Квадратурные формулы для интегралов типа Коши с весовыми функциями

Л. Ю. Плиева[1]

В работе рассматриваются квадратурные формулы интерполяционного типа для приближенного вычисления интегралов типа Коши

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{\phi(t)}{t-z}dt, \qquad (1)$$

$$\Phi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{\phi(t)}{t-z}dt, \qquad (2)$$

на отрезке $[-1,1]$ с весом Якоби, где z не принадлежит отрезку $[-1,1]$ и $\phi(t)$ достаточно гладкая функция.

В интеграле (1) для построения квадратурной формулы заменим плотность $\phi(t)$ ее интерполяционным многочленом

$$L_n(\phi,t)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{C_n(t)}{(t-x_j)C_n'(x_j)}\phi(x_j), \qquad (3)$$

где $C_n(t)=\frac{\cos(\frac{2n+1}{2}\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})}-$ ортогональные многочлены на отрезке [-1,1] с данной весовой функцией ($\theta=\arccos t$), $x_j=\cos\frac{(2j-1)}{2n+1}\pi-$ нули многочлена $C_n(t)$.

Воспользуемся формулой обращения[1]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{C_n(t)}{t-z}dt=\frac{i(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}}(1+z-\sqrt{z^2-1}),$$

где под $\sqrt{z^2-1}$ подразумевается фиксированная ветвь, однозначная в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1,1]$ действительной оси и принимающая на $(1,\infty)$ действительные значения [3].

[1]Россия, Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А.

После вычисления соответствующих коэффициентов получим следующую квадратурную формулу

$$\Phi_1(z) \approx \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}}{z-x_j} \cos\frac{2j-1}{2(2n+1)}\pi\mu_j(z)\varphi(x_j), \quad (4)$$

$$\mu_j(z) = \frac{2i(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}}(1+z-\sqrt{z^2-1}) - 2iS_n(x_j),$$

где $S_n(t) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}-$ ортогональные многочлены на отрезке [-1,1] с весовой функцией $p(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$, а $\bar{x_j} = \cos\frac{2j}{2n+1}\pi-$ нули многочлена $S_n(t)$.

Аналогично строится квадратурная формула для интеграла (2)

$$\Phi_2(z) \approx \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}\sqrt{1-\bar{x_j}^2}}{z-\bar{x_j}} \sin\frac{j\pi}{2n+1}\bar{\mu_j}(z)\varphi(\bar{x_j}), \quad (5)$$

$$\bar{\mu_j}(z) = \frac{2i(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}}(1+z+\sqrt{z^2-1}) + 2iC_n(\bar{x_j}).$$

Для квадратурных формул (4), (5) была получена следующая оценка погрешности

$$|R_n(\phi,t)| < \frac{\varepsilon}{4\rho},$$

где $\varepsilon = \max\limits_{t\in[-1,1]} \frac{|\phi^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|\omega(t)|, \quad \min\limits_{t\in[-1,1]} |t-z| > \rho.$

Вычисления многочисленных интегралов показывают эффективность метода.

Литература

1. *Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю., Бесаева З. В.* 1. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов с весовыми функциями // Владикавказский математический журнал. —2011.—Т.3.—вып. 2.—С. 56–63.
2. *Ахиезер Н. И.* О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. Сер. Матем. —1945—Т.9—є4.—С. 275–290.
3. *Пыхтеев Г. Н.* Точные методы вычисления интегралов типа Коши.Из-во "Наука Новосибирск. —1980.—120с.