ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л. Х. Гадзова[1]

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}u(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i D_{0x}^{\alpha_i}u(x)=f(x),\quad 0<x<1, \tag{1}$$

где $\alpha>0$, $\alpha\in]n-1,n]$, $n\in\mathbb{N}$; $\alpha>\alpha_1>\alpha_2>...>\alpha_m$; $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,...,m$; $D_{0x}^{\beta}u(x)$ оператор дробного интегро-дифференцирования порядка β в смысле Римана-Лиувилля [1, с. 9] по переменной x.

Регулярным решением уравнения (1) называем функцию $u=u(x)$, такую, что $u(x)\in L(0,1)$, $D_{0x}^{\alpha-n}u(x)\in C^n(0,1)$; $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1) для всех $0<x<1$.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $(0,1)$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to 0}(\ell^k u)(x)=a_k,\ k=\overline{1,p}, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 1}D_{0x}^{\mu_j}u(x)=b_j,\ j=\overline{1,q}, \tag{3}$$

где $p+q=n$ при $n\geqslant 2$, $\mu_j\leqslant 0$, a_k,b_j – заданные вещественные числа,

$$(\ell^k u)(x)=D_{0x}^{\alpha-k}u(x)-\sum_{i=1}^{M(k)}\lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-k}u(x),$$

$$M(k)=\begin{cases}0, & \alpha_i<\alpha-n+k,\\ \max\{i:\alpha_i-k\geqslant\alpha-n\}, & \alpha_i\geqslant\alpha-n+k.\end{cases}$$

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего группу младших членов с производными Римана-Лиувилля исследовалась в работе [2]. В монографии [1] даны постановки видоизмененных задач Коши и Неймана для уравнения второго порядка с дробной производной порядка

[1]Россия, Нальчик, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

$\alpha \in [1, 2]$. В работах [3] и [4] исследовалась начальная задача для уравнения (1). Краевая задача для уравнения (1) была изучена в работе [5]. В данной работе построено явное представление решения краевой задачи для уравнения (1) и найдено условие однозначной разрешимости.

Основным результатом работы является следующая

Теорема: *1) Пусть $f(x) \in C(0,1) \cap L(0,1)$ и выполнено условие*

$$\triangle = \det ||A_{ij}|| \neq 0. \tag{4}$$

Тогда функция

$$u(x) = \int\limits_0^1 f(t)Q(x,t)dt + \sum_{k=1}^{p} a_k \left[(-1)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} Q(x,t) \right]_{t=0} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} b_j \left[(-1)^{j-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{j-1} Q(x,t) \right]_{t=1} \tag{5}$$

является регулярным решением задачи (1) - (3).
2) Решение задачи (1) - (3) единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

Здесь $Q(x,t)-$ функция Грина задачи (1) - (3).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. *Нахушев А.М.* Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 308–311.
3. *Псху А.В.* К теории задачи Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2009. Т. 11, № 1. С. 61–65.
4. *Псху А.В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сборник. 2011. Т. 200, № 4. С. 111–122.
5. *Гадзова Л.Х.* Краевая задача для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13, № 1. С. 47–49.