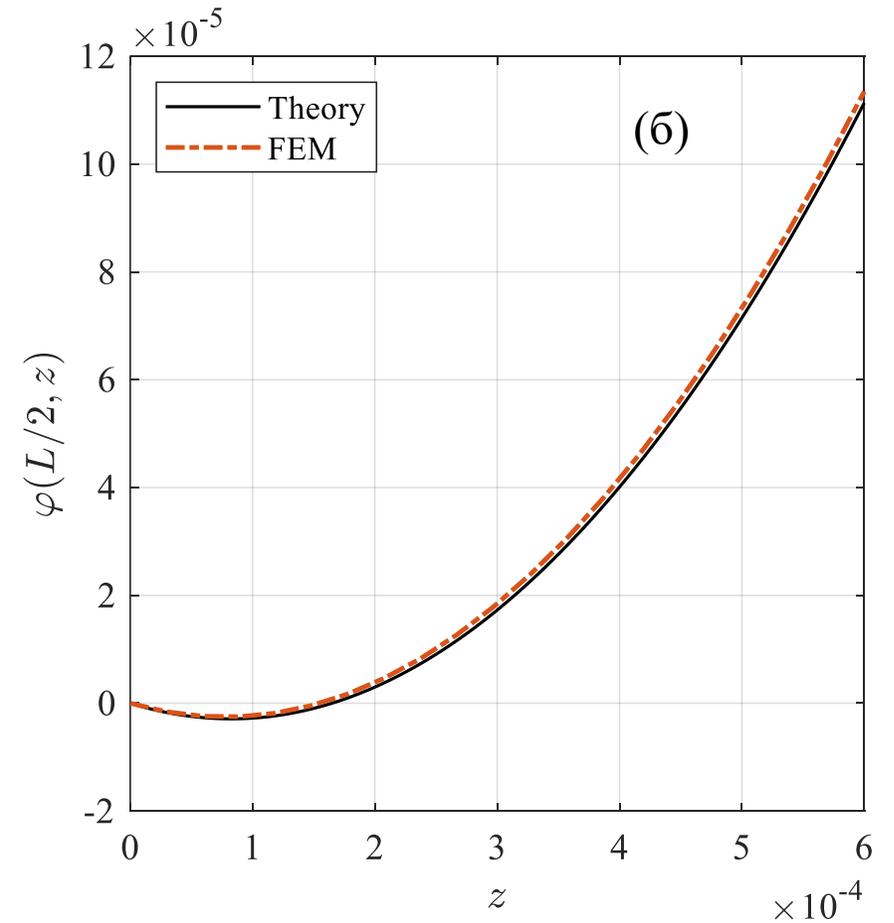
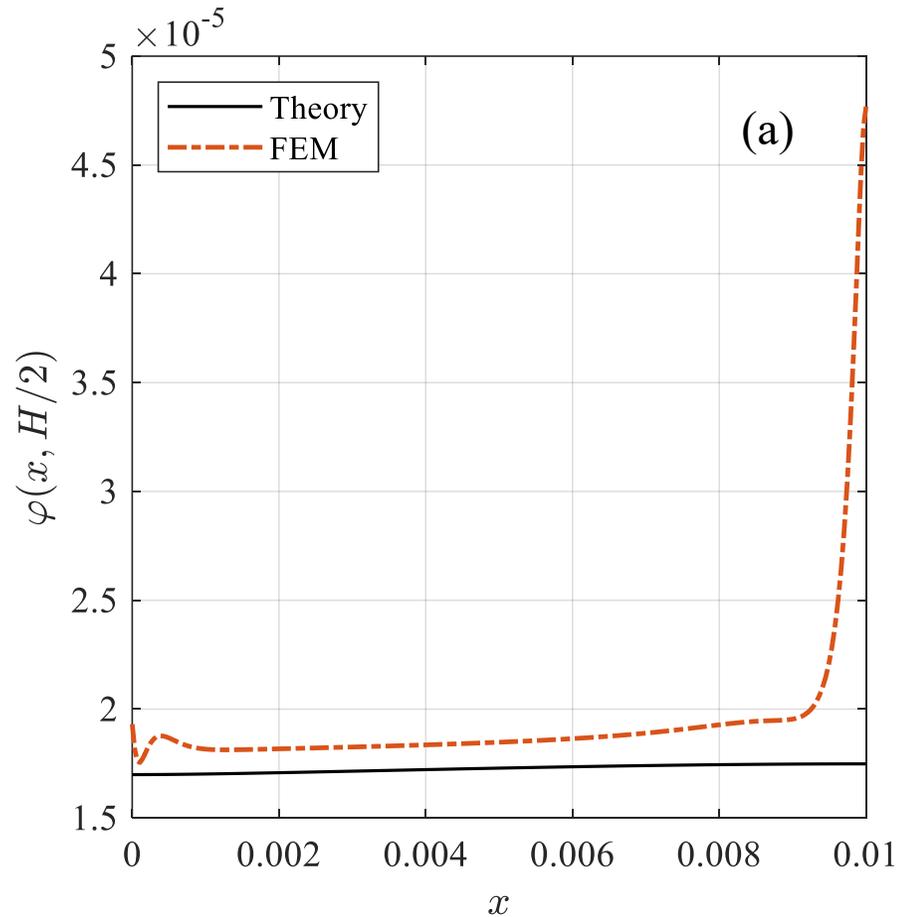
# Магнитный потенциал



Сравнение распределений магнитного потенциала по длине биморфа (а) и по толщине верхнего слоя в середине биморфа (б) на основе прикладной теории и МКЭ.

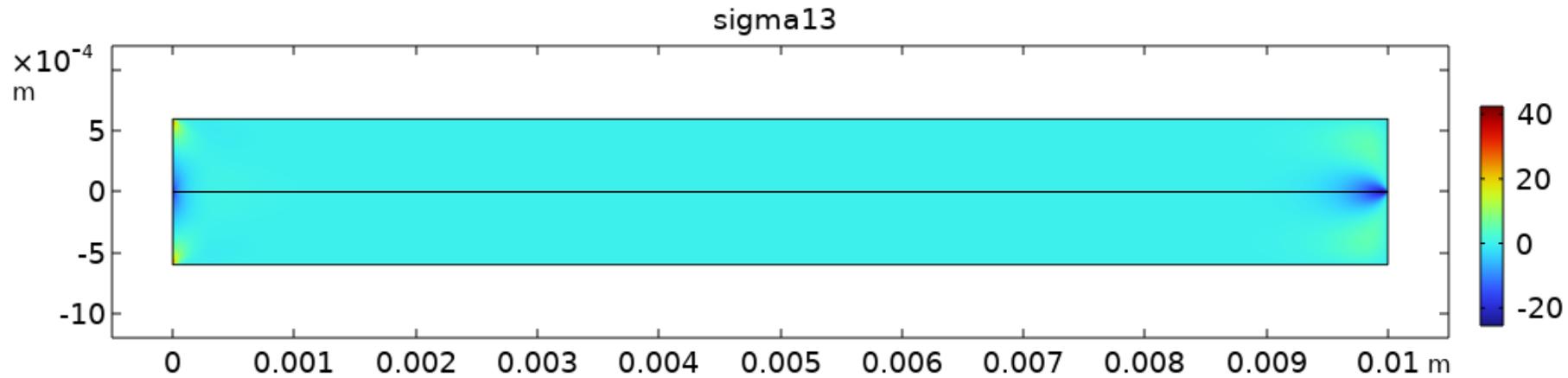
# Случай, когда потенциал неизвестен

$$\iint_{S_E} D_3 ds = 0$$

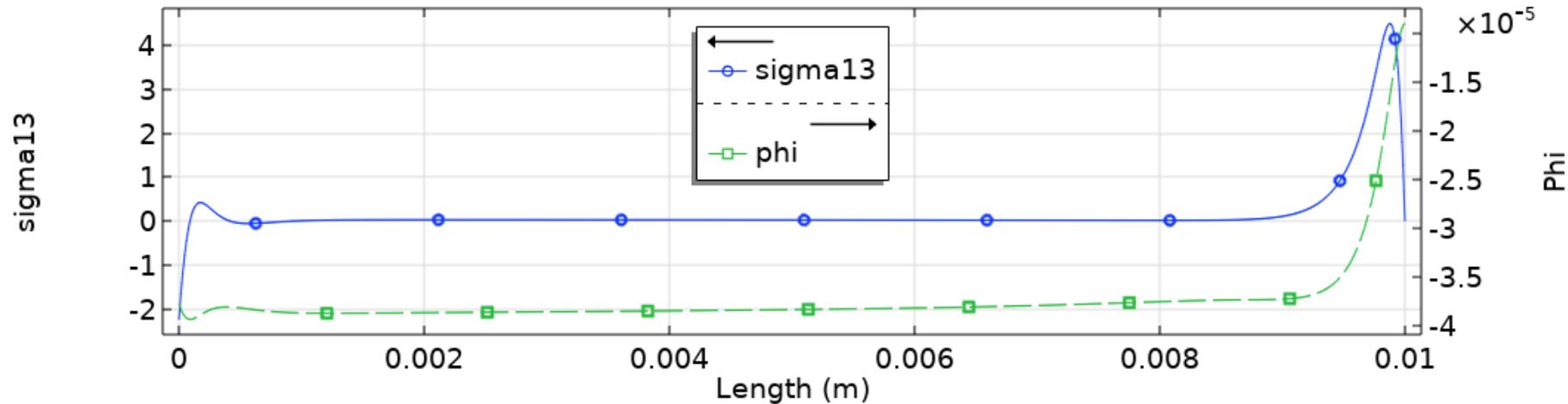


Сравнение распределений электрического потенциала по длине биморфа в центре верхнего слоя (а) и по толщине верхнего слоя в середине биморфа (б) на основе прикладной теории и МКЭ.

# Касательные напряжения



Распределение касательных напряжений



Сравнение распределения напряжения сдвига и электрического потенциала по длине биморфа.

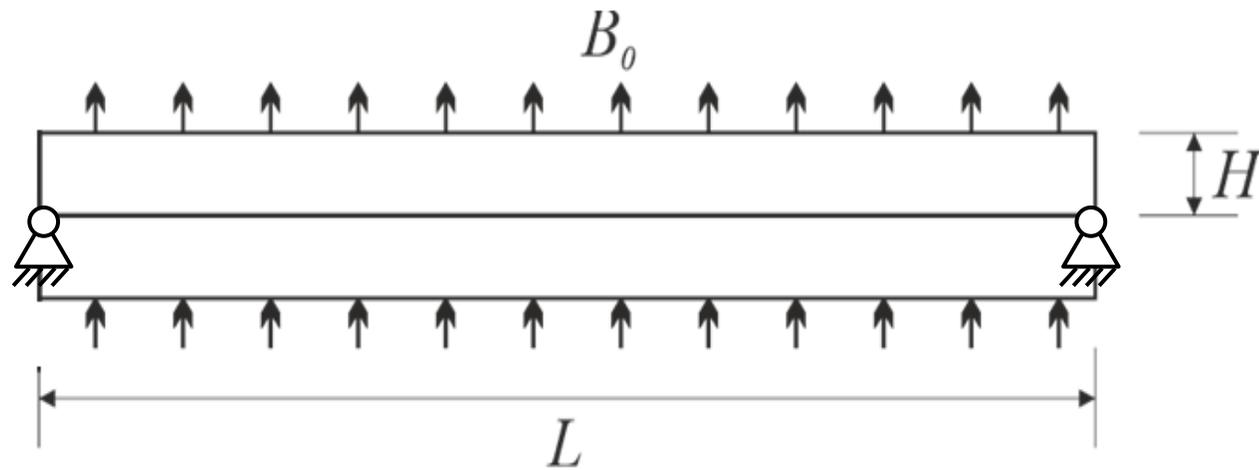
Выяснилось, что расхождение в обоих концах связано с тем, что в прикладной теории из-за введения гипотез Кирхгофа касательные напряжения исчезают, тогда как в КЭ модели они присутствуют.

## Выводы по разделу

Сравнение результатов расчета по предложенной теории с плоской задачей, решенной в Comsol Multiphysics, показало, что погрешность нахождения характеристик механического и магнитного полей составляет менее 1 %. В свою очередь, при определении электрического поля разница была порядка 5 %, за исключением области заделки и свободного конца. Диаграмма распределения касательных напряжений показывает, что эти напряжения пренебрежимо малы везде, кроме концов кантилевера, где наблюдаются их экстремумы. Таким образом, предложенная прикладная теория позволяет определить выходные характеристики рассматриваемого биморфа с достаточной степенью точности.

На основе проведенных численных экспериментов показано, что разработанная прикладная теория колебаний пьезомагнитоэлектрических биморфов с высокой степенью точности описывается на основе введенных гипотез.

# Прикладная теория для вязкоупругой пластины.



Биморф ( $L=10$  мм,  $H=0,6$  мм) закреплен с обоих концов.

Магнитный потенциал на внутренней границе равен 0. Электрический потенциал на обоих электродах равен 0.

На больших внешних гранях задается магнитный поток  $B_0 = 5$  мкВб с частотой 1 кГц, боковые грани изолированы.

# Общая форма ДУ в ЧП для COMSOL Multiphysics

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (1 + i\omega\gamma) - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{H} \quad i - \text{мнимая единица} \quad \omega - \text{частота} \quad \gamma - \text{коэффициент демпфирования}$$

$$\mathbf{u} = (u(x, z), 0, v(x, z)).$$

Определяющие соотношения:

Основные уравнения:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = -\rho\omega^2 u,$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = -\rho\omega^2 v,$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0,$$

$$B_1 = \frac{h_{15}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad D_1 = \frac{e_{15}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$B_3 = h_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + h_{33} \frac{\partial v}{\partial z} - \alpha_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad D_3 = e_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial v}{\partial z} - \epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \alpha_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$\sigma_{11} = \left( C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v}{\partial z} \right) (1 + i\omega\gamma) + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{31} \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$\sigma_{13} = \frac{C_{44}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (1 + i\omega\gamma) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_{15} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$\sigma_{33} = \left( C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial v}{\partial z} \right) (1 + i\omega\gamma) + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

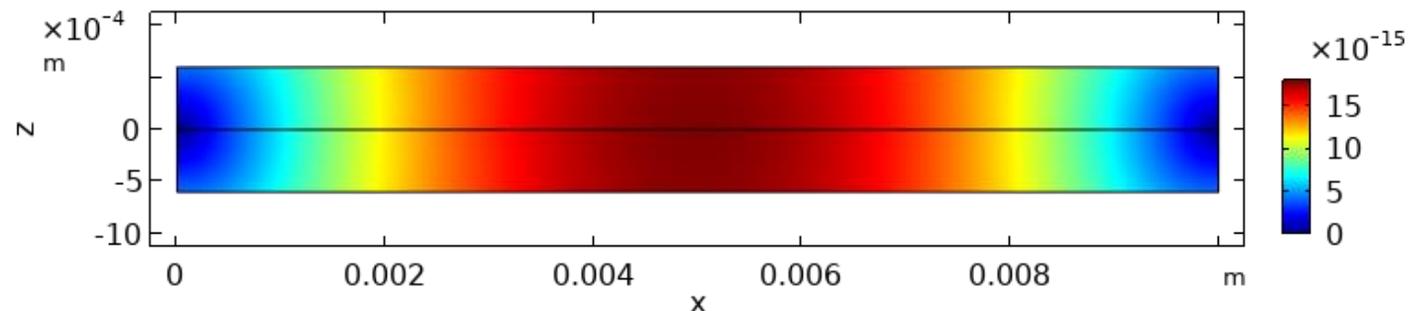
# Результаты КЭ

Биморф ( $L=10$  мм,  $H=0,6$  мм) жестко зажат на левом конце и свободен на правом конце.

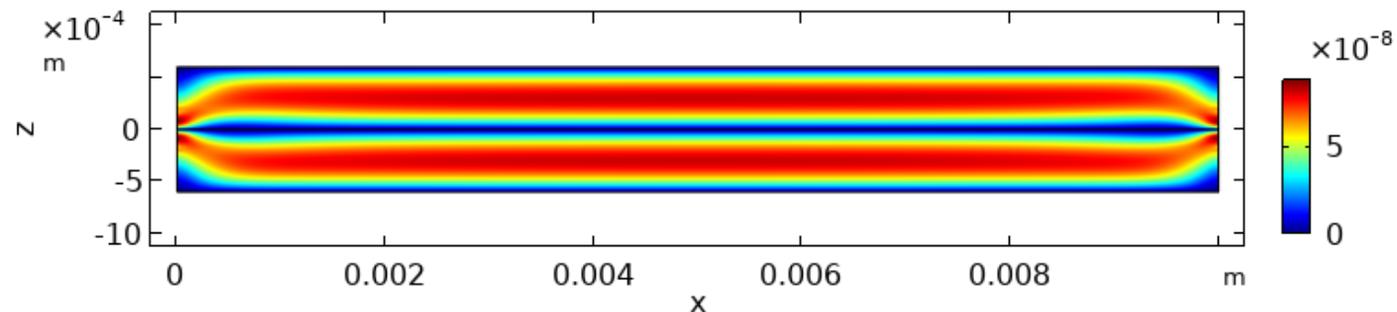
Магнитный потенциал на внутренней границе равен 0. Электрический потенциал на обоих электродах равен 0.

На больших внешних гранях задается магнитный поток  $B_0 = 5$  мкВб с частотой 1 кГц, боковые грани изолированы.

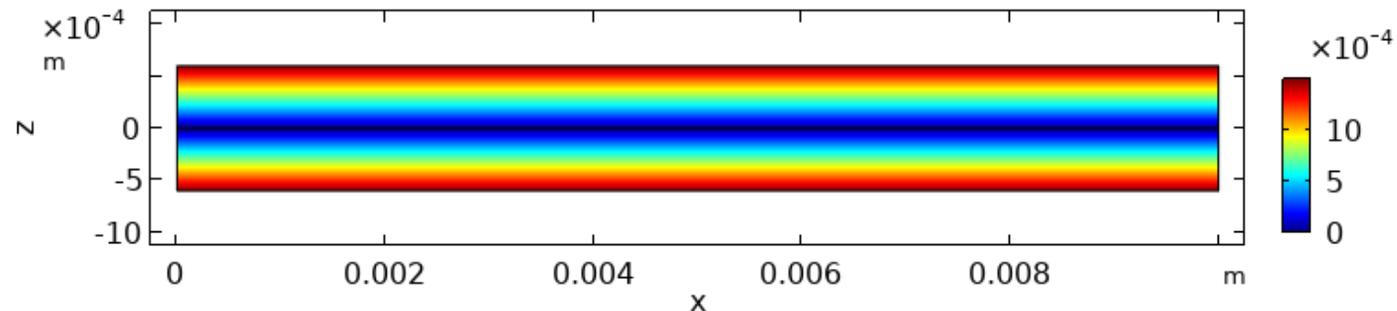
$$\gamma = 0.15$$



Абсолютное значение распределения поля перемещений



Абсолютное значение распределения электрического потенциала



Абсолютное значение распределения магнитного потенциала

# Прикладная теория

В данной работе на основе вариационного принципа и гипотез Кирхгофа-Лява о распределении механических полей при изгибе пластин, включая предположения об электрических и магнитных полях, получена система уравнений, описывающая цилиндрический изгиб биморфа. Общий вид вариационного уравнения для случая установившихся колебаний с частотой  $\omega$  плоского тела площадью

$S$  имеет вид:

$$\iint_S \delta \tilde{H} dS - \rho \omega^2 \iint_S u_i \delta u_i dS + \oint_A (p_{0i} \delta u_i + \sigma_0 \delta \varphi + B_0 \delta \psi) dA = 0$$

$$\delta \tilde{H} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i - B_i \delta H_i$$

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 w_{,1},$$

$$u_3(x_1, x_3) = w(x_1),$$

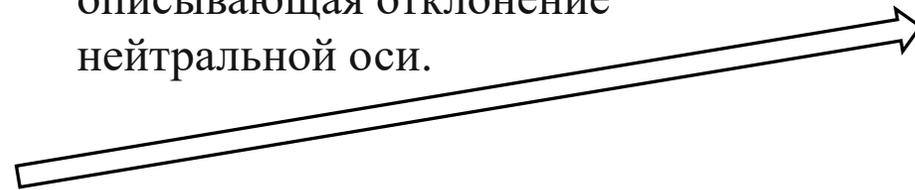
$w(x_1)$  – функция,  
описывающая отклонение  
нейтральной оси.

$$\sigma_{11} = \tilde{c}_{11} \varepsilon_{11} (1 + i\omega\gamma) - \tilde{e}_{31}^T E_3 - \tilde{h}_{31}^T H_3$$

$$D_3 = \tilde{e}_{31}^T \varepsilon_{11} + \tilde{\epsilon}_{33} E_3 + \tilde{\alpha}_{33} H_3$$

$$B_3 = \tilde{h}_{31} \varepsilon_{11} + \tilde{\alpha}_{33}^T E_3 + \tilde{\mu}_{33} H_3.$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{33}$$



# Электрическое поле

Уравнение:

$$\frac{16\tilde{\epsilon}_{33}}{3H} + \frac{16\tilde{\epsilon}_{33}}{3H}V_2 - \frac{32\tilde{\epsilon}_{33}}{3H}\Phi(x) - \frac{32\tilde{\alpha}_{33}}{3H}\Xi_2(x) + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H}\Xi_3(x) - \frac{16\epsilon_{11}H}{15}\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) - \frac{16\alpha_{11}H}{15}\frac{d^2}{dx^2}\Xi_2(x) - \frac{2\alpha_{11}H}{15}\frac{d^2}{dx^2}\Xi_3(x) - \frac{4\tilde{e}_{31}H}{3}\frac{d^2}{dx^2}w(x) + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H}M_0 = 0$$

Граничное условие

$$\frac{16\epsilon_{11}H}{15}\frac{d}{dx}\Phi(x) + \frac{16\alpha_{11}H}{15}\frac{d}{dx}\Xi_2(x) + \frac{2\alpha_{11}H}{15}\frac{d}{dx}\Xi_3(x) = 0$$

# Магнитное поле

Уравнение для:  $\Xi_2(x)$

$$\frac{16}{3H} V_0 + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_2 - \frac{32\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Phi(x) - \frac{32\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_2(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \frac{16\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} M_0 = 0$$

Граничное условие

$$\frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{16\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0$$

Уравнение для:  $\Xi_3(x)$

$$-\frac{2\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_0 - \frac{14\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_2 + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Phi(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_2(x) - \frac{14\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{4\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) - 2B_0 - \frac{2\tilde{\mu}_{33}}{3H} M_0 = 0$$

Граничное условие

$$\frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{4\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0$$

# Поле перемещений

Уравнение:

$$\frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) + 2p_3H - \\ - \frac{2\rho\omega^2 H^3}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + 2\omega^2 \rho w(x)H + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} (1+i\omega\gamma) \frac{d^4}{dx^4} w(x) = 0$$

Граничное условие:  $\delta w(x)$

$$\frac{\tilde{e}_{31}H}{3} V_0 - \frac{5\tilde{e}_{31}H}{3} V_2 + \frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \Phi(x) + \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \Xi_2(x) - \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \Xi_3(x) + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} (1+i\omega\gamma) \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{\tilde{h}_{31}H}{3} M_0 = 0$$

Граничное условие:  $\delta w'(x)$

$$-\frac{4\tilde{e}_{31}}{3} \frac{d}{dx} \Phi(x) - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) - \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} (1+i\omega\gamma) \frac{d^3}{dx^3} w(x) + \frac{2\rho\omega^2 H^3}{3} \frac{d}{dx} w(x) = 0$$

# Поле перемещений

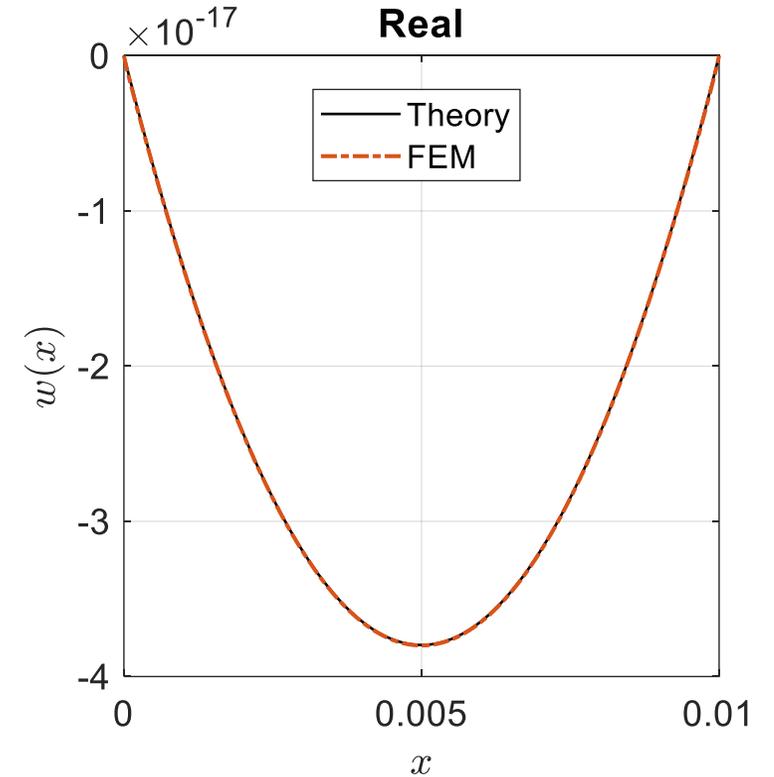
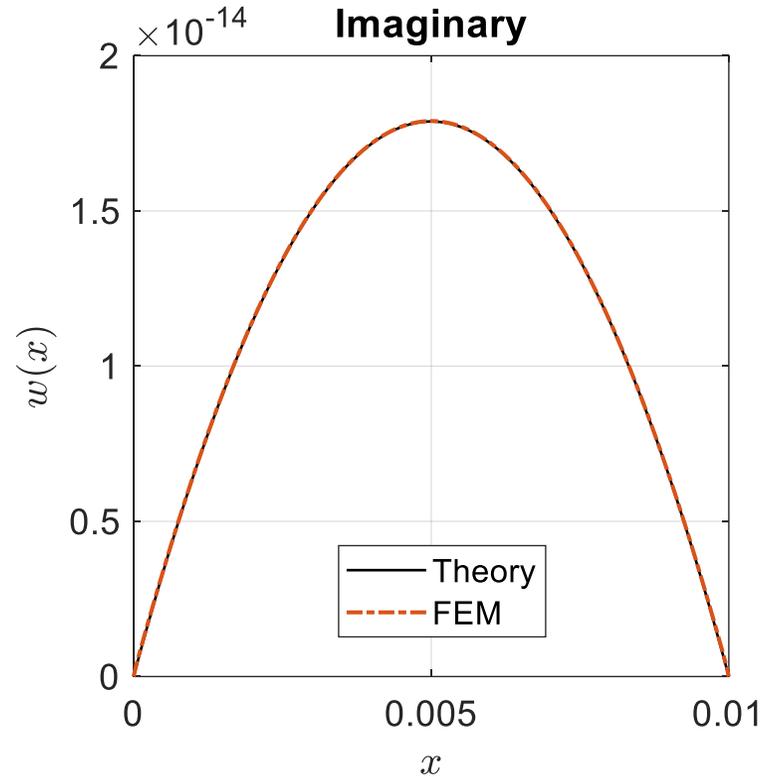
Комплексные переменные:

$$w(x) = w^r(x) + iw^i(x)$$

$$\Phi(x) = \Phi^r(x) + i\Phi^i(x)$$

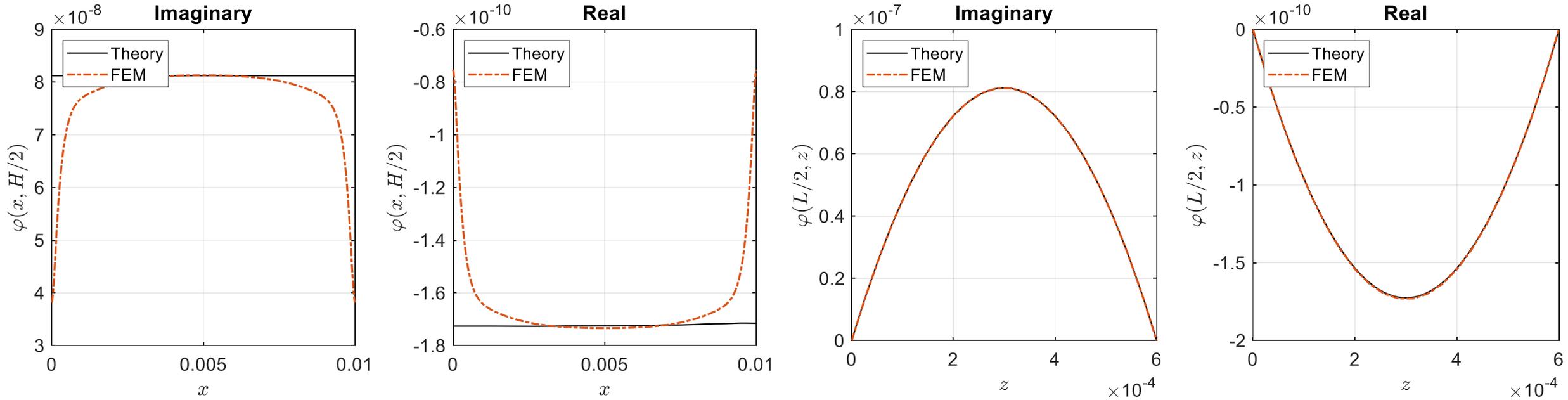
$$\Xi_2(x) = \Xi_2^r(x) + i\Xi_2^i(x)$$

$$\Xi_3(x) = \Xi_3^r(x) + i\Xi_3^i(x)$$



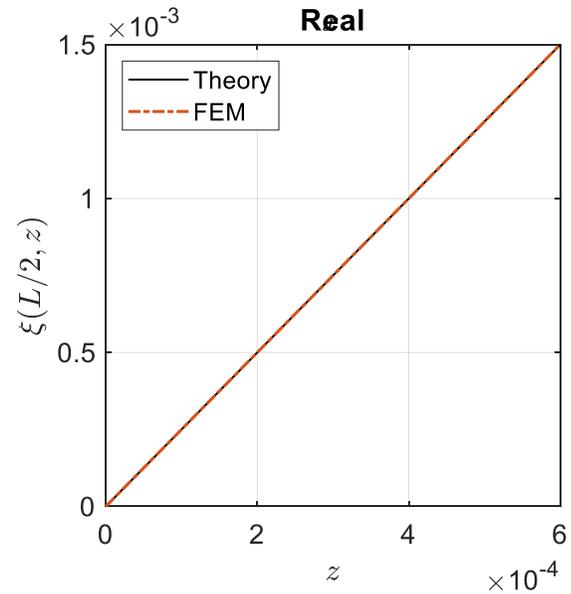
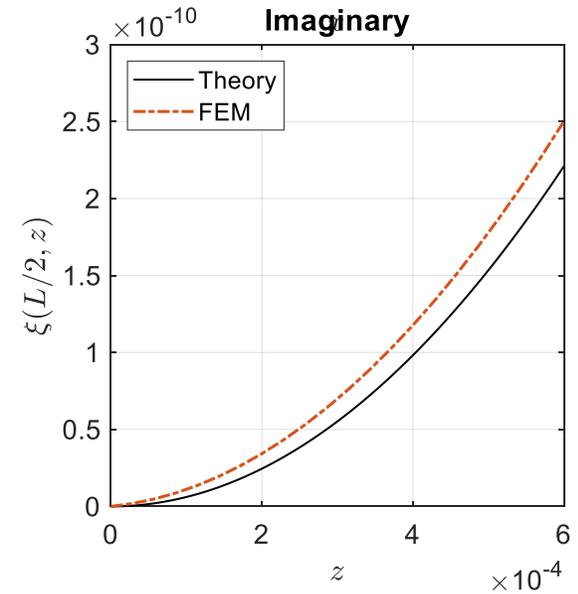
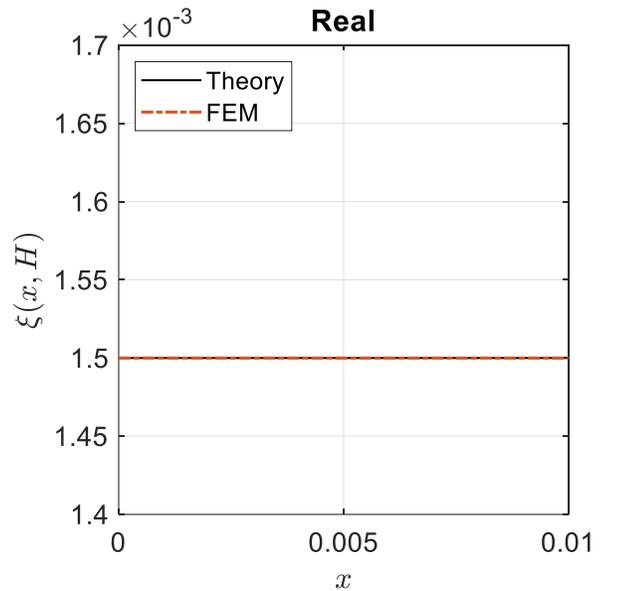
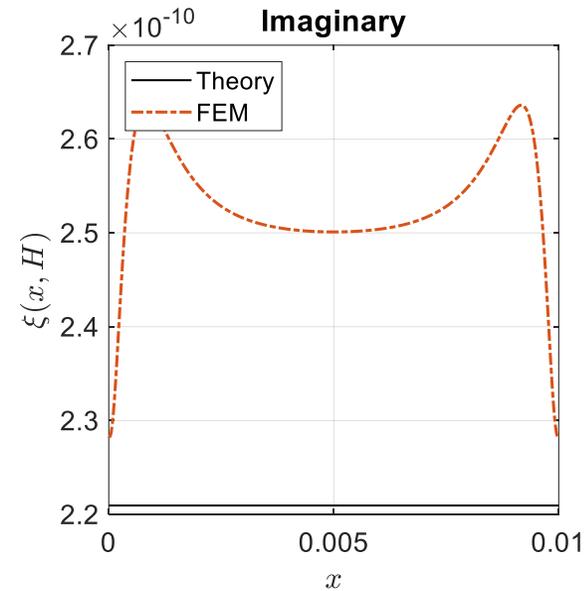
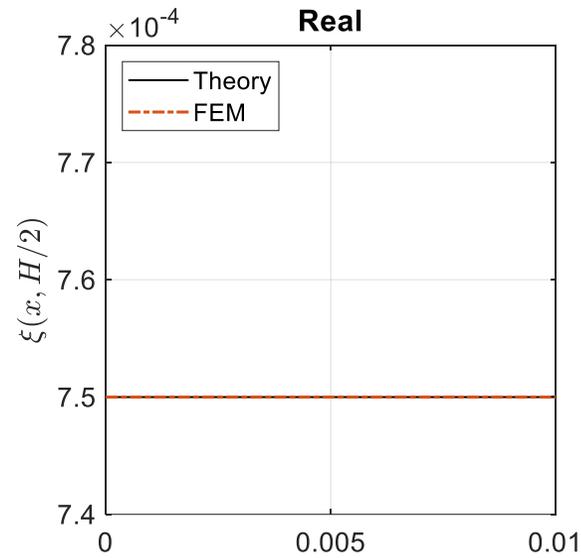
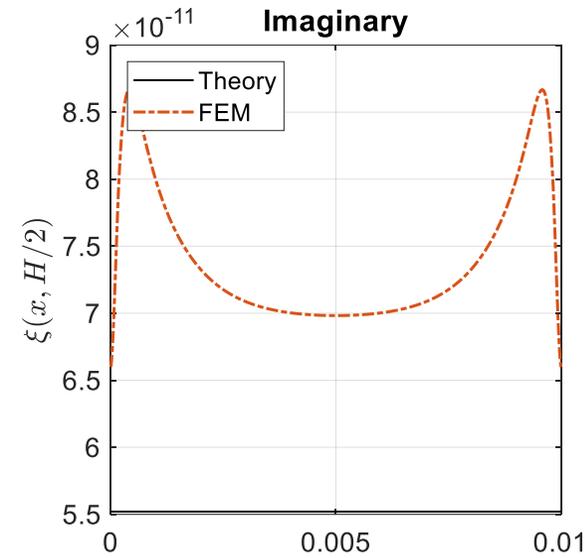
Сравнение распределения прогиба по длине биморфа на основе прикладной теории и МКЭ.

# Электрическое поле



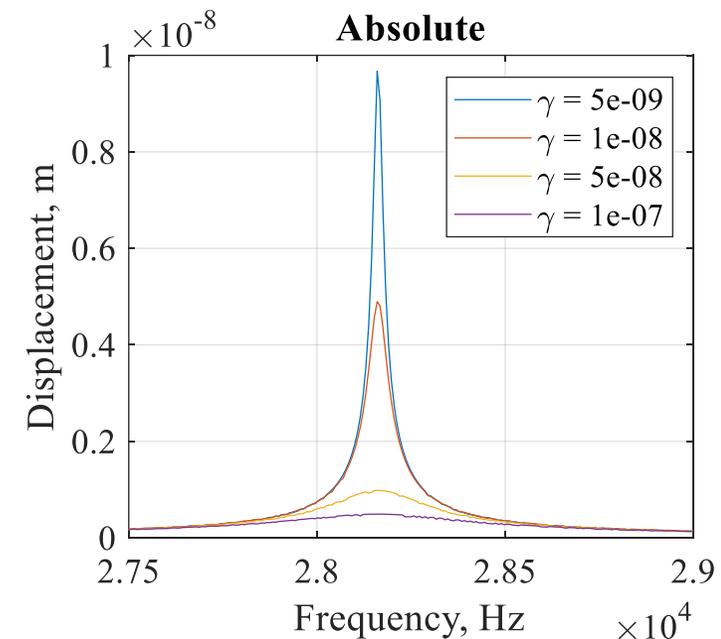
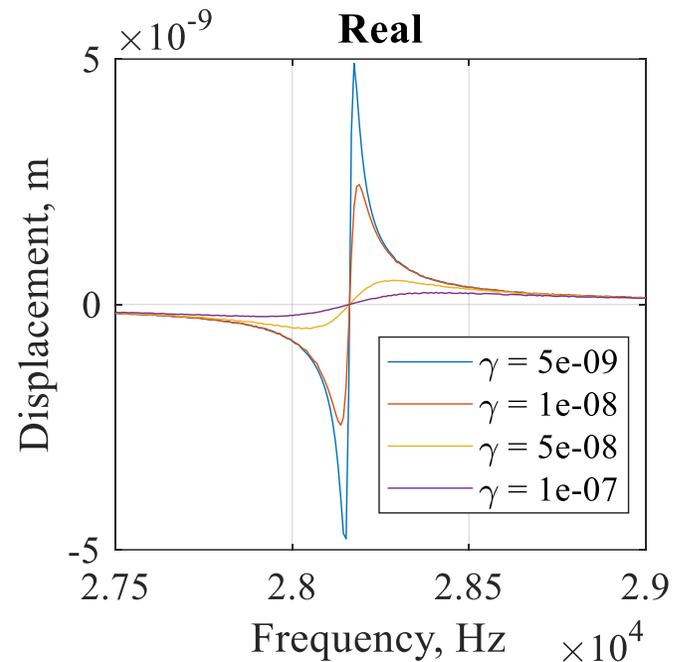
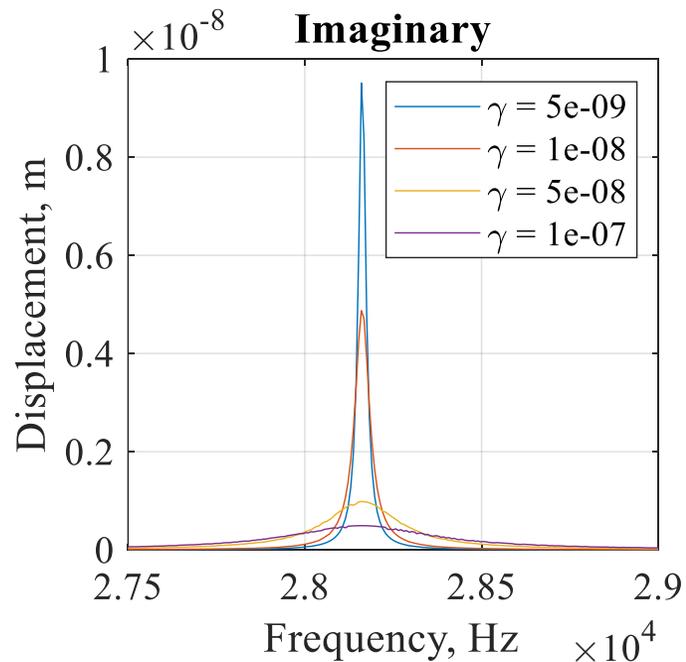
Сравнение распределений электрического потенциала по длине биморфа в центре верхнего слоя и по толщине верхнего слоя в середине биморфа на основе прикладной теории и МКЭ.

# Магнитное поле



Сравнение распределений магнитного потенциала по длине биморфа и по толщине верхнего слоя в середине биморфа на основе прикладной теории и МКЭ.

# Зависимость смещения от частоты



Частотная характеристика смещения средней точки биморфа в окрестности первого резонанса в зависимости от различных значений коэффициента затухания: мнимая и действительная части, а также абсолютное значение

# Выводы по разделу

Сравнение результатов расчета по предложенной теории с плоской задачей, решенной в Comsol Multiphysics, показало, что погрешность определения характеристик механического и магнитного полей вполне приемлема. В свою очередь, при определении электрического поля разница составила порядка 5%, за исключением области закрепления.

Таким образом, предложенная прикладная теория позволяет с достаточной степенью точности определить выходные характеристики рассматриваемого биморфа при наличии затухания.

На основе проведенных численных экспериментов показано, что разработанная прикладная теория колебаний пьезомагнитоэлектрических биморфов с хорошей точностью описывается на основе выдвинутых гипотез.

# Общие выводы

## **1. Математические модели и методы:**

Разработаны математические модели, включая прикладные теории на основе вариационных принципов, что позволяет описывать поведение пьезоактивных преобразователей, в том числе с ФГ свойствами.

## **2. Конечно-элементные методы:**

Применены конечно-элементные методы с использованием программных пакетов ACELAN, ANSYS, COMSOL для моделирования устройств накопления энергии.

## **3. Обратные задачи и идентификация параметров:**

Решены обратные задачи и проведена идентификация параметров, используя генетический алгоритм, что позволяет определить характеристики биморфов.

## **4. Сравнение с численными и натурными экспериментами :**

Результаты, полученные с использованием предложенных теорий и моделей, сравнены с численными экспериментами в ACELAN, ANSYS, COMSOL, показывая приемлемую точность в определении механических, электрических и магнитных полей.

## **5. Анализ точности и областей применимости:**

Проведен анализ точности результатов, выявлены области применимости и оценены различия в электрическом поле, что позволяет сделать вывод о приемлемой точности предложенных теорий.

## **6. Оптимизация:**

Проведены оптимизации и параметрические исследования на основе предложенных теорий и КЭ моделей пьезоэлектрических преобразователей.

Спасибо за  
внимание!

---

[solovievarc@gmail.com](mailto:solovievarc@gmail.com)