ОБОБЩЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тасоев Б. Б.[1]

[1] *Южный математический институт, Владикавказ, Россия;* tasoevbatradz@yandex.ru

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N \in E$, Λ — равномерно замкнутая f-подалгебра в идеальном центре $\mathcal{Z}(E)$. Снабдим Λ равномерной нормой. Изучение функций $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, для которых естественно можно определить $\varphi(x_1, \dots, x_N) \in E$ принято называть *функциональным исчислением.* Если образом φ служит f-подалгебра Λ, то говорим уже об *обобщенном функциональном исчислении* и обозначаем символом $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in E$. В работе приведено обобщенное функциональное исчисление в равномерно полных векторных решетках.

Существуют различные подходы к определению функционального исчисления, см.[1,2,3,4]. Мы будем следовать обозначениям из [1] и [3]. Будем говорить, что подрешетка L Λ-*инвариантна*, если $\pi x \in L$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Обозначим через $\mathrm{Hom}(L)$ и $\mathrm{H_m}(L)$ множество всех $\mathbb{R}$-значных решеточных гомоморфизмов и множество $\mathbb{R}$-значных мультипликативных решеточных гомоморфизмов на L.

Лемма. *Пусть векторная подрешетка $L \subset E$ — Λ-инвариантна. Тогда для любого $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ существует единственный $\widetilde{\omega} \in \mathrm{H_m}(\Lambda)$ такой, что $\omega(\pi x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. При этом, $\widetilde{\lambda\omega} = \widetilde{\omega}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$.*

Обозначим символом $\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle$ — Λ-инвариантную векторную подрешетку в E, порожденную набором $x_1, \dots, x_N$. Положим по определению

$$[\mathfrak{x}] := \{(w(x_1), \dots \omega(x_N)) \in \mathbb{R}^N : w \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle)\}.$$

Возьмем замкнутое коническое множество $K \subset \mathbb{R}^N$ так, чтобы $[\mathfrak{x}] \subset K$. Символом $\mathcal{H}(K, \Lambda)$ будем обозначать множество всех непрерывных положительно однородных функций из K в Λ. Можно показать, что $\mathcal{H}(K, \Lambda)$ полная векторная решетка относительно сходимости с регулятором.

Определение. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Λ — замкнутая f-подалгебра в $\mathcal{Z}(E)$, $\varphi \in \mathcal{H}(K, \Lambda)$ и L —*

наименьшая Λ-инвариантная векторная подрешетка в E, содержащая $x_1,\dots,x_N,y$. Будем говорить, что $y=\varphi(\cdot,x_1,\dots,x_N)$, если $\omega(y)=\widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1),\dots,\omega(x_N)))$ для всех $\omega\in\mathrm{Hom}(L)$.

Пусть I обозначает тождественный оператор на E. Определим функции $dt_i\in\mathcal{H}(K,\Lambda)$ $(1\leqslant i\leqslant N)$ по формуле $dt_i(t)=t_iI$, где $t\in K\subset\mathbb{R}^N$.

Теорема. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Λ — равномерно замкнутая f-подалгебра в $\mathcal{Z}(E)$, $x_1,\dots,x_N\in E$. Тогда существует единственный Λ-модульный решеточный гомоморфизм $\widehat{\mathfrak{x}}:\varphi\mapsto\varphi(\cdot,x_1,\dots,x_N)$ из $\mathcal{H}(K,\Lambda)$ в E такой, что $\widehat{\mathfrak{x}}(dt_i)=x_i$ $(1\leqslant i\leqslant N)$. Более того, $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathcal{H}(K,\Lambda))$ совпадает с u-равномерным замыканием Λ-линейной векторной подрешетки, порожденной x_i $(1\leqslant i\leqslant N)$, т.е. $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathcal{H}(K,\Lambda))=\overline{\Lambda\langle x_1,\dots,x_N\rangle}$, где замыкание берется равномерно в E относительно $u=|x_1|+\ldots+|x_N|$.*

ЗАМЕЧАНИЕ Частными случаями сформулированной теоремы являются результаты [3, теорема 2.3] $(\Lambda=\mathbb{R}^N)$ и [2, теорема 3.12] $(K=\mathbb{R}^N,\ \Lambda=\mathcal{Z}(E))$.

Литература

1. *Buskes G., de Pagter, van Rooij A.* Functional calculus on Riesz spaces, // Indag. Math. (N.S.)—1991.—T.4, № 2.—p. 423–436.
2. *Haydon R., Levy M., Raynaud Y.* Randomly normed spaces.—Hermann, Paris, 1991.
3. *Kusraev A. G.* Homogeneous functional calculus on vector lattices.—Vladikavkaz: Institute of Applied Mathematics and Informatics VSC RAS, 2008.—p. 34
4. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol.2. Function Spaces. — Berlin: Springer-Verlag, 1979.—p. 243.