ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Шарапудинов Т. И.[1]

[1] *Отдел функционального анализа, Южный математический институт, Владикавказского научного центра РАН и РСО-А; Владикавказ, Россия.* sharapudinov@gmail.com

В этой работе мы рассмотрим предельные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на двумерной равномерной сетке $\Omega_N^2 = \Omega_N \times \Omega_N$. Рассмотрим дискретную функцию f вида $f : \Omega_N^2 \to \mathbf{R}$ и представим ее в виде ряда Фурье

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{k,l}^{\alpha,\beta} \tau_k^\alpha(x) \tau_l^\beta(y), \tag{1}$$

где $\alpha, \beta > -1$,

$$f_{k,l}^{\alpha,\beta} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mu^\alpha(i) \mu^\beta(j) f(i,j) \tau_k^\alpha(i) \tau_l^\beta(j). \tag{2}$$

Нас интересует предельное положение ряда (1) при $\alpha, \beta \to -1$. Ряд, полученный из (1) в результате почленного предельного перехода при $\alpha, \beta \to -1$ будем называть двумерным предельным рядом по полиномам Чебышева, ортогональным на сетке Ω_N^2.

Осуществляя серию преобразований находим

$$f(x,y) = \frac{f(0,0) + f(N-1,0) + f(0,N-1) + f(N-1,N-1)}{4} +$$

$$\frac{f(N-1,0) - f(0,0) - f(0,N-1) + f(N-1,N-1)}{4} \left(\frac{2x}{N-1} - 1 \right) +$$

$$\frac{f(0,N-1) - f(0,0) - f(N-1,0) + f(N-1,N-1)}{4} \left(\frac{2y}{N-1} - 1 \right) +$$

$$\frac{f(0,0) - f(N-1,0) - f(0,N-1) + f(N-1,N-1)}{4} \times$$

$$\left(\frac{2x}{N-1}-1\right)\left(\frac{2y}{N-1}-1\right)+$$

$$\frac{x(N-x-1)}{N(N-1)}\sum_{k=0}^{N-3}\left(a_k+b_k\left(\frac{2y}{N-1}-1\right)\right)\tau_k^1(x-1,N-2)+$$

$$\frac{y(N-y-1)}{N(N-1)}\sum_{l=0}^{N-3}\left(c_l+d_l\left(\frac{2x}{N-1}-1\right)\right)\tau_l^1(y-1,N-2)+$$

$$\frac{x(N-x-1)y(N-y-1)}{N^2(N-1)^2}\sum_{k=0}^{N-3}\sum_{l=0}^{N-3}\overline{f}_{k,l}\tau_k^1(x-1,N-2)\tau_l^1(y-1,N-2), \tag{3}$$

где

$$a_k=\frac{8}{N-2}\sum_{i=1}^{N-2}\tau_k^1(i-1,N-2)\frac{s(i,0)+s(i,N-1)}{2},$$

$$b_k=\frac{8}{N-2}\sum_{i=1}^{N-2}\tau_k^1(i-1,N-2)\frac{s(i,N-1)-s(i,0)}{2}$$

$$c_l=\frac{8}{N-2}\sum_{j=1}^{N-2}\tau_l^1(j-1,N-2)\frac{h(0,j)+h(N-1,j)}{2},$$

$$d_l=\frac{8}{N-2}\sum_{j=1}^{N-2}\tau_l^1(j-1,N-2)\frac{h(N-1,j)-h(0,j)}{2},$$

$$\overline{f}_{k,l}=\frac{64}{(N-2)^2}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{N-2}\tau_k^1(i-1,N-2)\tau_l^1(j-1,N-2)\overline{f}(i,j).$$

Рассмотрим частичные суммы предельного ряда (3) следующего вида

$$S_{n,m}(f)=S_{n,m}(f,x,y)=D(x,y)+$$

$$\frac{x(N-x-1)}{N(N-1)}\sum_{k=0}^{m-2}\left(a_k+b_k\left(\frac{2y}{N-1}-1\right)\right)\tau_k^1(x-1,N-2)+$$

$$\frac{y(N-y-1)}{N(N-1)}\sum_{l=0}^{m-2}\left(c_l+d_l\left(\frac{2x}{N-1}-1\right)\right)\tau_l^1(y-1,N-2)+$$

$$\frac{x(N-x-1)y(N-y-1)}{N^2(N-1)^2}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-2}\overline{f}_{k,l}\tau_k^1(x-1,N-2)\tau_l^1(y-1,N-2), \tag{4}$$

где

$$D(x,y)=\frac{f(0,0)+f(N-1,0)+f(0,N-1)+f(N-1,N-1)}{4}+$$
$$\frac{f(N-1,0)-f(0,0)-f(0,N-1)+f(N-1,N-1)}{4}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right)+$$
$$\frac{f(0,N-1)-f(0,0)-f(N-1,0)+f(N-1,N-1)}{4}\left(\frac{2y}{N-1}-1\right)+$$
$$\frac{f(0,0)-f(N-1,0)-f(0,N-1)+f(N-1,N-1)}{4}\times$$
$$\left(\frac{2x}{N-1}-1\right)\left(\frac{2y}{N-1}-1\right). \tag{5}$$

В ходе преобразований мы показали, что при $n\leqslant m$

$$S_{n,m}(f)=S_{n,m}(f,x,y)=\lim_{\beta\to-1}\lim_{\alpha\to-1}S_{n,m}^{\alpha,\beta}(f,x,y), \tag{6}$$

где $S_{n,m}^{\alpha,\beta}(f,x,y)$ – частичные суммы двойного ряда (1) (или, что то же, ряда (3)) следующего вида

$$S_{n,m}^{\alpha,\beta}(f,x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}f_{k,l}^{\alpha,\beta}\tau_k^{\alpha}(x)\tau_l^{\beta}(y)+$$
$$\sum_{k=n+1}^{m}\sum_{l=0}^{1}f_{k,l}^{\alpha,\beta}\tau_k^{\alpha}(x)\tau_l^{\beta}(y)+\sum_{l=n+1}^{m}\sum_{k=0}^{1}f_{k,l}^{\alpha,\beta}\tau_k^{\alpha}(x)\tau_l^{\beta}(y). \tag{7}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-00191-а).

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.—Махачкала: Издательство ДНЦ РАН, 2004.—С. 276.