ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Нестеров Н. Ю.[1]

[1]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;* samson47@bk.ru

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство; $v : X \to (0,\infty)$ — некоторая фиксированная функция (вес). Обозначим через $C(X)$ множество всех непрерывных комплекснозначных функций на X и рассмотрим его следующий весовой подкласс:

$$C_v(X) = \left\{ f \in C(X) \,:\, \|f\|_v = \sup_{x\in X} \frac{|f(x)|}{v(x)} < \infty \right\}.$$

Частным случаем пространства $C_v(X)$ является класс $BC(X)$ всех ограниченных непрерывных функций на X.

Проверено, что $C_v(X)$ — линейное нормированное пространство, причем его топология мажорирует топологию поточечной сходимости на X. Получено условие, при котором данное пространство является банаховым.

Теорема 1. *Если вес v локально ограничен сверху на X, то пространство $C_v(X)$ полное.*

Кроме того, установлены результаты, касающиеся нетривиальности пространства $C_v(X)$. Напомним следующее определение.

Определение 1. Будем говорить, что пространство $C_v(X)$ не исчезает в точке $x_0 \in X$, если найдется функция $f \in C_v(X)$ такая, что $f(x_0) \neq 0$.

Ясно, что пространство $C_v(X)$ нетривиально, т. е. содержит функцию, отличную от тождественного нуля, тогда и только тогда, когда оно не исчезает хотя бы в одной точке $x_0 \in X$. Доказана

Теорема 2. *Для того чтобы пространство $C_v(X)$ не исчезало в точке $x_0 \in X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{\delta\to+0} \inf_{\rho(x,x_0)<\delta} v(x) > 0\,. \tag{1}$$

Следствие. *Пространство $C_v(X)$ нетривиально в том и только в том случае, когда существует точка $x_0 \in X$, в которой выполнено условие (1).*

Проверено также, что множество точек, в которых $C_v(X)$ не исчезает, открыто в X. Соответственно, его дополнение — совокупность точек, в которых $C_v(X)$ исчезает, — замкнуто в X.

Литература

1. *Абанин А. В.* Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // Математический анализ и математическое моделирование: тр. междунар. конф. молодых учен. —Владикавказ: ЮМи ВНЦ РАН, 2010. —С.15–20.
2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. —Москва: «Мир», 1977. —357 с.