О ТЕОРЕМЕ ГЕРХАРТА-ПРЮССА

Чшиев А. Г.[1]

[1]*Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А (г. Владикавказ, Россия)* zchaslan@mail.ru

Пусть X – комплексное гильбертово пространство и $EndX$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X.

Определение. **Полугруппой операторов**, действующих в X, называется сильно непрерывная операторнозначная функция

$$T : (0, \infty) \longrightarrow EndX,$$

со свойством:

$$T(t+s) = T(t)T(s) \text{ для всех } t, s > 0.$$

Если, кроме того, $T(0) = I$ и $\lim\limits_{t \longrightarrow 0+} T(t)x = x$ для любого $x \in X$, то полугруппа T называется **полугруппой класса** (C_0).

Классическая теорема Герхарта-Прюсса доказана [1, 2] для полугруппы операторов класса (C_0). В данной работе теорема Герхарта-Прюсса обобщается на более широкий класс полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве, а именно, полугруппа T удовлетворяет условию:

$$\int_0^1 ||T(t)||^2 dt < \infty.$$

При этом используется подход, основанный на использовании линейных отношений в качестве генераторов полугруппы [3, 4]. Определение линейного отношения, суммы, произведения линейных отношений, непрерывно обратимого линейного отношения, а также спектра, резольвентного множества и резольвенты линейного отношения дается согласно [3, 4, 7, 8].

Определение. **Генератор** $\mathbb{A}_c$ полугруппы T определяется как отношение на пространстве X, состоящее из пар $(x, y) \in X \times X$ со свойствами:

1) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0+} T(t)x = x$;

2) верны равенства:

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau) y d\tau, 0 < s \le t < \infty.$$

Основной результат содержит

Теорема. *Пусть X — гильбертово пространство и пусть полугруппа операторов T удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 ||T(t)||^2 dt < \infty.$$

Тогда условие:

$$\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset \tag{4}$$

эквивалентно одновременному выполнению условий

$$\sigma(\mathbb{A}_c) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \text{ и } \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} ||R(i\lambda, \mathbb{A}_c)|| = M_1 < \infty, \tag{5}$$

где $\sigma(T(1))$ — спектр оператора $T(1)$, $\mathbb{T}$ – единичная окружность, и $\sigma(\mathbb{A}_c)$ — спектр генератора $\mathbb{A}_c$, $R(\cdot, \mathbb{A}_c)$ – резольвента генератора $\mathbb{A}_c$.

Литература

1. *Gearhart L.* Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1978.—T. V.236.—P. 385-394.
2. *Pruss J.* On the spectrum of C_0 - semigroups // Trans. Amer. Math. Soc.—1984.—T. V.284.—P. 847-857.
3. *Баскаков А. Г., Чернышов К. И.* Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы // Матем. сборник.—2002.—Т. 193, № 11.—С. 3–42.
4. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Матем. заметки.—2008.—Т. 84, № 2.—С. 175–192.
5. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы.—М: ИЛ, 1962.—С. 830.
6. *Чшиев А. Г.* Теорема Герхарда - Прюсса для вырожденных полугрупп // Воронежский государственный университет, Препринт є 39.—2011.С. 34.
7. *Arens R.* Operational calcules of linear relations // Pacific J. Math.—1961.—T. V.11.—P. 9-23.
8. *Cross R.* Multivalued linear operators.—New York: M. Dekker, 1998.
9. *Engel K.J., Nagel R.* One - Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.—New York: Springer Verlag, 2000.—C. 609.