АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Магомед-Касумов М. Г.[1]

[1]*Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия;* rasuldev@gmail.com

Частичные суммы ряда Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 2\pi]$ порядка n определяются, как известно, следующим образом:

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где $a_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt$, $b_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt$.

Средние Валле-Пуссена вводятся как средние арифметические частичных сумм Фурье:

$$V_n(f, x) = \frac{S_n(x) + S_{n+1}(x) + \ldots + S_{2n-1}(x)}{n}.$$

При проведении численных экспериментов по приближению кусочно-гладких функций было замечено, что средние Валле-Пуссена дают на порядок лучшую скорость приближения, чем суммы Фурье. Данная работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств средних Валле-Пуссена для функций из класса $W^{2,\mathbb{A}}_{\infty}$, который определяется следующим образом.

Пусть дано конечное разбиение отрезка $[0, 2\pi]$:

$$\mathbb{A} = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_s = 2\pi\}.$$

Через $W^{2,\mathbb{A}}_{\infty}$ обозначим класс 2π-периодических функций, которые на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) имеют абсолютно непрерывную производную, а существующая почти всюду на интервале вторая производная существенно ограничена.

Прежде чем сформулировать основной результат, приведем леммы, которые были использованы при его получении.

Лемма 1. *Для функций*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^p}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$$

имеет место следующая оценка $(p \geq 1)$

$$|f(x) - V_n(f,x)| \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{n(n+1)^p}, \quad x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

Следующая лемма была доказана в работе [1].

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{K}_n(u)| du \leq C,$$

где

$$\mathcal{K}_n(u) = n \cdot \sum_{m=n}^{2n-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^2}.$$

Теорема. *Для функций* $f(x)$ *из класса* $W_{\infty}^{2,\mathbb{A}}$ *справедлива следующая оценка остатка при приближении суммами Валле-Пуссена:*

$$|f(x) - V_n(f,x)| \leq \left[\frac{4}{\pi \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} + C_0\right] \cdot \frac{C(f)}{n^2},$$

где

$$x \in \bigcup_{i=0}^{s-1} [a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon],$$

$$C(f) = \max\{\|f\|_{C(\mathfrak{D})}, \|f'\|_{C(\mathfrak{D})}, \operatorname*{ess\,sup}_{[0,2\pi]} |f''(x)|\},$$

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{i=0}^{s-1} (a_i, a_{i+1}) = [0, 2\pi] \setminus \{a_i\}_{i=0}^{s}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-00191-а).

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена на классах типа Соболева с переменным показателем // Вестник Дагестанского научного центра. 2012. № 45. С. 5–16.