НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОПЕРАТОРОМ БАРРЕТТА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Р. З. Кажарова[1]

Рассмотрим следующее нагруженное дифференциальное уравнение:

$$D_{0t}^{\alpha}\,u(x,\,\eta)-\lambda u(x,\,t)=\sum_{j=1}^{n}c^{j}(x,\,t)u(x_j,\,t_j)+\upsilon(x,\,t), \tag{1}$$

где D_{0t}^{α} - оператор дробного дифференцирования порядка α [1, с.28], $\lambda=$const, $c^j(x,t)$, $\upsilon(x,\,t)$ – заданные непрерывные в замкнутой области $\overline{\Omega}=\{(x,t)\ :\ 0\ \leqslant\ x\ \leqslant\ r,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ функции независимых переменных x и t.

Задача 1. *Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства $L(\Omega)$ удовлетворяющее следующим условиям:*

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-i}\,u(x,t)=\nu_i(x),\quad i=\overline{1,m};\ \ \alpha\in(m-1,m];\ m=1,2,...$$

где $\nu_i(x)\in C[0,r]$.

Теорема. *Пусть $\upsilon(x,t)\in L[0,T]$. Тогда любое решение задачи 1 является решением нагруженного функционального уравнения*

$$u(x,t)=U(\nu,\upsilon,\lambda;x,t)+\sum_{j=1}^{n}C^{j}(x,\,t)u(x_j,\,t_j), \tag{2}$$

где

$$U(\nu,\upsilon,\lambda;x,t)=\sum_{i=1}^{m}\nu_i(x)t^{\alpha-i}\mathrm{E}_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\,\alpha-i+1)+$$

$$+\Gamma(\alpha)D_{0t}^{-\alpha}\mathrm{E}_{1/\alpha}[\lambda(t-\eta)^{\alpha};\,\alpha]\upsilon(x,\,\eta),$$

$$C^{j}(x,t)=\Gamma(\alpha)D_{0t}^{-\alpha}\mathrm{E}_{1/\alpha}[\lambda(t-\eta)^{\alpha};\,\alpha]c^{j}(x,\eta).$$

[1]Россия, Нальчик, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

Необходимым условием разрешимости нагруженного функционального уравнения (2) является система равенств

$$\left[1 - C^i(x_i, t_i)\right] u(x_i, t_i) - \sum_{j=1}^{n} (1 - \delta_{ij}) C^j(x_i, t_i) u(x_j, t_j) =$$

$$= U(\nu,\, \upsilon,\, \lambda; x_i,\, t_i), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Если определитель этой системы отличен от нуля, то уравнение (2) будет иметь, и притом единственное, решение $u(x, t)$.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.:Высшая школа, 1995.—301С.